

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Vincoli cosmologici dalle distorsioni geometriche della funzione di correlazione

Tesi di laurea

Presentata da:
Matteo Gaspari

Relatore:
Lauro Moscardini

Correlatore:
Federico Marulli
Alfonso Veropalumbo

*In the Age of Ancients the world was unformed, shrouded by fog.
A land of gray crags, archtrees and everlasting dragons.
But then there was fire, and with fire came Disparity.
Heat and cold, life and death, and of course light and dark.
Thus began the Age of Fire. But soon the flames will fade
and only Dark will remain.
Even now there are only embers, and man sees not light,
but only endless nights.
- Dall'introduzione a Dark Souls*

Indice

Introduzione	1
1 Dagli spazi massimamente simmetrici alle equazioni di Friedmann	5
1.1 La metrica di Robertson-Walker	6
1.1.1 Spazi massimamente simmetrici	6
1.1.2 Metrica di uno spazio massimamente simmetrico	9
1.1.3 Spazi con sottospazi massimamente simmetrici	10
1.1.4 Fattore di scala, costante di Hubble, redshift cosmologico	12
1.2 Le equazioni di Friedmann	15
1.3 L'universo di Einstein e l'introduzione della Costante Cosmologica	17
1.4 Il parametro di densità Ω	19
1.5 Andamento temporale del fattore di scala	24
1.5.1 L'universo piatto o di Einstein-De Sitter	24
1.5.2 Universi non piatti, ad alto z	27
1.5.3 Universo a curvatura positiva	27
1.5.4 Universo a curvatura negativa	28
2 Crescita delle perturbazioni di densità	29
2.1 Teoria di Jeans per universi statici	30
2.2 Teoria di Jeans per universi in espansione	33
2.2.1 Al di fuori dell'orizzonte cosmologico	34
2.2.2 All'interno dell'orizzonte cosmologico	35
2.3 Massa di Jeans	40
2.3.1 Massa di Jeans e meccanismi di dissipazione per la materia oscura	41
2.3.2 Massa di Jeans e meccanismi di dissipazione per la materia barionica	44
2.4 Crescita non lineare delle perturbazioni di densità	45
2.5 <i>Clustering</i> : funzione di correlazione a due punti	47

2.5.1	Spettro di potenza della materia oscura	49
2.5.2	Oggetti come traccianti del campo di densità	51
2.5.3	Stimatori della funzione di correlazione	58
2.6	Funzioni di correlazione agli ordini superiori	59
3	Il test di Alcock-Paczynski	61
3.1	La funzione di correlazione a due punti bidimensionale	62
3.1.1	Distorsioni dinamiche	62
3.1.2	Distorsioni geometriche	63
3.2	Il test di Alcock-Paczynski sulla funzione di correlazione bidimensionale	65
3.3	Implementare il test di Alcock-Paczynski	67
3.3.1	Metodo <i>standard</i>	67
3.3.2	Un metodo <i>alternativo</i>	68
4	La simulazione cosmologica <i>Magneticum</i>	71
4.1	Simulazioni <i>N</i> -body	72
4.1.1	Le equazioni del moto	72
4.1.2	Principali metodi d'implementazione per simulazioni <i>N</i> -body	73
4.2	Simulazioni idrodinamiche	76
4.2.1	Altri fenomeni, non prettamente idrodinamici	77
4.3	Descrizione dei cataloghi utilizzati	79
5	Codice utilizzato	85
5.1	Le librerie CosmoBolognaLib	86
5.2	Descrizione del metodo utilizzato	86
5.2.1	<i>Outline</i> generale del metodo	86
5.2.2	Preparazione dei cataloghi simulati	87
5.2.3	Trasformazione in coordinate comoventi	88
5.2.4	Creazione di un catalogo random	89
5.2.5	Conteggio delle coppie e calcolo della funzione di correlazione	90
5.2.6	Costruzione del modello	91
5.2.7	Determinazione della cosmologia che introduce le minori distorsioni geometriche	93
6	Risultati	95
6.1	Cataloghi di galassie	96
6.2	Cataloghi di AGN	110
6.3	Cataloghi di ammassi di galassie	124

6.4 Effetti della riduzione del numero di parametri liberi nella costruzione del modello	139
Conclusioni	144
Bibliografia	151
Ringraziamenti	157

Introduzione

Io allora vado. Ecco le chiavi di tutte le porte e di tutti i forzieri.

- Ulbabrab

Dalla teoria della Relatività Generale e dall'assunzione, osservativamente giustificata [39] [58], che l'universo sia omogeneo ed isotropo su scale sufficientemente grandi, si possono dedurre una metrica che descriva lo spaziotempo (metrica di Robertson-Walker) e le equazioni che descrivano l'evoluzione temporale dell'universo nel suo insieme (equazioni di Friedmann). La cosmologia è appunto lo studio del comportamento *globale* dell'universo e di come la sua evoluzione influenzi i fenomeni *locali*, come la formazione e l'evoluzione delle strutture cosmiche.

L'accurata determinazione dei parametri che costituiscono un modello cosmologico è quindi fondamentale per caratterizzare correttamente l'evoluzione dell'universo e per spiegare le sue caratteristiche osservabili: la sua espansione, l'esistenza delle fluttuazioni di temperatura della radiazione cosmica di fondo, la crescita e la distribuzione spaziale delle strutture collassate. L'attuale modello cosmologico [35] [51], detto Λ CDM, prevede che l'universo sia formato da tre componenti fondamentali: materia (divisa in barionica ed oscura), radiazione e la cosiddetta costante cosmologica (o Λ). Nel modello Λ CDM la materia oscura considerata è *fredda*, nel senso che la sua particella ha una massa tale da cessare d'essere relativistica prima del disaccoppiamento con la radiazione. Questo comporta un modello di formazione gerarchica delle strutture cosmiche, come verrà brevemente esposto in seguito.

Ognuna delle tre componenti che compongono l'universo contribuisce alla densità totale dell'universo e quindi alla sua geometria, che a sua volta determina il modo in cui lo spaziotempo si espande (o si contrae).

Per quanto riguarda questo lavoro di Tesi abbiamo studiato l'efficienza di un particolare metodo per la stima del parametro di densità della materia

(Ω_m) detto test di Alcock-Paczynski (AP test). Il metodo è stato applicato alla funzione di correlazione misurata sui cataloghi di galassie, AGN e ammassi di galassie prodotti dalla simulazione cosmologica idrodinamica *Magneticum* [20]. Il metodo considerato consiste nel misurare la funzione di correlazione a due punti bidimensionale espressa in funzione della separazione di due oggetti lungo la linea (r_{\parallel}) di vista e perpendicolarmente ad essa (r_{\perp}).

La funzione di correlazione descrive l'eccesso o il difetto probabilità rispetto ad una distribuzione omogenea di trovare due oggetti separati da una distanza comovente r (o, nel caso bidimensionale, separati dalle due distanze r_{\perp} e r_{\parallel}). L'assunzione di un modello cosmologico *errato* distorce le distanze in maniera differente lungo le due direzioni, introducendo delle distorsioni dette geometriche. In assenza di distorsioni dovute alla dinamica degli oggetti (distorsioni dinamiche) o all'assunzione di un modello cosmologico errato (distorsioni geometriche), il principio cosmologico di omogeneità e isotropia assicura che il segnale contenuto nella funzione di correlazione sia isotropo e le curve di isocorrelazione, di conseguenza, circolari. Questo permette di identificare, una volta modellate opportunamente le distorsioni dinamiche, il corretto valore dei parametri cosmologici, cioè quelli che non introducono nella funzione di correlazione bidimensionale alcuna distorsione geometrica.

Il vantaggio principale di questo metodo per la determinazione dei parametri cosmologici è che esso non poggia su altro che sull'assunzione che la funzione di correlazione sia isotropa, il che deriva direttamente dal principio cosmologico sul quale si fonda l'intero sistema d'equazioni alla base della cosmologia attuale (dalla metrica di Robertson-Walker alle equazioni di Friedmann).

Non è quindi necessaria alcuna assunzione aggiuntiva per effettuare l'AP test oltre alle assunzioni basilari sulle quali si basa lo studio della cosmologia. Inoltre, qualora si ottenesse una misura di Ω_m in altro modo, è possibile *invertire* il metodo ed utilizzarlo per testare l'isotropia dell'universo [39].

In questo lavoro di Tesi abbiamo applicato l'AP test a diversi cataloghi prodotti dalla simulazione *Magneticum*, seguendo lo stesso metodo utilizzato da Marulli et al. (2012) [40]. In particolare abbiamo studiato come l'efficienza del metodo nel riconoscere il *corretto* valore di Ω_m dipenda dal tipo di traccianti considerato, dal redshift d'osservazione e dai metodi di modellizzazione delle distorsioni dinamiche.

La struttura dell'elaborato che presenta questo lavoro di Tesi si può riassumere come segue:

Capitolo 1 Verranno brevemente presentate le strutture matematiche che permettono di scrivere, assunto valido il principio cosmologico, la metrica di Robertson-Walker per l'universo quadri-dimensionale. Successivamente si provvederà ad osservare come il parametro di densità totale, Ω_{tot} , definisca la curvatura e l'espansione dell'universo.

Capitolo 2 Verrà qui presentata la teoria della crescita delle perturbazioni primordiali che danno luogo, oggi, alle strutture osservabili nell'universo. Successivamente si introdurrà il concetto di *clustering*, cioè il modo in cui le strutture si aggregano risentendo della reciproca attrazione gravitazionale e dell'espansione dell'universo, e si definirà la funzione di correlazione a due punti con la quale quantificare il *clustering* delle strutture.

Capitolo 3 Qui si discuteranno i diversi tipi di distorsione che possono modificare la forma, altrimenti circolare, delle curve di isocorrelazione della funzione di correlazione bidimensionale. In seguito verrà esposto il funzionamento dell'AP test e verranno illustrati due differenti modi di applicarlo utilizzando la funzione di correlazione come osservabile di geometria nota.

Capitolo 4 Dopo una breve introduzione di carattere generale al vasto argomento delle simulazioni numeriche, si descriveranno qui le principali caratteristiche dei cataloghi utilizzati e della simulazione *Magneticum*, da cui sono stati estratti.

Capitolo 5 In questo capitolo verrà descritto nel dettaglio il metodo seguito in questo lavoro di Tesi per implementare numericamente l'AP test nel codice utilizzato per analizzare i cataloghi descritti nel capitolo precedente.

Capitolo 6 Discuteremo in quest'ultimo capitolo i risultati ottenuti, divisi per i vari traccianti considerati (galassie, AGN e ammassi di galassie). Vedremo infine come sia possibile migliorare l'efficacia del metodo attraverso assunzioni esterne sulla modellizzazione delle distorsioni dinamiche che permettano di ridurre il numero di gradi di libertà.

Capitolo 1

Dagli spazi massimamente simmetrici alle equazioni di Friedmann

Let me tell you a story, about a spaniard named Vasquez...

- Capitano James McGrow,
meglio noto come Capitano James Flint

Lo scopo principale di questo primo capitolo sarà definire il parametro di densità Ω ed analizzarne, in breve, le principali caratteristiche e l'effetto sull'espansione dell'universo.

Si inizierà trattando brevemente le strutture matematiche che, unite al principio cosmologico di omogeneità e isotropia, ci permetteranno di ricavare la metrica di Robertson-Walker: gli spazi massimamente simmetrici. Da sole considerazioni di carattere geometrico otterremo quindi una metrica consona a descrivere lo spaziotempo cosmologico dalla quale sarà possibile estrarre le equazioni di Friedmann che determinano il comportamento dell'universo su grande scala.

Buona parte delle dimostrazioni di questo capitolo, che è da considerarsi un'introduzione di carattere generale al problema della descrizione dello spaziotempo cosmologico, è omessa. Si fa comunque riferimento, anche quando non esplicitato, a *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity* di Steven Weinberg [70] nel quale ogni dimostrazione è affrontata rigorosamente.

1.1 La metrica di Robertson-Walker

1.1.1 Spazi massimamente simmetrici

Nell'ambito della Relatività Generale descrivere una simmetria non è, almeno concettualmente, immediato quanto lo sarebbe in uno spazio euclideo ed in fisica classica. Il problema risiede nell'impossibilità di utilizzare un sistema di coordinate per identificare una simmetria e quindi una metrica, visto che in tal caso sarebbe necessario introdurre a priori una metrica che fissi quello specifico sistema di coordinate sulle quali studiare la succitata simmetria.

Sarà in primo luogo fondamentale, quindi, definire un linguaggio opportuno che ci permetta di descrivere le simmetrie senza alcuna scelta di una particolare metrica. Iniziamo quindi dalla seguente

Definizione 1 *Una metrica $g_{\mu\nu}$ si dice essere form-invariante nell'intorno di un punto x e rispetto ad una trasformazione di coordinate $x \rightarrow x'$ se la metrica trasformata $g'_{\mu\nu}$ è funzione del suo argomento x' allo stesso modo in cui $g_{\mu\nu}$ lo era del suo argomento x .*

Siamo interessati a studiare metriche che non siano form-invarianti soltanto localmente, quindi vogliamo che siano form-invarianti rispetto ad una data trasformazione e rispetto ad ogni punto dello spazio da esse descritto. La definizione di cui sopra dev'essere quindi valida per ogni punto y dello spazio considerato, e cioè dev'essere verificato che $g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \forall y$.

Se ora consideriamo l'usuale trasformazione di coordinate per un tensore generico

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x),$$

otteniamo, imponendo la form-invarianza,

$$g_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (1.1)$$

Una trasformazione di coordinate che soddisfa tale condizione è detta *isometria*. In generale le soluzioni dell'equazione (1.1) possono essere molto complicate da scrivere esplicitamente, ma il calcolo può essere sensibilmente semplificato considerando una trasformazione infinitesima $x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x)$ con $|\varepsilon| \ll 1$.

Inseriamo ora questa trasformazione nell'equazione (1.1), fermandoci al prim'ordine in ε , per ottenere la definizione di *vettore di Killing*: un vettore che genera un'isometria (cioè, per quanto ci riguarda, una simmetria) in

uno spazio metrico form-invariante. La parte sinistra dell'equazione (1.1) diventa

$$g_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x + \varepsilon\xi(x)) = g_{\mu\nu}(x) + \varepsilon\xi^\rho(x) \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho} + O(\varepsilon^2),$$

mentre per la parte destra è necessario un passaggio intermedio:

$$x' = x + \varepsilon\xi(x) \rightarrow x = x' - \varepsilon\xi(x) \rightarrow x = x' - \varepsilon\xi(x' - \varepsilon(x - \varepsilon\xi(x') + O(\varepsilon^2))),$$

da cui

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\rho - \varepsilon \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x'^\mu}$$

e analogamente

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\sigma - \varepsilon \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\nu}.$$

Quindi

$$g_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x)$$

diventa (omettendo le dipendenze per praticità)

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} + \varepsilon\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \varepsilon g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma - \varepsilon g_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + O(\varepsilon^2) \\ \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma} \partial_\nu \xi^\sigma + g_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho &= 0. \end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente abbassare gli indici per passare alle coordinate covarianti e ottenere

$$\begin{aligned} \partial_\rho \xi_\sigma + \partial_\sigma \xi_\rho - 2\xi_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu &= 0 \\ D_\rho \xi_\sigma + D_\sigma \xi_\rho &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

nella quale D_μ è la derivata covariante fatta rispetto alla μ -esima componente e Γ è la connessione affine o simbolo di Christoffel definita da $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta})$.

Ora, ogni vettore che soddisfi l'equazione (1.2) è detto *vettore di Killing* della metrica $g_{\mu\nu}$ e, per com'è stata ottenuta la condizione che lo definisce, esso descrive un'isometria in uno spazio metrico form-invariante. Il problema di determinare tutte le isometrie, in generale, o tutte le isometrie infinitesime, in particolare, è ora ridotto al problema di determinare tutti i vettori di Killing di una data metrica.

È possibile dimostrare che ogni combinazione lineare a coefficienti costanti di vettori di Killing è ancora un vettore di Killing: tali vettori formano quindi uno spazio vettoriale che, si potrebbe dimostrare, ha dimensione massima $\frac{N(N+1)}{2}$, dove N è la dimensionalità dello spazio di partenza.

In \mathbb{R}^3 , ad esempio, sarà possibile avere al massimo 6 vettori di Killing

indipendenti, ognuno dei quali legato ad una diversa isometria. Possiamo quindi procedere con la seguente

Definizione 2 *Uno spazio metrico la cui metrica ammetta il massimo numero possibile di vettori di Killing indipendenti si dirà essere massimamente simmetrico.*

Definito ora cos'è uno spazio metrico massimamente simmetrico, considerando quante isometrie infinitesime indipendenti esso ammetta, possiamo procedere con alcune ulteriori considerazioni.

Definizione 3 *Uno spazio metrico si dice essere omogeneo se esistono isometrie infinitesime che trasportano ogni punto in ogni altro nelle immediate vicinanze.*

Se uno spazio metrico è omogeneo, quindi, la metrica che lo descrive deve ammettere vettori di Killing che in ogni punto possano assumere qualsiasi valore. In particolare, in uno spazio metrico N -dimensionale, questo genera N vettori di Killing indipendenti. Fondamentalmente ciò si traduce in N simmetrie per traslazione.

Definizione 4 *Uno spazio metrico si dice essere isotropo, rispetto ad un punto y , se esistono isometrie infinitesime indipendenti tali da lasciare invariato il punto y .*

In termini di vettori di Killing richiedere che uno spazio metrico sia isotropo equivale a chiedere che esistano vettori di Killing per i quali $\xi^\lambda(y) = 0$ e per i quali la derivata prima possa assumere qualunque valore. Ciò genera, in uno spazio N -dimensionale, $\frac{N(N-1)}{2}$ vettori indipendenti e cioè $\frac{N(N-1)}{2}$ simmetrie per rotazione.

Già da ora è possibile notare come richiedere che uno spazio metrico sia omogeneo e isotropo equivalga ad imporre che questo sia massimamente simmetrico, dato che le due definizioni scritte sopra generano, combinate, $N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$ vettori di Killing indipendenti.

Ci sono due ulteriori proprietà degli spazi massimamente simmetrici che sarebbe possibile dimostrare e che, pur non strettamente collegate allo scopo di questa trattazione, vengono ugualmente riportate per completezza.

Teorema 1 *Uno spazio metrico isotropo rispetto ad ogni suo punto è anche omogeneo.*

Teorema 2 *Uno spazio metrico massimamente simmetrico è necessariamente isotropo rispetto ad ogni suo punto¹.*

1.1.2 Metrica di uno spazio massimamente simmetrico

A questo punto abbiamo quasi tutti gli elementi di partenza per caratterizzare le proprietà della metrica di uno spazio massimamente simmetrico. In primo luogo è bene osservare che il Tensore di Riemann

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} \Gamma_{\delta\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\delta}^{\lambda} \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha}$$

può essere scritto nel caso di una metrica massimamente simmetrica nella forma più semplice

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}),$$

nella quale $R_{\mu\beta\gamma\delta} = g_{\mu\alpha}R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ e K è una costante detta costante di curvatura. Di conseguenza è possibile ricavare, in termini di K , anche il tensore di Ricci

$$R_{\alpha\beta} = K(N - 1)g_{\alpha\beta}.$$

È possibile dimostrare che dati due diversi spazi massimamente simmetrici, ma entrambi con lo stesso valore della costante di curvatura K , è sempre possibile identificare una trasformazione di coordinate che trasformi l'uno nell'altro. In realtà c'è un'ulteriore condizione da considerare perché ciò sia sempre verificato, che riguarda la traccia del tensore metrico, come esposto nel seguente

Teorema 3 *Date due diverse metriche massimamente simmetriche con la stessa traccia T , che descrivano due spazi con la stessa dimensione N e stessa costante di curvatura K , è sempre possibile identificare una trasformazione di coordinate che trasporti l'una nell'altra.*

¹Questo teorema risulta particolarmente interessante perché ci permette di caratterizzare dal punto di vista geometrico uno spazio del quale non si hanno, in linea di principio, informazioni a priori. Si può infatti ragionare come segue: se dalla metrica che descrive tale spazio possiamo esplicitare, per via analitica, $\frac{N(N+1)}{2}$ vettori di Killing indipendenti, allora lo spazio sarà massimamente simmetrico. Ma allora il Teorema 2 ci conferma che lo spazio dev'essere necessariamente omogeneo e isotropo, restituendoci una caratterizzazione geometrica a partire solamente da un'analisi della dimensionalità del campo di Killing della metrica considerata.

Ciò significa che metriche con la stessa dimensione N , stessa costante di curvatura K e stessa traccia T descrivono in realtà lo stesso spazio. Per evitare dubbi considereremo quindi soltanto metriche con la stessa traccia, proprietà d'ora in poi sottintesa.

A questo punto possiamo esplicitare la generica metrica di uno spazio massimamente simmetrico in funzione della sua costante di curvatura. A tale scopo consideriamo uno spazio M -dimensionale, che scomponiamo in $(N + 1)$ dimensioni, di coordinate $(x^0, x^1, \dots, x^M) = (x^0, x^1, \dots, x^N, z)$ la cui metrica sarà

$$-d\tau^2 \equiv g_{AB}dx^A dx^B = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + K^{-1}dz^2,$$

dove $A, B : 0 \rightarrow M$, $\mu\nu : 0 \rightarrow N$ e $C_{\mu\nu}$ è una matrice costante simmetrica $N \times N$.

Ora consideriamo un sottospazio non euclideo di dimensione N dello spazio di partenza, ad esempio la pseudosfera di equazione

$$KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1.$$

In questa superficie

$$dz^2 = \frac{K^2(C_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)^2}{z^2} = \frac{K^2(C_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)^2}{1 - KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}$$

e quindi

$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{K(C_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)^2}{1 - KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}. \quad (1.3)$$

La matrice metrica per questo spazio massimamente simmetrico di costante di curvatura K è quindi

$$g_{\mu\nu}(x) = C_{\mu\nu} + \frac{K}{(1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma)} C_{\mu\lambda}x^\lambda C_{\nu\delta}x^\delta. \quad (1.4)$$

1.1.3 Spazi con sottospazi massimamente simmetrici

In molti casi di rilevanza fisica si ha a che fare con spazi metrici che non sono massimamente simmetrici nel loro insieme ma che possono essere decomposti in sottospazi massimamente simmetrici. Un esempio potrebbe essere una collezione di calotte sferiche, omogenee e isotrope nelle variabili ϑ e φ e quindi massimamente simmetriche, stratificate sulla terza variabile: il raggio.

In generale avremo quindi a che fare con uno spazio N -dimensionale decomponibile in sottospazi massimamente simmetrici M -dimensionali

(ovviamente con $M < N$). Possiamo identificare ogni punto del sottospazio considerato utilizzando le coordinate locali u^i , e distinguere questi sottospazi l'uno dall'altro utilizzando le rimanenti $(N - M)$ coordinate v^a , con $a : 0 \rightarrow (N - M)$ e $i : 0 \rightarrow M$.

Richiedere che un sottospazio di dimensione M sia massimamente simmetrico equivale a richiedere, in maniera del tutto analoga a quanto visto in precedenza, che esso ammetta $\frac{M(M+1)}{2}$ vettori di Killing indipendenti. Sarebbe possibile a questo punto dimostrare il seguente fondamentale

Teorema 4 *In uno spazio metrico N -dimensionale composto da sottospazi massimamente simmetrici M -dimensionali è sempre possibile scegliere un set di coordinate, u^i per i sottospazi e v^a per le rimanenti dimensioni, in modo tale che la metrica dell'intero spazio sia separabile. E cioè che si possa scrivere nella forma*

$$-d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab}(v) dv^a dv^b + f(v) \tilde{g}_{ij}(u) du^i du^j,$$

nella quale $g_{ab}(v)$ e $f(v)$ sono funzioni delle sole coordinate v , mentre $\tilde{g}_{ij}(u)$ è una funzione delle sole coordinate u .

Nei casi di rilevanza fisica, per i quali gli autovalori della sottomatrice metrica \tilde{g}_{ij} hanno tutti lo stesso segno, ricadiamo nel caso descritto nel teorema 3 e quindi possiamo riscrivere la metrica 1.3 nella forma

$$-d\tau^2 = g_{ab}(v) dv^a dv^b + f(v) \left\{ du^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right\}, \quad (1.5)$$

dove $f(v)$ è una funzione positiva e

$$k = \begin{cases} \frac{K}{|K|} & \text{per } K \neq 0 \\ 0 & \text{per } K = 0 \end{cases}.$$

A questo punto non ci resta che applicare i risultati ottenuti finora al caso che ci interessa, cioè lo spaziotempo cosmologico: è sufficiente, a tal proposito, metterne in evidenza il grado di simmetria.

Il *principio cosmologico* afferma che l'universo, su scale sufficientemente grandi (cioè oggi su scale maggiori delle centinaia di Mpc), è omogeneo e isotropo. Ogni punto dell'universo (a tempo fissato) è sostanzialmente identico ad ogni altro e questo evita il crearsi di posizioni e quindi di osservatori privilegiati. Ciò è giustificato dalla distribuzione spaziale delle galassie che prova l'omogeneità [58] e dalla radiazione cosmica di fondo che

prova la (quasi) isotropia² [66]. In quest'ottica possiamo considerare l'Universo come uno spazio 4-dimensionale formato da sottospazi 3-dimensionali omogenei e isotropi (e quindi come visto in precedenza massimamente simmetrici) stratificati sulla rimanente dimensione temporale.

Tutto quanto detto finora è dunque valido nel caso d'interesse e, per ottenere la metrica di Robertson-Walker che descrive lo spaziotempo, è sufficiente imporre che localmente siano valide le coordinate spaziali euclidee e poi passare alle coordinate comoventi

$$\begin{cases} u^1 = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ u^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ u^3 = r \cos \vartheta \\ t = c \int \sqrt{g(v)} dv \end{cases}$$

che, inserite nell'equazione (1.5), danno finalmente

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d^2\vartheta + \sin^2\vartheta d^2\varphi) \right), \quad (1.6)$$

nella quale k , secondo la definizione precedente, può valere ± 1 o 0 e r è un parametro (spaziale) adimensionale: tutta la dimensionalità è inclusa nel cosiddetto fattore di scala $a(t) = \sqrt{f(v(t))}$.

1.1.4 Fattore di scala, costante di Hubble, redshift cosmologico

Prima di procedere oltre e definire le equazioni di Friedmann è interessante fermarsi e trarre alcune preliminari considerazioni sul concetto di distanza. In ambito cosmologico tale concetto ha una definizione ed un significato meno ovvi da quelli che potrebbe assumere in uno spazio euclideo, ed ha a che fare con il significato fisico-matematico del fattore di scala $a(t)$. L'intero ragionamento che ci ha portato a definire la metrica (1.6) è basato sul principio cosmologico e sulla Relatività Generale. Ciò comporta che il tempo non è invariante, come in fisica classica, complicando a volte il ragionamento. D'ora innanzi non sarà sempre opportuno mantenere

²In realtà provare l'omogeneità e l'isotropia dell'universo non è immediato, né concettualmente né osservativamente, come evidenziato da Maartens (2011) [39]: non è possibile infatti provare direttamente l'omogeneità dei sottospazi massimamente simmetrici a tempo fissato poiché non possiamo, osservativamente, separare le coordinate spaziali da quella temporale.

esplicite le dipendenze temporali, che appesantirebbero inutilmente la notazione, ed esse verranno quindi spesso omesse. Si provvederà a mantenerle nel caso in cui si intenda dare importanza alla dipendenza stessa o nel caso in cui ci si stia riferendo ad un tempo specifico. Il tempo dell'osservatore, ad esempio, sarà sempre esplicitato come t_0 o con un pedice 0 sulla relativa quantità.

Iniziamo definiamo la distanza propria $d_{pr}(t)$ tra due oggetti come la distanza fisica tra due punti (che supponiamo allineati lungo la linea di vista dell'osservatore, quindi con $d\vartheta = d\varphi = 0$) ad un dato tempo t . Avremo quindi

$$d_{pr}(r) = \int_0^r a(t) \frac{dR}{\sqrt{1 - kR^2}} = af(r)$$

con

$$f(r) = \begin{cases} r & \text{per } k = 0 \\ \arcsin(r) & \text{per } k = 1 \\ \operatorname{arcsinh}(r) & \text{per } k = -1 \end{cases} .$$

Questa definizione di distanza non è immediata da visualizzare³ ma ci permette di comprendere meglio il significato del fattore di scala $a(t)$. Per costruire la metrica di Robertson-Walker abbiamo scomposto lo spaziotempo in sottospazi massimamente simmetrici stratificati l'uno sull'altro dalla quarta variabile, dal significato temporale. La posizione di un oggetto, per esempio una galassia, a riposo in uno di questi sottospazi è data dal set di variabili adimensionali r , ϑ , φ (con r costante dato che consideriamo oggetti a riposo).

Questo tuttavia non tiene conto dell'evoluzione temporale dei sottospazi massimamente simmetrici, immersi in uno spazio quadridimensionale, nei quali quel set di variabili adimensionali è definito. Tale evoluzione è rappresentata dal fattore di scala, che quindi descrive l'eventuale espansione o contrazione degli spazi massimamente simmetrici stessi. D'ora in avanti utilizzeremo il fattore di scala esattamente in questo modo: per descrivere il comportamento temporale dell'universo nel suo insieme.

È utile, prima di procedere oltre, definire anche la distanza comovente d_c , cioè la distanza propria tra due punti a $t = t_0$:

$$\begin{aligned} d_c(r) &\equiv d_{pr}(r)|_{t=t_0} \\ &= a_0 f(r) \\ &= \frac{a_0}{a(t)} d_{pr}(r). \end{aligned}$$

³Questo modo di definire la distanza è talmente poco immediato che Steven Weinberg parla della distanza propria come di una *sorta di cospirazione cosmica* [70].

Essendo la distanza propria tra due oggetti una quantità dipendente dal tempo, attraverso il fattore di scala, ci si può chiedere quale sia la velocità radiale con la quale un punto a riposo si muove nello spaziotempo, che sarà

$$\begin{aligned} v_{rad} &\equiv \frac{d}{dt}d_{pr} \\ &= \dot{a}(t)f(r) \\ &= H(t)d_{pr}, \end{aligned}$$

dove $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ è la *costante di Hubble*⁴. Come si può osservare anche due corpi perfettamente a riposo possono avere una velocità radiale d'allontanamento (o avvicinamento) diversa da zero e ciò dipende dal fatto che essi sono sì a riposo nel proprio sottospazio, ma che questo evolve nel tempo.

Tale velocità è inoltre proporzionale alla distanza propria con fattore di proporzionalità $H(t)$ e possiamo utilizzare questa relazione per misurare distanze cosmologiche a partire dall'osservabile (ben più semplice da osservare) v_{rad} . Tale moto degli oggetti immersi nello spaziotempo in evoluzione genera infatti una sorta di effetto Doppler⁵ che modifica la posizione delle componenti spettrali dell'oggetto considerato di un fattore $z = \Delta\lambda/\lambda$ chiamato redshift cosmologico.

La relazione che lega il redshift al fattore di scala è la seguente

$$1 + z = \frac{a_0}{a}.$$

A questo punto abbiamo ottenuto una relazione tra redshift e distanza ed un'altra tra redshift e fattore di scala. Parlare di z , di a o di distanza è quindi del tutto equivalente. Ma non solo: data la finitezza della velocità della luce, osservare lontano (o, in casi come questo, *molto lontano*) significa anche osservare indietro nel tempo. Di frequente utilizzeremo dunque il redshift (e quindi a) come un indicatore di distanza temporale riferendoci ad eventi

⁴Come si può facilmente osservare $H(t)$ dipende esplicitamente dal tempo visto che $a(t)$ dipende dal tempo. Definirla una *costante* potrebbe dunque, in un certo senso a ragione, sollevare qualche perplessità. Ciò è tuttavia una sorta di non-problema puramente terminologico. Nella formulazione utilizzata finora abbiamo infatti tenuto ben separate le componenti spaziali e temporali dell'Universo 4-dimensionale. In questo senso H risulta essere effettivamente costante su ognuno dei sottospazi massimamente simmetrici sui quali vale il principio cosmologico, senza che ciò ne precluda una eventuale dipendenza dal tempo.

⁵Da notare che questo non è propriamente un effetto Doppler. Stiamo infatti considerando oggetti senza alcun moto proprio, a riposo in uno spazio che evolve nel tempo. È lo spazio in cui sono immersi ad espandersi (o contrarsi), come rappresentato dal fattore di scala $a(t)$.

accaduti in un certo momento del passato come ad eventi accaduti *ad un certo redshift*.

1.2 Le equazioni di Friedmann

Ora che abbiamo definito la metrica che descrive lo spaziotempo cosmologico possiamo ricavare le equazioni fondamentali che descrivono l'evolvere dell'Universo su grande scala ed in particolare l'andamento del fattore di scala $a(t)$ al variare di t (o di z). Per ricavare queste relazioni non ci resta che lavorare sull'equazione di Einstein riscrivendone opportunamente i vari termini:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

nella quale $S_{\mu\nu}$ è detto *termine sorgente* ed è definito come

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T.$$

Nel caso della metrica di Robertson-Walker (1.6) le componenti non nulle del tensore energia-impulso sono $T_{tt} = \rho(t)$ (dove ρ ha il significato di una densità) e $T_{ij} = \tilde{g}_{ij}P(t)$ (dove P ha il significato di una pressione). Pertanto si ottiene che il tensore energia-impulso completo $T_{\mu\nu}$ è quello di un gas perfetto ed è quindi della forma

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho \right) u_\mu u_\nu - \frac{P}{c^2} g_{\mu\nu}.$$

In particolare allora $T_{\mu\nu}$ obbedisce all'equazione $D_\nu T^{\mu\nu} = 0$ dalla quale segue la conservazione dell'energia⁶

$$a^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3 (P + c^2 \rho)].$$

Le componenti non nulle della connessione affine sono invece

$$\Gamma_{ij}^t = a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \quad e \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i$$

e di conseguenza il tensore di Ricci R_{ij} è non nullo soltanto in

$$R_{tt} = \frac{3\ddot{a}}{a}$$

⁶Per un gas di sola materia, per il quale $P = 0$, da quest'equazione segue immediatamente che $\rho a^3 = \text{cost}$ cioè che $\rho \sim a^{-3}$.

e in

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{ij} \\ &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\tilde{g}_{ij} \end{aligned}$$

dato che \tilde{R}_{ij} è il sottotensore di Ricci riferito alle sole componenti spaziali massimamente simmetriche quindi (per l'equazione (1.1.2)) $\tilde{R}_{ij} = -(N - 1)k\tilde{g}_{ij}$ con $N = 3$.

Ritornando ora all'equazione (1.7) abbiamo che il termine sorgente

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{P}{c^2}\right)g_{\mu\nu} + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)u_\mu u_\nu \end{aligned}$$

si scompone in

$$\begin{aligned} S_{tt} &= \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \\ S_{tj} &= 0 \\ S_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{P}{c^2}\right)a^2\tilde{g}_{ij}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Abbiamo solo due termini non nulli dell'equazione di Einstein che saranno quello solamente temporale e quello solamente spaziale. Il primo fornisce

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -8\pi G S_{tt} \\ \frac{3\ddot{a}}{a} &= -4\pi G \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right), \end{aligned}$$

da cui

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right)a; \tag{1.9}$$

mentre il secondo

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -8\pi G S_{ij} \\ -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)\tilde{g}_{ij} &= -8\pi G \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{P}{c^2}\right)a^2\tilde{g}_{ij} \\ a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2 &= 4\pi G \left(\rho - \frac{P}{c^2}\right)a^2 \end{aligned}$$

dalla quale, se sostituiamo \ddot{a} ottenuta nell'equazione (1.9), otteniamo

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2 - kc^2. \quad (1.10)$$

Le equazioni (1.9) e (1.10) sono le equazioni di Friedmann che descrivono il comportamento del fattore di scala $a(t)$ al variare del tempo e cioè l'evoluzione temporale della metrica dell'Universo.

1.3 L'universo di Einstein e l'introduzione della Costante Cosmologica

Dall'equazione (1.9) si può facilmente verificare che l'universo, se assunto composto di componenti ordinarie come materia o radiazione, ha un'accelerazione per lo meno negativa: la staticità è completamente esclusa. Infatti imporre la staticità equivale a richiedere che $\dot{a} = 0$ e quindi che anche $\ddot{a} = 0$. Tale condizione è verificata soltanto se $(\rho + 3P/c^2) = 0$ e cioè se sia densità che pressione sono identicamente nulle (ma questo significherebbe che l'universo è vuoto, in palese contrasto con le osservazioni⁷) oppure se hanno segni discordi. Trascurando il fantasioso caso di densità negativa, ciò significa richiedere che a densità positiva corrisponda una pressione negativa, anche questo in contrasto con ogni conoscenza sulle particelle note.

Negli anni '20 del secolo scorso era tuttavia opinione diffusa che l'universo dovesse essere statico. Per ovviare a tale evidente contraddizione lo stesso Einstein modificò arbitrariamente l'equazione che porta il suo nome inserendovi un altro termine costante denotato dalla lettera Λ . L'equazione (1.7) ora diventa

$$R_{\mu\nu} - \Lambda c^4 g_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

Non è complicato da questa equazione riottenere le equazioni di Friedmann previa la sostituzione di densità e pressione con quantità analoghe che includano Λ

$$\tilde{P} \equiv P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad \tilde{\rho} \equiv \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}.$$

A questo punto, essendo Λ poco più che un artificio matematico posto *ad hoc* per far tornare i conti, non abbiamo alcuna condizione sulla positività

⁷E con la nostra stessa esistenza.

di \tilde{P} e $\tilde{\rho}$ e possiamo imporre a piacere la staticità dell'universo. Imponiamo dunque $\dot{a} = 0$ e $\ddot{a} = 0$ nelle equazioni (1.9) e (1.10) e otteniamo

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= -\frac{3\tilde{P}}{c^2}, \text{ dalla (1.9)} \\ \tilde{\rho} &= \frac{3kc^2}{\pi Ga^2}, \text{ dalla (1.10)}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Richiedendo inoltre che l'universo sia composto esclusivamente di materia ordinaria (oltre a Λ che all'epoca non era considerata una vera e propria componente del cosmo) abbiamo l'ulteriore condizione $P = 0$ dalla quale segue

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \\ &= -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}.\end{aligned}$$

Unendo le due condizioni otteniamo

$$\frac{3\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2}$$

da cui segue immediatamente

$$\Lambda = \frac{k}{a^2}.$$

A questo punto possiamo riprendere la definizione di $\tilde{\rho}$, opportunamente rigirata, per ottenere

$$\begin{aligned}\rho &= \tilde{\rho} - \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \\ &= \frac{3kc^2}{8\pi Ga^2} - \frac{kc^2}{8\pi Ga^2} \\ &= \frac{kc^2}{4\pi Ga^2}.\end{aligned}$$

Ed essendo la densità della materia per definizione strettamente positiva, ne consegue che k dev'essere positivo e cioè uguale a 1 (essendo $k = K/|K|$ con K costante di curvatura). L'universo di Einstein, cioè statico e composto da sola materia, è quindi necessariamente ed incontrovertibilmente chiuso⁸.

⁸Si potrebbe dimostrare, per via del tutto analitica[70], che tale universo è anche instabile, e già questo sarebbe sufficiente a ridurre notevolmente qualunque interesse per un modello di questo genere. Interesse definitivamente cancellato in seguito da Hubble, che confermò nel 1929 l'espansione dell'universo [30] (poi rivelatasi attualmente addirittura accelerata [56]).

1.4 Il parametro di densità Ω

Accantonata l'idea di un universo statico, la cui inadeguatezza è confermata sia analiticamente che osservativamente [70] [30] [56], siamo ora interessati a studiare le equazioni di Friedmann da una differente prospettiva che ci permetta di introdurre il parametro di densità Ω , la cui determinazione è in un certo senso l'oggetto centrale di questa Tesi. È interessante comunque notare come la costante Λ sia rimasta nel formalismo pur avendo mutato drasticamente il suo significato. Nata come artificio matematico per aggirare il problema della non stazionarietà, ora Λ , detta Costante Cosmologica, è interpretata come una vera e propria componente dell'universo, a pressione negativa.

Riprendiamo, per cominciare, la seconda equazione di Friedmann (1.10):

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G a^2}{3} \left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \right) = -k c^2.$$

Dividendo tutto per a_0^2 otteniamo

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - \frac{8\pi G a^2}{3a_0^2} \left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \right) = -\frac{k c^2}{a_0^2}$$

e, calcolando il tutto a $t = t_0$ e ponendo $\rho_{0,crit} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ otteniamo

$$H_0^2 \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_{0,crit}} + \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,crit}} \right) \right] = -\frac{k c^2}{a_0^2}. \quad (1.12)$$

Definiamo quindi il parametro di densità Ω_0 (omettendone per ora le dipendenze temporali) come il rapporto tra la densità di una data componente dell'universo e la densità critica (entrambe calcolate a $t = t_0$)

$$\Omega_0 \equiv \frac{\rho_0}{\rho_{0,crit}}$$

e analogamente per la Costante Cosmologica

$$\Omega_{0,\Lambda} \equiv \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,crit}}.$$

Con tale definizione l'equazione (1.12) diventa semplicemente

$$H_0^2 [1 - (\Omega_0 + \Omega_{0,\Lambda})] = -\frac{k c^2}{a_0^2}. \quad (1.13)$$

Ricordando ora la definizione del parametro di curvatura k (legato alla costante di curvatura K dei sottospazi massimamente simmetrici dello spaziotempo) e che esso può assumere soltanto i tre valori $0, \pm 1$ è facile notare come il segno di k sia univocamente determinato dal valore di $\Omega_{tot} = \sum_i \Omega_i$ (o analogamente dal segno di $1 - \Omega_{tot}$). Ciò significa che la densità totale dell'universo (cioè la somma delle densità d'ogni elemento che lo costituisce rapportata ad un valore di soglia) determina univocamente la curvatura dello spazio. Universi particolarmente densi saranno più curvi di universi sottodensi e soltanto per un preciso valore di densità potremmo avere universi piatti. Nello specifico si avrà $k = 0$ e quindi universo piatto solo per $\Omega_{0,tot} = \sum_i \Omega_{0,i} = 1$ cioè per $\rho_0 = \rho_{0,crit}$. Analogamente $\Omega_{0,tot} > 1$ implicherà $k > 0$ (e cioè uguale a 1) e viceversa.

La determinazione del parametro di densità (totale) è quindi fondamentale per discriminare la geometria dell'universo e di conseguenza l'evoluzione temporale, come vedremo a breve, del fattore di scala $a(t)$. Prima di questo è tuttavia opportuno stimare la dipendenza di Ω dal tempo (o analogamente, come visto in precedenza, da a o a z), osservazione che porterà ad un'altra proprietà importante del parametro di densità e quindi della costante di curvatura. Osserviamo infatti che Ω dipende dal tempo sia attraverso la densità ρ che attraverso la densità critica definita come funzione della costante di Hubble e quindi del tempo. Iniziamo dalla densità.

Abbiamo già visto che le componenti dell'universo si comportano come gas perfetti, la loro densità dev'essere dunque legata alla pressione da

$$P = w\rho c^2,$$

con $w = 1/3$ per la radiazione, $w = 0$ per la materia (ordinaria od oscura non fa differenza) e $w = -1$ per la Costante Cosmologica o energia oscura⁹. Ora supponiamo, senza timore di perdita di generalità, che l'evoluzione temporale della densità delle componenti dell'universo segua trasformazioni adiabatiche e cioè obbedisca a

$$\begin{aligned} d(\rho c^2 a^3) &= -P da^3 \\ &= -w\rho c^2 da^3. \end{aligned}$$

⁹Ciò si vede facilmente dalle generalizzazioni ai concetti di densità e pressione effettuate all'inizio di questa sezione. È importante osservare che un coefficiente di proporzionalità negativo tra ρ e P è completamente al di fuori degli usuali limiti imposti dal senso comune e dalla fisica classica delle particelle ma non ha alcuna conseguenza pratica nella trattazione analitica del problema.

È ora sufficiente rimaneggiare quest'equazione per ottenere l'andamento con il tempo (implicito nel fattore di scala) della densità:

$$\begin{aligned} d(\rho a^3) &= -w \rho da^3 \\ a^3 d\rho &= -(1+w)\rho da^3 \end{aligned}$$

da cui integrando abbiamo

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \quad (1.14)$$

o, in termini di redshift tramite la relazione introdotta in precedenza,

$$\rho = \rho_0 (1+z)^{3(1+w)}.$$

Avremo quindi diversi andamenti per la densità delle varie componenti. La materia, che ha un'equazione di stato con $w = 0$, evolverà come $\rho \sim (1+z)^3$; la radiazione e la materia relativistica, per le quali $w = 1/3$, evolveranno come $\rho \sim (1+z)^4$ ed infine la Costante Cosmologica Λ , con $w = -1$ avrà densità costante nel tempo.

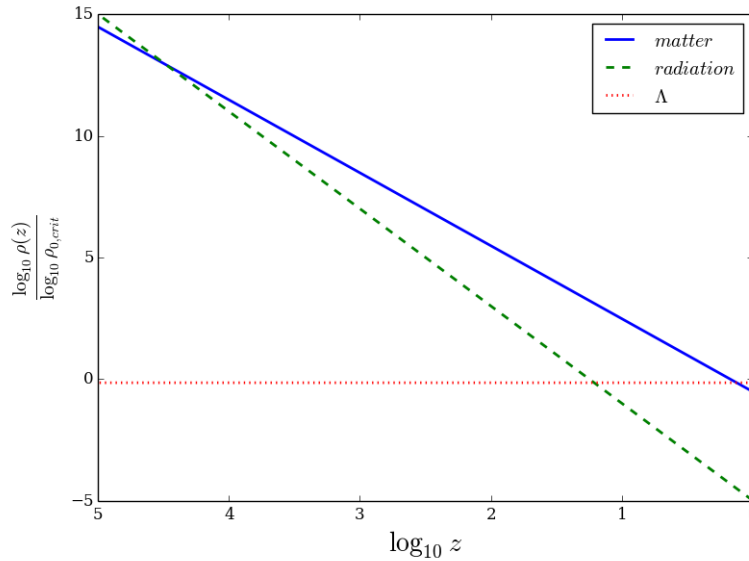


Figura 1.1: Evoluzione temporale (qualitativa) della densità delle varie componenti dell'universo. Al passare del tempo l'importanza relativa delle componenti cambia e definiremo *componente dominante* in una data epoca quella con la maggior densità. A $z \gtrsim 10^4$ la componente dominante è la radiazione, e questa sarà chiamata epoca radiativa. Successivamente la componente dominante diventa la materia, mentre solamente a $z < 1$ sarà Λ .

Questo esplicita la dipendenza della densità dal fattore di scala (e quindi

dal tempo) e sarà fondamentale anche in seguito quando saremo interessati a capire quale sia, in un dato momento, la componente dominante dell'universo.

Analizziamo ora la dipendenza da a della costante di Hubble. Iniziamo dall'equazione (1.10) per la quale

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - \frac{8\pi G\rho a^2}{3 a_0^2} = -\frac{kc^2}{a_0^2}.$$

Il termine a destra dell'uguale è costante ed è quindi uguale ad ogni tempo, in particolare a $t = t_0$, per il quale l'equazione (1.12) ci fornisce

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} - \frac{8\pi G\rho a^2}{3 a_0^2} = -\frac{kc^2}{a_0^2} = H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{0,crit}} \right).$$

Ora, rimaneggiando opportunamente i termini e ricordando che $\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-3(1+w)}$ e ponendo il parametro di densità della radiazione

$$\Omega_{0,k} \equiv \frac{\rho_{0,k}}{\rho_{0,crit}},$$

si ottiene

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = H_0^2 \left[1 - \sum_i \Omega_{0,i} + \sum_i \Omega_{0,i} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(1+3w_i)} \right]$$

che, moltiplicata per a_0^2/a^2 , ci dà finalmente

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \left[1 - \Omega_{0,tot} + \sum_i \Omega_{0,i} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-(1+3w_i)} \right] \quad (1.15)$$

o, di nuovo in termini di redshift,

$$H^2 = H_0^2 (1+z)^2 \left[1 - \Omega_{0,tot} + \sum_i \Omega_{0,i} (1+z)^{(1+3w_i)} \right].$$

Un modo più compatto per scrivere l'evoluzione con il redshift della costante H è il seguente:

$$H(z) = H_0 E(z), \quad (1.16)$$

nella quale $E(z)$ contiene anche le dipendenze da $\Omega_{0,i}$ ed è, esplicitamente,

$$E(z) = (1+z) \left[1 - \sum_i \Omega_{0,i} + \sum_i \Omega_{0,i} (1+z)^{(1+3w_i)} \right]^{1/2}. \quad (1.17)$$

Mettendo insieme tutti gli elementi ottenuti finora e rimaneggiando con un po' d'algebra l'equazione ottenuta si può finalmente arrivare a

$$\begin{aligned}\Omega(z)_i &= \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} \\ &= \rho_{0,i}(1+z)^{3(1+w)} \frac{8\pi G}{3H_0^2 E(z)^2} \\ &= \Omega_{0,i}(1+z)^{1+3w} \left[1 - \sum_i \Omega_{0,i} + \sum_i \Omega_{0,i}(1+z)^{(1+3w_i)} \right]^{-1}.\end{aligned}$$

Se considerassimo un universo composto da sola materia l'evoluzione temporale del parametro di densità $\Omega(z)$ risulterebbe essere

$$\Omega_m(z) = \left(\frac{\Omega_{0,m} - 1}{1+z} + 1 \right)^{-1},$$

il che è di cruciale importanza perché mostra che, al variare di z , il parametro di densità evolve ma senza attraversare il valore critico 1 (Figura 1.2). Inoltre, come si vedrà anche in seguito, a redshift sufficientemente grandi ogni universo si comporta come un universo piatto. È infatti semplice osservare che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega(z) = 1.$$

Da questo segue immediatamente, per quanto visto prima nell'equazione (1.13), che la geometria dell'universo non è funzione del tempo: universi chiusi rimangono chiusi, universi aperti rimangono aperti e universi piatti rimangono piatti.

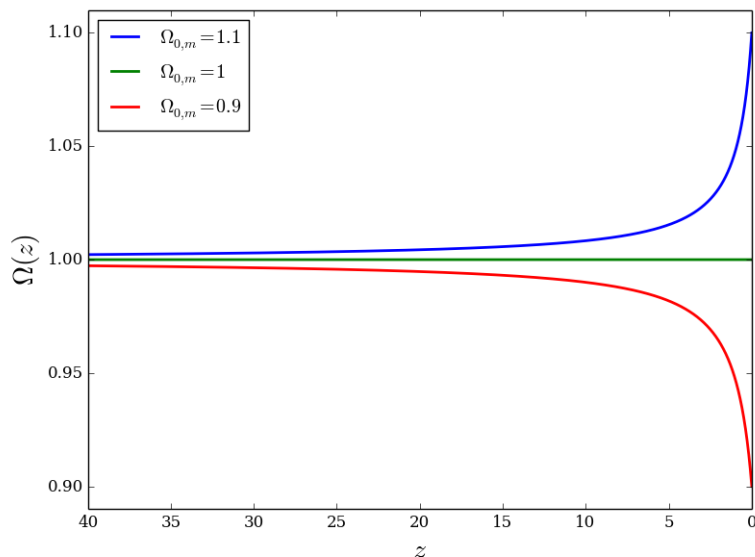


Figura 1.2: Evoluzione qualitativa del parametro di densità Ω con il redshift per tre diversi modelli cosmologici: uno chiuso, uno piatto e uno aperto. Come si può notare in figura, la geometria dell'universo non cambia con il tempo, e $\Omega = 1$ rappresenta un valore di soglia invalicabile. Inoltre a grandi z tutti gli universi, siano essi aperti o chiusi, si comportano come se fossero piatti, con la curvatura che diventa rilevante solo in tempi recenti.

1.5 Andamento temporale del fattore di scala

Definito opportunamente il parametro di densità Ω , possiamo ora studiare come evolve nel tempo il fattore di scala $a(t)$ in universi con diverse curvatures. Iniziamo dal caso più semplice (ed in accordo con le osservazioni [53]) dell'universo piatto con $k = 0$.

1.5.1 L'universo piatto o di Einstein-De Sitter

Consideriamo per ora un universo composto da una sola componente. Abbiamo visto nel paragrafo precedente come imporre la piattezza equivalga a richiedere $\Omega_{0,tot} = 1$, quindi l'equazione (1.15) diventa semplicemente

$$\dot{a} = H_0 a_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1+3w}{2}}.$$

È quindi immediato verificare che l'andamento temporale del fattore di scala risulta essere

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (1.18)$$

Calcoliamo ora l'età di un universo piatto ponendo. È sufficiente osservare che

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \sim t^{-1},$$

da cui otteniamo che l'età dell'universo (che si ottiene calcolando tutto a $t = t_0$) è

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}$$

cioè per sola materia

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}.$$

Si può osservare che un universo piatto composto da una sola componente si espande per sempre, ma con espansione decelerata. In questo caso semplice ciò è evidente dal fatto che il fattore di scala $a(t)$ dipende dal tempo elevato ad un esponente minore di uno (almeno quando w è positivo o nullo, come per i casi normali). È tuttavia opportuno introdurre un parametro, detto parametro di decelerazione denotato con la lettera q , che semplifichi questo ragionamento anche in casi meno immediati. Esso è definito come

$$\begin{aligned} q &\equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \\ &= -\frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{a}{\dot{a}}\right)^2 \\ &= -\frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{1}{H^2}\right) \end{aligned}$$

e sarà positivo quando l'espansione è decelerata. Nel caso sopradescritto, limitandoci ad un universo di sola materia (con $w = 0$), ricordando dall'equazione (1.9) che

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) a \\ &= -\frac{4\pi G}{3} \rho a \end{aligned}$$

e che

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{4\pi G}$$

avremo

$$\begin{aligned} q &= \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_m}{H^2} \\ &= \frac{\Omega_m}{2}. \end{aligned}$$

Essendo Ω sempre positivo otteniamo quindi (in accordo con l'analisi precedente, ovviamente) un parametro di decelerazione positivo.

Cosa accade se a questo punto aggiungiamo una seconda componente, nel caso specifico Λ ? Come visto in precedenza è necessario ridefinire pressione e densità in modo da tenere conto oltre che della materia anche della Costante Cosmologica. L'equazione (1.9) diventa quindi

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= -\frac{4\pi}{3}Ga \left(\tilde{\rho} + \frac{3\tilde{P}}{c^2} \right) \\ &= -\frac{4\pi}{3}G\rho_m a + \frac{\Lambda c^2}{3}a\end{aligned}$$

dalla quale segue

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda.$$

Ora il parametro di decelerazione può anche essere negativo ed in questo caso l'espansione dell'universo sarà accelerata, $a(t)$ avrà quindi un flesso invertendo la sua concavità. Ciò accade quando $q = 0$ e cioè quando

$$\Omega_m = 2\Omega_\Lambda$$

cioè quando

$$\rho_m = 2\rho_\Lambda.$$

In termini di redshift, seguendo quanto visto nella sezione precedente, avremo che il flesso si trova quando

$$\begin{aligned}\rho_m(z_{flesso}) &= \rho_{m,0}(1 + z_{flesso})^3 \\ &= 2\rho_\Lambda \\ &= 2\rho_{0,\Lambda}\end{aligned}$$

e cioè, ponendo ad esempio i valori del parametro di densità suggeriti dai dati attuali [53] $\Omega_{0,m} \simeq 0.3$ e $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$, a $z \simeq 0.7$. La Costante Cosmologica, anche in termini di effetti sull'espansione dell'universo, inizia ad essere rilevante soltanto di recente¹⁰ ma la sua influenza è sufficiente ad invertire il trend d'espansione che, in accordo con le osservazioni [56], è ora accelerata.

¹⁰ $z = 0.7$ sono comunque quasi 7 miliardi di anni fa...

1.5.2 Universi non piatti, ad alto z

È interessante notare come i risultati riguardanti il fattore di scala appena ottenuti possano valere, sotto alcune condizioni, anche per universi curvi. Infatti nell'equazione (1.15) abbiamo tra parentesi quadre due termini. Il primo, $(1 - \Omega_{0,tot})$ legato direttamente alla curvatura dell'universo, è comunque costante anche se $k \neq 0$ mentre il secondo, $\sum_i \Omega_{0,i} (a_0/a)^{1+3w_i} = \sum_i \Omega_{0,i} (1+z)^{1+3w_i}$, cresce all'aumentare di z per ogni valore di $w > -\frac{1}{3}$. Per redshift superiori ad un certo \bar{z} e cioè quando l'universo è abbastanza giovane, quindi, i termini $(1 - \Omega_{0,i})$ diventano trascurabili rispetto ai rispettivi $\Omega_{0,i} (1+z)^{1+3w_i}$, permettendoci di approssimare le equazioni a quelle di un universo piatto. L'unica accortezza da ricordare in tale situazione è di includere in una sorta di costante di Hubble generalizzata anche il rimanente fattore Ω_0 . È cioè opportuno sostituire a H_0 un fattore $\tilde{H}_0 = H_0 \sqrt{\Omega_0}$, per il resto i risultati sono del tutto equivalenti a quelli ottenuti per l'universo piatto. Ad alto z l'universo, a prescindere dalla sua curvatura, si comporta come se fosse piatto e si espande inizialmente come

$$a \sim t^{\frac{2}{3(1+w)}}.$$

1.5.3 Universo a curvatura positiva

Analizziamo ora un universo sferico, cioè con $k = +1$ e di conseguenza $\Omega_{tot} > 1$. Osserviamo innanzitutto che, come descritto in precedenza, ad alti z anche questo universo si comporta come se fosse piatto. Tuttavia, con lo scorrere del tempo, questa volta il termine

$$(1 - \Omega_{0,tot}) + \sum_i \Omega_{0,i} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{-(1+3w_i)}$$

dell'equazione (1.15) può annullarsi e far sì che \dot{a} sia uguale a 0. Se consideriamo un universo di sola materia, a $w = 0$, questo capita quando

$$a = a_{max} \equiv \left(\frac{\Omega_{0,m}}{\Omega_{0,m} - 1} \right) a_0.$$

Oltre questo punto di massimo, $a(t)$ comincerà a contrarsi, avremo cioè $\dot{a}(t) < 0$, fino al collasso dell'universo su se stesso, fenomeno denominato *Big Crunch*. Siamo interessati a conoscere il momento in cui a assume il suo valore massimo, che sarà determinato da

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{a/a_0} \left[1 - \Omega_{0,m} + \frac{\Omega_{0,m}}{x} \right]^{-1/2} dx$$

che è l'equazione integrale di un cicloide, dalla quale si ottiene

$$t_{max} = \frac{\pi\Omega_{0,m}}{2(\Omega_{0,m} - 1)^{3/2}}.$$

Si potrebbe ripetere, sempre nel caso di sola materia, l'integrale di prima calcolandolo fino ad oggi, cioè estendendo il limite destro d'integrazione da a/a_0 a 1, per ricavare l'età dell'universo ad oggi e confrontarla con quella trovata per l'universo piatto. In questo caso (non senza una certa difficoltà algebrica) si otterrebbe un'età

$$t_0 = \frac{\Omega_{0,m}}{2H_0(\Omega_{0,m} - 1)^{3/2}} \left[\arccos \left(\frac{2 - \Omega_{0,m}}{\Omega_{0,m}} \right) - \frac{2}{\Omega_{0,m}} (\Omega_{0,m} - 1)^{1/2} \right]$$

che, per $\Omega_0 > 1$ come nel caso considerato, è sempre minore di $\frac{2}{3H_0}$. Universi chiusi, a parità di H_0 , vivono quindi immancabilmente meno di universi piatti.

1.5.4 Universo a curvatura negativa

Anche in questo caso a grandi z l'universo si comporta come se fosse piatto. Tuttavia è bene osservare che ora Ω_0 è minore di 1 e quindi che

$$(1 - \Omega_{0,tot}) + \sum_i \Omega_{0,i} \left(\frac{a_0}{a} \right)^{-(1+3w_i)}$$

non si annulla mai. Dunque \dot{a} è sempre (strettamente) positivo rendendo $a(t)$ una funzione monotona crescente del tempo. Ora, ponendosi a $z \ll \bar{z}$, come visto in precedenza i termini $\Omega_{0,i} (a_0/a)^{-(1+3w_i)}$ diventano trascurabili rispetto a $1 - \Omega_{0,tot}$ e l'equazione (1.10) diventa quindi

$$\dot{a} = a_0 H_0 \sqrt{1 - \Omega_{0,tot}}$$

che, integrata, fornisce

$$a(t) = a_0 H_0 \sqrt{1 - \Omega_{0,tot}} t.$$

La velocità d'espansione tende asintoticamente a diventare costante, per $z \ll \bar{z}$, con $\ddot{a} \rightarrow 0$ a differenza dei due casi precedenti.

Analogamente a quanto visto in precedenza possiamo calcolare l'età dell'universo per questo modello. Matematicamente il ragionamento è del tutto analogo a quanto visto per l'universo chiuso, solo che ora abbiamo a che fare con funzioni iperboliche. Il risultato è

$$t_0 = \frac{\Omega_{0,m}}{2H_0(1 - \Omega_{0,m})^{3/2}} \left[\frac{2}{\Omega_{0,m}} (1 - \Omega_{0,m})^{1/2} - \operatorname{arccosh} \left(\frac{2}{\Omega_{0,m}} - 1 \right) \right]$$

che, a parità di H_0 , è sempre maggiore dell'età degli universi piatti.

Capitolo 2

Crescita delle perturbazioni di densità

Rust: *I tell you Marty I been up in that room looking out those windows every night here just thinking, it's just one story. The oldest. Light versus dark.*

Marty: *Well, I know we ain't in Alaska, but it appears to me that the dark has a lot more territory.*

Rust: *You're looking at it wrong, the sky thing. Once there was only dark. You ask me, the light's winning.*

- Rustin "Rust" Cohle e Martin "Marty" Hart

All'uscita dalla sua fase inflazionaria l'universo inizia a mostrare le prime disomogeneità. Queste piccole perturbazioni nel campo di densità dell'ordine di $\Delta\rho/\bar{\rho} \sim 10^{-5}$ si traducono immediatamente per adiabaticità in analoghe perturbazioni di temperatura, tuttora osservabili nella radiazione cosmica di fondo. L'universo ha qui iniziato il lento percorso che lo allontanerà, poco alla volta, dalla sua condizione di omogeneità iniziale (assunzione comunque ancora valida su scale opportunamente grandi) dato che queste piccole perturbazioni di densità a $z \geq 1000$ possono crescere per instabilità gravitazionale fino al valore odierno $\Delta\rho/\bar{\rho} \simeq 100$ misurato negli ammassi di galassie, formando le strutture gravitazionali che ci circondano: aloni di materia oscura prima, galassie e ammassi di galassie poi.

Una descrizione naive, ma per lo meno in prima approssimazione verosimile, del problema la si può ottenere confrontando l'energia cinetica di una nube di gas, ad esempio, con la sua energia potenziale gravitazionale. Se l'energia potenziale è superiore all'energia cinetica il collasso potrà avvenire, mentre

bilanciando le due energie possiamo ottenere una dimensione caratteristica al di sopra della quale ha luogo l'instabilità detta instabilità di Jeans.

Il sistema considerato sarà quindi in equilibrio se

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{GM^2}{R} \sim GM\rho R^2$$

cioè se

$$R = R_J \equiv v\sqrt{\frac{1}{2G\rho}},$$

dove M è la massa del sistema (assunto in prima approssimazione sferico), ρ la sua densità ed R il suo raggio.

Oggetti di dimensioni maggiori di R_J potranno collassare per instabilità gravitazionale. Per quanto ottenuto in maniera semplicistica, riotterremo questo stesso andamento per la *lunghezza d'onda di Jeans* anche seguendo ragionamenti più rigorosi.

2.1 Teoria di Jeans per universi statici

In realtà abbiamo già escluso in precedenza l'ipotesi di un universo statico, sia per ragioni di stabilità sia per evidenze osservative. Tuttavia questo *toy model* ci permette da un lato di affrontare il ragionamento rigoroso (che sarà in seguito in buona parte omesso) da seguire anche nel caso di universi non statici, mentre dall'altro ci fornisce un buon termine di paragone per i casi reali.

In primo luogo è necessario scrivere un sistema d'equazioni che descrivano il comportamento di una soluzione imperturbata iniziale. Successivamente introdurremo delle perturbazioni (limitandoci al prim'ordine e quindi rimanendo in regime lineare) e, cercando soluzioni per le perturbazioni del tipo onde piane e passando quindi allo spazio di Fourier, otterremo una relazione di dispersione che ci permetterà di ricavare un numero d'onda e successivamente una lunghezza d'onda caratteristica che discriminino soluzioni oscillanti da soluzioni crescenti (e decrescenti).

Per un universo statico il sistema di equazioni fondamentali è composto, in linea di principio, da 5 equazioni: l'equazione di continuità, l'equazione di Eulero, l'equazione di Poisson, un'equazione di stato ed infine, per chiudere

il sistema, una condizione sull'entropia. Avremo quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \phi \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \\ P = P(\rho, S) \\ \frac{dS}{dt} = f(X, t) \end{array} \right. , \quad (2.1)$$

dove ρ e P sono rispettivamente la densità e la pressione del sistema considerato, ϕ è il potenziale gravitazionale e f è una generica funzione di un generico insieme di variabili X e del tempo che descriva il comportamento dell'entropia (S).

Supponiamo che tutte le trasformazioni considerate (e quindi anche l'evoluzione temporale delle perturbazioni) siano adiabatiche e che l'entropia sia quindi costante. Questo ci permette di eliminare dal sistema l'ultima equazione e di considerare la pressione come dipendente unicamente dalla densità $P(\rho, S) \rightarrow P(\rho)$.

Una soluzione imperturbata, che soddisfa tutte le equazioni del sistema, è rappresentata da

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_B \\ P = P_B \\ \phi = \phi_B \\ \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. , \quad (2.2)$$

dove il pedice B si riferisce al *background*. Tutti i termini del sistema (2.2) sono costanti. Possiamo ora aggiungere una perturbazione, mutando il sistema in

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_B + \delta\rho \\ P = P_B + \delta P \\ \phi = \phi_B + \delta\phi \\ \mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \end{array} \right. .$$

Considerando perturbazioni infinitesime e tralasciando quindi i termini d'ordine superiore al primo e annullando i termini per la soluzione imperturbata (2.2) che soddisfano le relazioni iniziali del sistema (2.1),

possiamo inserire le perturbazioni in (2.1) ed ottenere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \rho_B \nabla(\delta\mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} = -\frac{\nabla(\delta P)}{\rho_B} - \nabla(\delta\phi) \\ \nabla^2(\delta\phi) = 4\pi G\delta\rho \\ c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S \rightarrow \delta P = \delta\rho c_s^2 \end{array} \right. , \quad (2.3)$$

dove c_s è la velocità del suono del sistema considerato. Nel sistema così ottenuto possiamo sostituire la velocità del suono della quarta equazione nella seconda, che diventa quindi

$$\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_B} \nabla(\delta\rho) - \nabla(\delta\phi).$$

A questo punto siamo interessati a cercare soluzioni del tipo onda piana per le perturbazioni, cioè del tipo

$$f(r, t) = f_k e^{ikr+i\omega t}, \quad (2.4)$$

per le quali le derivate che ci interessano risultano essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= i\omega f \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= ik f \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -k^2 f, \end{aligned}$$

e analogamente per grandezze vettoriali, sostituendo opportunamente le derivate parziali spaziali con gradienti e i prodotti semplici con prodotti scalari. Imponendo che le perturbazioni ($\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$, $\delta\phi$) siano della forma (2.4) si ottiene un sistema di tre equazioni, dal quale si può estrarre la seguente relazione di dispersione:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_B.$$

Si possono quindi ottenere i due andamenti temporali per le perturbazioni: un andamento oscillante per $\omega^2 > 0$, che genera soluzioni tipo onda che non crescono d'ampiezza nel tempo; un andamento per $\omega^2 < 0$ con il quale l'ampiezza della perturbazione varia esponenzialmente nel tempo. Il valore

di soglia è $\omega^2 = 0$, ottenibile quando il numero d'onda è uguale al numero d'onda di Jeans

$$k_J \equiv \sqrt{\frac{4\pi G \rho_B}{c_s^2}}$$

dal quale si può passare alla lunghezza d'onda di Jeans, tornando così dallo spazio di Fourier allo spazio fisico, grazie alla relazione

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G \rho_B}}.$$

Perturbazioni di densità più grandi di λ_J potranno collassare, in un universo statico, per instabilità gravitazionale e crescere esponenzialmente.

2.2 Teoria di Jeans per universi in espansione

Consideriamo ora il caso di interesse cosmologico, cioè quello di universi non statici. Per quanto il ragionamento sia sostanzialmente uguale a quello descritto nella sezione precedente e preveda gli stessi passaggi logici (quindi la costruzione di un sistema di equazioni fondamentali, un insieme di soluzioni imperturbate da perturbare poi al prim'ordine prima di passare allo spazio di Fourier), sono necessarie alcune considerazioni preliminari. Bisogna innanzitutto considerare l'espansione dell'universo, che contrasta la crescita delle perturbazioni opponendosi ad essa.

La precisazione più importante, tuttavia, riguarda il regime in cui potremo studiare queste soluzioni. Essendo le equazioni di Friedmann puramente derivanti dalla Relatività Generale, come visto nel capitolo precedente, esse sono valide solamente in regimi e scale in cui la gravità è l'unica forza in atto. Questo limita il loro uso a scale maggiori dell'orizzonte cosmologico definito da

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')} \quad (2.5)$$

dove non c'è connessione causale e quindi non agiscono fenomeni di microfisica. Su scale minori dell'orizzonte avremo invece una scala di Jeans λ_J al di sopra della quale l'attrazione gravitazionale supera la pressione consentendo il collasso, ma dovremo comunque considerare i vari fenomeni di microfisica e le possibili interazioni che possono avvenire tra le componenti dell'universo e la componente dominante. È quindi necessario spezzare il problema in vari sottocasi e considerarli uno alla volta, nelle varie epoche.

2.2.1 Al di fuori dell'orizzonte cosmologico

In questo caso possiamo considerare, senza perdita di generalità, la perturbazione (identificata dal pedice P) con un universo chiuso immerso in un universo piatto di background (identificato dal pedice B). Possiamo immaginare la perturbazione di densità come una sfera sovradensa rispetto all'ambiente circostante all'interno della quale valga una sorta di principio cosmologico locale. Per la perturbazione, che ha $k = 1$, la seconda equazione di Friedmann (1.10) diventa

$$\dot{a}^2 + c^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_P a^2$$

o in termini della costante di Hubble

$$H_P^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_P - \frac{c^2}{a^2}.$$

Per l'universo di background, assunto piatto cioè con $k = 0$, si avrà invece

$$H_B^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_B.$$

Quando i valori delle due costanti di Hubble sono uguali si avrà

$$\frac{8\pi G}{3} (\rho_P - \rho_B) = \frac{c^2}{a^2}$$

cioè, definendo il contrasto di densità $\delta \equiv (\rho_P - \rho_B) / \rho_B$,

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_B \delta = \frac{c^2}{a^2}$$

dalla quale si ottiene immediatamente

$$\delta = \frac{3c^2}{8\pi G \rho_B a^2}.$$

Ricordando ora l'andamento della densità ricavato nell'equazione (1.14), $\rho_B \sim a^{-3(1+w)}$, otteniamo

$$\delta \sim a^{3w+1}$$

con diverso w a seconda di quale sia la componente dominante dell'universo in quell'epoca¹.

¹Essendo fuori dall'orizzonte, la gravità è l'unica forza in atto e quindi il comportamento della componente dominante determina anche il comportamento delle altre componenti, ad essa accoppiate tramite appunto la gravità.

Prima dell'equivalenza² tra materia e radiazione, cioè quando $\rho_{rad} > \rho_{mat}$ e $w = 1/3$, avremo che tutte le perturbazioni di densità fuori dall'orizzonte crescono come a^2 e quindi, ricordando l'equazione (1.18) per cui $a(t) \sim t^{2/3(1+w)}$, avremo

$$\delta \sim a^2 \sim t. \quad (2.6)$$

Dopo l'equivalenza invece la componente dominante è la materia, con $w = 0$. In questo regime le perturbazioni di densità crescono come

$$\delta \sim a \sim t^{2/3}. \quad (2.7)$$

È importante sottolineare, prima di procedere oltre, come al di fuori dell'orizzonte cosmologico le perturbazioni crescano sempre, senza alcuna condizione aggiuntiva.

2.2.2 All'interno dell'orizzonte cosmologico

Dentro l'orizzonte la trattazione è fondamentalmente uguale a quella vista per universi statici, con opportune correzioni che tengano conto dell'espansione dell'universo. È anche necessario prestare attenzione alla differenza tra coordinate proprie (denotate dalla lettera R) e comoventi (denotate dalla lettera x). La relazione che lega le due è $R = ax$, dalla quale vediamo che la velocità propria di ogni oggetto è

$$\begin{aligned} u &= \frac{dR}{dt} \\ &= \dot{a}x + a\dot{x} \\ &= \frac{\dot{a}}{a}ax + a\dot{x} \\ &= HR + v. \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni che ci interessa è sempre il (2.1), così come le soluzioni imperturbate non sono diverse da quelle del caso statico eccezion fatta per la velocità che ora deve tener conto dell'espansione dell'universo

$$u_0 = HR.$$

²In quest'epoca, che dura fino a $z \sim 10^4$, possiamo considerare trascurabile la curvatura dell'universo, come descritto nel capitolo precedente.

Inserendo le perturbazioni nel sistema, scritto in coordinate comoventi, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\tilde{\rho}_B}{a} \nabla(\delta u) + 3H(\delta \tilde{\rho}) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + H(\delta u) = -\frac{c_s^2}{a} \nabla \delta - \frac{\nabla(\delta \phi)}{a} \quad , \\ \frac{\nabla^2(\delta \phi)}{a^2} = 4\pi G \tilde{\rho}_B \delta \end{cases} \quad (2.8)$$

nel quale per la materia non relativistica $\tilde{\rho} = \rho$ mentre per la radiazione si deve tener conto anche della pressione e quindi $\tilde{\rho} = \rho + P/c^2$. Come visto prima $\delta \equiv (\rho_P - \rho_B) / \rho_B$.

Da questo sistema, passando allo spazio di Fourier, si possono ottenere le relazioni di dispersione che ci permettono di ricavare il numero d'onda e la lunghezza d'onda di Jeans.

Prima dell'equivalenza tra materia e radiazione

In questo caso la componente dominante è la radiazione, che ha $w = 1/3$. La relazione di dispersione (la cui estrazione dal sistema (2.8) è omessa) risulta essere, in coordinate fisiche ed utilizzando la stessa notazione vista in precedenza,

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \delta_k \left(k^2 c_s^2 - \frac{32}{3} \pi G \rho_B \right) = 0. \quad (2.9)$$

È importante sottolineare che questa relazione dipende esplicitamente dalla cosmologia adottata, ed in particolare dal parametro di densità Ω , attraverso la costante di Hubble (che dipende da Ω secondo 1.15) e attraverso ρ_B qualora si volesse esplicitare $\rho_B(t)$ da $\rho_B(a(t))$ attraverso le dipendenze del fattore di scala dal tempo viste nel capitolo precedente. In questo capitolo quando esplicheremo le dipendenze temporali faremo sempre uso di $a \sim t^{2/[3(1+w)]}$, valida per universi piatti o in epoche nelle quali la curvatura è trascurabile (come in questo caso).

Da questa relazione, cercando soluzioni a legge di potenza per δ_k , si ottengono il numero d'onda di Jeans

$$k_J = \sqrt{\frac{32\pi G \rho_B}{3c_s^2}}$$

e la lunghezza d'onda di Jeans

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{3\pi c_s^2}{8G \rho_B}}.$$

Osserviamo che un universo di radiazione (o di materia relativistica) ha una velocità del suono molto prossima a quella della luce. Si ha infatti che $c_s = c/\sqrt{3}$. Calcolando quindi la lunghezza d'onda di Jeans, ricordando che in questo regime $\rho_B \sim a^{-4} \sim t^{-2}$, si ottiene quindi

$$\lambda_J = \frac{2\pi ct}{\sqrt{3}}$$

che risulta essere maggiore di

$$R_H = a(t) \int_0^t \frac{ct'}{a(t')} = 2ct.$$

Prima dell'equivalenza e dentro l'orizzonte nessuna perturbazione di densità della radiazione può crescere, perché la lunghezza d'onda di Jeans è maggiore della scala dell'orizzonte cosmologico. Ciò è dovuto all'elevata velocità del suono della radiazione che rende la pressione molto efficiente nell'appianare le onde di densità.

Possiamo comunque chiederci cosa accada alla materia oscura, che è sì influenzata dalla radiazione (che è la componente dominante in quest'epoca) ma non è ad essa accoppiata da nessun fenomeno fisico tranne la gravità³, rendendo in linea di principio possibile la crescita delle sue perturbazioni.

Nella relazione di dispersione scritta in precedenza abbiamo considerato la componente dominante come *l'unica* componente dell'universo. Se ora vogliamo descrivere il comportamento della materia oscura è necessario scrivere una nuova relazione di dispersione⁴ tenendo presente che ora $\rho_B = \sum_i \rho_{B,i}$. Avremo quindi

$$\ddot{\delta}_{k,DM} + 2H\dot{\delta}_{k,DM} + k^2 c_s^2 \delta_{k,DM} - 4\pi G \sum_i \rho_{B,i} \delta_{k,i} = 0. \quad (2.10)$$

Considerando tuttavia che, come appena visto, le perturbazioni della radiazione non crescono (così come quelle della componente barionica accoppiata alla radiazione), possiamo approssimare $\sum_i \rho_{B,i} \delta_{k,i}$ a $\rho_{DM} \delta_{k,DM}$. Ponendo infine il cambiamento di coordinate $x := a/a_{eq}$ si ottiene

$$\frac{d^2 \delta_{k,DM}}{dx^2} + \frac{2+3x}{2x(1+x)} \frac{d\delta_{k,DM}}{dx} - \frac{3}{2x(1+x)} \delta_{k,DM} = 0$$

³Per lo meno nessun fenomeno noto.

⁴La relazione di dispersione (2.10) deriva sempre dal sistema (2.8) nel quale, come nei casi illustrati in seguito, si è posta però la pressione $P = 0$.

che è un'equazione ipergeometrica avente come soluzione crescente [45]

$$\begin{aligned}\delta_{k,DM} &= 1 + \frac{3}{2}x \\ &= 1 + \frac{3a}{2a_{eq}}\end{aligned}$$

dalla quale si può vedere che la crescita delle perturbazioni di materia oscura dall'entrata nell'orizzonte (denotata con il pedice H) al momento dell'equivalenza è

$$\begin{aligned}\frac{\delta(t_{eq})}{\delta(t_H)} &= \frac{1 + 3/2}{1 + 3a_H/2a_{eq}} \\ &\leq \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Come si può vedere le perturbazioni di densità della materia oscura crescono al più di un fattore 2.5 dall'entrata nell'orizzonte cosmologico all'equivalenza. Questo effetto, chiamato stagnazione (o effetto Meszaros), è dovuto al termine $2H = 2\dot{a}/a$ davanti a δ_k che inibisce (ma non blocca del tutto) l'evoluzione della perturbazione. Questo deriva dal fatto che in questo regime il tempo caratteristico d'espansione dell'universo, $t_H \sim \sqrt{1/\rho_{rad}}$, è minore del tempo di *free fall* della perturbazione di materia oscura considerata⁵, $t_{ff} \sim \sqrt{1/\rho_{DM}}$, perché in quest'epoca $\rho_{rad} \gg \rho_{DM}$.

Una perturbazione di materia oscura quindi può crescere al di fuori dell'orizzonte, come visto nel paragrafo precedente, ma se entra nell'orizzonte prima dell'equivalenza l'espansione dell'universo è troppo rapida e blocca la crescita della fluttuazione di densità locale⁶.

Materia oscura, dopo l'equivalenza

In quest'epoca la componente dominante è la materia che, volendo considerare la crescita delle perturbazioni della materia oscura, possiamo trattare come unica componente dell'universo. Consideriamo per ora un universo piatto. Dal sistema (2.8) possiamo estrarre una nuova equazione

⁵In un certo senso possiamo quindi dire che l'universo si espande in maniera più rapida ed efficace di quanto le perturbazioni possano contrarsi e collassare.

⁶L'effetto di stagnazione subito dalla materia oscura è sostanzialmente differente da quanto accade alla materia barionica, le cui perturbazioni sono legate a quelle della radiazione da fenomeni di microfisica come lo scattering Thomson che accoppia barioni e radiazione.

simile a (2.9)

$$\ddot{\delta}_k + \frac{2\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \delta_k (k^2 c_s^2 - 4\pi G \rho_B) = 0 \quad (2.11)$$

che differisce dalla precedente perché ora non c'è più alcun contributo della pressione.

Sostituendo opportunamente t ad a nell'equazione (2.11) e cercando soluzioni a legge di potenza ($\delta \sim t^\alpha$) si ottiene la relazione di dispersione

$$3\alpha^2 + \alpha + 2 \left(\frac{k c_s^2}{4\pi G \rho_B} - 1 \right) = 0$$

che è una semplice equazione di secondo grado il cui discriminante vale 0 in corrispondenza di

$$k_J = \frac{5}{c_s} \sqrt{\frac{\pi G \rho_B}{6}}$$

o, in termini di lunghezza d'onda,

$$\lambda_J = \frac{c_s}{5} \sqrt{\frac{24\pi}{G \rho_B}}.$$

Per $\lambda \gg \lambda_J$ si avranno quindi due soluzioni: una crescente ed una decrescente. Quindi la crescita delle perturbazioni è guidata da

$$\begin{aligned} \delta_k &\sim t^{(-1 + \sqrt{1 - (\lambda_J/\lambda)^2})/6} \\ &\sim t^{2/3} \\ &\sim a. \end{aligned}$$

La trattazione per universi non piatti non è affatto altrettanto semplice, ma alla fine si giunge a

$$\delta_k(z) = -H(z) \int_{\infty}^z \frac{(1+z') dz'}{a_0^2 H(z')^3}$$

che, ricordando la definizione di $E(z)$ (equazione (1.17)), fornisce

$$\delta_k(z) = \frac{E(z)}{(H_0 a_0)^2} \int_z^{\infty} \frac{(1+z') dz'}{E(z')^3},$$

con $E(z) = (1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}$, per universi di materia. Questa relazione, dipendente esplicitamente da Ω_0 , è di difficile lettura ma in buona sostanza implica una crescita delle perturbazioni più rapida di quella che si avrebbe in un universo piatto se $\Omega_0 > 1$ e più lenta se $\Omega_0 < 1$, mentre restituisce l'andamento trovato prima per il caso $\Omega_0 = 1$.

Barioni, dopo l'equivalenza

Dopo l'equivalenza la componente dominante è la materia, ma i barioni risentono ancora della radiazione alla quale sono legati attraverso lo scattering Thomson fino al disaccoppiamento. Prima del disaccoppiamento i barioni, completamente ionizzati, sono ancora accoppiati alla radiazione, la cui pressione supera l'attrazione gravitazionale della materia oscura. In questa fase le perturbazioni di densità dei barioni sono ancorate a quelle delle radiazione e quindi oscillano, senza crescere.

Dopo il disaccoppiamento invece possiamo trattare i barioni come un fluido separato dalla materia oscura, finalmente slegato dall'influenza della radiazione e quindi procedere in un ragionamento analogo a quello che ci ha portato a scrivere l'equazione (2.10). Avremo quindi

$$\ddot{\delta}_{k,Bar} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,Bar} - 4\pi G\rho_{DM}\delta_{k,DM} = 0.$$

Ricordando ora che $\delta_{k,DM} \sim Aa$, otteniamo che le perturbazioni dei barioni crescono, dopo il disaccoppiamento, come

$$\begin{aligned}\delta_{Bar} &= Aa - Aa_{dis} \\ &= \delta_{DM} \left(1 - \frac{a_{dis}}{a}\right).\end{aligned}$$

I barioni cioè subiscono una crescita più rapida di quella della materia oscura perché, dopo il disaccoppiamento, sentono la maggior attrazione gravitazionale delle buche di potenziale delle perturbazioni di materia oscura già cresciute. In breve tempo i barioni si portano allo stesso regime di crescita della materia oscura, di fatto annullando il ritardo dovuto al precedente accoppiamento con la radiazione.

2.3 Massa di Jeans

Abbiamo visto che al di sopra del valore di soglia λ_J le perturbazioni di densità possono crescere e iniziare il collasso gravitazionale. In tutti i casi analizzati finora si può ricondurre la lunghezza di Jeans ad una forma

$$\lambda_J \sim \frac{v}{\sqrt{\rho_{dom}}},$$

nella quale ρ_{dom} è la densità della componente dominante in una data epoca e v è una velocità caratteristica per la componente considerata. Da λ_J

possiamo definire una corrispondente massa critica detta massa di Jeans (M_J) per la componente considerata:

$$M_J \sim \rho_i \lambda_J^3 \\ \sim \frac{\rho_i v^3}{\rho_{dom}^{3/2}}.$$

Perturbazioni con massa $M > M_J$ potranno collassare per instabilità gravitazionale. Siamo interessati a studiare l'evoluzione di M_J nelle varie epoche.

2.3.1 Massa di Jeans e meccanismi di dissipazione per la materia oscura

Ricordiamo intanto che l'andamento della densità della componente dominante è

$$\rho_{dom} = \rho_{rad} \sim a^{-4}, \text{ prima dell'equivalenza,} \\ \rho_{dom} = \rho_m \sim a^{-3}, \text{ dopo l'equivalenza.}$$

Per la velocità, che nel caso della materia oscura (non collisionale) non rappresenta la velocità del suono ma è legata alla dispersione di velocità delle particelle, dobbiamo invece considerare tre casi distinti. In primo luogo, particelle relativistiche hanno velocità costante $v = c/\sqrt{3}$ indipendentemente dalla temperatura. La velocità delle particelle non relativistiche invece dipende dalla radice quadrata della temperatura⁷. Supponendo che la materia oscura sia accoppiata tramite interazione debole alla radiazione (e che ci sia quindi un momento in cui le due componenti si disaccoppiano, che denoteremo con a_{dx}) si avrà:

$$v \sim T_{rad}^{1/2} \sim a^{-1/2}, \text{ per } a < a_{dx}, \\ v \sim T_m^{1/2} \sim a^{-1}, \text{ per } a > a_{dx}.$$

A seconda della massa delle particelle possiamo quindi distinguere tra un tipo di materia oscura detto *caldo* (o HDM) ed un secondo tipo detto *freddo* (o CDM). Definiamo HDM la materia oscura che diventa non relativistica dopo il disaccoppiamento dalla radiazione e CDM la materia oscura che, al contrario,

⁷Dalla condizione di adiabaticità $d(\rho c^2 a^3) = -P da^3$ si può ottenere l'andamento temporale della temperatura a seconda della componente considerata. Risulta essere $T \sim a^{-2}$ per la materia e $T \sim a^{-1}$ per la radiazione.

è già non relativistica al disaccoppiamento dalla radiazione. Indicheremo con a_{nr} il momento in cui la materia oscura diventa non relativistica, con a_{dx} il momento in cui essa si disaccoppia dalla radiazione e con a_{eq} l'equivalenza tra materia e radiazione.

Materia oscura calda

Per la materia oscura calda possiamo identificare tre regimi (riportati a scopo illustrativo in Figura 2.1) d'evoluzione della massa di Jeans definita sopra:

$$M_J(a) \sim \begin{cases} a^3, & \text{per } a < a_{nr} \\ \text{cost}, & \text{per } a_{nr} < a < a_{eq} \\ a^{-3/2}, & \text{per } a > a_{eq} \end{cases} .$$

Il valore massimo di M_J corrisponde al valore raggiunto all'equivalenza e risulta essere $\sim 10^{16} M_\odot$.

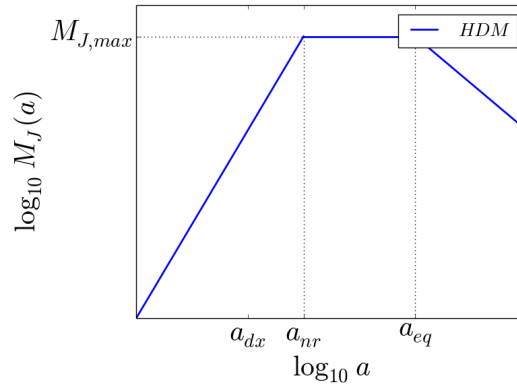


Figura 2.1: Andamento qualitativo della massa di Jeans per la materia oscura calda. In questo caso $M_{J,max} \simeq 10^{16} M_\odot$.

Materia oscura fredda

Possiamo identificare regimi analoghi anche per la materia oscura fredda, con la differenza che in questo caso c'è un periodo tra il momento in cui essa cessa d'essere relativistica e il disaccoppiamento in cui la massa di Jeans cresce più lentamente (Figura 2.2). Avremo quindi

$$M_J(a) \sim \begin{cases} a^3, & \text{per } a < a_{nr} \\ a^{3/2}, & \text{per } a_{nr} < a < a_{dx} \\ \text{cost}, & \text{per } a_{dx} < a < a_{eq} \\ a^{-3/2}, & \text{per } a > a_{eq} \end{cases} .$$

In questo caso il valore massimo di M_J , corrispondente sempre a $M_J(a_{eq})$, risulta essere $\sim 10^5 M_\odot$.

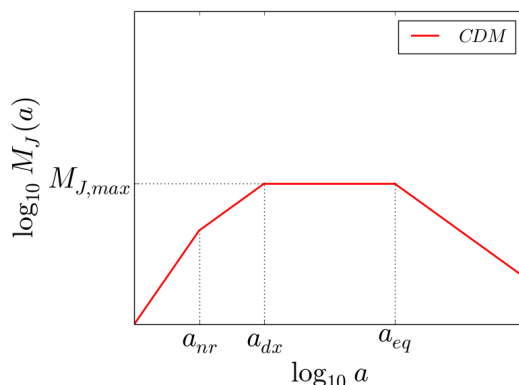


Figura 2.2: Andamento qualitativo della massa di Jeans M_J per la materia oscura fredda. In questo caso $M_{J,max} \simeq 10^5 M_\odot$.

Cancellazione delle perturbazioni di materia oscura: *free streaming*

Esistono dei fenomeni che possono cancellare le perturbazioni di densità. Per la materia oscura il meccanismo responsabile della cancellazione delle perturbazioni è detto *free streaming* ed è dovuto alla viscosità termica della materia oscura [60]. In sostanza le onde di densità tendono a cancellare le perturbazioni di massa minore di una massa di soglia, che indicheremo con M_{fs} . Le perturbazioni che possono sopravvivere e quindi continuare a crescere sono solamente quelle per le quali M è maggiore M_{fs} ad ogni tempo (altrimenti esisterà un tempo \bar{a} tale per cui $M < M_{fs}(\bar{a}) \leq M_{fs,max}$ al quale la perturbazione viene cancellata). Siamo quindi interessati a conoscere quale sia il massimo valore di M_{fs} . Essendo il *free-streaming* generato dalla propagazione stessa delle onde di densità si ha che

$$M_{fs,max} = M_{J,max} = M_J(a_{eq}).$$

Per la materia oscura calda $M_J(a_{eq}) \simeq 10^{16} M_\odot$, mentre per la materia oscura fredda $M_J(a_{eq}) \simeq 10^5 M_\odot$. Ogni perturbazione sopra questo valore può crescere, ogni perturbazione sotto questo valore viene cancellata.

Un modello composto da materia oscura calda prevede quindi una formazione delle strutture *top-down*: le perturbazioni che non vengono cancellate sono solamente quelle con $M > 10^{16} M_\odot$, mentre le strutture più piccole si formano poi per frammentazione. Preferibili sono invece i modelli

di materia oscura fredda che suggeriscono una formazione delle strutture gerarchica (o *bottom-up*): le perturbazioni crescono a partire da $10^5 M_\odot$ e le strutture più grandi si formano successivamente per aggregazione⁸.

2.3.2 Massa di Jeans e meccanismi di dissipazione per la materia barionica

Il procedimento per ottenere la massa di Jeans per i barioni è sostanzialmente identico a quanto descritto in precedenza per la materia oscura, con la differenza che ora la velocità caratteristica da considerare è la velocità del suono. Anche in questo caso abbiamo tre regimi distinti. Prima dell'equivalenza la componente dominante è la radiazione e la velocità del suono è quella del fluido relativistico $c_s = c/\sqrt{3}$. Tra l'equivalenza e il disaccoppiamento dalla radiazione (che indicheremo con a_{dec}) la componente dominante è la materia, ma l'accoppiamento tra materia e radiazione fa sì che

$$\begin{aligned} c_s^2 &\sim \frac{P_{bar} + P_{rad}}{\rho_{bar} + \rho_{rad}} \\ &\sim \frac{P_{rad}}{\rho_{bar}} \\ &\sim a^{-1}. \end{aligned}$$

Dopo il disaccoppiamento, infine, la velocità del suono torna ad essere $c_s^2 \sim P_{bar}/\rho_{bar}$ che evolve come a^{-2} , tuttavia l'assenza ora della pressione di radiazione⁹ genera una notevole discontinuità nella normalizzazione. Qualitativamente l'andamento temporale della massa di Jeans (riportato in Figura 2.3) è come segue:

$$M_J(a) \sim \begin{cases} a^3, & \text{per } a < a_{eq} \\ cost, & \text{per } a_{eq} < a < a_{dec} \\ a^{-3/2}, & \text{per } a > a_{dec} \end{cases} .$$

Analogamente a quanto visto per la materia oscura calda, che mostra un andamento molto simile, si nota che $M_{J,max} \sim 10^{16} M_\odot$.

⁸Da notare che questo non è necessariamente in contrasto con il noto fenomeno del *down-sizing* [12], che registra una sistematica tendenza delle galassie più massive a formare la gran parte della propria massa stellare in tempi più antichi e più brevi delle galassie meno massive. Qui stiamo infatti parlando solamente del comportamento della materia oscura e della conseguente formazione di aloni, all'interno dei quali solo successivamente i barioni collasseranno formando le strutture osservabili.

⁹Il disaccoppiamento è definito come il momento in cui, venendo a mancare gli scattering tra materia e radiazione, la prima non è più influenzata dalla seconda. La pressione di radiazione è quindi trascurabile, dopo il disaccoppiamento, per definizione.

Dissipazione delle perturbazioni barioniche: la massa di Silk

Per effetto di viscosità radiativa prima dell'equivalenza e di termoconduzione dopo, le perturbazioni dei barioni sotto una certa massa M_D vengono dissipate. Tale massa è detta anche massa di Silk, che ne determinò il valore nel 1968. Per una trattazione più esauriente del problema si rimanda per esempio al libro di Coles e Lucchin [13]. Ci limiteremo qui ad illustrare i risultati. Prima dell'equivalenza la massa di Silk risulta evolvere come $a^{9/2}$, mentre tra l'equivalenza ed il disaccoppiamento risulta $M_D \sim a^{15/4}$. Dopo il disaccoppiamento, con il contributo della radiazione che diviene trascurabile, la dipendenza segue quella di Jeans e diventa $M_D \sim a^{3/2}$. Siamo quindi di nuovo interessati, come nel caso precedente, a $M_{D,max} = M_D(a_{dec}) \sim 10^{12} M_\odot$, per confrontarla con $M_{J,max} \sim 10^{16} M_\odot$: le perturbazioni di massa $M < M_{D,max}$ vengono cancellate mentre le perturbazioni di massa $\in [M_{D,max}, M_{J,max}]$ oscillano fino al disaccoppiamento per poi ricominciare a crescere.

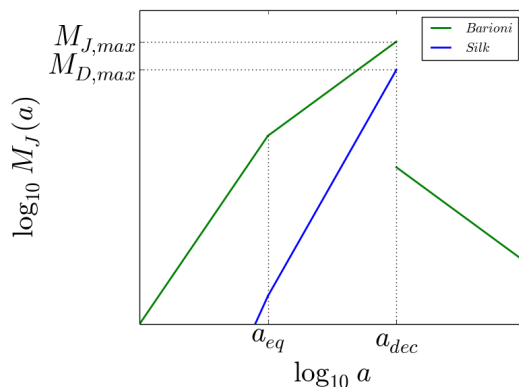


Figura 2.3: In figura è riportato in verde l'andamento qualitativo della massa di Jeans (M_J) ed in nero l'andamento della massa di Silk (M_D) per la materia barionica.

2.4 Crescita non lineare delle perturbazioni di densità

Finora abbiamo considerato soltanto il regime lineare della crescita delle perturbazioni di densità, trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo nel sistema (2.8). Seguire la non linearità del contrasto di densità che si misura oggi nelle strutture formate non è possibile analiticamente. Si possono, tuttavia, studiare delle soluzioni approssimate che descrivano, entro certe assunzioni, il comportamento di δ .

L'approssimazione più semplice (ma al contempo meno verosimile) è assumere che le strutture si formino per collasso perfettamente sferico. Possiamo quindi definire tre fasi distinte. Inizialmente la sovradensità δ si espande seguendo l'evoluzione dell'universo. Ad un istante t_m l'attrazione gravitazionale dovuta all'eccesso di densità nella perturbazione diventa dominante: la perturbazione inizia a comportarsi come un *piccolo* universo chiuso e collassa. Infine la pressione interna si oppone al collasso fintantoché questo non si arresta ad un tempo $t \sim 2t_m$, la struttura così formata poi raggiunge l'equilibrio viriale in un tempo $t \sim 3t_m$.

In questo modello molto semplificato l'ampiezza della fluttuazione di densità alla fine del collasso è $\delta \sim 10^2$ mentre seguendo la stessa perturbazione con la teoria lineare si otterrebbe un valore $\delta = 1.68$. Possiamo quindi utilizzare il valore del contrasto di densità ottenuto nel regime lineare come un valore di soglia: una struttura che nel regime lineare avrebbe $\delta = 1.68$ è completamente formata poiché tale valore corrisponde (nella corretta trattazione non lineare sferica) al contrasto di densità di una struttura virializzata. Questo approccio, che permette di riconoscere le strutture non lineari studiandole solo in regime lineare, prende il nome di teoria di Press-Schechter [55].

Un approccio differente e più generale al problema della crescita non lineare delle perturbazioni è dovuto a Zel'dovich [72]. Tale approccio è accurato in un regime *mildly non-linear*, cioè per valori di δ non troppo maggiori dell'unità, ma non richiede assunzioni a priori sulla geometria del collasso. Ponendo q la coordinata Lagrangiana della perturbazione ed r l'equivalente Euleriana in modo che $r(q, t) = a(t)q + F(q, t)$, l'assunzione di Zel'dovich è che il termine responsabile dei moti peculiari, $F(q, t)$, sia separabile in

$$F(q, t) = a(t)f(t)v(q),$$

dove $v(q)$ è il campo di velocità originato dalle perturbazioni iniziali, $a(t)$ è il fattore di scala introdotto nel Capitolo 1 e $f(t)$ è il fattore di crescita delle perturbazioni ottenuto seguendo l'approccio lineare. Da questa assunzione si ottiene che la densità della perturbazione è

$$\rho = \frac{\rho_B}{(1 + \delta_k \lambda_1)(1 + \delta_k \lambda_2)(1 + \delta_k \lambda_3)},$$

dove i tre autovalori λ_i determinano la geometria del collasso. Se tutti e tre sono negativi non si ha alcun collasso e si ottiene un vuoto in espansione; se solamente uno è positivo si ha collasso lungo una sola direzione e si ottengono strutture bidimensionali; se due sono positivi si ha collasso lungo due direzioni e si ottengono strutture filamentari; se tutti e tre sono positivi

si ha collasso triassiale. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$ si ritorna nel caso del collasso sferico.

I due approcci descritti permettono di seguire per via analitica il collasso non lineare delle perturbazioni di densità previa l'assunzione che esso sia sferico o che il termine $F(q, t)$ sia separabile. Un modo alternativo per studiare la non linearità delle fluttuazioni di densità, che non richiede assunzioni altrettanto forti, è seguirle attraverso simulazioni numeriche. La distribuzione di materia simulata viene discretizzata passando così da una distribuzione di densità continua ad un insieme di punti di data massa¹⁰. Si procede poi a risolvere le equazioni del moto per ognuno di questi punti, ad intervalli temporali definiti¹¹, aggiornando di volta in volta anche il potenziale gravitazionale da essi generato. Torneremo sulle simulazioni numeriche nel Capitolo 4.

2.5 *Clustering*: funzione di correlazione a due punti

Abbiamo visto, a questo punto, come e in quali condizioni le fluttuazioni di densità primordiali possano crescere ed evolvere. Ora possiamo approcciare il problema da un altro punto di vista, più ampio se vogliamo, e chiederci come queste singole perturbazioni di densità influiscano le une sulle altre. Il fenomeno di attrazione reciproca delle perturbazioni di densità, che si traduce poi nella formazione di strutture legate gravitazionalmente, viene detto *clustering* e può essere studiato da diverse prospettive. Siamo in particolar modo interessati a rappresentarlo attraverso la funzione di correlazione a due punti $\xi(r)$.

In un campo di densità continuo le fluttuazioni di densità possono essere rappresentate dal campo del contrasto di densità

$$\delta(x) \equiv \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}},$$

¹⁰L'approssimazione in questo caso è che la distribuzione discreta degli elementi di massa sia rappresentativa del comportamento della distribuzione continua di densità. Tale approssimazione è tanto più accurata quanto più elevato è il numero di elementi di massa considerato.

¹¹L'assunzione è che la discretizzazione temporale sia sufficientemente fitta da rappresentare in maniera accurata il cambiamento di velocità e posizione delle particelle e, conseguentemente, del potenziale. Ridurre l'intervallo temporale, così come aumentare il numero di elementi di massa, produce un risultato maggiormente accurato a scapito di un maggior tempo di calcolo.

dove $\bar{\rho}$ è la densità media e $\rho(x)$ la densità nel punto x considerato. Per il teorema di Bayes sulla probabilità condizionata la probabilità di avere una perturbazione di densità δ_1 , in un volume dV_1 , ad una certa distanza r da una perturbazione δ_2 in volume dV_2 è

$$dP_{12} \equiv dP(1|2) = dP(1)dP(2|1).$$

Se la distribuzione di densità fosse del tutto casuale e quindi gli oggetti si disponessero in maniera completamente omogenea si avrebbe

$$dP_{12} = \bar{\rho}^2 dV_1 dV_2. \quad (2.12)$$

Se tuttavia la distribuzione non è omogenea, per esempio per via della reciproca interazione gravitazionale delle perturbazioni che modifica la loro posizione, è necessario introdurre un fattore che tenga conto di quanto, ad ogni scala, la distribuzione devii da quella casuale. Tale termine correttivo è la funzione di correlazione a due punti, che entra nell'equazione (2.12) rendendo la probabilità sopradescritta

$$dP_{12} = \bar{\rho}^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(R)],$$

i cui termini, rapportati al teorema di Bayes, possono essere interpretati come segue: $\bar{\rho} dP_1 = dP(1)$, $\bar{\rho} [1 + \xi(r)] dV_2 = dP(2|1)$. Per definizione $\xi(r)$ vale 0 per ogni r nel caso della distribuzione casuale, restituendo il risultato di partenza.

La funzione di correlazione del campo (continuo) di densità rappresenta quindi l'eccesso o difetto di probabilità rispetto ad una distribuzione casuale di trovare due perturbazioni ad una data distanza. Una definizione esplicita di $\xi(r)$, che parte proprio dalla sua definizione concettuale, è

$$\begin{aligned} \xi(R) &= \frac{\langle \rho(x)\rho(x+R) \rangle - \bar{\rho}^2}{\bar{\rho}^2} \\ &= \frac{\langle [\rho(x) - \bar{\rho}][\rho(x+R) - \bar{\rho}] \rangle}{\bar{\rho}^2} \\ &= \langle \delta(x)\delta(x+R) \rangle, \end{aligned}$$

dove l'operatore $\langle \dots \rangle$ identifica la media spaziale su tutto il volume considerato. Si può osservare, quindi, che la funzione di correlazione evolve come δ^2 .

Per un risultato noto come teorema di Wiener-Khintchine la trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti è lo spettro di potenza $P(k)$, che rappresenta l'importanza delle perturbazioni di numero d'onda k nello spazio di Fourier. Sempre per il teorema di Wiener-Khintchine l'evoluzione temporale dello spettro di potenza segue da quella di $\xi(r)$ e risulta essere $P(k, t) \sim \delta_k^2(t)$.

2.5.1 Spettro di potenza della materia oscura

Abbiamo visto che, per il teorema di Wiener-Khintchine, la funzione di correlazione a due punti del campo di densità della materia è l'antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza $P(k)$. Siamo quindi interessati a studiare lo spettro di potenza della materia oscura per poter trarre le prime considerazioni teoriche sulla funzione di correlazione. All'uscita dall'inflazione le perturbazioni di densità hanno uno spettro a legge di potenza [50], anche detto *scale-free* dato che la pendenza logaritmica è uguale a tutte le scale. Quindi consideriamo uno spettro di potenza primordiale del tipo

$$P_i(k) \sim k^n,$$

dove n è detto indice spettrale. All'uscita dalla fase inflazionaria le fluttuazioni del campo gravitazionale sono indipendenti dalla scala della fluttuazione stessa, il che si traduce in un indice spettrale primordiale per lo spettro di potenza che vale ~ 1 [68] [51] [52].

Da quanto visto precedentemente le perturbazioni di densità al di fuori dell'orizzonte cosmologico crescono sempre. Se una scala k entra nell'orizzonte prima dell'equivalenza, tuttavia, questa subisce il fenomeno di stagnazione e non può più crescere¹² fino all'equivalenza tra materia e radiazione¹³, mentre le perturbazioni ancora fuori dall'orizzonte continuano a crescere.

Quindi per $k > k_H$ (dove k_H è la scala dell'orizzonte cosmologico) lo spettro non cresce per via della stagnazione delle perturbazioni, mentre per $k < k_H$ continua a crescere. Lo spettro di potenza primordiale a legge di potenza quindi si piega, mostrando un massimo in corrispondenza della scala dell'orizzonte $k_H(z)$. Questo processo continua fino all'equivalenza, momento dopo il quale le perturbazioni che entrano nell'orizzonte non subiscono più stagnazione. Da questo momento in poi tutto lo spettro ricomincia a crescere come δ_k^2 ed il massimo rimane fisso a $k_H(z_{eq})$.

Per scale k per le quali la perturbazione entra nell'orizzonte prima dell'equivalenza, la crescita di δ_k a partire da un tempo \bar{a} iniziale (per esempio l'uscita dall'inflazione) è solamente quella al di fuori dell'orizzonte

¹²O meglio, crescono di un fattore 5/2 indipendentemente dalla scala.

¹³Da notare che la scala dell'orizzonte cosmologico in termini di numeri d'onda k , che sono l'inverso di una lunghezza fisica, si restringe al passare del tempo. Le prime perturbazioni ad entrare nell'orizzonte sono quindi quelle a grandi k (e cioè a piccole scale fisiche). Successivamente entrano nell'orizzonte perturbazioni con k via via minore.

e quindi fino ad a_H . Per l'equazione (2.6), risulta quindi essere

$$\begin{aligned}\delta_k(a_{eq}) &= \delta_k(\bar{a}) \left(\frac{a_H}{\bar{a}} \right)^2 \\ &\sim \delta_k(\bar{a}) a_H^2 \\ &\sim \delta_k(\bar{a}) k^{-2}.\end{aligned}$$

Quindi per queste perturbazioni lo spettro primordiale $P_i(k)$ a legge di potenza viene modificato e diventa

$$\begin{aligned}P(k) &\sim \delta_k^2(a_{eq}) \\ &\sim \delta_k^2(\bar{a}) a_H^4 \\ &\sim P_i(k) k^{-4} \\ &\sim k^{n-4}.\end{aligned}$$

Tenendo conto di queste considerazioni lo spettro di potenza della materia oscura risulta essere (trascurando la crescita non lineare delle strutture)

$$P(k) = \begin{cases} k^n & \text{per } k < k_H(a_{eq}) \\ k^{n-4} & \text{per } k > k_H(a_{eq}) \end{cases} \quad (2.13)$$

con $n \sim 1$ [68], come riportato in Figura (2.4). A questo punto si può

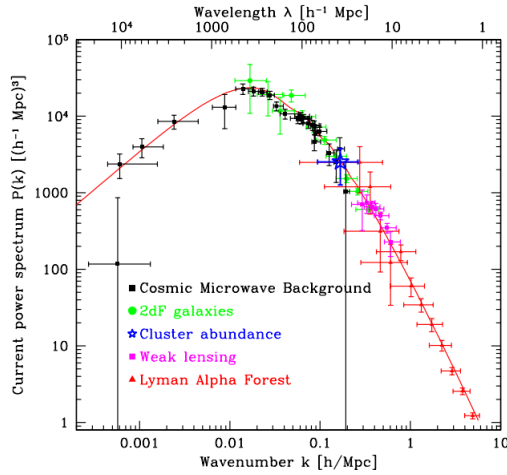


Figura 2.4: Spettro di potenza della materia oscura (linea continua rossa) confrontato con le informazioni sullo spettro di potenza calcolato con diversi traccianti opportunamente riscaldato tenendo conto del fattore di *bias* (vedi paragrafo successivo). I due andamenti descritti nel sistema (2.13) sono ben visibili. Immagine da Tegmark et al. (2002) [69].

ottenere la funzione di correlazione a due punti per la materia applicando l'anti-trasformazione di Fourier allo spettro di potenza osservato.

2.5.2 Oggetti come traccianti del campo di densità

Finora abbiamo considerato la funzione di correlazione del campo continuo di densità della materia, che tuttavia non è facilmente osservabile in modo diretto. È quindi necessario procedere con assunzioni che ci permettano di utilizzare oggetti osservabili come traccianti per la distribuzione totale della materia. Abbiamo visto nelle sezioni precedenti come le perturbazioni di densità dei barioni crescano in maniera differente da quelle della materia oscura. Dopo il disaccoppiamento la materia barionica collassa all'interno delle buche di potenziale già formate dalle perturbazioni di materia oscura. La formazione delle strutture, come le galassie, avviene all'interno di queste buche di potenziale non solo a seguito della gravità ma anche di svariati fenomeni astrofisici non gravitazionali, come *cooling* radiativo e collisionale e via discorrendo. Per questo motivo gli oggetti osservabili non tracciano direttamente la distribuzione continua di densità della materia anche se sono ad essa, in qualche modo, collegati.

In generale il contrasto di densità δ_{obj} di una qualsiasi classe di oggetti sarà funzione del contrasto di densità totale δ_m

$$\delta_{obj} = f(\delta_m).$$

La funzione f che lega l'una all'altra deve tener conto, implicitamente, di tutti i processi di astrofisica che portano alla formazione di una struttura a partire dalla perturbazione di densità iniziale e può dipendere da qualsiasi caratteristica fisica dell'oggetto considerato: massa, magnitudine, ricchezza...

Supponendo in prima approssimazione che f sia una funzione lineare possiamo introdurre il *fattore di bias* b e definire che

$$\delta_{obj} = b\delta_m,$$

dove b indica il livello di *clustering* di una determinata classe di oggetti rispetto a quello della materia oscura. Nello specifico, quando $b > 1$ significa che quella classe di oggetti ha *clustering* maggiore della distribuzione di materia sottostante. È immediato osservare che

$$b = \sqrt{\frac{\xi_{obj}(r)}{\xi_m(r)}}. \quad (2.14)$$

È stato osservato che, su un intervallo di scale che dipende dal tipo d'oggetto considerato, la funzione di correlazione a due punti è ben rappresentabile da una legge di potenza del tipo

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-\gamma},$$

dove R_0 è un raggio di scala, detto lunghezza di correlazione, per il quale $\xi(R_0) = 1$. La lunghezza di correlazione dipende dalle proprietà della classe d'oggetti considerata e dal redshift d'osservazione.

David & Peebles (1983) [17] hanno trovato che, per le galassie, la funzione di correlazione segue la legge di potenza sopradescritta su un intervallo compreso¹⁴ tra 10 e ~ 100 Mpc/ h , con un raggio scala $R_0 = 5.4$ Mpc/ h e $\gamma = 1.74$. In Marulli et al. (2013) [41] è stato studiato un campione di galassie estratto dalla VIMOS *Public Extragalactic Redshift Survey* (VIPERS) con redshift compreso tra 0.5 e 1.1 allo scopo di valutare la dipendenza del clustering dalla massa stellare degli oggetti e dalla loro luminosità, nonché l'evoluzione dei parametri di *clustering* con il redshift.

La funzione di correlazione a due punti del campione osservato per il campione osservato è riportata in Figura 2.5 nella quale si può osservare anche il buon accordo con ξ ottenuta da una simulazione semi-analitica (che funge da modello teorico).

In primo luogo si può notare che la pendenza della legge di potenza, quando calcolata tra 0.2 e 20 Mpc/ h , rimane sostanzialmente costante al variare della luminosità. La lunghezza di correlazione R_0 viceversa cresce al crescere della massa stellare e della luminosità. In entrambi i casi si nota un'evoluzione con il redshift. Nello specifico R_0 mostra una maggior dipendenza dalla luminosità ad alto z , mentre la sua evoluzione temporale è più significativa a basse luminosità (si vedano le Figure 2.6 e 2.7). In Figura 2.8 è invece riportato l'andamento del fattore di *bias*, negli intervalli di redshift considerati, con la massa stellare e con la luminosità.

Per gli ammassi di galassie, Collins et al (2000) [15] trovano che l'intervallo nel quale la funzione di correlazione segue una legge di potenza si estende fino ~ 40 Mpc/ h , con una lunghezza di correlazione $R_0 = 18.8$ Mpc/ h e $\gamma = 1.83$. Oggetti di massa maggiore, quindi, mostrano sistematicamente un fattore di *bias* e quindi (equazione 2.14) un *clustering* più elevato [32] [41] rispetto alla distribuzione di materia oscura.

Gli AGN sono una sottopopolazione di galassie dotate di un buco nero centrale attivo, responsabile di un'elevata luminosità bolometrica. Studiare il *clustering* di questa particolare classe di oggetti ha l'immediato vantaggio di poter estendere le osservazioni a redshift molto più elevati di quanto non si potrebbe fare con le galassie ordinarie per via della loro minore luminosità. In Bonoli et al. (2009) [9] si evidenzia come la funzione di correlazione a due punti degli AGN sia ben rappresentata, ad ogni z , da una legge di potenza nell'intervallo di scale [0.5 – 20] Mpc/ h (si veda Figura

¹⁴Al di sotto di 10 Mpc/ h la probabilità non nulla di avere due galassie nello stesso alone di materia oscura fa deviare la funzione di correlazione dalla legge di potenza.

2.9). La lunghezza di correlazione, tuttavia, mostra una significativa dipendenza dal redshift d'osservazione e dalla luminosità bolometrica degli oggetti (si veda Figura 2.10).

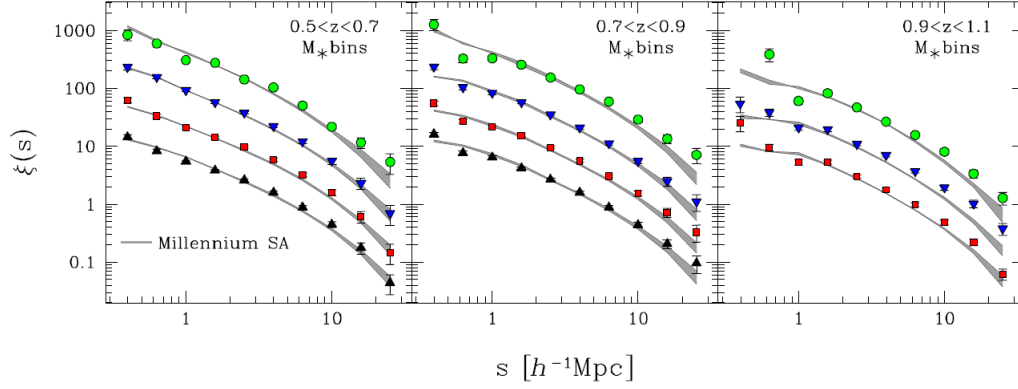


Figura 2.5: Funzione di correlazione a due punti delle galassie del catalogo di galassie VIPERS. I diversi punti indicano diversi bin di massa stellare (crescente dal basso verso l'alto), mentre le curve grigie sono un modello semi-analitico di confronto. Figura da Marulli et al. (2013) [41].

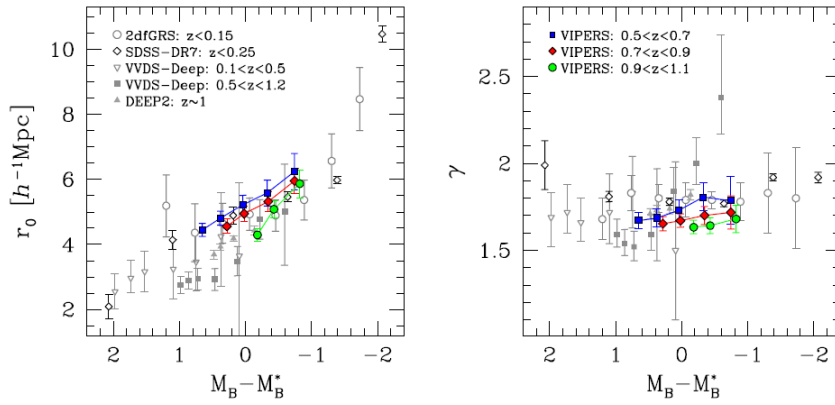


Figura 2.6: In figura sono riportati i risultati ottenuti sul catalogo di galassie VIPERS [41]. I punti blu si riferiscono all'intervallo di redshift $[0.5, 0.7]$, i punti rossi all'intervallo $[0.7, 0.9]$, i punti verdi all'intervallo $[0.9, 1.1]$. Come si può vedere la pendenza γ , pur mostrando un'evoluzione con il redshift, è sostanzialmente costante al variare della magnitudine. La lunghezza di correlazione invece mostra una chiara dipendenza dalla magnitudine (che si fa via via può forte spostandosi a redshift maggiori), ed un'evoluzione temporale più marcata a basse luminosità.

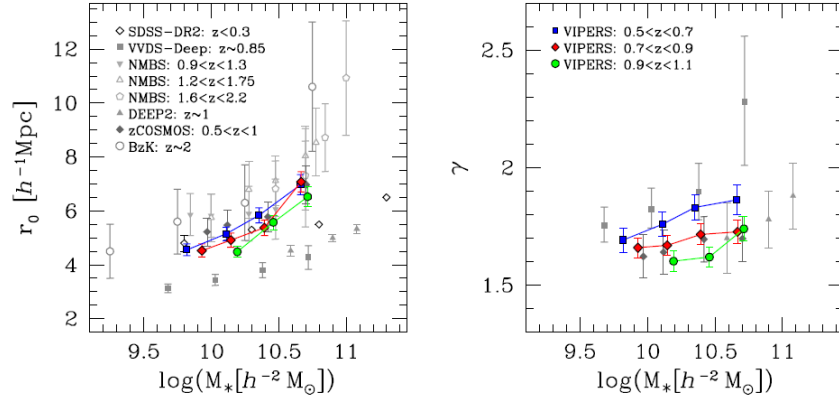


Figura 2.7: Analoghi risultati a quelli riportati in Figura 2.6, ma in funzione della massa stellare.

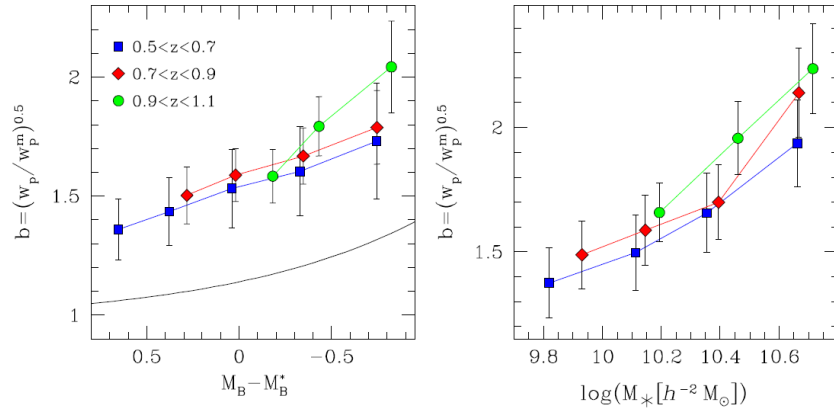


Figura 2.8: Dipendenza del fattore di bias da luminosità e massa stellare per il catalogo di galassie VIPERS [41]. Si può notare come il parametro b sia funzione crescente della massa stellare degli oggetti considerati, come osservato da Kaiser (1984) [32] anche per gli ammassi di galassie.

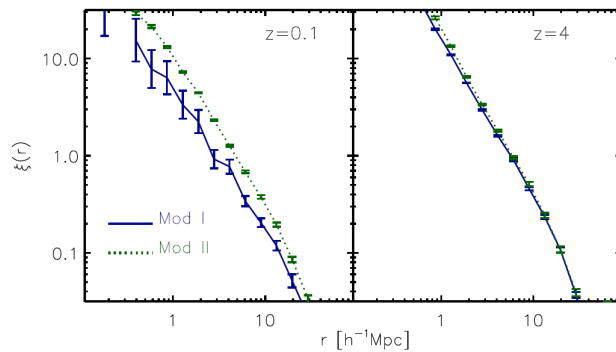


Figura 2.9: Funzione di correlazione a due punti, a $z = 0.1$ e $z = 4$, per un catalogo simulato di AGN prodotto dalla simulazione *Millennium*. Immagine da Bonoli et al. (2009) [9].

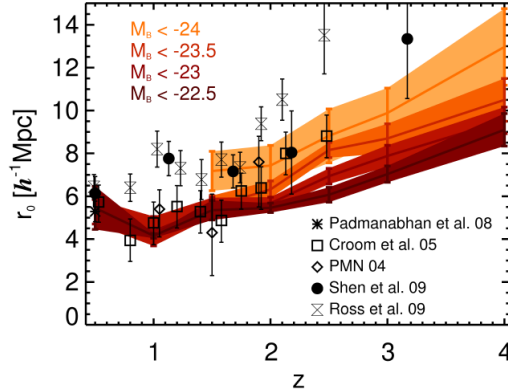


Figura 2.10: In figura sono riportati i risultati ottenuti da Bonoli et al. (2009) [9] per la lunghezza di correlazione degli AGN simulati (bande colorate), confrontati con le osservazioni (punti). Si notino l'evoluzione con il redshift e la dipendenza dalla luminosità bolometrica.

Sulla struttura filamentare dell'universo

Supponiamo ora di assumere per γ il valore approssimato di 1.8 per calcolare quante siano le galassie contenute mediamente in una sfera di raggio R . Siamo interessati quindi a contare tutti gli oggetti, in un certo volume, separati da una distanza $d < R$. Possiamo dunque integrare sul volume considerato la probabilità di avere due oggetti vicini ed ottenere che

$$\begin{aligned}
 N(d < R) &= \int_V dP(2|1) \\
 &= \int_V \bar{n}[1 + \xi(r)]dV \\
 &= \frac{4\pi}{3}R^3\bar{n} + \bar{n} \int_V \xi(r)dV,
 \end{aligned}$$

dove il primo termine nella somma ottenuta è il numero di oggetti che si otterrebbe da una distribuzione completamente casuale, mentre il secondo rappresenta la sovradensità dovuta al *clustering*. Se assumiamo che ξ sia isotropa¹⁵ l'integrale rimasto può essere scomposto in coordinate sferiche diventando

$$n(d < R) = \frac{4\pi}{3}R^3\bar{n} + 4\pi\bar{n} \int_0^R \xi(r)r^2 dr.$$

¹⁵Approfondiremo la legittimità di questa assunzione in seguito.

A piccole scale, dove $\xi(R) \gg 1$, il secondo termine dominerà sul primo fornendoci

$$\begin{aligned} N(d < R) &\sim \int_0^R r^{2-\gamma} dr \\ &= R^{3-\gamma} \\ &\sim R^{1.2}. \end{aligned}$$

Se avessimo una distribuzione omogenea tridimensionale di oggetti il numero d'oggetti contenuti in una sfera di raggio R crescerebbe come R^3 , nel caso invece una distribuzione stratificata su piani tale numero crescerebbe come R^2 e analogamente nel caso una distribuzione filamentare crescerebbe linearmente con R . Il risultato ottenuto suggerisce quindi che le galassie si distribuiscano tendenzialmente in strutture simili a filamenti come si può osservare nelle Figure 2.11 e 2.12.

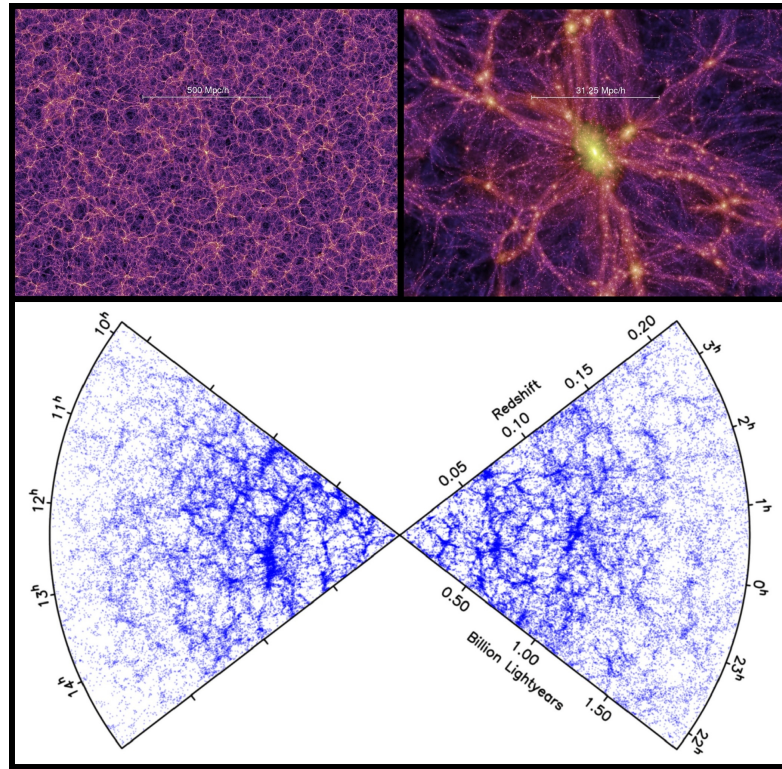


Figura 2.11: *Pannelli in alto*: immagini della distribuzione di galassie della simulazione *Millennium* [64]. *Pannello in basso*: distribuzione delle galassie osservate nella *2dF Galaxy Redshift Survey* [14]. In entrambi i casi si possono apprezzare le strutture filamentari su grande scala.

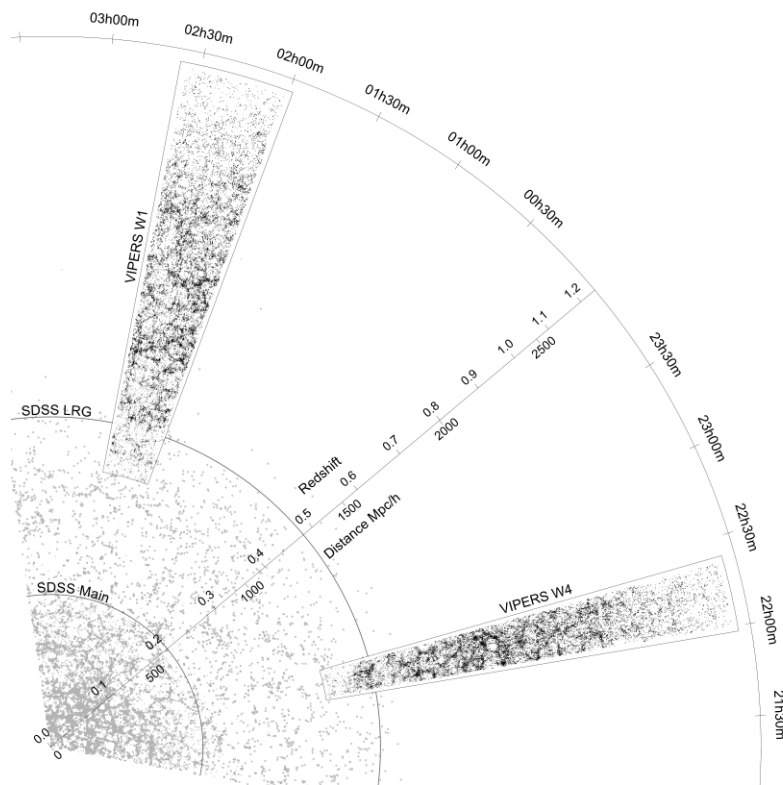


Figura 2.12: La stessa distribuzione filamentare è osservata anche ad alto redshift, come mostrato nella survey VIPERS, <http://vipers.inaf.it/>.

2.5.3 Stimatori della funzione di correlazione

Abbiamo visto come per il campo continuo del contrasto di densità la funzione di correlazione a due punti sia definita da

$$\xi(r) = \langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle$$

e come questa rappresenti l'eccesso o difetto di probabilità rispetto ad una distribuzione completamente casuale di trovare due perturbazioni di densità separate da una distanza r . Volendo tuttavia tracciare la distribuzione continua di materia con la distribuzione discreta di una classe di oggetti, queste definizioni vanno opportunamente riviste. Partendo sempre dalla definizione di $\xi(r)$ intesa come eccesso di probabilità di trovare due oggetti separati da una distanza r

$$dP_{12} = \bar{n}^2[1 + \xi(r)]dV_1dV_2, \quad (2.15)$$

possiamo misurare la funzione di correlazione confrontando il numero di coppie in un catalogo di oggetti con il numero contenuto in un catalogo random completamente omogeneo (e quindi con *clustering* nullo). Si ottiene così il più immediato stimatore della funzione di correlazione detto stimatore di Peebles-Hauser o stimatore naturale [49]:

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{dP_{12}}{dP_{random}} - 1 \\ &= \frac{N_{RR}}{N_{DD}} \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1 \end{aligned}$$

nel quale $DD(r)$ è il numero di coppie di oggetti alla distanza r , $RR(r)$ è il numero di coppie alla distanza r estratte dal catalogo random e N_{DD}/N_{RR} è il rapporto tra il numero di coppie dei due cataloghi.

Tale stimatore è tuttavia particolarmente sensibile a fluttuazioni derivanti dalla discretezza delle due distribuzioni (si veda ad esempio Kerscher et al. (2000) [34] e Labatie et al. (2010) [36]) e non rappresenta quindi una scelta ottimale per la misura di ξ . Più efficiente è invece lo stimatore proposto da Landy-Szalay [37] che include anche le *cross-coppie* $DR(r)$ tra il catalogo osservato e la distribuzione casuale:

$$\xi_{LS}(R) = 1 + \frac{N_{RR}DD(R)}{N_{DD}RR(R)} - 2\frac{N_{RR}DR(R)}{N_{DR}RR(R)}. \quad (2.16)$$

Nel caso in cui il catalogo osservato e quello random abbiano lo stesso numero d'oggetti (e quindi $N_{DD} = N_{RR} = N_{DR}$) lo stimatore diventa semplicemente:

$$\xi_{LS}(R) = \frac{DD(R) - 2DR(R) + RR(R)}{RR(R)}.$$

Questo stimatore, come osservato in Labatie et al. (2010) [36], risente in misura minore di fluttuazioni derivanti dalla discretezza dei cataloghi che introducono ora solamente termini al second'ordine. La sua varianza è inoltre quasi del tutto *poissoniana* e dipendente quindi solo dalla radice del numero di coppie del catalogo, $\sqrt{N_{DD}}$. Per questi motivi in questo lavoro di Tesi si è fatto uso solamente dello stimatore di *Landy-Szalay* per il calcolo della funzione di correlazione a due punti, anche se questo comporta un incremento del tempo di calcolo dovuto alla necessità di contare anche le coppie miste tra catalogo e distribuzione casuale. Torneremo sul metodo utilizzato per calcolare la funzione di correlazione attraverso questo stimatore nel Capitolo 5.

2.6 Funzioni di correlazione agli ordini superiori

Per stimare le proprietà del *clustering* di una distribuzione di oggetti abbiamo considerato solamente la funzione di correlazione a due punti che descrive, come illustrato nei paragrafi precedenti, l'eccesso o il difetto di probabilità di trovare due oggetti ad una distanza r rispetto alla distribuzione omogenea. Per descrivere completamente le caratteristiche di una distribuzione di N oggetti, tuttavia, è necessario conoscere tutte le funzioni di correlazione fino all'ordine $N - 1$. Procediamo quindi, brevemente, generalizzando quanto esposto finora per la funzione di correlazione a due punti per definire le funzioni di correlazione agli ordini superiori.

L'eccesso di probabilità di trovare una struttura di m punti separati da un vettore di distanze $\mathbf{r} = r_{ij}$, con $(i, j) \in [1, n] \times [1, n]$, è definito in maniera analoga all'equazione (2.15) da:

$$dP_m = \bar{n}^m [1 + \xi_m(\mathbf{r})] dV_1 dV_2 \dots dV_m. \quad (2.17)$$

La funzione ξ_m è detta funzione di correlazione di ordine m *totale* e contiene in contributi di tutte le funzioni di correlazione d'ordine $p < m$. Per esempio, l'eccesso di probabilità di trovare un tripletto rispetto ad una distribuzione omogenea è in parte dovuto all'eccesso di probabilità di trovare, nella stessa distribuzione, una coppia d'oggetti. Prendendo a titolo d'esempio la funzione di correlazione a tre punti, possiamo quindi separare le componenti dell'equazione (2.17) in

$$dP_3 = \bar{n}^3 [1 + \xi_{1,2} + \xi_{2,3} + \xi_{1,3} + \zeta_{1,2,3}] dV_1 dV_2 dV_3,$$

dove $\xi_{i,j} = \xi(r_{ij})$ e $\zeta_{i,j,k} = \zeta(r_{ij}, r_{jk}, r_{ik})$, che non dipende dalle funzioni di correlazione di ordine inferiore, è detta componente connessa (o irriducibile)

della funzione di correlazione.

La funzione di correlazione di ordine m è tuttavia più difficile da interpretare rispetto a $\xi_2(r)$ perché dipende da tutte le distanze che separano gli m punti considerati. È quindi utile costruire un modello che permetta di descrivere ξ_m in termini delle funzioni di ordine $m - 1$, così da potersi sempre ridurre al caso di ordine 2. Essendo la funzione di correlazione a due punti, entro certe scale, una legge di potenza (ed essendo quindi *scale-free*) si può assumere che l'invarianza di scala sia valida anche agli ordini superiori. Sotto tale assunzione si ottiene, per la parte connessa di ξ_3 ,

$$\zeta_{1,2,3} = Q(\xi_{1,2}\xi_{2,3} + \xi_{2,3}\xi_{3,1} + \xi_{3,1}\xi_{1,2}), \quad (2.18)$$

dove Q è una costante opportuna. L'appropriata generalizzazione dell'equazione (2.18) per le funzioni di correlazione di ogni ordine risulta essere:

$$\zeta_m = \sum_{\mathcal{T}} Q_{m,\mathcal{T}} \sum_{\text{relabelling edges}} \prod \xi_{i,j}. \quad (2.19)$$

La notazione dell'equazione (2.19) è da interpretarsi come segue: il prodotto tra le funzioni di correlazione degli $m - 1$ punti considerati, sommato su tutte le possibili permutazioni di indici con i quali si denotano gli oggetti e nuovamente sommato su tutti i possibili grafi (identificati dalle topologie \mathcal{T}) che connettono gli m oggetti considerati. In questa notazione $Q_{m,\mathcal{T}}$ pesa opportunamente i vari contributi e dipende dal numero d'oggetti e dalla topologia considerata.

Capitolo 3

Il test di Alcock-Paczynski

Undicesimo Dottore: *Look... the round things!*

Decimo Dottore: *Love the round things.*

Undicesimo Dottore: *What are the round things?*

Decimo Dottore: *No idea.*

- Undicesimo Dottore alla sua precedente incarnazione

Finora abbiamo trattato la funzione di correlazione a due punti come dipendente solamente dalla distanza tra due oggetti, senza preoccuparci di definire una separazione vettoriale che tenesse conto della direzione lungo la quale i due oggetti sono separati. Questo è giustificato, solo in parte, dall'assunzione di isotropia implicita nel principio cosmologico, ma come vedremo a breve sono necessarie alcune accortezze. Ci sono infatti degli effetti che modificano la funzione di correlazione in maniera differente lungo la linea di vista e perpendicolarmente ad essa, permettendoci di dedurre i parametri cosmologici (e nello specifico Ω_m) proprio a partire da queste distorsioni.

3.1 La funzione di correlazione a due punti bidimensionale

È innanzitutto opportuno scrivere una funzione di correlazione a due punti bidimensionale, scomponendo $\xi(r)$ lungo le due direzioni perpendicolare e parallela alla linea di vista. Introduciamo cioè $\xi_{2D}(r_{\perp}, r_{\parallel})$, dove r_{\perp} e r_{\parallel} sono rispettivamente le separazioni di due oggetti perpendicolarmente e parallelamente alla linea di vista. Essendo valido il principio cosmologico non ci sono direzioni privilegiate nella misura di ξ ed il segnale è quindi isotropo. Le curve di isocorrelazione della funzione di correlazione bidimensionale devono essere circolari.

Partendo da questo presupposto ed in assenza di distorsioni che ne modifichino la forma, la funzione di correlazione bidimensionale si può scrivere semplicemente come $\xi_{2D}(r_{\perp}, r_{\parallel}) = \xi_{1D}(\sqrt{r_{\perp}^2 + r_{\parallel}^2})$.

3.1.1 Distorsioni dinamiche

Il primo effetto di distorsione, di carattere puramente osservativo, ha a che fare con la misura stessa delle distanze e con il fatto che queste non sono direttamente determinabili ma vanno estrapolate da altri osservabili diretti, ad esempio il redshift [61].

Come visto in precedenza, la legge di Hubble descrive una relazione lineare tra la velocità di recessione degli oggetti astronomici (e quindi il loro redshift) e la loro distanza dall'osservatore. Tuttavia per poter effettivamente misurare questa distanza è necessario assumere che gli oggetti cui ci si riferisce siano a riposo e risentano soltanto dell'espansione dell'universo, senza moti propri che contaminino il redshift. Sappiamo tuttavia che le galassie hanno dei moti propri e questi generano un effetto Doppler vero e proprio che va a sommarsi al redshift cosmologico:

$$z_{osservato} = z_H + \frac{v_{\parallel}}{c}(1 + z_H), \quad (3.1)$$

dove z_H è il contributo al redshift osservato del flusso di Hubble al quale va a sommarsi un termine che dipende dalla velocità lungo la linea di vista, v_{\parallel} , dell'oggetto considerato.

Fingers of God

A piccole scale, in termini di distanza di separazione tra gli oggetti, la velocità è dominata dal moto casuale degli oggetti dentro gli ammassi. Lungo la linea di vista si ha quindi un effetto Doppler significativo che perturba la

misura delle distanze in maniera casuale, analogamente a quanto accadrebbe introducendo un'incertezza nella misura del redshift cosmologico. Questo effetto produce una distorsione nella funzione di correlazione a due punti bidimensionale, allungandola lungo la linea di vista: a piccole scale si tenderà quindi a sovrastimare la probabilità di avere due oggetti a una data distanza r .

Effetto Kaiser

Su grandi scale, viceversa, la misura delle distanze è influenzata dal moto coerente degli oggetti. Le galassie, per esempio, si muovono verso gli ammassi in maniera coerente e questo moto modifica il loro redshift osservato. A scale sufficientemente grandi aumenterà la probabilità di osservare due oggetti in moto verso l'ammasso, ma in direzioni opposte. L'effetto Doppler dovuto al loro moto proprio tenderà a sottostimare la differenza tra i loro redshift e, di conseguenza, a sottostimarne la distanza. Due oggetti ad una distanza lungo la linea di vista r_{\parallel} appariranno quindi ad una distanza $r'_{\parallel} < r_{\parallel}$. Pertanto a grandi scale ξ_{2D} verrà appiattita lungo la linea di vista, distorcendo i cerchi in ellissi.

Questi due effetti sono detti *distorsioni dinamiche* (o RSD, da redshift-space distortions) e sono insite in ogni osservazione. Entrambi gli effetti colpiscono maggiormente gli oggetti *piccoli*, come le galassie, che mostrano moti propri più elevati all'interno degli ammassi e movimenti coerenti più intensi mentre cadono negli ammassi.

In linea di principio è possibile modellare e rimuovere la contaminazione del redshift cosmologico causata dalla velocità lungo la linea di vista degli oggetti considerati. D'ora in avanti chiameremo *spazio dei redshift* lo spazio in cui il redshift cosmologico non è stato decontaminato dai moti propri ed in cui la funzione di correlazione mostra le distorsioni sopra descritte; mentre chiameremo lo spazio in cui il redshift è solamente cosmologico, e quindi direttamente legato alle distanze, *spazio reale*.

3.1.2 Distorsioni geometriche

Una volta eliminate le RSD, quindi una volta *tornati* nello spazio reale, ci si potrebbe aspettare che la funzione di correlazione bidimensionale ritorni nuovamente ad essere perfettamente circolare. Questo è tuttavia verificato solamente se i parametri cosmologici utilizzati per misurare le distanze sono quelli *corretti*. In caso contrario si introducono delle distorsioni geometriche che modificano ulteriormente (sia nello spazio reale che nello spazio dei

redshift) la forma delle curve di isocorrelazione.

Supponiamo quindi di aver modellato e rimosso completamente le RSD e di voler ora misurare la distanza tra due oggetti nel piano $(r_{\perp}, r_{\parallel})$. Per misurare la loro separazione dovremo partire da due osservabili distinti, nello specifico una differenza tra i redshift dei due oggetti Δz ¹ per quanto riguarda la separazione lungo la linea di vista ed una separazione angolare $\Delta\theta$ per la componente perpendicolare alla linea di vista. A questo punto possiamo trasformare questi osservabili nelle separazioni che ci interessano ed ottenere

$$r_{\parallel} = \frac{c}{H(z)}\Delta z, \quad r_{\perp} = (1+z)D_A(z)\Delta\theta,$$

dove D_A è la distanza di diametro angolare definita da

$$D_A(z) = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

Si può notare fin d'ora come le due componenti della distanza dipendano in maniera differente dalla costante di Hubble (e quindi dal modello cosmologico adottato). Modificare il modello cosmologico comporta quindi l'introduzione di una distorsione delle lunghezze lungo le due direzioni, dovuta al fatto che r_{\parallel} e r_{\perp} variano in maniera diversa al variare di $H(z)$ e, come vedremo a breve, di Ω_i .

In particolare, dati due modelli cosmologici contrassegnati dai pedici 1 e 2, si avrà che

$$r_{\parallel 1} = \frac{H_2(z)}{H_1(z)} r_{\parallel 2}$$

e

$$r_{\perp 1} = \frac{D_{A,1}(z)}{D_{A,2}(z)} r_{\perp 2}.$$

Tutto ciò è verificato anche nello spazio dei redshift, nel quale queste distorsioni vanno a sommarsi alle RSD viste in precedenza. Queste distorsioni sono dette *distorsioni geometriche*, dato che hanno a che fare direttamente con la geometria dell'universo, e consentono di effettuare un test per la determinazione dei parametri cosmologici.

¹ Δz è ora soltanto composto dal redshift cosmologico, avendo rimosso le RSD, e quindi direttamente legato alla distanza lungo la linea di vista.

3.2 Il test di Alcock-Paczynski sulla funzione di correlazione bidimensionale

Supponiamo, per ora, di lavorare nello spazio reale. Il principio cosmologico impone che le curve di isocorrelazione nel piano $(r_{\perp}, r_{\parallel})$ siano, ammesso di aver utilizzato i corretti parametri cosmologici per calcolare le distanze, perfettamente circolari. Come già detto, infatti, non c'è ragione per cui si dovrebbe avere, ad esempio, una diversa probabilità di trovare due oggetti separati da una distanza r lungo la linea di vista rispetto a due oggetti separati sempre da r ma perpendicolarmente alla linea di vista.

Se tuttavia si assumono parametri cosmologici non corretti per misurare le distanze, si introdurranno le distorsioni geometriche descritte sopra: lo spazio verrà distorto in modo diverso lungo le due direzioni, facendo sì che i cerchi cessino di essere tali.

Le curve di isocorrelazione possono quindi essere usate come *cerchi standard*, allo stesso modo in cui le *baryonic acoustic oscillations* (BAO) e le supernove possono essere considerate rispettivamente righelli e candele standard, ed utilizzate come test per determinare i parametri cosmologici.

Con questo test, detto test di Alcock-Paczynski (AP test) dal nome dei due astrofisici che per primi lo proposero [1], è possibile identificare il giusto insieme di parametri cosmologici, che sarà l'unico ad annullare le distorsioni geometriche su un'osservabile dalla geometria nota, nel nostro caso le curve di isocorrelazione. Qualunque altra scelta dei parametri modificherà r_{\parallel} e r_{\perp} (a partire dagli stessi Δz e $\Delta\theta$ osservati) in maniera diversa l'uno dall'altro introducendo le distorsioni sopra descritte.

Il test può essere effettuato anche nello spazio dei redshift nel quale però, come vedremo nel Capitolo 5, si complica notevolmente.

In ogni caso, che si stia lavorando nello spazio reale o nello spazio dei redshift, è in linea di principio possibile identificare i giusti parametri cosmologici che annullino le distorsioni geometriche e riportino le curve di isocorrelazione alla forma circolare aspettata. Il test applicato alla funzione di correlazione a due punti bidimensionale consiste, all'atto pratico, esattamente in questo: misurare la funzione di correlazione a due punti utilizzando diverse cosmologie ed identificare quale non presenti (o presenti le minori) distorsioni geometriche.

Finora abbiamo considerato, per descrivere le distorsioni geometriche, solamente la diversa dipendenza da $H(z)$ in r_{\parallel} e r_{\perp} . Supponiamo ora di voler imporre la piattezza dell'universo e quindi $\Omega_{0,tot} = 1$. Trascurando il contributo della radiazione e ponendo $w_{\Lambda} = -1$, possiamo riscrivere $H(z)$,

esplicitando la sua dipendenza dalla sola $\Omega_{0,m}$, come segue

$$H(z) = H_0(1+z) [\Omega_{0,m}(1+z) + (1-\Omega_{0,m})(1+z)^{-2}]^{1/2}.$$

Quindi anche la modifica del solo parametro di densità della materia, imponendo $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_{0,m}$ dimodoché la geometria dell'universo non cambi, genera delle distorsioni geometriche dato che ora è $\Omega_{0,m}$ che entra (attraverso $H(z)$) in maniera differente dentro ad r_\parallel e r_\perp . Possiamo quindi misurare le distanze e le curve di isocorrelazione al variare anche solamente di $\Omega_{0,m}$, e vedere quando le distorsioni geometriche si annullano.

È interessante notare che l'effetto di distorsione geometrica non dipende solo dalla cosmologia ma anche dal redshift d'osservazione. Per osservare questa dipendenza introduciamo il rapporto $F(z)$ tra l'ampiezza delle distorsioni geometriche introdotte dal modello cosmologico *corretto* (pedice *corretto*) e dal modello di test (pedice *errato*)

$$\begin{aligned} F(z) &\equiv \frac{[r_\parallel/r_\perp]_{errato}}{[r_\parallel/r_\perp]_{corretto}} \\ &= \frac{r_{\parallel errato}/r_{\parallel corretto}}{r_{\perp errato}/r_{\perp corretto}} \\ &= \frac{[D_A(z)H(z)]_{corretto}}{[D_A(z)H(z)]_{errato}}. \end{aligned}$$

Se $F = 1$ siamo nella cosmologia corretta e non ci sono distorsioni geometriche, se $F > 1$ significa che la distorsione lungo la linea di vista è maggiore di quella perpendicolare (*LOS-stretching*) e viceversa se $F < 1$ (*LOS-shrinking*).

Nel recente lavoro di Li et al. (2015) [38] viene tra le altre cose studiato l'andamento di $F(z)$ in due diverse cosmologie, una con $\Omega_{0,m} < \Omega_{0,m}^{true}$ e una con $\Omega_{0,m} > \Omega_{0,m}^{true}$. In entrambi i casi l'ampiezza delle distorsioni geometriche cresce all'aumentare del redshift, con *LOS-shrinking* per $\Omega_{0,m} > \Omega_{0,m}^{true}$ e *LOS-stretching* per $\Omega_{0,m} < \Omega_{0,m}^{true}$.

Riassumendo: per passare dagli osservabili (Δz e $\Delta\theta$) alle distanze fisiche (r_\parallel e r_\perp) si possono introdurre delle distorsioni dovute alla non corretta assunzione dei parametri cosmologici. Queste distorsioni modificano di conseguenza la forma delle curve di isocorrelazione. Abbiamo inoltre visto brevemente che l'effetto di distorsione geometrica è più rilevante all'aumentare del redshift. Tuttavia a redshift elevati anche le distorsioni dinamiche diventano più rilevanti, rendendo l'effetto di distorsione geometrica maggiormente visibile attorno a $z \sim 1$ [3].

L'AP test consiste sostanzialmente nel ripetere la misura della funzione di

correlazione a due punti bidimensionale, variando i parametri cosmologici, fino a che le distorsioni geometriche non si annullino (quanto meno entro gli errori). È un test in linea di principio molto efficace per stimare $\Omega_{0,m}$, dato che necessita solamente di un catalogo d'oggetti dal quale estrarre la funzione di correlazione senza bisogno di assunzioni teoriche (eccezion fatta per l'omogeneità e isotropia).

In questo lavoro abbiamo effettuato l'AP test sui cataloghi prodotti dalla simulazione idrodinamica cosmologica *Magneticum* per testarne l'efficacia. In una simulazione i parametri cosmologici sono fissi e noti ed il test dovrebbe quindi restituire (entro gli errori) i parametri con cui la simulazione è stata costruita².

3.3 Implementare il test di Alcock-Paczynski

Ci sono almeno due approcci differenti per effettuare l'AP test sulla funzione di correlazione di un catalogo osservato.

3.3.1 Metodo *standard*

Un metodo largamente utilizzato [16] [48] [29] [57] [5] consiste nel misurare la funzione di correlazione a due punti considerando una sola cosmologia, detta cosmologia *assunta*. A questo punto, considerando varie cosmologie di test, si produce un modello semi-analitico di funzione di correlazione che includa le distorsioni dinamiche. Per ogni modello si aggiungono quindi le distorsioni geometriche che lo trasformano dalla cosmologia di test a quella *assunta* per la misura di ξ . Solo nel caso in cui la cosmologia di test coincida con quella *reale* l'aggiunta delle distorsioni geometriche porterà la funzione di correlazione modellata in accordo con quella misurata.

Quest'approccio consiste sostanzialmente nel variare le distorsioni geometriche di un modello *corretto* fintantoché questo non rappresenti i dati. Il principale problema è che in questo caso bisogna assumere che il modello sia, appunto, *corretto* e cioè che descriva le distorsioni dinamiche in maniera sufficientemente accurata. Per costruire tale modello è necessario calcolare una funzione di correlazione a partire dallo spettro di potenza della materia oscura e assumere un modello di *bias* che tenga conto del tracciante considerato. A questo punto è necessaria un'accurata modellizzazione delle distorsioni dinamiche. In caso contrario una scelta

²I risultati ottenuti sono quindi da intendersi come una stima della bontà del test in sé e/o del metodo utilizzato per implementarlo.

sfortunata nella loro modellizzazione può tradursi in un accordo fittizio tra dati e modello e quindi non identificare la corretta cosmologia. Tuttavia l'immediato vantaggio di questo approccio è che esso richiede la misura di ξ solamente per una cosmologia, quella *assunta*, permettendo un notevole risparmio di tempo di calcolo rispetto all'approccio descritto in seguito.

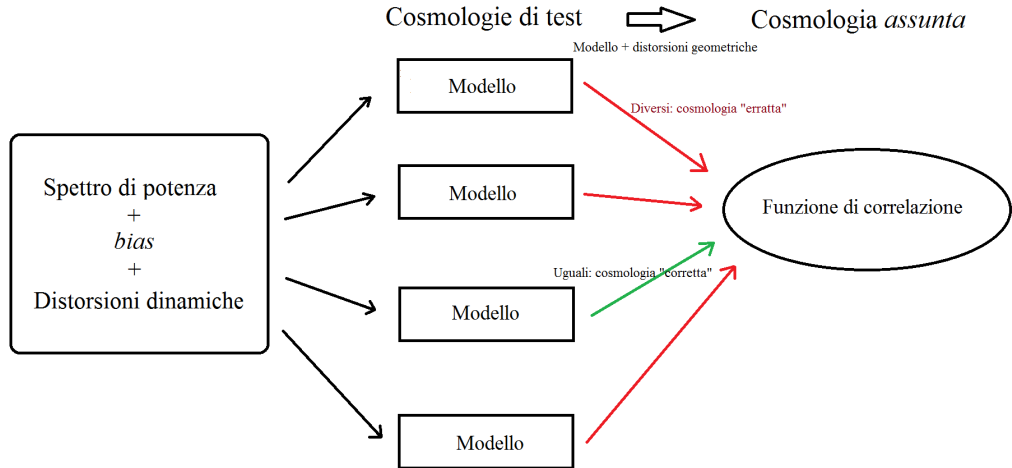


Figura 3.1: Rappresentazione schematica del primo approccio per implementare l'AP test. Misurata la funzione di correlazione con una cosmologia *assunta* si procede a creare per varie cosmologie di test un modello di ξ . Solo funzione di correlazione modellata con la *corretta* cosmologia di test, una volta inserite nel modello le distorsioni geometriche, sarà in accordo con la funzione di correlazione misurata per la cosmologia *assunta*.

3.3.2 Un metodo *alternativo*

Un approccio alternativo, adottato in questo lavoro e descritto più in dettaglio in Marulli et al. (2012) [40] (e sul quale torneremo nel capitolo 5), è il seguente. Si misura la funzione di correlazione su un catalogo di oggetti per un insieme di cosmologie di test. A questo punto si produce un modello a partire dalla funzione di correlazione nello spazio reale per ogni cosmologia di test. In tale modello si includono poi le sole distorsioni dinamiche attraverso un fit.

In questo modo, per ogni cosmologia di test, si ottiene un modello senza distorsioni geometriche che andrà confrontato con la funzione di correlazione misurata. L'accordo tra misura e modello sarà migliore quando le distorsioni geometriche di ξ sono minori e quindi quando i parametri cosmologici delle varie cosmologie di test sono più vicini a quelli *corretti*. In questo approccio il modello non prevede l'inclusione delle distorsioni

geometriche e quindi ci sarà accordo con la funzione di correlazione misurata solo considerando la giusta cosmologia, cioè quando le distorsioni geometriche sono nulle per definizione: per tutte le altre cosmologie il fit delle distorsioni dinamiche (che può comunque presentare delle difficoltà) non riuscirà comunque a rappresentare altrettanto bene i dati, che presentano invece distorsioni geometriche non nulle. In questo approccio non è quindi necessaria una buona modellizzazione a priori delle distorsioni dinamiche, richiesta invece dal primo approccio. La costruzione del modello inoltre può partire semplicemente dalla funzione di correlazione misurata nello spazio reale³ senza necessità di assunzioni per il *bias*. L'evidente svantaggio di questo metodo rispetto al precedente è che richiede un tempo di calcolo notevolmente superiore, dato che necessita della misura della funzione di correlazione in ogni cosmologia di test.

Si è deciso di seguire il secondo dei due approcci sopra descritti perché meno sensibile all'accuratezza della modellizzazione delle distorsioni dinamiche, quantomeno al netto di problemi numerici nel calcolo dei parametri di *best-fit* con i quali le si descrive. La descrizione dettagliata del codice utilizzato per implementare l'AP test in questo lavoro è riportata nel Capitolo 5.

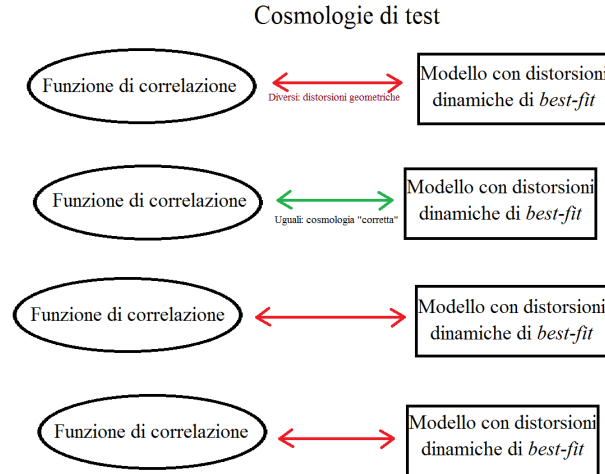


Figura 3.2: Rappresentazione schematica del secondo approccio possibile per implementare l'AP test, utilizzato in questo lavoro di Tesi. Per ogni cosmologia si misura la funzione di correlazione e si crea un modello, senza distorsioni geometriche. Solo per la cosmologia *corretta* ξ misurata e modello saranno in accordo.

³La funzione di correlazione nello spazio reale può essere misurata direttamente, nel caso di simulazioni, oppure ottenuta deproiettando la funzione di correlazione misurata nello spazio dei redshift [44], nel caso di un'osservazione.

Capitolo 4

La simulazione cosmologica *Magneticum*

Trust the plastic.

- Rory Williams, l'ultimo centurione

Lo scopo di una simulazione numerica è la risoluzione di problemi non trattabili analiticamente (come il moto di N corpi gravitazionalmente legati, il comportamento turbolento di un fluido viscoso o, caso di interesse per questo lavoro, la crescita non lineare delle perturbazioni di densità). Nel caso di simulazioni dinamiche, nelle quali si studia l'evoluzione di un sistema di particelle gravitazionalmente interagenti, si procede discretizzando il campo di densità responsabile del potenziale gravitazionale e si calcolano le forze agenti su ogni elemento di massa ad ogni intervallo temporale (anch'esso discreto). Tanto più fini sono le discretizzazioni del campo di densità e dell'intervallo temporale sul quale integrare le equazioni del moto tanto più la simulazione sarà accurata. Aumentare tuttavia la risoluzione in massa, permettendo di seguire meglio il campo di densità *reale*, o la risoluzione temporale ha tuttavia un impatto sul tempo di calcolo.

In questo capitolo si provvederà ad introdurre, in generale, il funzionamento delle simulazioni numeriche ed i vari approcci che si possono seguire per implementare nei codici le equazioni che descrivono la gravità, per le simulazioni dinamiche, e l'idrodinamica, per le simulazioni idrodinamiche. Dopo tale introduzione si procederà a descrivere la simulazione cosmologica idrodinamica *Magneticum* e verranno illustrate le caratteristiche

fondamentali dei cataloghi da essa estratti, sui quali è stato effettuato il test di Alcock-Paczynski in questo lavoro di Tesi.

4.1 Simulazioni N -body

Modellando il potenziale gravitazionale generato da una distribuzione discreta di particelle è possibile, ad ogni intervallo temporale, aggiornare posizione e velocità di ogni particella misurando la forza netta che agisce su di essa. Tale operazione può essere svolta in vari modi, in maniera più o meno efficace in termini di risoluzione e/o tempo di calcolo.

In questa sezione verranno analizzate brevemente le equazioni del moto di una generica simulazione cosmologica e saranno descritti i principali metodi per implementare un codice per una simulazione N -body¹.

4.1.1 Le equazioni del moto

Il moto di una particella di massa unitaria è determinato da

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\phi,$$

nella quale \mathbf{r} è la posizione della particella, $\ddot{\mathbf{r}}$ è la sua accelerazione e ϕ è il potenziale gravitazionale dato dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(t, \mathbf{r}),$$

dove $\rho(t, \mathbf{r})$ è la densità di materia che genera il campo gravitazionale. Ponendosi per praticità in coordinate comoventi, \mathbf{x} , le equazioni che descrivono posizione e velocità di ogni punto diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\mathbf{x}} + 2\frac{\dot{a}\dot{\mathbf{x}}}{a} = -\frac{\nabla\phi}{a^2} \\ \nabla^2\phi = 4\pi G [\rho(t, \mathbf{x}) - \bar{\rho}] = \frac{3H_0^2\Omega_0\delta}{2a} \end{array} \right., \quad (4.1)$$

dove a è il fattore di scala e H_0 è la costante di Hubble definiti nel Capitolo 1, mentre $\bar{\rho}$ è la densità media.

Queste equazioni vanno integrate per ogni particella ad ogni intervallo temporale, con posizione e velocità al tempo t_1 che diventano le condizioni iniziali per l'integrazione fino al tempo t_2 .

¹Questa sezione è da intendersi come una breve introduzione al ben più vasto argomento, decisamente più complesso, delle simulazioni dinamiche. Per una trattazione più dettagliata, riguardante più nello specifico le simulazioni cosmologiche, si vedano ad esempio gli articoli di Efstathiou et al. (1985) [19] e Bagla (2005) [2].

4.1.2 Principali metodi d'implementazione per simulazioni N -body

Particle-Particle

Il metodo concettualmente più semplice per implementare un codice che integri le equazioni del sistema (4.1) è detto Particle-Particle (o PP) e consiste nel calcolare, ad ogni intervallo temporale Δt , la forza agente su ogni particella come somma dei contributi della forza generata su di essa da ogni altra particella. Ad ogni intervallo temporale si sommano le forze su tutte le $N(N - 1)/2$ coppie di particelle e si integrano le equazioni del moto per calcolare le nuove velocità e posizioni di ogni particella. Al che si aggiorna il contatore temporale, si azzerano le forze sulle coppie e si procede iterativamente nel medesimo modo.

È necessario considerare che la forza gravitazionale tra particelle a piccola distanza tende ad infinito, ponendo notevoli problemi numerici. È quindi opportuno evitare interazioni su scale troppo piccole, che necessiterebbero di risoluzione temporale troppo elevata per essere ben rappresentate. Si introduce quindi un parametro di *softening* ϵ nel calcolo della forza agente su una coppia di particelle a distanza r . La forza diventa quindi

$$F(r) \sim (r^2 + \epsilon^2)^{-1}.$$

Il principale problema del metodo PP è che, ad ogni passo temporale, è necessario calcolare $N(N - 1)/2 \sim N^2$ forze rendendo il tempo di calcolo proporzionale al quadrato del numero di particelle. Questo limita l'approccio PP a sistemi dal numero di particelle contenuto.

Particle-Mesh

Si può ridurre il tempo necessario per il calcolo del potenziale gravitazionale generato da ogni particella introducendo una griglia spaziale in cui ogni cella media il campo di densità delle particelle sottostanti. Utilizzare una griglia significa, in sostanza, mediare localmente la densità e quindi il potenziale gravitazionale, comportando una notevole perdita di accuratezza soprattutto nella rappresentazione delle interazioni su piccola scala.

Questo metodo, detto Particle-Mesh (o PM), passando allo spazio di Fourier con condizioni periodiche al contorno, permette di ridurre il tempo di calcolo che, in prima approssimazione², diventa $\sim N + 5M^3 \log M^3 \ll N^2$, dove N è il numero di particelle simulate e M è il numero di nodi della griglia.

²In realtà il tempo di calcolo dipende anche dai diversi possibili modi di interpolare il campo di densità delle celle.

Pur essendo vantaggioso in termini di tempo di calcolo rispetto al metodo PP, il metodo PM comporta una perdita di risoluzione dovuta alla mediazione del potenziale gravitazionale sulle celle.

Particle-Particle-Particle-Mesh

Per risolvere i problemi di risoluzione del metodo PM senza incorrere nell'onerosità di tempo di calcolo del metodo PP è possibile ricorrere ad un metodo ibrido, detto Particle-Particle-Particle-Mesh (o più semplicemente P³M), introdotto da Hockney nel 1971 [26]. Definendo un raggio critico r_c , la forza agente su ogni particella viene scomposta in

$$F = F_{r < r_c} + F_{r > r_c},$$

nella quale $F_{r < r_c}$ rappresenta il contributo alla forza totale dovuto alle particelle vicine a quella in esame. Tale contributo è calcolato con il metodo PP, che garantisce una buona risoluzione a corto raggio. Ponendo N_{r_c} il numero di particelle contenuto in una sfera di raggio r_c , il contributo al tempo di calcolo di questa parte del metodo è $\sim NN_{r_c} < N^2$.

$F_{r > r_c}$ rappresenta invece il contributo alla forza esercitata dalle particelle lontane modellate come un campo medio di densità. Si impone quindi una griglia e si procede con il metodo PM. Ciò permette, come visto nella sezione precedente, un notevole risparmio di tempo di calcolo al prezzo di una minor accuratezza nella rappresentazione delle forze su distanze lunghe, comunque meno influenti di quelle a corta distanza, che sono peraltro ben rappresentate con il calcolo diretto. Il contributo al tempo di calcolo di questa parte del metodo è quello visto per il metodo PM.

Due ultime considerazioni sul metodo P³M. In primo luogo, come visto, è necessario definire una distanza critica r_c che identifichi fino a quale distanza utilizzare l'approccio PP. Scegliere una distanza critica troppo grande porta il metodo ad essere più vicino al PP puro, pesando sul tempo di calcolo. Scegliere invece una distanza critica troppo piccola avvicina il metodo al PM puro, pesando sulla risoluzione. Non è inoltre banale imporre che $F_{short}(r_c) = F_{long}(r_c)$, anche se come mostrato da Hockney e Eastwood (1981) [27] si può rendere continua la forza (e le sue derivate) in r_c attraverso un filtraggio adeguato.

In secondo luogo bisogna tener presente che al passare del tempo le particelle, per via della reciproca attrazione gravitazionale, si avvicinano. Il *clustering* aumenta, aumentando di conseguenza il numero di coppie al di sotto della distanza critica alla quale si attiva il metodo PP. Il tempo di calcolo di ogni passo temporale quindi aumenta con il progredire della simulazione, rendendo il metodo P³M via via meno efficiente al passare del

tempo.

In ambito prettamente cosmologico sorge inoltre un ultimo problema. Per distanze $\leq r_c$, come visto, il metodo P³M funziona esattamente come il metodo PP. Ciò comporta l'introduzione del parametro di *softening* ϵ per limitare l'interazione su piccolissime scale che porterebbe a deflessioni troppo significative nel moto delle particelle, difficili da seguire. Si può intendere il parametro ϵ come una sorta di dimensione fisica delle particelle, al di sotto della quale non ci sono interazioni gravitazionali. Nelle simulazioni cosmologiche, tuttavia, le particelle simulate non rappresentano entità fisiche ben precise (come ad esempio le singole galassie), ma non meglio identificati elementi di massa. Non è quindi chiaro quale sia un valore opportuno per ϵ : non potendo attribuirgli un significato fisico in senso stretto, è necessario imporre un valore ad ϵ sulla base di ragionamenti sulla stabilità dei codici utilizzati.

Albero gerarchico

Anche in questo metodo, detto albero gerarchico o HT (dall'inglese *Hierarchical tree*), le forze agenti sulla singola particella vengono calcolate in modi differenti a seconda della distanza: la forza generata dalle particelle vicine viene calcolata per somma diretta, come nel metodo PP, mentre per le interazioni lontane si ricorre a sviluppi in multipolo del potenziale.

Ad ogni passo temporale si procede in primo luogo a generare un *albero gerarchico* di pseudo-particelle. Il volume simulato viene diviso in celle, ognuna delle quali viene a sua volta divisa in sotto-celle iterativamente fino a che ogni cella contenga al massimo una particella.

L'interazione tra la particella considerata ed un gruppo di particelle sufficientemente lontane può essere approssimata con l'interazione tra la particella considerata ed una pseudo-particella posta nel centro di massa della cella. Il potenziale di questa pseudo-particella può essere a sua volta approssimato con la somma, troncata ad un certo ordine, della sua espansione in multipolo. Si procede come segue: per ogni pseudo-particella si calcola il rapporto tra la sua dimensione e la sua distanza dalla particella considerata e, se tale rapporto è minore di un parametro di tolleranza θ fissato, significa che la struttura interna della pseudo-particella è trascurabile, ed il suo potenziale sarà ben approssimabile con l'espansione in multipolo. Se, viceversa, il rapporto tra dimensione e distanza è maggiore di θ sarà necessario scendere lungo la gerarchia, considerare le sotto-celle e ripetere l'operazione.

Procedendo in questo modo la dipendenza del tempo di calcolo dal numero di particelle della simulazione scende da $\sim N^2$ del metodo PP a $\sim N \log N$ e

può essere ulteriormente ridotta a $\sim N$ se si considera la simmetria di calcolo tra particelle e pseudo-particelle e se si calcolano prima le interazioni tra pseudo-particelle di quelle tra particelle.

4.2 Simulazioni idrodinamiche

Finora abbiamo trattato metodi che permettono di simulare un sistema fisico in cui la gravità è l'unica forza in atto. Questo può essere sufficiente se si intende studiare la dinamica di un sistema non collisionale, come ad esempio l'interazione su grande scala di galassie e ammassi di galassie. Qualunque informazione sullo stato idrodinamico delle particelle della simulazione è in questo scenario del tutto trascurata.

Per includere l'idrodinamica è necessario considerare, oltre alla gravità, anche la fisica del gas di barioni in modo da poter associare ad ogni particella le proprie funzioni di stato. Posti \mathbf{v} la velocità di ogni elemento di fluido, P la sua pressione e ρ la sua densità, oltre alle equazioni del moto sarà quindi necessario implementare e integrare ad ogni intervallo di tempo l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \phi,$$

l'equazione di continuità³, che in condizioni di omogeneità e isotropia ($\nabla P = \nabla \rho = 0$) diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

ed infine un'equazione di stato che legghi, per esempio, pressione a densità ed entropia S

$$P = P(\rho, S).$$

Le equazioni sopra descritte vanno risolte, ad ogni intervallo temporale, assieme alle equazioni della gravità. Ci sono almeno due approcci all'introduzione della fisica dei gas nelle simulazioni N -body.

Approccio euleriano

In questo approccio si utilizza una griglia di punti per risolvere le equazioni del fluido considerato. Le interazioni idrodinamiche sono a corto raggio e di conseguenza per integrare le equazioni, in ogni cella, sono sufficienti come

³Nel caso di un fluido non relativistico l'unico contributo alla densità è dato dalla densità di massa ρ , la densità di pressione è invece trascurabile.

condizioni al contorno le informazioni provenienti soltanto dai punti griglia adiacenti. La risoluzione spaziale di questo tipo di codice può essere raffinata infittendo la griglia od utilizzando una griglia dinamica che si adatti automaticamente campionando meglio le zone a densità più elevata. In ambito cosmologico è importante, tuttavia, migliorare di pari passo con la risoluzione di griglia anche la risoluzione in massa delle particelle di materia oscura [2]. Questo tipo di approccio è particolarmente efficiente per rappresentare shock e discontinuità e può facilmente essere adattato per includere anche altri fenomeni come ad esempio la magnetoidrodinamica (si veda ad esempio Stone & Norman (1992) [67]).

Questo approccio, che prevede l'inserimento di una griglia sulla quale mediare le proprietà idrodinamiche del fluido considerato, si accoppia bene agli approcci che, analogamente, introducono una griglia per la trattazione del potenziale gravitazione (come il PM).

Approccio lagrangiano

Un approccio completamente differente, detto lagrangiano, è invece quello della *Smoothed particle hydrodynamics* (o SPH)⁴. Le proprietà termodinamiche del fluido, come pressione e temperatura, possono essere trovate in ogni punto mediando sulle particelle della simulazione opportunamente pesate. *Smoothed* è da intendersi in questo senso: da una distribuzione discreta di particelle si passa, interpolando, ad un fluido con proprietà continue. Chiaramente tale interpolazione rende difficoltosa la trattazione di shocks e/o discontinuità. Per questo motivo tale approccio si accoppia bene con approcci che modellino il potenziale gravitazionale direttamente, come il PP. Oltre a questo è necessaria una certa accortezza nello stabilire la risoluzione spaziale e di massa per un codice SPH, in particolar modo se si considerano fluidi autogravitanti, come mostrato da Bate & Burkert (1997) [4]. In ogni caso se la risoluzione è sufficiente i due approcci descritti danno risultati comparabili⁵ [33] [22], rendendo preferibile l'utilizzo di codici SPH per via della loro maggior facilità d'implementazione.

4.2.1 Altri fenomeni, non prettamente idrodinamici

All'interno di simulazioni idrodinamiche, siano esse euleriane o SPH, è possibile tener conto anche di altri fenomeni di fisica dei gas oltre alla

⁴Per una trattazione più dettagliata dei codici SPH si veda Gingold & Monaghan (1977) [23] ed in particolare Monaghan (1992) [46].

⁵Eccezion fatta per la rappresentazione della discontinuità, più complicata nell'approccio SPH.

trattazione sopra descritta. Tali fenomeni spesso comprendono meccanismi in atto su scale inferiori alla risoluzione della simulazione e comportano quindi, per essere implementati, assunzioni a priori ed una trattazione cosiddetta *sotto-griglia*. I principali fenomeni da includere nel caso di una simulazione astrofisica e le relative difficoltà sono i seguenti:

Formazione stellare e feedback. La formazione stellare può essere un punto chiave, fungendo da criterio di selezione, per discriminare i vari tipi di oggetti che popolano la simulazione. Tuttavia tracciare le singole nubi di gas che poi producono fenomeni di formazione stellare richiederebbe una notevole risoluzione in massa⁶ ed è quindi necessario modellare i meccanismi di formazione stellare attraverso assunzioni a priori. Un discorso analogo vale anche per meccanismi d'accrescimento dei buchi neri, che coinvolgono regioni non risolte né spazialmente né in massa.

Anche i meccanismi di feedback, che siano dovuti all'esplosione di supernove o ad attività di AGN, hanno origine in regioni non risolte spazialmente e devono essere implementati con modelli analitici o semi-analitici a priori.

Evoluzione chimica. L'evoluzione chimica ha effetti locali e globali molto rilevanti, per esempio perché influenza il tasso di raffreddamento radiativo e quindi la formazione stellare. Essendo tuttavia l'arricchimento chimico il risultato di processi complessi che agiscono su scale molto piccole, quindi non risolte, è necessario assumere un modello di arricchimento a priori.

Trasporto radiativo. Il trasporto radiativo è un effetto non locale, a differenza per esempio dell'evoluzione chimica, ed è quindi risolto spazialmente. È tuttavia complicato introdurre un modello per l'origine e l'evoluzione di campi di radiazione, dato che questi provengono generalmente da sorgenti luminose non risolte. In genere i campi di radiazione inclusi nelle simulazioni sono di due tipi: campi omogenei (per esempio il fondo cosmico a microonde), oppure campi generati da alcuni degli oggetti della simulazione⁷.

⁶Le particelle di massa barionica della simulazione *Magneticum*, ad esempio, hanno una massa dell'ordine delle $10^{10} M_{\odot}$, ben superiore della massa tipica delle nubi molecolari dalle quali si formano le stelle.

⁷Per esempio un fondo X o UV originato da quasar e galassie *star-forming*. Questo rende necessario riconoscere e risolvere spazialmente tali sorgenti, oppure modellarne la distribuzione non risolta all'interno delle particelle di massa simulate.

4.3 Descrizione dei cataloghi utilizzati



Figura 4.1: Istantanea a $z \sim 0.2$ della simulazione *Magneticum*.

In questo lavoro abbiamo applicato l'AP test a diversi cataloghi estratti dalla simulazione idrodinamica cosmologica *Magneticum*⁸ [20]. Questa simulazione è basata sul codice P-GADGET3 [62] che implementa la dinamica attraverso un metodo ibrido tra l'albero gerarchico ed il PM (detto TREE-PM) e la fluidodinamica con l'approccio SPH (vedi paragrafo 4.2). La simulazione copre un volume con condizioni periodiche al bordo inizialmente riempito da un uguale numero di particelle di materia barionica e di materia oscura, ognuna delle quali ha una massa tale che

$$\frac{m_b}{m_{dm}} = \frac{\Omega_b}{\Omega_{dm}}$$

in modo da tener conto della diversa abbondanza delle due componenti (pur rappresentate dallo stesso numero di particelle). Esistono varie realizzazioni della simulazione *Magneticum*, di diverse risoluzioni in massa e diversi volumi. Per questo lavoro abbiamo utilizzato cataloghi estratti a vari redshift dalla realizzazione denominata BOX1. I redshift considerati sono [0.20, 0.52, 0.72, 1.00, 1.50, 2.00]. Volume e risoluzione in massa della BOX1 sono riportati in Tabella 4.1, mentre dettagli aggiuntivi sulla simulazione possono essere trovati in Hirschmann et al. (2014) [25], Saro et al. (2014) [59], Marulli et al. (2015) [43] e Bocquet et al. (2015) [6].

⁸www.magneticum.org

$Volume[(Mpc/h)^3]$	$N_{particle}$	$m_{baryon}[M_{\odot}/h]$	$m_{dark\ matter}[M_{\odot}/h]$
896^3	$2 \cdot 1526^3$	$1.3 \cdot 10^{10}$	$2,6 \cdot 10^9$

Tabella 4.1: In tabella sono riportate le informazioni principali relative alla BOX1 della simulazione *Magneticum*: volume, numero e massa delle particelle.

Il modello cosmologico utilizzato nella simulazione, in accordo con quanto trovato da Komatsu et al. (2011) [35] analizzando la radiazione cosmica di fondo su dati di WMAP, è un modello Λ CDM con parametro di densità della materia $\Omega_{0,m} = 0.272$, densità barionica $\Omega_{0,b} = 0.0456$, $\Omega_{\Lambda} \equiv 1 - \Omega_{0,m}$, normalizzazione dello spettro di potenza $\sigma_8 = 0.809$ e $H_0 = 70.4 km\ s^{-1} Mpc^{-1}$. Questo insieme di parametri cosmologici verrà utilizzato come cosmologia assunta *vera* per quanto riguarda l'AP test.

Sono inclusi nella simulazione, attraverso metodi analitici o semi-analitici sotto-risoluzione, i trattamenti per il raffreddamento radiativo, per il riscaldamento continuo da un background ultravioletto uniforme e per la formazione stellare con i relativi processi di feedback, basati su un modello multifase per l'ISM non risolto [43].

Il tasso di raffreddamento radiativo è calcolato seguendo la stessa procedura presentata in Wiersma, Schaye & Smith (2009) [71], nella quale vengono tenuti in considerazione sia il fondo cosmico a microonde (CMB) sia un fondo ultravioletto e X proveniente da galassie e quasar, come modellato da Haardt & Madau (2001) [24]. I contributi al raffreddamento radiativo degli 11 elementi tracciati (H, He, C, N, O, Ne, Mg, Si, S, Va, Fe) sono stati pre-calcolati utilizzando il codice CLOUDY [21], un algoritmo per il calcolo della fotoionizzazione per un gas otticamente sottile in equilibrio di fotoionizzazione.

Nel modello multifase per la formazione stellare l'ISM è trattato come un mezzo a due fasi dove le nuvole di gas freddo si formano per raffreddamento e sono immerse in un gas caldo assumendo equilibrio di pressione [63]. Ad agglomerati di elementi di massa barionica sufficientemente massivi verrà associato un tasso di formazione stellare e, conseguentemente, delle *particelle-stella* di massa tale da seguire la funzione di massa iniziale di Chabrier [11]. Il 10% delle stelle più massive è assunto esplodere come supernova di Tipo 2 e l'energia rilasciata dall'esplosione ($10^{51}\ erg$) è modellata per dar luogo a venti galattici con una perdita di massa proporzionale al tasso di formazione stellare.

Nella simulazione è anche inclusa una trattazione per la crescita dei buchi neri e per l'AGN feedback, trattati sempre con modelli sotto risoluzione. I buchi neri sono rappresentati come *sink particles* di massa iniziale $10M_{\odot}$ inserite negli oggetti più massivi. Successivamente i buchi neri possono crescere in massa accrescendo il gas circostante secondo l'approssimazione

di Bondi-Hoyle-Lyttleton [7] [8] [28]

$$\dot{M}_{BH} \sim \frac{4\pi G^2 M_{BH}^2 \rho}{(c_s^2 + v^2)^{3/2}},$$

dove ρ e c_s sono rispettivamente densità e velocità del suono dell'ISM circostante il buco nero, mentre v è la velocità del buco nero rispetto al gas circostante. L'implementazione numerica è basata sul modello proposto in Springel et al. (2005) [62].

Lanciata la simulazione, le particelle di materia oscura e di materia barionica co-evolvono risentendo della reciproca attrazione gravitazionale. Gli aloni autogravitanti di materia oscura vengono identificati con un algoritmo *Friends-of-Friends* (FOF) [31] [54], che riconosce i gruppi virializzati di almeno 32 particelle di materia oscura separate da una distanza $l < 0.16\bar{l}$ [18], dove \bar{l} è la distanza media delle particelle. A questo punto si procede ad identificare sotto-strutture sovradense ed autogravitanti contenute negli aloni identificati in precedenza. L'identificazione di tali sotto-strutture è implementata attraverso una versione modificata dell'algoritmo SUBFIND proposto originariamente da Springel et al. (2001) [65], in modo da tener presente anche le particelle di materia barionica. Entrambi questi passaggi vengono svolti ad ogni intervallo temporale della simulazione. Per una descrizione completa dell'algoritmo SUBFIND si veda Dolag et al. (2009) [18].

Identificati gli aloni di materia oscura e le sottostrutture in essi contenute, si associano ad ogni struttura delle proprietà fisiche derivate dalla fluidodinamica delle particelle di massa barionica che la compongono. A seconda di tali proprietà si riconoscerà ogni struttura come galassia, AGN o ammasso di galassie.

Alle strutture con tasso di formazione stellare sufficiente vengono assegnate delle *particelle-stella*, come illustrato in precedenza, e saranno riconosciute come galassie. I vari meccanismi radiativi, l'arricchimento chimico ed il feedback sono trattati come descritto sopra. Oltre alla propria velocità e posizione, ad ogni galassia sono assegnate una massa stellare (M_\odot), un tasso di formazione stellare (SFR) ed una magnitudine (assoluta) in diverse bande. È quindi possibile sottocampionare la popolazione di galassie per analizzare le proprietà di alcune classi specifiche d'oggetti: le galassie più luminose, le più passive, le più massive e via scorrendo.

Gli AGN sono un particolare sottocampione di galassie. Alle galassie più massive viene assegnato un buco nero di massa iniziale $10M_\odot$ che, come detto, può crescere per accrescimento del gas circostante o per *merging*. Dal tasso d'accrescimento (normalizzato al tasso d'accrescimento di Eddington)

è calcolata anche la luminosità bolometrica emessa

$$L_{bol} = 0.1\dot{M}_{BH}c^2$$

sulla base della quale si può procedere a sotto-campionare il catalogo. Per una descrizione più completa sul metodo di selezione degli AGN dalla simulazione *Magneticum* si veda Hirschmann et al. (2014) [25].

Gli insiemi di elementi di massa (barionica ed oscura) contenuti negli aloni virializzati identificati dall'algoritmo FOF sono definiti essere ammassi di galassie⁹. La posizione dell'ammasso è definita dalla posizione della particella centrale del gruppo identificato, mentre la velocità dell'ammasso è la velocità media del sistema. Di ogni ammasso è disponibile inoltre una misura di massa e temperatura al raggio viriale R_{500} , definito come il raggio al quale la densità è 500 volte la densità critica dell'universo, ed infine una stima della luminosità x dovuta ad emissione di *bremstrahlung* (e quindi calcolata a partire dalla densità e dalla temperatura delle particelle barioniche contenuto nell'ammasso).

Il potenziale vantaggio dell'effettuare l'AP test su un catalogo di ammassi di galassie, per quanto meno numerosi, è la maggior facilità con la quale è possibile modellare le distorsioni dinamiche essendo gli ammassi non affetti dai Fingers of God.

In Tabella 4.2 sono riportate alcune caratteristiche dei cataloghi utilizzati. Per ogni tracciante è riportato in primo luogo il numero d'oggetti che compongono il catalogo, ai vari redshift. Per le galassie sono anche riportati i valori medi di massa stellare (\overline{M}_{\odot}), magnitudine assoluta in banda G (\overline{G}) e tasso di formazione stellare (\overline{SFR}). Per gli AGN sono riportati i valori medi della massa del buco nero (\overline{M}_{BH}), della luminosità bolometrica (\overline{L}_{bol}) e del tasso d'accrescimento normalizzato al tasso d'accrescimento di *Eddington* definito come

$$f \equiv \dot{M}_{BH}/\dot{M}_{edd},$$

dove \dot{M}_{BH} è il tasso d'accrescimento in massa del buco nero e \dot{M}_{edd} è il tasso limite di *Eddington* al quale la luminosità emessa produce una pressione di radiazione tale da bilanciare l'attrazione gravitazionale e quindi inibire¹⁰ l'accrescimento stesso.

Per gli ammassi di galassie sono riportati i valori medi di massa, temperatura

⁹Definiremo ammassi di galassie le strutture selezionate in questo modo, anche se gli oggetti meno massivi dovrebbero essere considerati separatamente come gruppi di galassie [43].

¹⁰Questo assumendo un accrescimento sferico su un buco nero non rotante. Rilassando una o entrambe queste assunzioni si può ottenere un tasso d'accrescimento super-*Eddington*.

e luminosità in banda x al raggio viriale (rispettivamente \bar{M}_{500} , \bar{T}_{500} e \bar{L}_{500}).

	Galassie			
	$N_{obj}[10^6]$	$\bar{M}_{\odot}[10^{10}M_{\odot}/h]$	\bar{G}	$\overline{\text{SFR}}[M_{\odot}/h/yr]$
$z = 0.20$	3.24	8.9	-21.48	16.24
$z = 0.52$	2.87	7.6	-21.19	21.72
$z = 0.72$	2.60	6.8	-21.04	25.78
$z = 1.00$	2.18	5.7	-20.87	32.77
$z = 1.50$	1.64	4.4	-20.57	42.35
$z = 2.00$	1.12	3.3	-20.27	48.33
	AGN			
	$N_{obj}[10^5]$	$\bar{M}_{BH}[10^8M_{\odot}/h]$	$\bar{L}_{bol}[10^{45}\text{erg/s}]$	\bar{f}
$z = 0.20$	9.5	6.0	0.59	0.03
$z = 0.52$	6.9	6.7	1.13	0.05
$z = 0.72$	5.6	6.9	1.26	0.06
$z = 1.00$	3.6	8.2	2.80	0.10
$z = 1.50$	2.0	8.9	9.26	0.21
$z = 2.00$	0.9	8.1	16.34	0.25
	Ammassi di galassie			
	$N_{obj}[10^5]$	$\bar{M}_{500}[10^{12}M_{\odot}/h]$	$\bar{T}_{500}[\text{Kev}]$	$\bar{L}_{500}[10^{42}\text{erg/s}]$
$z = 0.20$	5.3	8.3	0.239	6.11
$z = 0.52$	4.8	7.2	0.240	7.76
$z = 0.72$	4.3	6.5	0.227	9.52
$z = 1.00$	3.5	5.5	0.226	10.80
$z = 1.50$	2.4	4.4	0.203	13.14
$z = 2.00$	1.4	3.4	0.170	14.33

Tabella 4.2: In tabella sono riportate le caratteristiche medie dei cataloghi analizzati, divisi per tracciante, al variare del redshift.

Capitolo 5

Codice utilizzato

*Hello IT. Have you tried turning it off and on again?
Ok, well, the button on the side. Is it glowing? Yeah, you need to turn it
on. The button turns it on.
Yeah, you do know how a button works, don't you? No, not on clothes.
No, there you you go, I just heard it come on. No, no, that's the music you
hear when it comes on.
No, that's the music you hear when... I'm sorry, are you from the past?*

- Roy Trenneman

In questo capitolo verrà descritto nel dettaglio il metodo utilizzato per implementare l'AP test sui cataloghi descritti nel Capitolo 4. Si è scelto di seguire il secondo dei due approcci descritti nel paragrafo 3.2 e di calcolare quindi la funzione di correlazione a due punti per ogni cosmologia considerata, procedendo poi alla creazione di un modello che non tenga conto delle distorsioni geometriche illustrate nel paragrafo 3.1.2 introdotte dall'errata scelta dei parametri cosmologici. Questo approccio richiede alcune accortezze, in particolar modo in fase di creazione dei cataloghi random necessari per il calcolo di ξ attraverso lo stimatore di Landy-Szalay definito nell'equazione (2.16).

5.1 Le librerie CosmoBolognaLib

Il codice utilizzato per l'implementazione dell'AP test fa largo uso delle librerie pubbliche CosmoBolognaLib¹.

Le librerie CosmoBolognaLib sono una vasta collezione in costante aggiornamento di utili strumenti numerici cui si può far riferimento per lavorare in ambito cosmologico. Lo scopo principale del progetto CosmoBolognaLib è quello di definire un ambiente di lavoro comune per trattare, dal punto di vista computazionale, vari problemi di natura cosmologica, dalla gestione di grandi cataloghi di dati, alla misurazione delle distanze al calcolo delle funzioni di correlazione a due punti e agli ordini superiori.

Per un'esauritiva spiegazione delle principali classi e metodi contenuti nell'attuale *release* delle librerie si faccia riferimento a Marulli, Veropalumbo & Moresco (2015) [42].

5.2 Descrizione del metodo utilizzato

5.2.1 *Outline* generale del metodo

Il metodo utilizzato in questo lavoro di Tesi per implementare numericamente l'AP test può essere scomposto in punti, che verranno analizzati nel dettaglio nei paragrafi seguenti.

A partire dai cataloghi simulati si procede preliminarmente a convertire le coordinate comoventi in coordinate polari, assumendo la cosmologia *reale* (cioè quella con cui la simulazione è stata costruita, descritta nel Capitolo 4). La posizione di ogni oggetto simulato sarà quindi espressa in coordinate angolari R.A. e *Dec* (rispettivamente ascensione retta e declinazione) e da un redshift, che può essere semplicemente il redshift cosmologico (nello spazio reale) o contenere il contributo del moto proprio dell'oggetto (nello spazio dei redshift), come descritto nel paragrafo 3.1.1.

In seguito si svolgono in sequenza le seguenti operazioni, al variare del parametro Ω_m considerato che identifica ogni cosmologia di test:

- Trasformazione delle coordinate in coordinate comoventi (x, y, z) attraverso la cosmologia di test
- Creazione di un catalogo random
- Conteggio delle coppie e calcolo della funzione di correlazione a due punti

¹<https://github.com/federicomarulli/CosmoBolognaLib>

- Costruzione del modello per le distorsioni dinamiche, calcolo dei parametri β e σ_{12} (definiti nel paragrafo 5.2.6) di *best-fit*
- Minimizzazione di una funzione di verosimiglianza per identificare il corretto valore di Ω_m

Nello specifico, per ogni cosmologia di test, si misura la funzione di correlazione a due punti e si ottiene un modello di *best-fit* attraverso la minimizzazione di una funzione di verosimiglianza \mathcal{L} del tipo

$$\mathcal{L}(\beta, \sigma_{12}; \Omega_m) = \frac{(\xi - \text{MODELLO}(\beta, \sigma_{12}))^2}{\text{ERRORE}^2} \Big|_{\Omega_m},$$

dove β e σ_{12} sono i parametri del modello. I parametri che minimizzano la funzione \mathcal{L} sono detti parametri di *best-fit* ed identificano, ad ogni cosmologia, quale modello rappresenta meglio la funzione di correlazione misurata al netto delle distorsioni geometriche. A questo punto si avrà che il minimo di

$$\mathcal{L}(\Omega_m) = \mathcal{L}(\beta, \sigma_{12})_{\text{best-fit}} \Big|_{\Omega_m}$$

identifica la cosmologia che introduce nella misura della funzione di correlazione le minori distorsioni geometriche.

5.2.2 Preparazione dei cataloghi simulati

È necessario in primo luogo convertire le coordinate di ogni oggetto della simulazione in coordinate polari. Utilizzando la cosmologia con cui è stata effettuata la simulazione (d'ora in avanti *cosmologia reale* o *corretta*) è quindi necessario passare dalle coordinate comoventi alle coordinate angolari:

$$(X, Y, Z) \xrightarrow{\text{cosmologia reale}} (\text{R.A.}, \text{Dec}, \text{REDSHIFT}).$$

Nello specifico, dalle coordinate fisiche (x, y, z) dell'oggetto si può passare alle coordinate angolari attraverso la trasformazione

$$\text{R.A.} = \arctan\left(\frac{X}{Y}\right), \quad \text{Dec} = \arcsin\left(\frac{\text{REDSHIFT}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}\right). \quad (5.1)$$

Nello spazio reale per ottenere il redshift è sufficiente convertire la distanza comovente ² $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ dell'oggetto dall'osservatore attraverso la legge di

²In questo caso assumiamo che le distanze siano sufficientemente grandi da approssimarle con una serie di piani paralleli, senza effetti angolari. La distanza comovente $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ è intesa quindi come diretta lungo la linea di vista. Quest'approssimazione è valida solamente se la distanza media degli oggetti del catalogo dall'osservatore è molto maggiore delle dimensioni della catalogo stesso.

Hubble. Nello spazio dei redshift si tiene anche conto delle velocità peculiari di ogni oggetto, che andranno a sommarsi al flusso di Hubble come descritto nel capitolo precedente³. Il redshift da utilizzare in questo caso non sarà solamente il redshift cosmologico, z_H , bisognerà considerare, nell'equazione (3.1) anche la velocità radiale degli oggetti definita da

$$v_{\parallel} \equiv v_x \cos(Dec) \sin(R.A.) + v_y \cos(Dec) \cos(R.A.) + v_z \sin(Dec).$$

È importante sottolineare un aspetto di questo procedimento che genera una differenza intrinseca tra il catalogo simulato così ottenuto e un catalogo reale. Un catalogo simulato descrive il comportamento di una regione d'universo che evolve nel tempo. Ogni catalogo estratto dalla simulazione sarà quindi un'istantanea dell'universo ad un certo tempo. Tuttavia trasformare le coordinate comoventi degli oggetti in coordinate polari significa *spostare* il catalogo centrandolo ad un certo z e lì calcolare le nuove coordinate. In questo modo si sta di fatto trascurando l'evoluzione che gli oggetti e le proprietà dell'universo avrebbero tra z_{min} e z_{max} del catalogo. Per quanto riguarda questo lavoro di Tesi non abbiamo quindi considerato l'evoluzione del *clustering* che si avrebbe nell'intervallo di redshift *coperto* da ogni catalogo. Le proprietà del *clustering* sono quindi state studiate identificando ogni catalogo con il proprio z medio.

5.2.3 Trasformazione in coordinate comoventi

Per misurare la funzione di correlazione $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel})$ è necessario contare quante coppie di oggetti siano presenti nel catalogo, ad ogni distanza. In primo luogo si convertono quindi le coordinate di ogni oggetto in coordinate comoventi, assumendo una cosmologia di test:

$$(R.A., Dec, REDSHIFT) \xrightarrow{\text{cosmologia di test}} (X, Y, Z).$$

Nello specifico è necessario convertire il redshift di ogni oggetto in una distanza comovente d_c , tenendo conto della cosmologia considerata, ed effettuare la conversione

$$\begin{cases} X = d_c \cos(Dec) \sin(R.A.) \\ Y = d_c \cos(Dec) \cos(R.A.) \\ Z = d_c \sin(Dec) \end{cases} .$$

³È possibile effettuare questa operazione preliminare attraverso la funzione `CREATE MOCKS` di `CosmoBolognaLib` che riceve in input un catalogo di oggetti in coordinate comoventi, lo sposta centrandolo al redshift desiderato e ne calcola per ogni oggetto, attraverso le trasformazioni (5.1) e (3.1), la terna di osservabili (R.A., *Dec*, REDSHIFT). Questo processo simula un catalogo reale osservato in un universo con la propria cosmologia.

È in questo frangente che si introducono le distorsioni geometriche dovute alla scelta di una cosmologia eventualmente diversa da quella *reale*.

L'assunzione di una cosmologia sbagliata deforma tutte le distanze e dunque la forma stessa del catalogo utilizzato, aspetto di cui è necessario tener conto nella creazione del catalogo random.

5.2.4 Creazione di un catalogo random

A questo punto si procede a creare un catalogo random con la stessa geometria del catalogo su cui si vuole misurare la funzione di correlazione. Il numero di oggetti di questo catalogo dev'essere al minimo uguale al numero d'oggetti contenuto nel catalogo di partenza, e la misura di ξ è tanto migliore quanto N_{ran}/N_{obj} è grande. Essendo tuttavia il tempo di calcolo per effettuare l'AP test dominato dal tempo necessario per contare le coppie d'oggetti, si è deciso in questo lavoro di utilizzare cataloghi random con $N_{ran} = N_{obj}$.

Abbiamo sottolineato come modificare la cosmologia di test modifichi anche la forma del catalogo, rendendo necessario deformare allo stesso modo anche il catalogo random⁴. Prendendo un catalogo random costruito con la cosmologia *reale* (e quindi cubico), se ne trasformano le coordinate in (R.A., *Dec*, REDSHIFT) e poi le si ritrasforma in (X, Y, Z) utilizzando la cosmologia di test.

$$(X, Y, Z) \xrightarrow{\text{cosmologia reale}} (\text{R.A., Dec, REDSHIFT}) \xrightarrow{\text{cosmologia di test}} (X, Y, Z).$$

Essendo queste le stesse operazioni compiute sul catalogo simulato le distorsioni introdotte dalla cosmologia di test saranno uguali nei due casi, fornendo un catalogo random in (X, Y, Z) di forma uguale al catalogo analizzato.

Questo passaggio, che potrebbe apparire ad una prima analisi di scarsa importanza, è in realtà fondamentale per il corretto calcolo della funzione di correlazione a due punti. Se i due cataloghi non sono sovrapponibili, infatti, il termine misto nello stimatore di Landy-Szalay genera un effetto spurio che modifica artificiosamente la pendenza di $\xi(r)$.

⁴Per effettuare questa operazione esiste un'apposita funzione in CosmoBolognaLib, WARPED_RANDOM_CATALOGUE, che a partire da un catalogo cubico ottenuto ad una data cosmologia introduce la distorsione geometrica derivante dal passaggio ad una cosmologia di test.

5.2.5 Conteggio delle coppie e calcolo della funzione di correlazione

Una volta ottenuti un catalogo ed un catalogo random in coordinate comoventi, calcolate assumendo una certa cosmologia di test, si può procedere con il conteggio delle coppie. Per le ragioni esposte nel paragrafo 2.5.3, si è deciso di utilizzare lo stimatore di Landy-Szalay (LS) per la misura di ξ . Lo stimatore LS richiede di calcolare⁵ le coppie $DD(r)$, $RR(r)$ e $DR(r)$ (dove con DD si intendono le coppie d'oggetti del catalogo in esame, con RR le coppie del catalogo random e con DR le coppie *miste*). Questa operazione è di gran lunga la più dispendiosa dell'intero codice in termini di tempo di calcolo: il tempo di calcolo di un codice generico che conti le coppie di un determinato catalogo d'oggetti scala come $\sim N^2$, con N il numero d'oggetti che compongono il catalogo stesso; come visto nel Capitolo 4 ci sono tuttavia svariati metodi per ridurre il tempo necessario per conteggiare le coppie d'oggetti⁶.

La tecnica utilizzata per il computo delle coppie in questo lavoro è detta CHAIN_MESH e permette di ridurre, sotto opportune assunzioni, lo *scaling* del tempo di calcolo. In pratica si suddivide il catalogo considerato in una griglia di finezza arbitraria e, per ogni cella, si memorizzano gli indici degli oggetti che ne fanno parte. A questo punto si sceglie una distanza massima, r_{max} , fino alla quale si intendono calcolare le coppie. Per ogni oggetto contenuto in una cella C_i è sufficiente considerare solamente gli oggetti contenuti in celle C_j tali che $d(C_i, C_j) \leq r_{max}$, dove $d(C_i, C_j)$ è la distanza tra le due celle. Questo permette di escludere a priori tutti gli oggetti separati da distanze maggiori della distanza massima considerata, riducendo notevolmente il tempo di calcolo necessario (in funzione di r_{max})⁷. Allo stesso modo si può imporre una distanza minima, r_{min} ed escludere quindi tutti gli oggetti contenuti in celle tali per cui $d(C_i, C_j) \leq r_{min}$, riducendo ulteriormente il tempo di calcolo.

In questo lavoro, salvo diversamente specificato, si è utilizzata come separazione massima degli oggetti 50 Mpc/h e come separazione minima 3 Mpc/h. Questo ha contribuito a contenere il tempo di calcolo e ad evitare

⁵Le distanze vengono prima discretizzate: si contano quindi le coppie comprese in un intervallo di distanza $[r, r + \Delta r]$, dove Δr è la dimensione del bin considerato. In questo lavoro si è utilizzato $\Delta r = 2$ Mpc/h.

⁶Il problema del conteggio delle coppie per il calcolo di ξ è numericamente identico al problema del calcolo della reciproca attrazione gravitazionale di un insieme di oggetti.

⁷Questo approccio per il calcolo delle coppie è implementato nelle librerie CosmoBolognaLib all'interno della funzione COUNT_PAIRS della classe TWOPOINTCORRELATION.

scale su cui la funzione di correlazione è difficilmente modellabile per la troppa importanza dei Fingers of God o per la crescita dell'errore dovuta alla varianza cosmica. Una volta contate le coppie, si procede al calcolo della funzione di correlazione a due punti, unidimensionale e bidimensionale, attraverso lo stimatore LS (equazione (2.16)).

Determinazione dell'errore sulla funzione di correlazione

Si è stimato l'errore sulla misura di ξ con un modello fenomenologico proposto da Cabré & Garzañaga (2009) [10] che tiene conto dell'errore *poissoniano* dovuto alla finitezza del catalogo d'oggetti considerato e alla varianza cosmica. Dato che abbiamo sempre considerato cataloghi random con lo stesso numero di oggetti dei cataloghi simulati, avendo quindi $N \equiv N_{obj} = N_{random}$, l'errore sulla misura è determinato da

$$\Delta\xi = \frac{\sqrt{3F(\xi)}}{RR},$$

dove

$$F(\xi) = (1 + \xi) RR + \frac{4[(1 + \xi) RR]^2}{N}.$$

5.2.6 Costruzione del modello

A questo punto si procede calcolando un modello di funzione di correlazione a partire da ξ misurata nello spazio reale previa l'aggiunta delle opportune distorsioni dinamiche. Un'osservazione reale è sempre affetta da distorsioni dinamiche e la funzione di correlazione nello spazio reale non è direttamente misurabile. È comunque possibile *costruire* una funzione di correlazione nello spazio reale proiettando e deproiettando ξ misurata nello spazio dei redshift [44]. In pratica si proietta ξ integrandola lungo r_{\parallel} e si ottiene quindi $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) \rightarrow \xi(r_{\perp})$, quest'operazione rimuove le distorsioni dinamiche (che agiscono solo lungo r_{\parallel}). Successivamente si deproietta il risultato ottenuto per ottenere $\xi(r_{\perp}) \rightarrow \xi_{real}(r)$. Per chiarezza ci riferiremo al modello con $\xi(s_{\perp}, s_{\parallel})$ o con $\xi(s)$ ⁸, mentre $\xi_{real}(r)$ sarà la funzione di correlazione misurata nello spazio reale.

Modellare le distorsioni dinamiche

Le distorsioni dinamiche vengono parametrizzate ed incluse nel modello attraverso i parametri β e σ_{12} , procedendo come segue.

⁸In questa notazione s_{\parallel} e s_{\perp} sono la distanza lungo la linea di vista e perpendicolare ad essa e seguono le definizioni riportate nel paragrafo 3.1.2.

A scale sufficientemente grandi, dove l'influenza dei Fingers of God è trascurabile, è possibile scomporre la funzione di correlazione in multipoli [43] in modo che, definiti $s \equiv \sqrt{s_{\perp}^2 + s_{\parallel}^2}$ e $\mu \equiv s_{\parallel}/s$, si abbia

$$\begin{aligned}\xi_{lin}(s_{\perp}, s_{\parallel}) &= \xi_0(s) P_0(\mu) \\ &+ \xi_2(s) P_2(\mu) \\ &+ \xi_4(s) P_4(\mu),\end{aligned}\tag{5.2}$$

dove $P_i(\mu)$ è il polinomio di Legendre di grado i . Si può mostrare che i multipoli di ξ sono

$$\begin{aligned}\xi_0(s) &= \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) \xi_{real}(r) \\ \xi_2(s) &= \left(\frac{4}{5}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right) [\xi_{real}(r) - \bar{\xi}_{real}(r)] \\ \xi_4(s) &= \frac{8}{35}\beta^2 \left[\xi_{real}(r) + \frac{5}{2}\bar{\xi}_{real}(r) - \frac{7}{2}\bar{\bar{\xi}}_{real}(r)\right],\end{aligned}$$

nelle quali

$$\bar{\xi}_{real}(r) \equiv \frac{3}{r^3} \int_0^r \xi_{real}(r') r'^2 dr'$$

e

$$\bar{\bar{\xi}}_{real}(r) \equiv \frac{5}{r^5} \int_0^r \xi_{real}(r') r'^4 dr'.$$

Il parametro β è definito da

$$\beta(z) \equiv \frac{f(z)}{b(z)},$$

dove b è il fattore di bias introdotto nel Capitolo 2 e $f(z)$ è il tasso di crescita lineare che, in un modello cosmologico Λ CDM, vale approssimativamente $\Omega_m^{0.55}(z)$ [43].

A scale piccole, cioè ad esempio minori di ~ 5 Mpc/ h per le galassie [43], è necessario tener conto anche dei Fingers of God nella costruzione del modello. Il modello ottenuto nell'equazione (5.2) va convoluto con la distribuzione di velocità degli oggetti, $f(v)$. Si ha quindi che

$$\xi(s_{\perp}, s_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \xi_{lin}\left(s_{\perp}, s_{\parallel} - \frac{v(1+z)}{H(z)}\right) dv.\tag{5.3}$$

In questo lavoro si è utilizzata la funzione di distribuzione delle velocità

$$f(v) = \frac{1}{\sigma_{12}\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|v|}{\sigma_{12}}\right).\tag{5.4}$$

Il parametro σ_{12} può essere interpretato come la dispersione di velocità casuale degli oggetti, responsabile dei Fingers of God.

Ottenere i parametri di *best-fit*

Costruito un modello di funzione di correlazione secondo le equazioni (5.2) e (5.3) si può procedere ad esplorare lo spazio dei parametri per trovare i valori di *best-fit* di β e σ_{12} , alla cosmologia considerata. Si procede quindi minimizzando la funzione di verosimiglianza

$$\mathcal{L}(\beta, \sigma_{12}; \Omega_m) = \sum_{r_{\perp}, r_{\parallel}} \left. \frac{(\xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) - \xi_{model}(r_{\perp}, r_{\parallel}; \beta, \sigma_{12}))^2}{(\Delta\xi)^2} \right|_{\Omega_m}, \quad (5.5)$$

nella quale $\Delta\xi$ è l'errore sulla misura della funzione di correlazione, calcolato come descritto nel paragrafo 5.2.5. Dal minimo della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} si ottiene la coppia $(\beta, \sigma_{12})_{best-fit}|_{\Omega_m}$, cioè la coppia di parametri con i quali si descrivono al meglio (in quella cosmologia) le distorsioni dinamiche⁹ della funzione di correlazione.

5.2.7 Determinazione della cosmologia che introduce le minori distorsioni geometriche

Calcolati i parametri di *best-fit* con i quali modellare al meglio le distorsioni dinamiche non resta che determinare quale tra le cosmologie di test introduca le minori distorsioni geometriche nel calcolo di ξ . Entro gli errori tale cosmologia sarà quella con il minor valore di \mathcal{L} , fissati i parametri β e σ_{12} ai valori di *best-fit* ottenuti nel passo precedente¹⁰. Non resta quindi che calcolare il minimo di

$$\mathcal{L}(\Omega_m) = \mathcal{L}(\beta, \sigma_{12})_{best-fit}|_{\Omega_m}.$$

⁹Nello spazio reale non ci sono per definizione distorsioni dinamiche, il che significa che si ha sempre $\beta = 0$ e nessun Finger of God. Costruire un modello (che ricordiamo essere privo di distorsioni geometriche) per lo spazio reale seguendo il procedimento appena descritto è del tutto equivalente, quindi, a porre semplicemente $\xi_{model}(r_{\perp}, r_{\parallel}) = \xi_{real}(\sqrt{r_{\perp}^2 + r_{\parallel}^2})$.

¹⁰È bene sottolineare come la funzione di verosimiglianza utilizzata $\mathcal{L}(\Omega_m)$ non sia una funzione χ^2 classica in quanto sia la funzione di correlazione misurata che il modello (ottenuto a partire dalla misura stessa) abbiano un errore dipendente da Ω_m . Pertanto non è possibile associare un errore alla misura di Ω_m a partire dai livelli di $\Delta\mathcal{L}$ divisi per i gradi di libertà, come si farebbe con una distribuzione χ^2 *standard*.

Nonostante l'eventuale inaccuratezza nella modellizzazione delle distorsioni dinamiche (in particolar modo, come vedremo nel prossimo capitolo, per quanto riguarda σ_{12}) e la parziale degenerazione tra distorsioni dinamiche e distorsioni geometriche¹¹ è comunque possibile identificare, entro gli errori, il *corretto* valore di Ω_m .

¹¹Tale degenerazione è comunque parziale dato che le distorsioni dinamiche agiscono soltanto lungo la linea di vista, mentre le distorsioni geometriche agiscono sia parallelamente che perpendicolarmente ad essa.

Capitolo 6

Risultati

Combattere per l'incertezza, questo ci resta.

- Fast animals and slow kids

In quest'ultimo capitolo verranno presentati i risultati ottenuti in questo lavoro di Tesi effettuando l'AP test sui cataloghi descritti nel Capitolo 4 seguendo il metodo illustrato nel Capitolo 5. L'accuratezza del metodo, come si vedrà in seguito, dipende primariamente dalla densità d'oggetti contenuti nel catalogo considerato. Si ricorda infine che il parametro Ω_m da considerare *reale*, cioè quello utilizzato nella simulazione dalla quale sono stati estratti i cataloghi, è $\Omega_m = 0.272$. È in corrispondenza di tale valore che entro gli errori dovrebbe trovarsi il minimo di \mathcal{L} .

6.1 Cataloghi di galassie

L'AP test è stato in primo luogo effettuato sui cataloghi di galassie prodotti dalla BOX1 della simulazione *Magneticum*, sia nello spazio reale che nello spazio dei redshift, a sei diversi redshift. La descrizione della simulazione e le caratteristiche principali dei cataloghi analizzati sono riportate nel Capitolo 4. I valori di Ω_m considerati per il test sono $[0, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.272, 0.3, 0.35, 0.4, 0.5, 0.65, 0.85, 1]$. Si ricorda che il volume comovente della BOX1 è $896^3 \text{ (Mpc}/h)^3$, mentre il numero di oggetti di ogni catalogo è riportato in Tabella 4.2. L'intervallo considerato per il conteggio delle coppie, e quindi per la misura di ξ , è $r = \sqrt{r_{\perp}^2 + r_{\parallel}^2} \in [3, 50] \text{ Mpc}/h$. Escludere le scale minori di $3 \text{ Mpc}/h$ limita (ma non esclude del tutto, come vedremo nel paragrafo 6.4) l'influenza dei Fingers of God, la cui descrizione è stata inclusa nel modello attraverso il parametro σ_{12} , come mostrato nel capitolo precedente. Procediamo quindi ad esporre i risultati, prima nello spazio reale ed in seguito nello spazio dei redshift.

Spazio reale

Nello spazio reale non ci sono, per definizione, distorsioni dinamiche e quindi il principio cosmologico assicura che alla corretta cosmologia le curve di isocorrelazione siano perfettamente circolari. Il modello in questo caso è ottenuto dalla funzione di correlazione imponendo semplicemente che $\xi_{model}(r_{\perp}, r_{\parallel}) = \xi(\sqrt{r_{\perp}^2 + r_{\parallel}^2})$.

Nelle Figure 6.1 e 6.2 sono riportate, ai vari redshift, le funzioni di correlazione ed i rispettivi modelli alla giusta cosmologia ($\Omega_m = 0.272$) e, per confronto, alle cosmologie estreme dell'intervallo considerato ($\Omega_m = 0$ e $\Omega_m = 1$). L'effetto di distorsione geometrica è evidente e, come descritto nel Capitolo 3, cresce all'aumentare del redshift: come descritto nel Capitolo 3 si possono apprezzare sia il *LOS-stretching* introdotto da valori di Ω_m minori di quello corretto sia il *LOS-shrinking* introdotto da valori di Ω_m maggiori di quello corretto che invece risulta (giustamente) circolare.

Di seguito, in Figura 6.3, sono riportate le funzioni di verosimiglianza \mathcal{L} , ai sei redshift considerati, che quantificano l'accordo tra la funzione di correlazione misurata ed il relativo modello (rispettivamente le curve blu e rosse nelle Figure 6.1 e 6.2). Più la curva di verosimiglianza è stretta e migliore è la determinazione del valore di Ω_m corrispondente al minimo di \mathcal{L} . Una curva stretta significa che anche per valori di Ω_m poco diversi da quello corrispondente al minimo di \mathcal{L} l'accordo tra misura e modello è

molto peggiore e cioè che le distorsioni geometriche sono ben visibili. Le funzioni \mathcal{L} mostrano tutte l'aspettata forma a campana rovesciata, con un minimo via via più chiaro all'aumentare del redshift dovuto alla sempre crescente ampiezza delle distorsioni. I valori di Ω_m corrispondenti al minimo di \mathcal{L} sono riportati in Tabella 6.1.

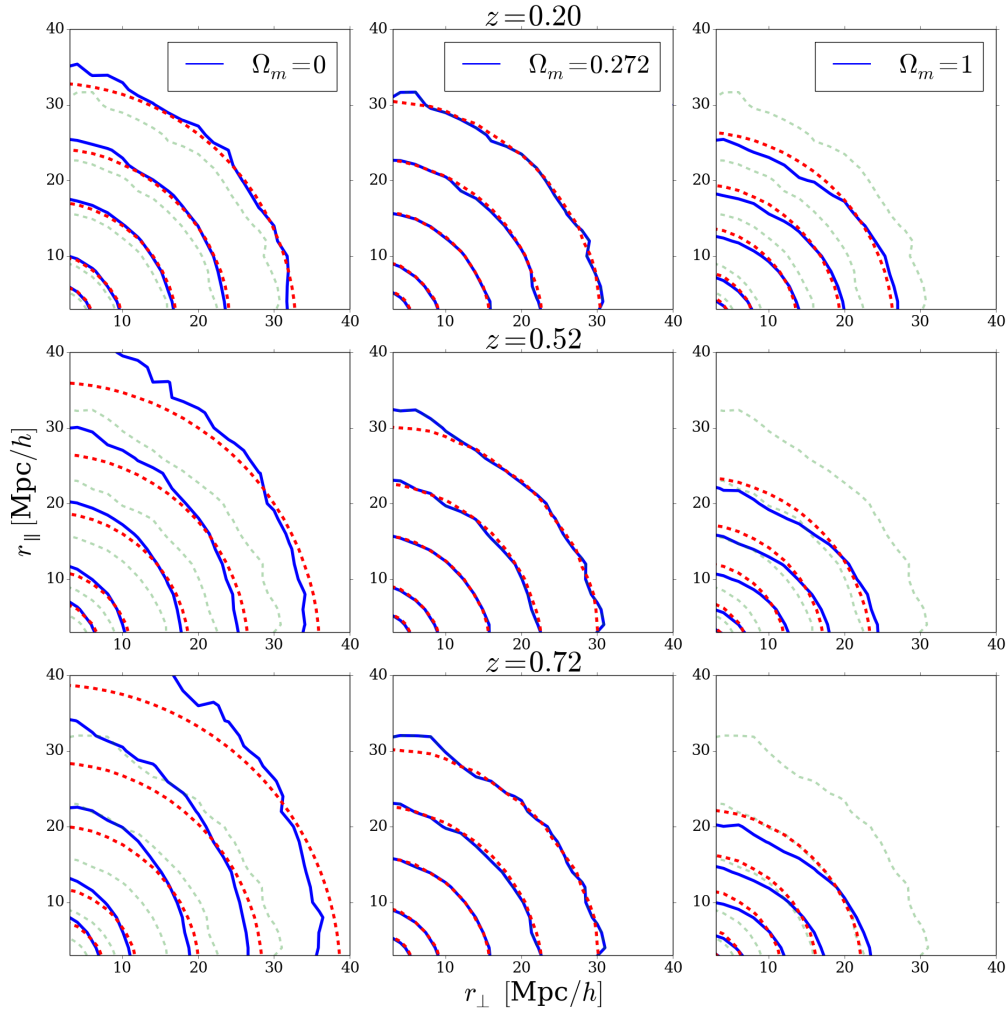


Figura 6.1: Contorni di isocorrelazione relativi ai livelli $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) = [1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05]$ per i cataloghi di galassie nello spazio reale, per i tre redshift indicati: $z = 0.2$ per i pannelli in alto, $z = 0.52$ per i pannelli centrali e $z = 0.72$ per i pannelli in basso. La linea continua blu rappresenta i contorni della funzione di correlazione misurata, alle diverse cosmologie: $\Omega_m = 0$ per la colonna a sinistra, $\Omega_m = 0.272$ per la colonna centrale e $\Omega_m = 1$ per la colonna a destra. La linea tratteggiata rossa rappresenta, nei vari casi, il relativo modello. Per $\Omega_m \neq 0.272$ sono riportate in verde, per confronto, le curve di isocorrelazione misurate alla giusta cosmologia.

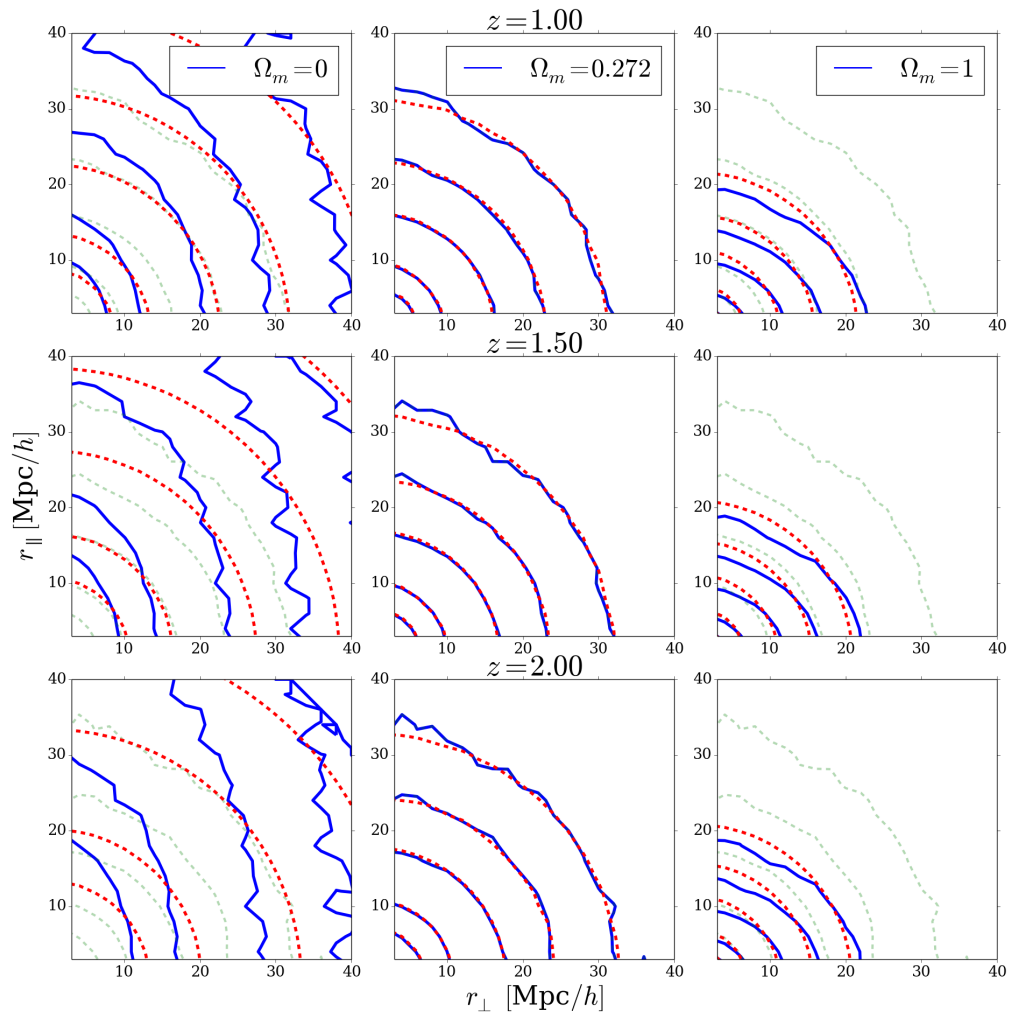


Figura 6.2: Contorni di isocorrelazione per le galassie, nello spazio reale. Lo schema è lo stesso utilizzato per la Figura 6.1, ma per i redshift $z = 1$, $z = 1.5$ e $z = 2$. Anche qui si può apprezzare, soprattutto per confronto con la Figura 6.1, la crescita d'ampiezza delle distorsioni geometriche con il redshift.

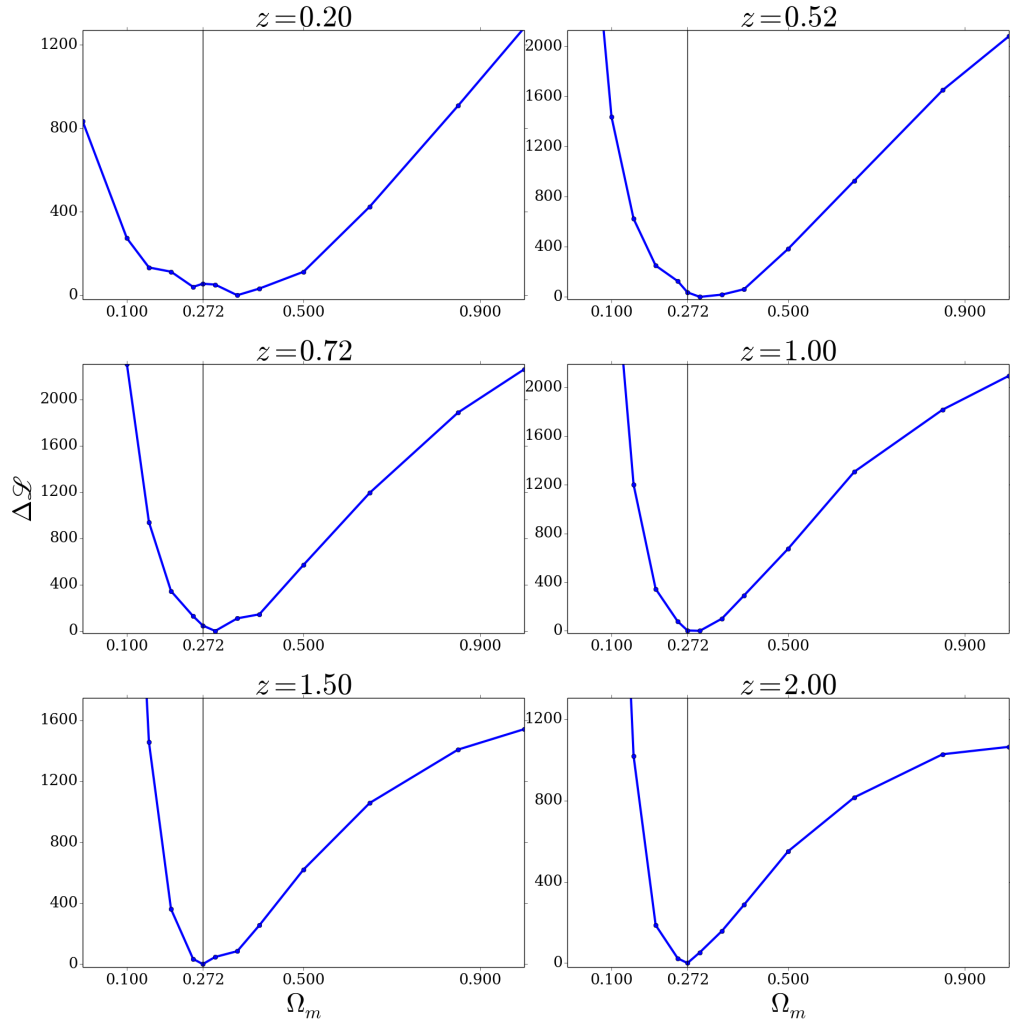


Figura 6.3: Funzioni di verosimiglianza che identificano il livello di accordo tra la funzione di correlazione misurata ed il modello. La linea nera verticale identifica il corretto valore $\Omega_m = 0.272$ *corretto*, cioè quello della simulazione da cui sono stati estratti i cataloghi. Il minimo delle funzioni di verosimiglianza, riportato in Tabella 6.1, è sempre ben visibile e le funzioni si fanno più strette all'aumentare del redshift per via della crescente ampiezza delle distorsioni.

Le misure effettuate si diversi redshift sono state considerate come indipendenti tra loro e sono state quindi combinate sommando i singoli \mathcal{L} per ottenere una migliore stima di Ω_m . In Figura 6.4 è riportata la funzione di verosimiglianza *totale* ottenuta sommando le varie \mathcal{L}_i . È possibile osservare che in questo modo si identifica il *corretto* valore del parametro Ω_m . Se ne conclude che, pur considerando un numero esiguo di cataloghi indipendenti, l'identificazione della corretta cosmologia migliora sensibilmente rispetto all'analisi di un singolo redshift.

In Figura 6.5 si possono invece apprezzare i contributi a \mathcal{L}_{tot} derivanti dalle singole misure: sono riportate le somme di tutti i contributi tranne uno, il che produce un allargamento della curva rispetto alla somma totale (riportata per confronto in blu) tanto maggiore quanto più rilevante è il contributo del catalogo escluso. Tale allargamento rappresenta quindi una stima dell'importanza del singolo catalogo. Si può notare come il contributo del redshift minore, $z = 0.2$, sia il meno significativo in quanto non considerarlo nella somma non modifica sostanzialmente la larghezza della curva rispetto a quella totale: ciò è dovuto alla minor ampiezza delle distorsioni geometriche a questo redshift

È possibile osservare che in questo modo si identifica il *corretto* valore del parametro Ω_m . Se ne conclude che, pur considerando un numero esiguo di cataloghi indipendenti, l'identificazione della corretta cosmologia migliora sensibilmente rispetto all'analisi di un singolo redshift.

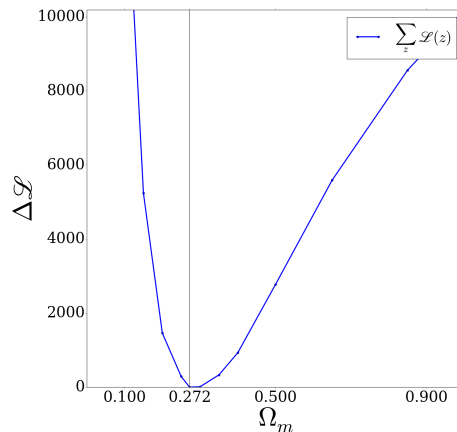


Figura 6.4: In Figura è riportata la funzione di verosimiglianza *totale* ottenuta per somma diretta di \mathcal{L} dei singoli cataloghi di galassie nello spazio reale, ai vari redshift. Si può notare come il valore $\Omega_m = 0.272$ sia correttamente identificato.

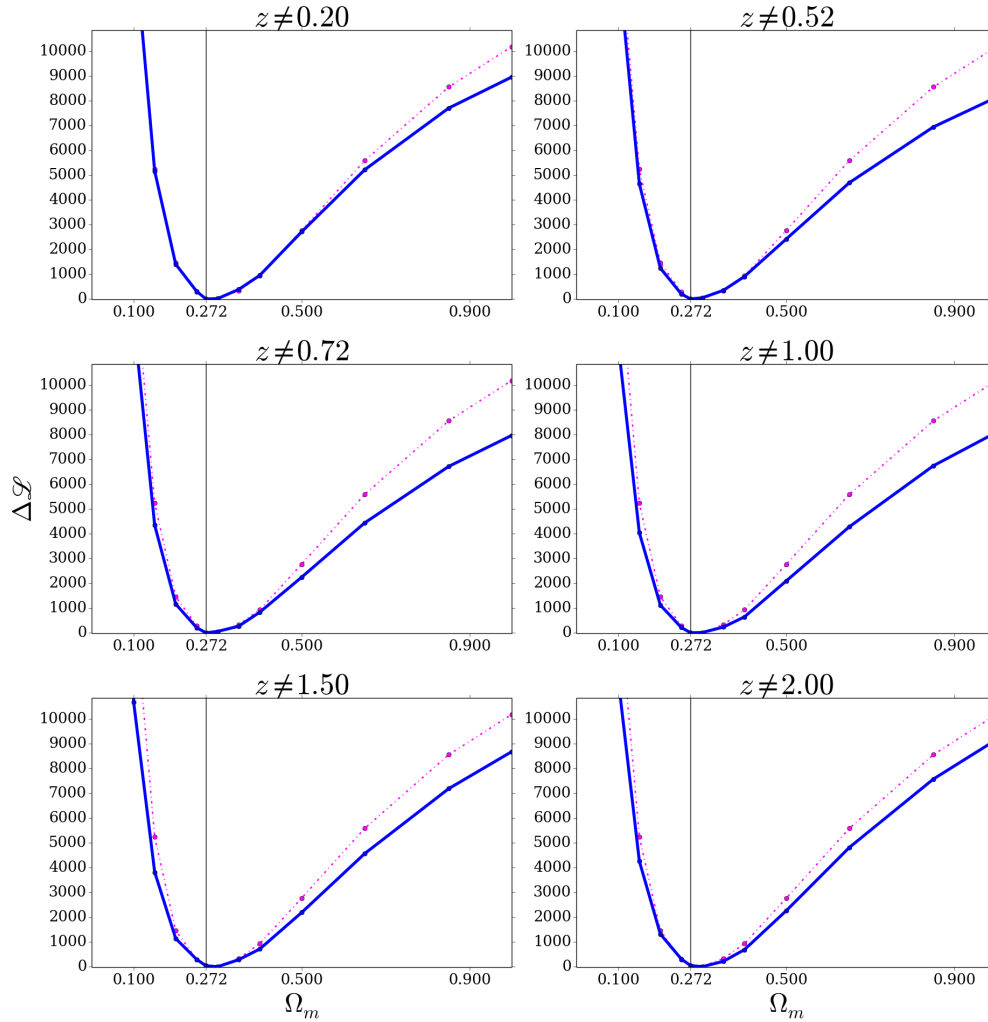


Figura 6.5: In blu è mostrata la funzione di verosimiglianza ottenuta sommando i contributi di tutti i redshift tranne quello indicato dal titolo del pannello. La curva tratteggiata magenta, riportata per confronto e uguale in tutti pannelli, è la somma totale mostrata anche in Figura 6.4. Si può notare come il contributo del redshift minore, $z = 0.2$, sia il meno significativo: non considerarlo nella somma non modifica sostanzialmente la larghezza della curva rispetto a quella totale.

Spazio dei redshift

Nello spazio dei redshift, come descritto nei capitoli precedenti, è necessario includere nel modello anche le distorsioni dinamiche, seguendo il metodo descritto nel Capitolo 5. Abbiamo misurato la funzione di correlazione per le galassie, ai sei redshift disponibili, nell'intervallo $r \in [3, 50]$ Mpc/ h limitando così l'influenza dei Fingers of God, pur visibili, che introducono distorsioni sulla funzione di correlazione solo a piccole scale. Nelle Figure 6.6 e 6.7 sono riportate, seguendo lo stesso schema utilizzato nel paragrafo precedente, le curve di isocorrelazione ed i rispettivi modelli. Si possono osservare la marginale influenza dei Fingers of God e, alle grandi scale, il ben più evidente effetto Kaiser.

Anche in questo caso l'ampiezza delle distorsioni geometriche aumenta con il redshift ed è quasi inapprezzabile a $z = 0.2$ ma, considerando il diminuire del numero d'oggetti e l'influenza delle distorsioni dinamiche, i risultati migliori sono ottenuti ai redshift intermedi. In Figura 6.8 sono riportati gli andamenti ai diversi redshift delle funzioni di verosimiglianza.

Infine in Figura 6.9 sono riportati, alle varie cosmologie, i parametri β e σ_{12} di *best-fit*, normalizzati al valore ottenuto per $\Omega_m = 0.272$ cui valori sono riportati in Tabella 6.2. Si può osservare come all'aumentare di Ω_m la generale contrazione delle distanze riduca via via l'importanza dei Fingers of God nell'intervallo (fisso) considerato per il fit. Il parametro σ_{12} decresce di conseguenza fino a fermarsi ad un vincolo inferiore posto per garantire la stabilità dell'integrale (5.3). Discuteremo più nel dettaglio l'impatto del parametro σ_{12} nella costruzione del modello nel paragrafo 6.4.

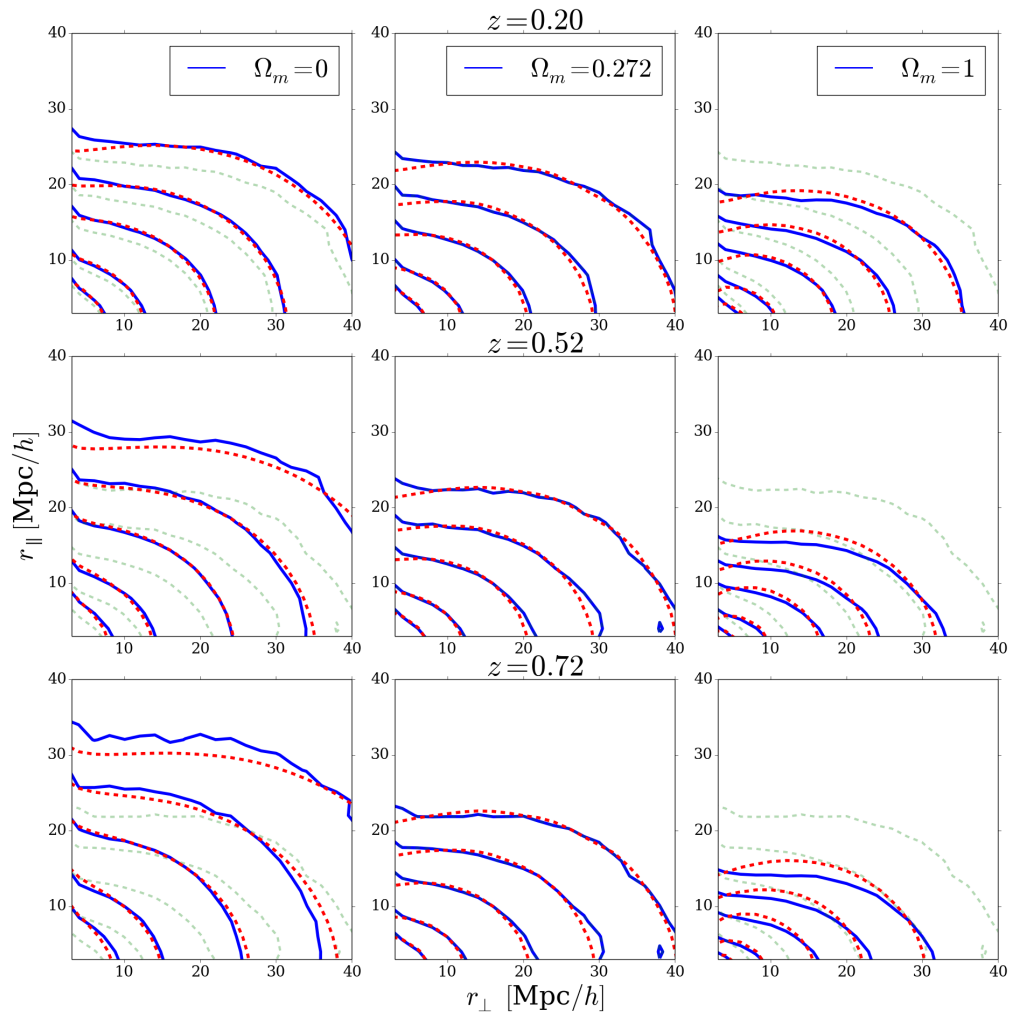


Figura 6.6: Contorni di isocorrelazione delle galassie nello spazio dei redshift, per i tre redshift indicati: dall'alto verso il basso $z = 0.2$, $z = 0.52$ e $z = 0.72$. La linea continua blu rappresenta i contorni della funzione di correlazione misurata mentre la linea tratteggiata rossa rappresenta il relativo modello: le tre cosmologie riportate, come seguendo lo stesso schema utilizzato per la Figura 6.1, sono $\Omega_m = 0$, $\Omega_m = 0.272$ e $\Omega_m = 1$. Per $\Omega_m \neq 0.272$ sono riportate in verde, per confronto, le curve di isocorrelazione misurate alla giusta cosmologia $\Omega_m = 0.272$.

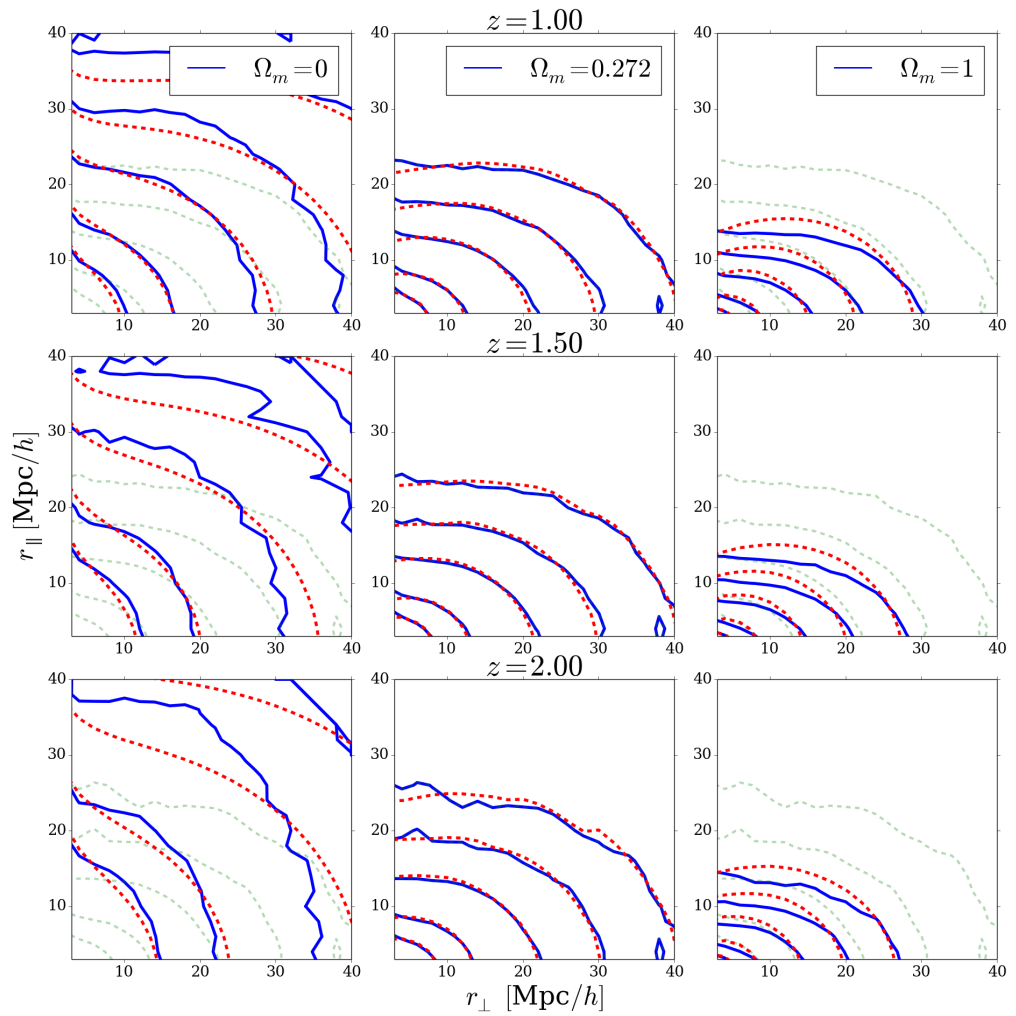


Figura 6.7: Curve di isocorrelazione delle galassie nello spazio dei redshift, riportate seguendo lo stesso schema utilizzato per la Figura 6.6, ma per i redshift $z = 1$, $z = 1.5$ e $z = 2$.

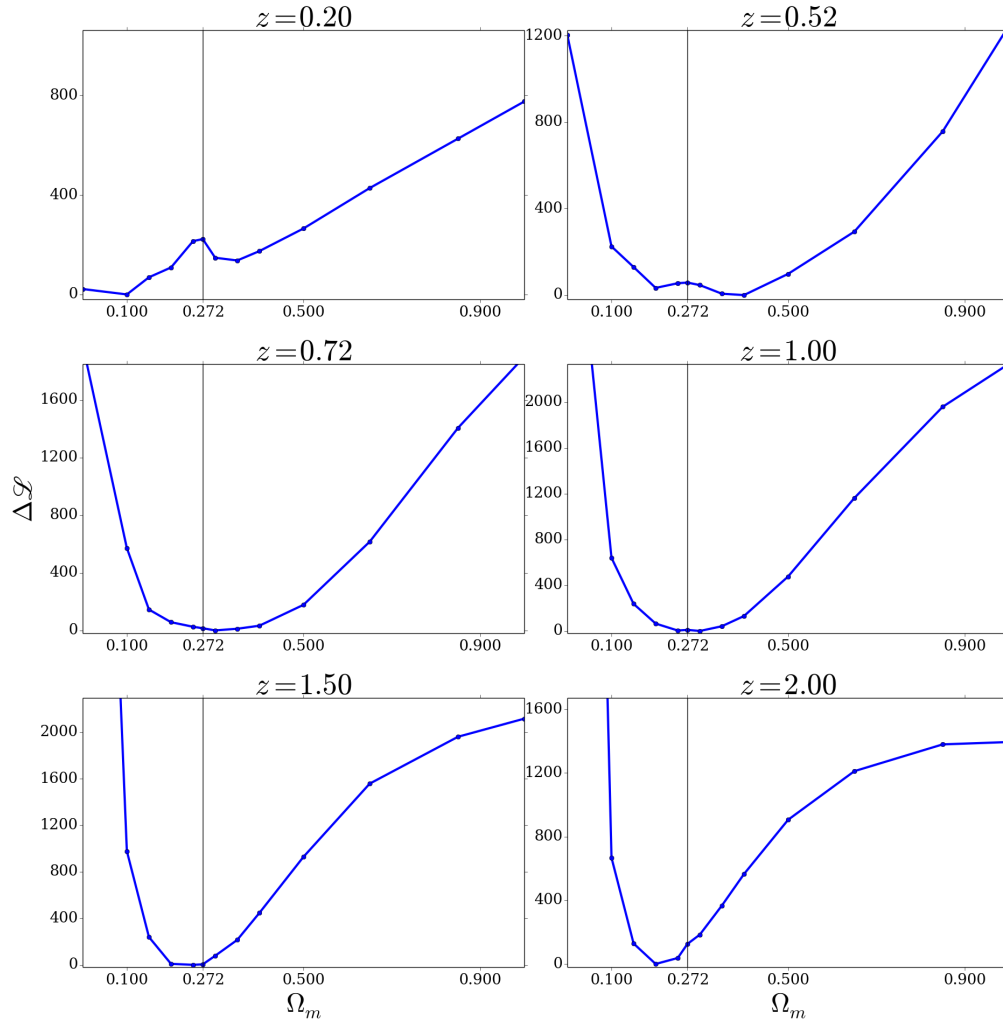


Figura 6.8: Funzioni di verosimiglianza che identificano il livello di accordo tra la funzione di correlazione ed il modello. La linea nera verticale identifica il valore $\Omega_m = 0.272$, cioè quello utilizzato per la simulazione dalla quale i cataloghi sono stati estratti. Il minimo delle funzioni di verosimiglianza, riportato in Tabella 6.1, è sempre visibile eccezion fatta per $z = 0.2$ dove l'effetto di distorsione geometrica ha l'ampiezza minore [3].

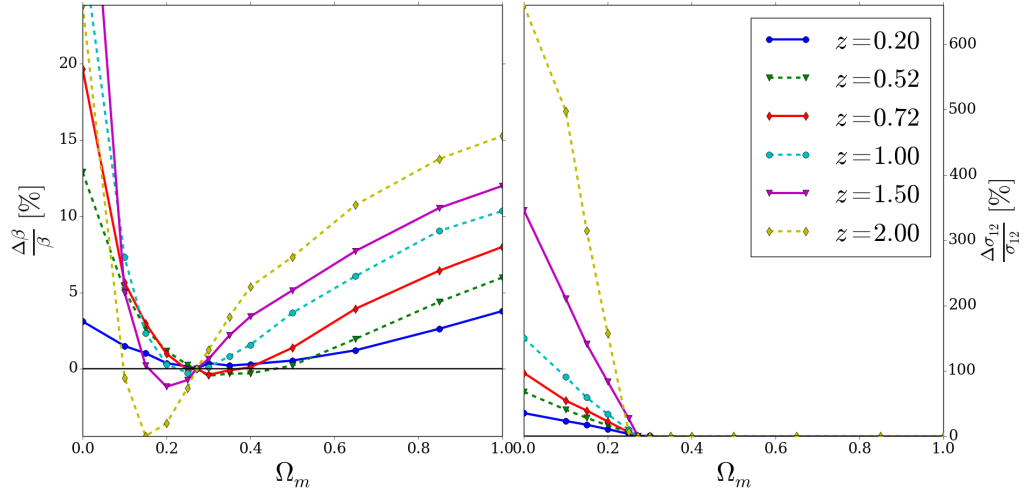


Figura 6.9: Andamento dei parametri β e σ_{12} di *best-fit*, in termini di variazione percentuale rispetto al valore ottenuto per $\Omega_m = 0.272$. Al crescere di Ω_m l'importanza dei Fingers of God diminuisce perché tale effetto di distorsione esce dall'intervallo considerato per la costruzione del modello. Il parametro σ_{12} decresce di conseguenza fino a fermarsi ad un limite inferiore posto per garantire la stabilità dell'integrale (5.3). I valori di β e σ_{12} alla cosmologia *corretta* sono riportati in Tabella 6.2.

Come per il caso dello spazio reale anche per lo spazio dei redshift si sono considerate le 6 misure di \mathcal{L} ottenute come indipendenti. Si è quindi calcolata \mathcal{L}_{tot} come somma diretta delle singole funzioni verosimiglianza \mathcal{L} . In Figura 6.10 è riportato l'andamento di \mathcal{L}_{tot} . L'importanza dei contributi di ognuno dei sei termini della somma, seguendo lo stesso schema utilizzato nel paragrafo precedente, è mostrata in Figura 6.11. Si può notare come il contributo alla somma dovuto ai redshift inferiori ($z = 0.2$ e $z = 0.52$, per i quali l'ampiezza delle distorsioni geometriche è sovrastata dalla maggior rilevanza delle distorsioni dinamiche) sia il meno significativo. Non considerare tali contributi nella somma non modifica infatti sostanzialmente la larghezza della curva rispetto alla curva totale.

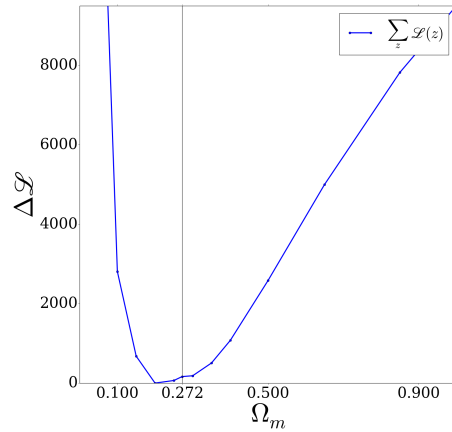


Figura 6.10: In Figura è riportata la funzione di verosimiglianza *totale* ottenuta per somma diretta delle \mathcal{L} dei singoli cataloghi di galassie, ai sei redshift considerati.

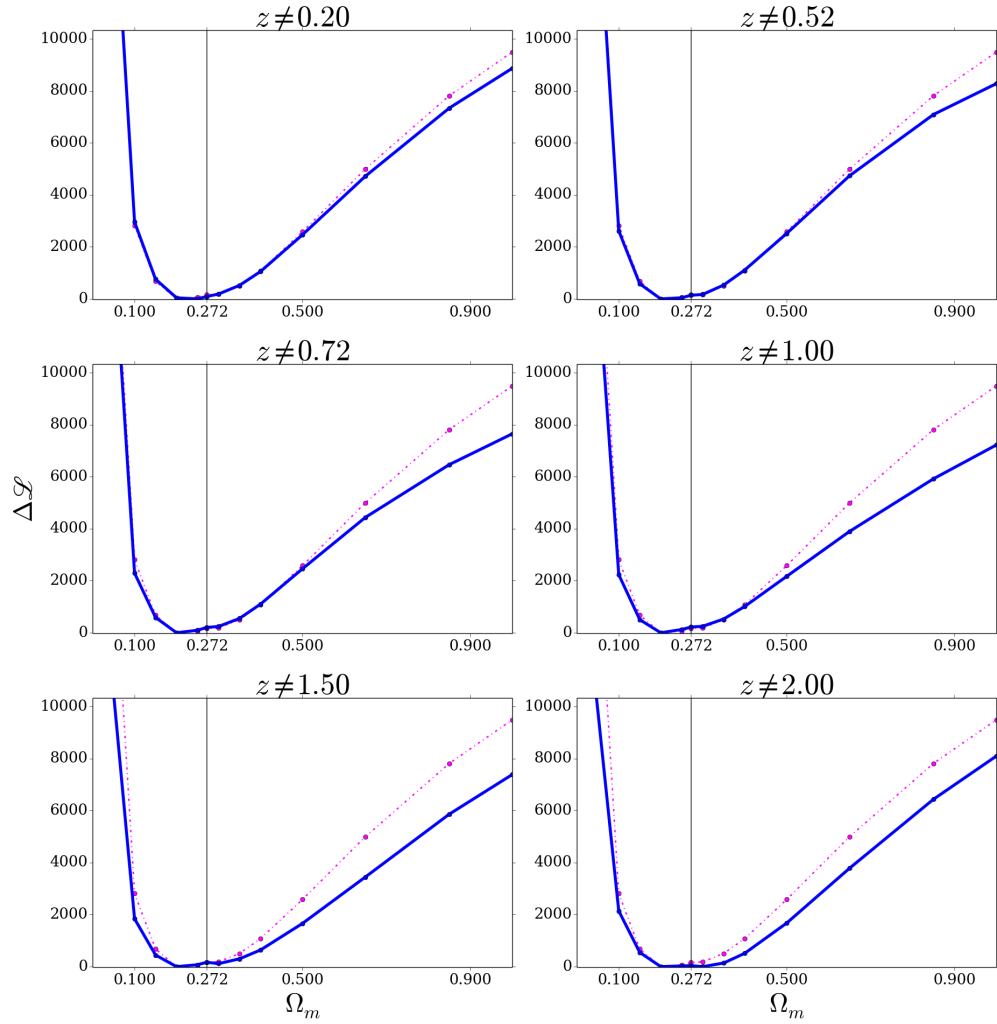


Figura 6.11: In blu è mostrata la funzione di verosimiglianza ottenuta sommando i contributi di tutti i redshift tranne quello indicato dal titolo del pannello. La curva tratteggiata magenta, riportata per confronto e uguale in tutti pannelli, è la somma totale mostrata anche in Figura 6.10. Si può notare come il contributo dei redshift minori, $z = 0.2$ e $z = 0.52$, sia il meno significativo: non considerarlo nella somma non modifica sostanzialmente la larghezza della curva rispetto a quella totale.

Riepilogo dei risultati ottenuti per i cataloghi di galassie

In Tabella 6.1 sono riportati i valori di Ω_m corrispondenti al minimo della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} e quindi identificati dal test come responsabili delle minori distorsioni geometriche. In tabella sono riportati i risultati ottenuti per le galassie, sia nello spazio reale che nello spazio dei redshift, ai vari redshift considerati. La colonna $\sum z$ fa riferimento alla misura di \mathcal{L} ottenuta combinando le misure ai singoli redshift, come illustrato in precedenza.

Nello spazio reale si può notare come la crescita dell'ampiezza delle distorsioni geometriche con il redshift produce un miglioramento nella determinazione del miglior valore di Ω_m all'aumentare di z . Nello spazio dei redshift invece, come già mostrato da Ballinger et al. (1996) [3], si ha il massimo del segnale attorno a $z = 1$: per $z < 1$ l'effetto di distorsione dinamica domina sulle distorsioni geometriche, rendendo più difficile la loro identificazione.

	z	0.20	0.52	0.72	1.00	1.50	2.00	$\sum z$
Spazio reale	Ω_m	0.35	0.3	0.3	0.3	0.272	0.272	0.272
Spazio dei redshift	Ω_m	0.1	0.4	0.3	0.3	0.25	0.2	0.2

Tabella 6.1: Valori di Ω_m corrispondenti al minimo di \mathcal{L} ai diversi redshift.

	z	0.20	0.52	0.72	1.00	1.50	2.00
$\beta _{\Omega_m=0.272}$	0.396	0.406	0.405	0.384	0.341	0.296	
$\sigma_{12} _{\Omega_m=0.272}$	304	278	243	189	106	50	

Tabella 6.2: Valori di *best-fit* dei parametri β e σ_{12} relativi alla *corretta* cosmologia: $\Omega_m = 0.272$.

6.2 Cataloghi di AGN

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti applicando l'AP test ai cataloghi di AGN estratti dalla BOX1 della simulazione *Magneticum*, nello spazio reale e nello spazio dei redshift. Il numero d'oggetti contenuto in ogni catalogo è riportato in Tabella 4.2.

Spazio reale

Nelle Figure 6.12 e 6.13 sono riportate le curve di isocorrelazione ed i rispettivi modelli, ai vari redshift. Anche qui si può osservare come l'ampiezza delle distorsioni geometriche cresca con il redshift, tuttavia l'esiguo numero d'oggetti contenuti nei cataloghi (soprattutto ad alto z) rende la funzione di correlazione particolarmente rumorosa e di conseguenza il modello più impreciso. In particolar modo a $z = 2$, dove gli oggetti disponibili sono un fattore 10 meno degli oggetti del catalogo di galassie allo stesso redshift, la misura di ξ è particolarmente rumorosa (come si può facilmente osservare dai contorni di isocorrelazione mostrati nei pannelli in basso della Figura 6.13) ed il confronto tra la funzione di correlazione misurata ed il relativo modello è meno accurato. In Figura 6.14 sono riportati gli andamenti della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} calcolata nei vari cataloghi, mentre il valore di Ω_m identificato dal minimo di \mathcal{L} , e cioè corrispondente alla cosmologia che introduce le minori distorsioni geometriche, è riportato in Tabella 6.3. Si può notare come il minor numero d'oggetti disponibili, per quanto renda meno accurata la misura di ξ , non infici particolarmente (per lo meno nello spazio reale) la determinazione del corretto valore di Ω_m , mancato solamente a $z = 2.0$.

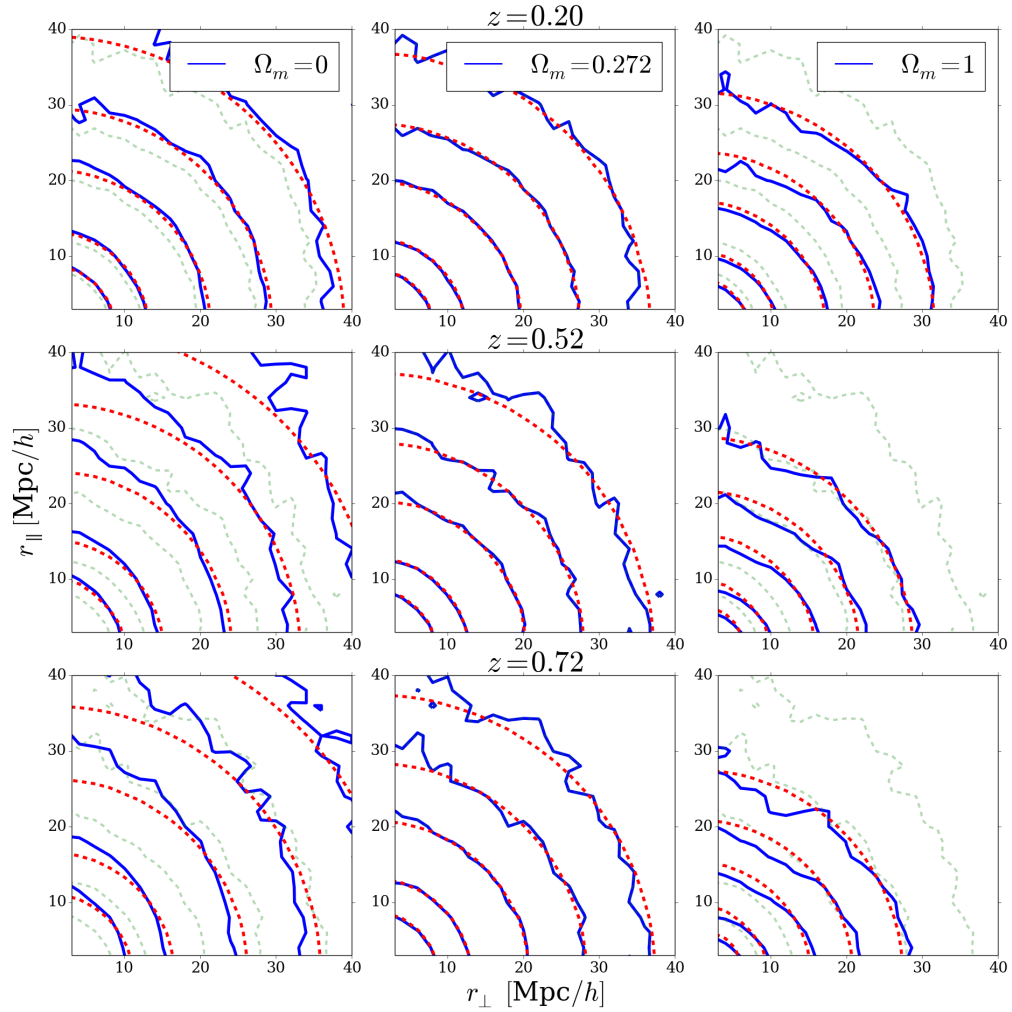


Figura 6.12: Contorni di isocorrelazione relativi ai livelli $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) = [1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05]$ per i cataloghi di AGN nello spazio reale, per i tre redshift indicati: $z = 0.2$ per i pannelli in alto, $z = 0.52$ per i pannelli centrali e $z = 0.72$ per i pannelli in basso. La linea continua blu rappresenta i contorni della funzione di correlazione misurata, alle diverse cosmologie: $\Omega_m = 0$ per la colonna a sinistra, $\Omega_m = 0.272$ per la colonna centrale e $\Omega_m = 1$ per la colonna a destra. La linea tratteggiata rossa rappresenta, nei vari casi, il relativo modello. Per $\Omega_m \neq 0.272$ sono riportate in verde, per confronto, le curve di isocorrelazione misurate alla giusta cosmologia.

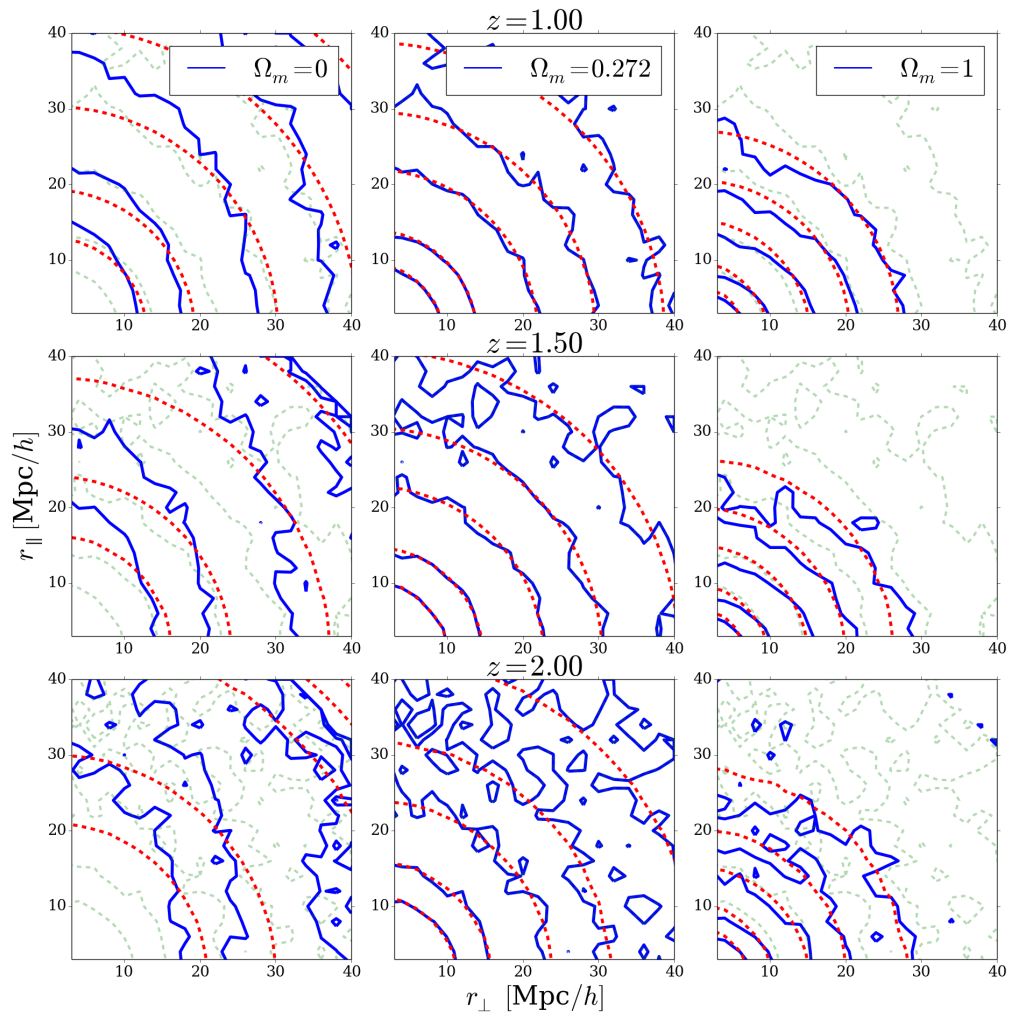


Figura 6.13: Curve di isocorrelazione degli AGN nello spazio reale riportate seguendo lo stesso schema utilizzato per la figura 6.12, ma per i redshift $z = 1$, $z = 1.5$ e $z = 2$.

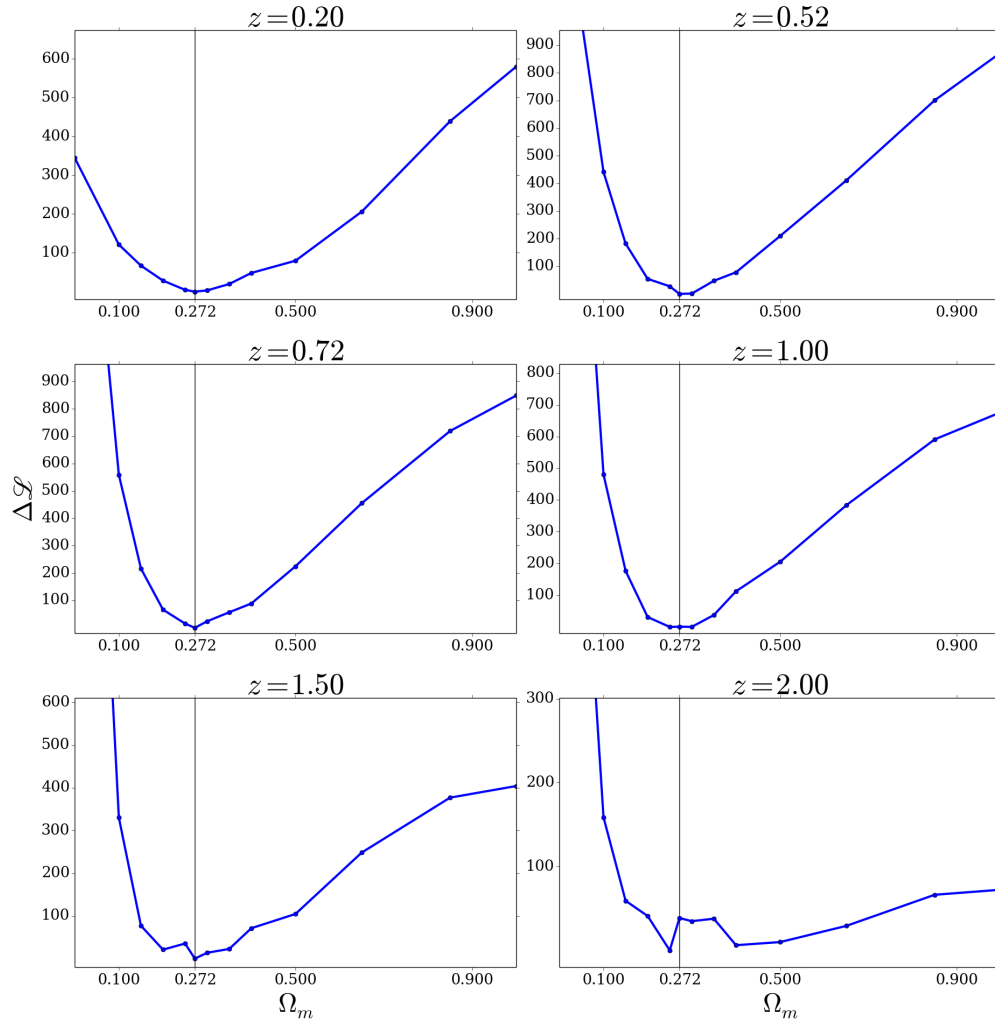


Figura 6.14: Funzioni di verosimiglianza che identificano il livello di accordo tra la funzione di correlazione misurata ed il modello. La linea nera verticale identifica il corretto valore $\Omega_m = 0.272$ *corretto*, cioè quello della simulazione da cui sono stati estratti i cataloghi. Le curve mostrano la consueta forma a campana rovesciata ed il minimo delle funzioni di verosimiglianza, riportato in Tabella 6.3, è sempre ben visibile eccezion fatta per il caso $z = 2.0$ dove l'insufficiente densità d'oggetti non permette la costruzione di un modello accurato.

Come per il caso delle galassie, si sono considerate le misure effettuate sui sei cataloghi disponibili come indipendenti e si è quindi provveduto a combinarle sommando le singole funzioni di verosimiglianza $\mathcal{L}(z_i)$. Il risultato ottenuto è riportato in Figura 6.15. Anche in questo caso la somma delle singole funzioni di verosimiglianza identifica il corretto valore di Ω_m . In Figura 6.16 si possono apprezzare i contributi relativi dei singoli $\mathcal{L}(z_i)$ a \mathcal{L}_{tot} . Si può osservare come l'incerto risultato ottenuto a $z = 2$ sia del tutto ininfluente: considerarlo o meno nella somma delle funzioni di verosimiglianza non produce alcun cambiamento. Il contributo dei redshift intermedi, dove l'ampiezza delle distorsioni geometriche è apprezzabile ed il numero d'oggetti sufficiente a garantire una buona misura di ξ , è il più rilevante.

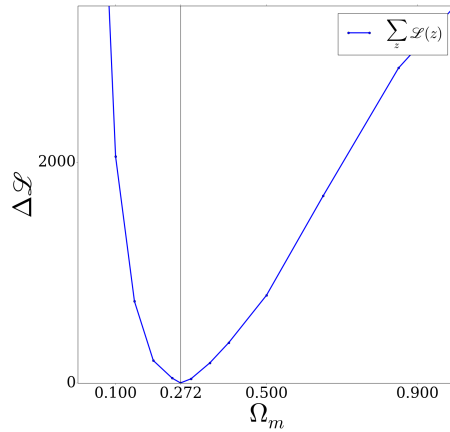


Figura 6.15: In Figura è riportata la funzione di verosimiglianza *totale* ottenuta per somma diretta delle \mathcal{L} dei singoli cataloghi. Si può notare come il valore $\Omega_m = 0.272$ sia correttamente identificato.

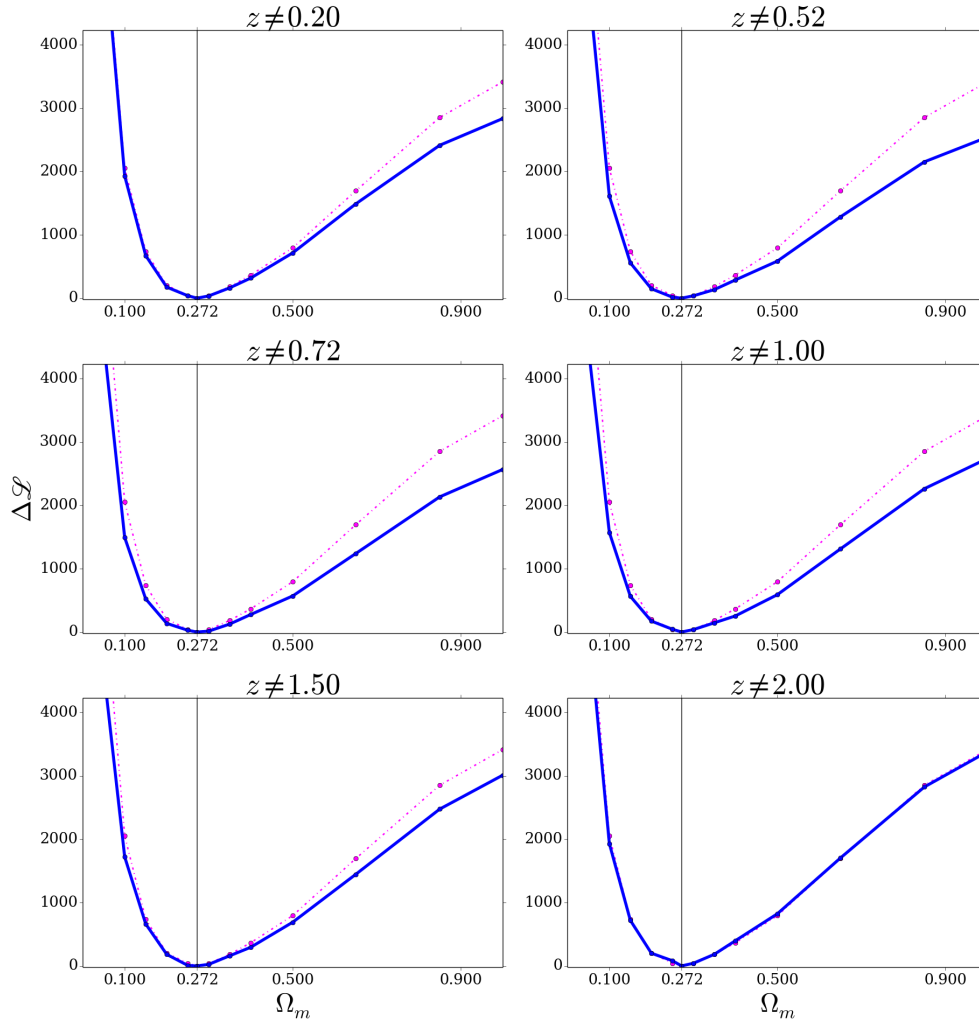


Figura 6.16: In blu è mostrata la funzione di verosimiglianza ottenuta sommando i contributi di tutti i redshift tranne quello indicato dal titolo del pannello. La curva tratteggiata magenta, riportata per confronto e uguale in ogni pannello, è la somma totale mostrata anche in Figura 6.15. Si può notare come il contributo del redshift maggiore, che singolarmente produce il risultato meno accurato, non sia significativo: non considerarlo nella somma non modifica la larghezza della curva rispetto a quella totale.

Spazio dei Redshift

Come descritto nel capitolo precedente, nello spazio dei redshift è necessario modellare le distorsioni dinamiche. L'intervallo di scale considerato per la misura della funzione di correlazione è lo stesso utilizzato per le galassie in modo che, anche in questo caso, l'influenza dei Fingers of God (intrinsecamente più prominenti nel caso degli AGN rispetto alle galassie dati i valori maggiori delle velocità peculiari) sia marginale. Nelle Figure 6.17 e 6.18 sono riportate le curve di isocorrelazione ed i relativi modelli, seguendo lo stesso schema utilizzato in precedenza. Le distorsioni dinamiche sono evidenti sia a grandi che a piccole scale, dove si possono osservare i *residui* di Fingers of God che eccedono la distanza minima utilizzata per la misura di ξ ($r_{min} = 3 \text{ Mpc}/h$). Così come nello spazio reale anche nello spazio dei redshift il rumore ad alti redshift dovuto allo scarso numero d'oggetti è evidente.

In Figura 6.19 sono riportate le funzioni di verosimiglianza, a $z = 2$ si può notare la stessa incertezza già osservata nello spazio reale. A $z = 0.2$ l'effetto di distorsione è dominato dalle distorsioni dinamiche e la minor ampiezza delle distorsioni geometriche non produce un risultato chiaro nell'identificazione del corretto valore di Ω_m . I valori di Ω_m corrispondenti al minimo di \mathcal{L} sono riportati in Tabella 6.3.

Infine in Figura 6.20 sono riportati, alle varie cosmologie, i parametri β e σ_{12} di *best-fit*, normalizzati ai rispettivi valori ottenuti per $\Omega_m = 0.272$ e riportati in Tabella 6.4. Anche in questo caso l'importanza di Fingers of God diminuisce al crescere di Ω_m e, per $\Omega_m \gg \Omega_{m,true}$, la determinazione di σ_{12} di *best-fit* è limitata dal vincolo posto per garantire la stabilità dell'integrale (5.3). Questo capita per valori di Ω_m maggiori rispetto a quelli delle galassie per via dell'intrinseca maggior importanza dei Fingers of God per gli AGN.

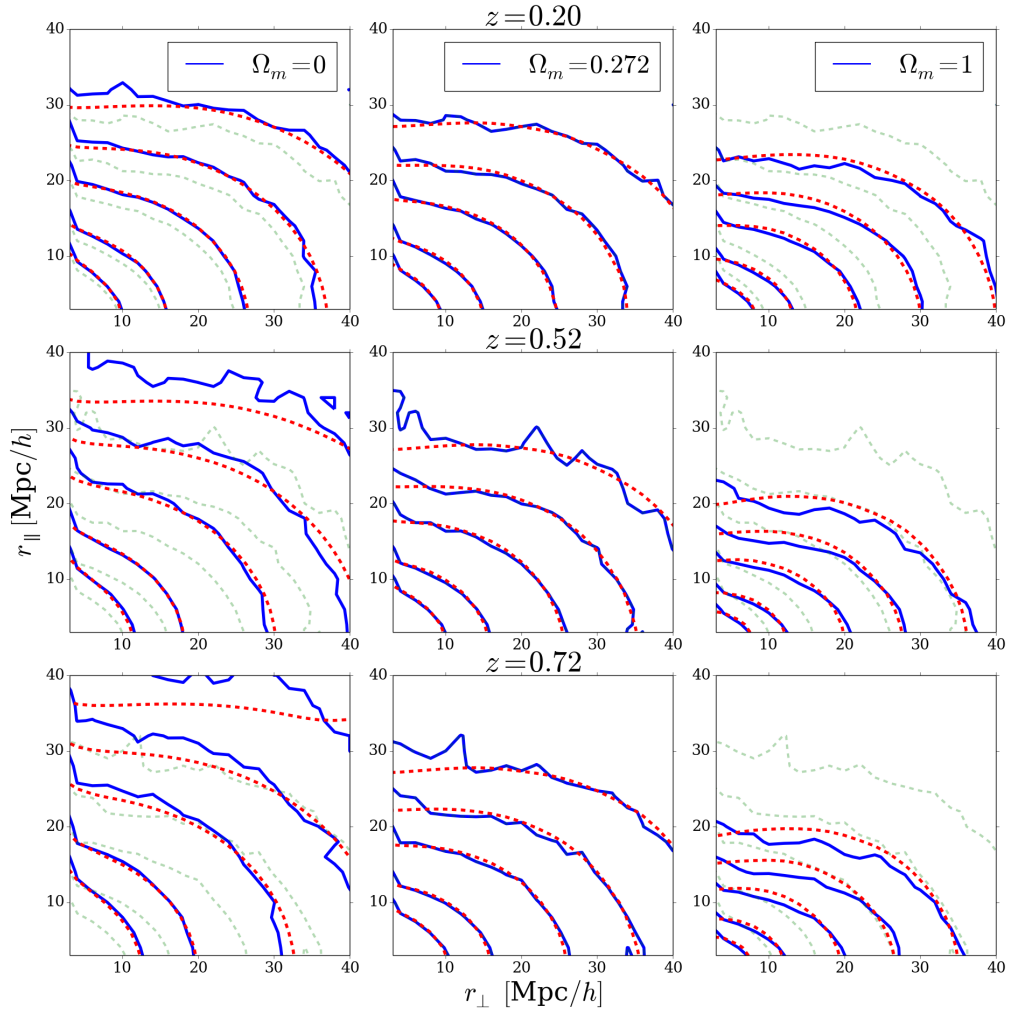


Figura 6.17: Contorni di isocorrelazione relativi ai livelli $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) = [1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05]$ per i cataloghi di AGN nello spazio dei redshift, per i tre redshift indicati: $z = 0.2$ per i pannelli in alto, $z = 0.52$ per i pannelli centrali e $z = 0.72$ per i pannelli in basso. La linea continua blu rappresenta i contorni della funzione di correlazione misurata, alle diverse cosmologie: $\Omega_m = 0$ per la colonna a sinistra, $\Omega_m = 0.272$ per la colonna centrale e $\Omega_m = 1$ per la colonna a destra. La linea tratteggiata rossa rappresenta, nei vari casi, il relativo modello. Per $\Omega_m \neq 0.272$ sono riportate in verde, per confronto, le curve di isocorrelazione misurate alla giusta cosmologia.

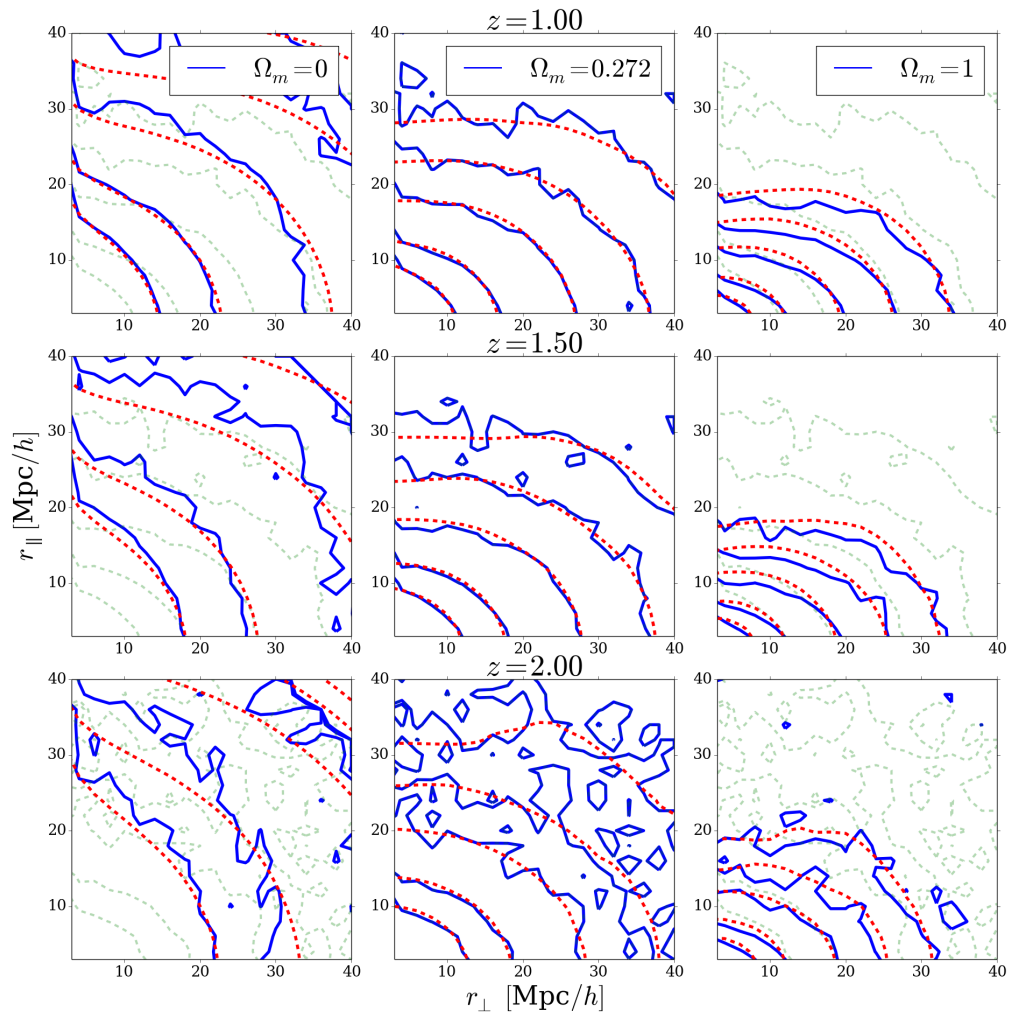


Figura 6.18: Contorni di isocorrelazione per gli AGN nello spazio dei redshift, riportati seguendo lo stesso schema utilizzato in Figura 6.17 ma per i redshift $z = 1$, $z = 1.5$ e $z = 2$. L'effetto di confusione dovuto allo scarso numero d'oggetti è evidente, in particolar modo a $z = 2$, dove le distorsioni sono quasi completamente coperte dal rumore nella misura di ξ .

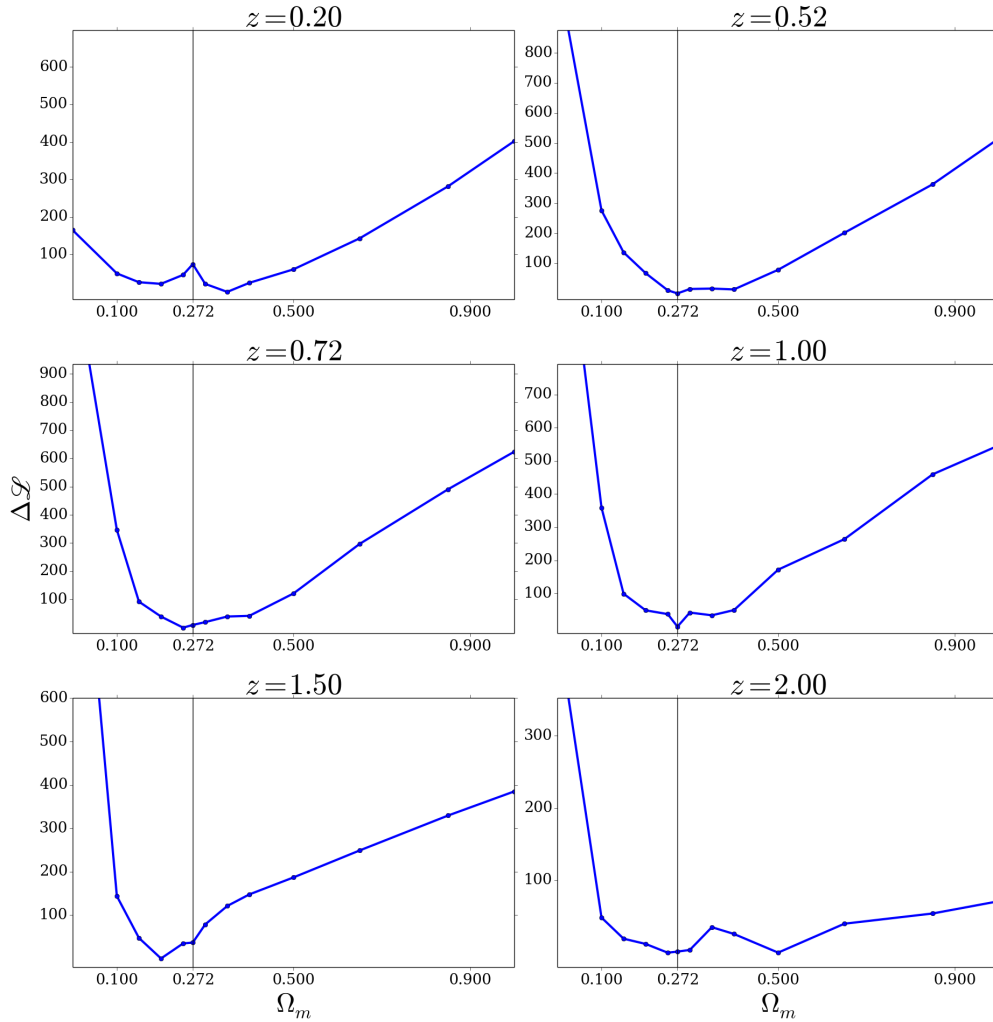


Figura 6.19: Funzioni di verosimiglianza che identificano il livello di accordo tra la funzione di correlazione misurata ed il modello. La linea nera verticale identifica il corretto valore $\Omega_m = 0.272$ *corretto*, cioè quello della simulazione da cui sono stati estratti i cataloghi. Le curve mostrano la consueta forma a campana rovesciata ed il minimo delle funzioni di verosimiglianza, riportato in Tabella 6.3, è sempre ben visibile eccezion fatta per $z = 2$, dove la funzione è più rumorosa e l'errore sulla misura di ξ è più elevato a causa dell'insufficiente numero d'oggetti contenuto nel catalogo.

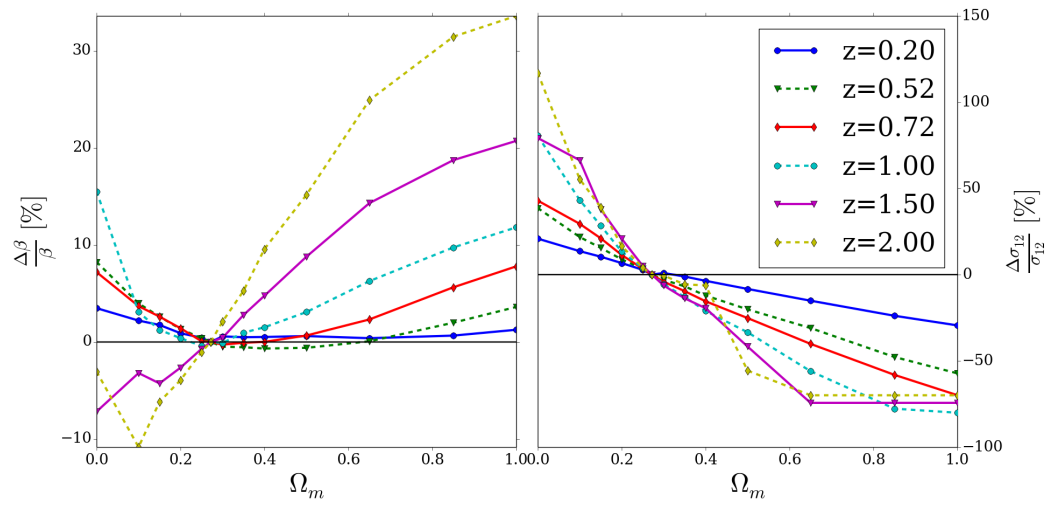


Figura 6.20: Andamento dei parametri β e σ_{12} di *best-fit*, in termini di variazione percentuale rispetto al valore ottenuto per $\Omega_m = 0.272$. I valori di *best-fit* di β e σ_{12} , alla cosmologia *corretta*, sono riportati in Tabella 6.4.

Anche in questo si sono combinate le misure effettuate ai vari redshift. In Figura 6.21 è riportata la funzione di verosimiglianza ottenuta per somma dei contributi dei vari redshift. Anche in questo caso, combinando le misure ottenute ai singoli redshift il corretto valore di Ω_m è identificato. In Figura 6.22 sono riportate anche le curve ottenute considerando tutti i contributi tranne uno. Si può osservare come contributi meno rilevanti siano quelli dei redshift estremi ($z = 0.2$ e $z = 2$) che producevano un risultato incerto anche singolarmente: escludendoli dalla somma non si ottiene infatti un allargamento significativo della curva di verosimiglianza, che rimane essenzialmente inalterata. Ciò è in un certo senso rassicurante: per quanto il risultato singolo fosse incerto, includerlo nell'analisi non ha modificato sostanzialmente l'aspetto della curva totale che identifica comunque il minimo corretto. Viceversa il contributo più rilevante è quello di $z = 1$, dove il rapporto tra l'ampiezza delle distorsioni dinamiche e delle distorsioni geometriche è più favorevole [3].

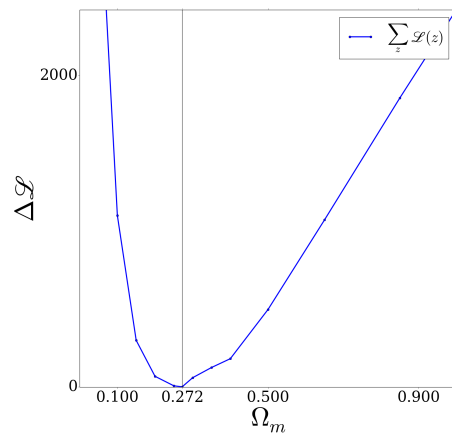


Figura 6.21: Funzione di verosimiglianza *totale* ottenuta per somma diretta delle \mathcal{L} dei singoli cataloghi. Si può notare come il valore $\Omega_m = 0.272$ sia correttamente identificato nonostante i contributi incerti dei redshift estremi.

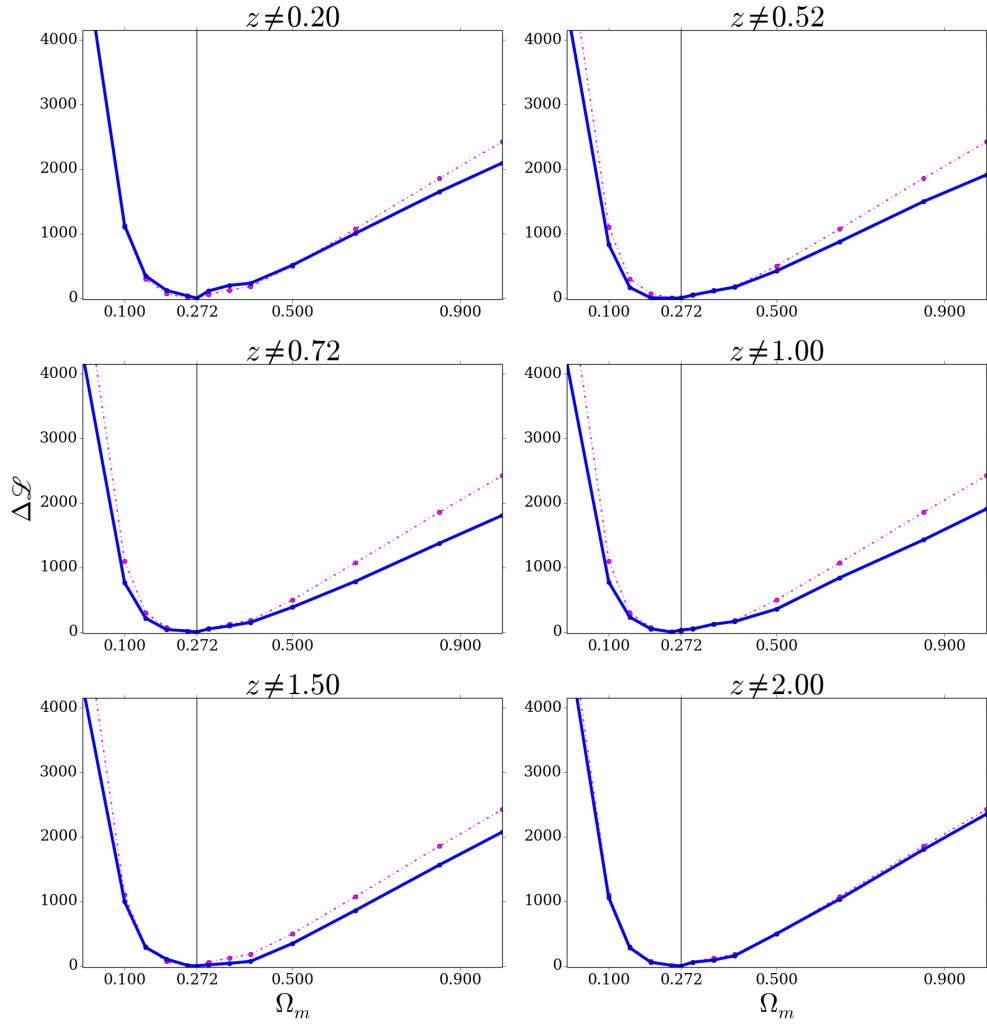


Figura 6.22: In blu è mostrata la funzione di verosimiglianza ottenuta sommando i contributi di tutti i redshift tranne quello indicato dal titolo del pannello. La curva tratteggiata magenta, riportata per confronto e uguale in tutti i pannelli, è la somma totale mostrata anche in Figura 6.21. Si può notare come il contributo dei redshift estremi, che singolarmente producono il risultato meno accurato, non sia significativo: non considerarlo nella somma non modifica la larghezza della curva rispetto a quella totale.

Riepilogo dei risultati ottenuti per i cataloghi di AGN

In Tabella 6.3 sono riportati i valori di Ω_m corrispondenti al minimo della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} e quindi identificati dal test come responsabili delle minori distorsioni geometriche. In tabella sono riportati i risultati ottenuti per gli AGN, sia nello spazio reale che nello spazio dei redshift, ai vari redshift considerati. Come nel caso precedente la colonna $\sum z$ fa riferimento alla misura di \mathcal{L} ottenuta combinando i contributi dei singoli redshift, come illustrato in precedenza. In Tabella 6.4 sono riportati invece i valori di *best-fit* dei parametri β e σ_{12} , ottenuti al *corretto* valore di Ω_m .

	z	0.20	0.52	0.72	1.00	1.50	2.00	$\sum z$
Spazio reale	Ω_m	0.272	0.272	0.272	0.25	0.272	0.25	0.272
Spazio dei redshift	Ω_m	0.35	0.272	0.25	0.272	0.2	0.25	0.272

Tabella 6.3: In Tabella sono riportati i valori di Ω_m corrispondenti al minimo della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} , ai vari redshift.

z	0.20	0.52	0.72	1.00	1.50	2.00
$\beta _{\Omega_m=0.272}$	0.342	0.342	0.335	0.312	0.274	0.200
$\sigma_{12} _{\Omega_m=0.272}$	357	322	294	251	195	166

Tabella 6.4: Valori di *best-fit* dei parametri β e σ_{12} alla cosmologia *corretta*, ai vari redshift.

6.3 Cataloghi di ammassi di galassie

In questa sezione vengono presentati i risultati ottenuti applicando l'AP test ai cataloghi di ammassi di galassie estratti dalla BOX1 della simulazione *Magneticum*, nello spazio reale e nello spazio dei redshift. Il numero d'oggetti contenuto in ogni catalogo è riportato in Tabella 4.2.

L'analisi effettuata sugli ammassi di galassie è la più completa in quanto è stato possibile associare un errore alla misura di Ω_m ripetendo l'AP test su un insieme di cataloghi indipendenti equivalenti alla BOX1. Si è fatto uso, a tale scopo, di una seconda realizzazione della simulazione *Magneticum*, detta BOX0, di volume 2688^3 (Mpc/h) 3 , cioè 3^3 volte più grande della BOX1. Si è provveduto quindi a suddividere la BOX0 in 27 sotto-BOX di volume uguale a quello della BOX1. È stato quindi possibile ripetere l'AP test in maniera indipendente su ognuna delle sottoBOX per poter assegnare un errore alla misura effettuata sulla BOX1.

Per ogni sotto-BOX si è ottenuta una funzione di verosimiglianza il cui minimo identifica il valore di Ω_m ritenuto migliore. Studiando la dispersione della funzione di distribuzione dei minimi delle varie \mathcal{L} si è quindi stimato l'errore sulla misura di Ω_m . In Figura 6.23 sono riportate, a titolo d'esempio, la funzione di verosimiglianza media ottenuta dalle 27 sotto-BOXe la curva ottenuta dalla misura effettuata sulla BOX1, nello spazio dei redshift a $z = 1$, assieme all'istogramma dei valori di Ω_m identificati come corretti dalle varie misure. La dispersione di tale istogramma fornirà una stima dell'errore sull'identificazione di Ω_m .

Spazio reale

Come nei casi precedenti vengono qui riportati i risultati ottenuti nello spazio reale. Nelle Figure 6.24 e 6.25 sono riportate le curve di isocorrelazione ed i rispettivi modelli, ai vari redshift. In Figura 6.26 sono riportate le curve di verosimiglianza ottenute nei vari casi, le bande verdi rappresentano gli errori sulla determinazione di Ω_m , ad 1σ e 3σ , ottenuti ripetendo la misura su 27 sotto-BOX estratte dalla BOX0. In Tabella 6.5 i valori di Ω_m identificati dal minimo di \mathcal{L} e le relative incertezze sono riportati. Come si può notare dalla Tabella 6.5 l'errore decresce all'aumentare del redshift di pari passo con l'aumento dell'importanza delle distorsioni geometriche. Questo fino a $z = 2$ quando il numero d'oggetti diventa troppo esiguo e l'effetto di distorsione è sovrastato dalla rumorosità nella misura di ξ .

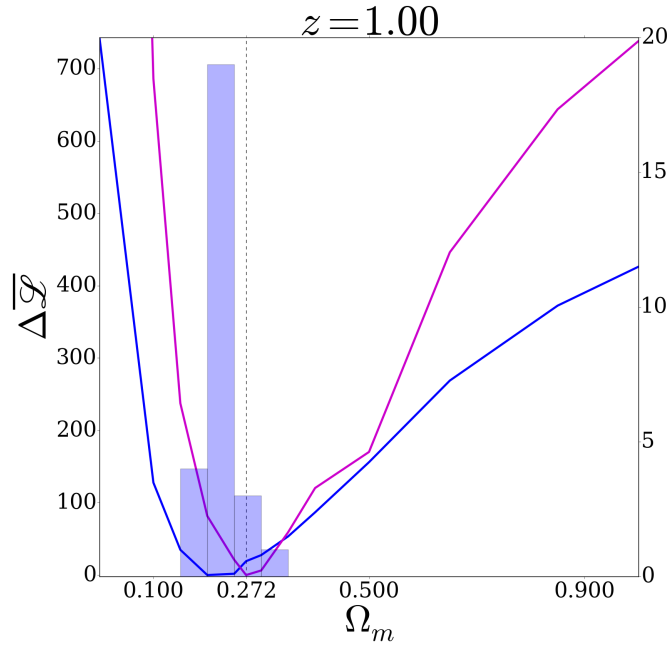


Figura 6.23: In figura è riportata, a titolo d'esempio, la funzione di verosimiglianza media (linea continua blu) ottenuta dalle 27 misure effettuate sulle sotto-BOX estratte dalla BOX0 nello spazio dei redshift, a $z = 1$. La curva viola è invece la curva di verosimiglianza, per gli ammassi a $z = 1$ nello spazio dei redshift, misurata dalla BOX1 (e riportata in Figura 6.31). In trasparenza è inoltre riportata la funzione di distribuzione dei valori di Ω_m ottenuti dalle singole misure. Di tale funzione di distribuzione è stata stimata la dispersione per utilizzarla come limite superiore all'incertezza sulla determinazione di Ω_m dalla BOX1.

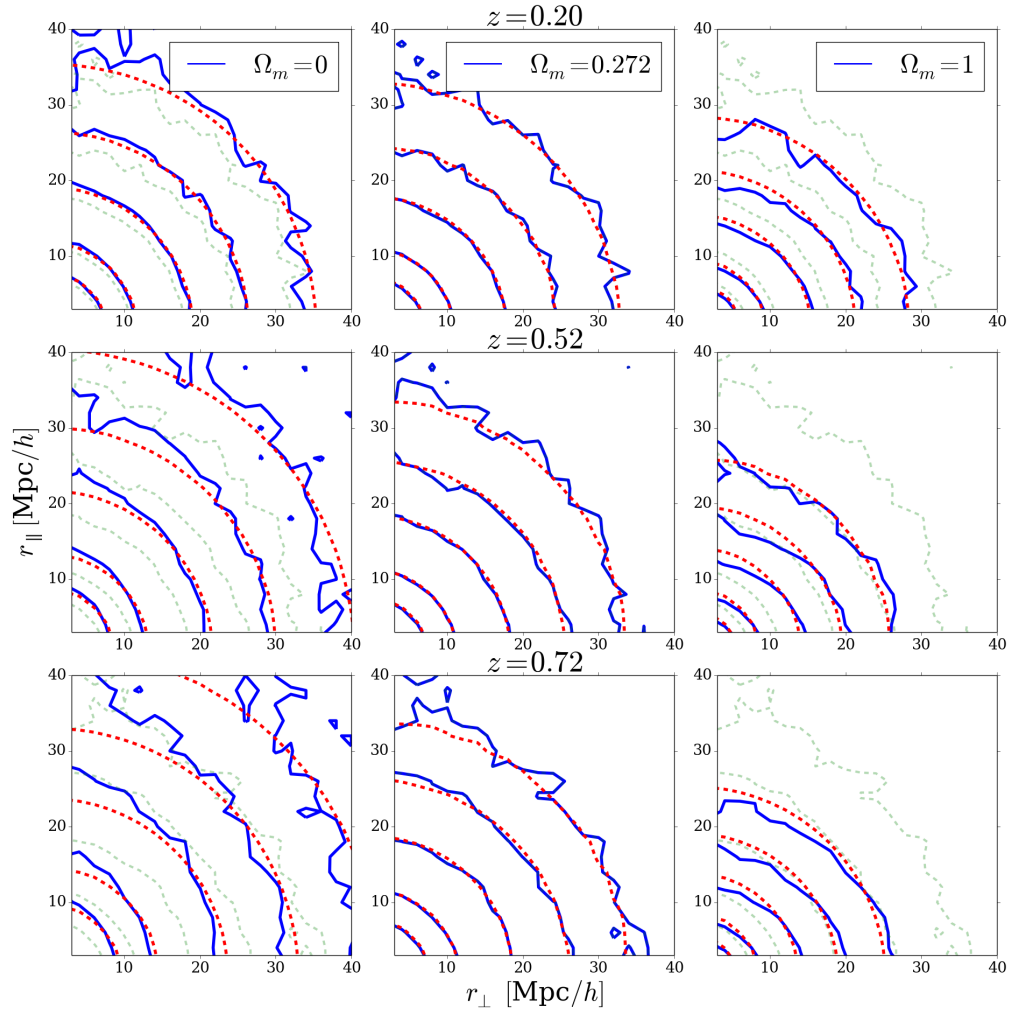


Figura 6.24: Contorni di isocorrelazione relativi ai livelli $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) = [1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05]$ per i cataloghi di ammassi di galassie nello spazio reale, per i tre redshift indicati: $z = 0.2$ per i pannelli in alto, $z = 0.52$ per i pannelli centrali e $z = 0.72$ per i pannelli in basso. La linea continua blu rappresenta i contorni della funzione di correlazione misurata, alle diverse cosmologie: $\Omega_m = 0$ per la colonna a sinistra, $\Omega_m = 0.272$ per la colonna centrale e $\Omega_m = 1$ per la colonna a destra. La linea tratteggiata rossa rappresenta, nei vari casi, il relativo modello. Per $\Omega_m \neq 0.272$ sono riportate in verde, per confronto, le curve di isocorrelazione misurate alla giusta cosmologia.

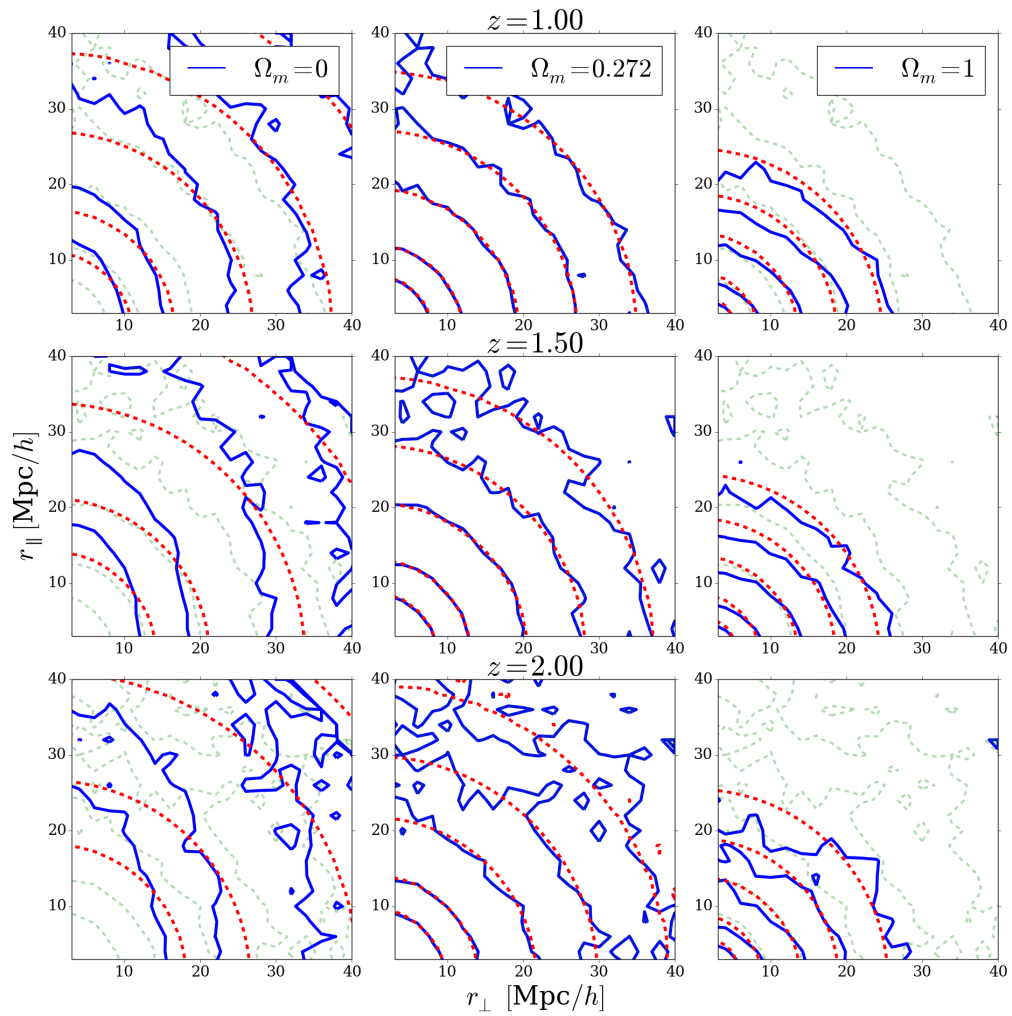


Figura 6.25: Contorni di isocorrelazione per gli ammassi di galassie nello spazio reale, riportati seguendo lo stesso schema utilizzato in Figura 6.24 ma per i redshift $z = 1$, $z = 1.5$ e $z = 2$. A $z = 2$ si può notare la confusione dovuta all'esiguo numero d'oggetti del catalogo, per quanto l'effetto di distorsione sia ancora visibile qualitativamente.

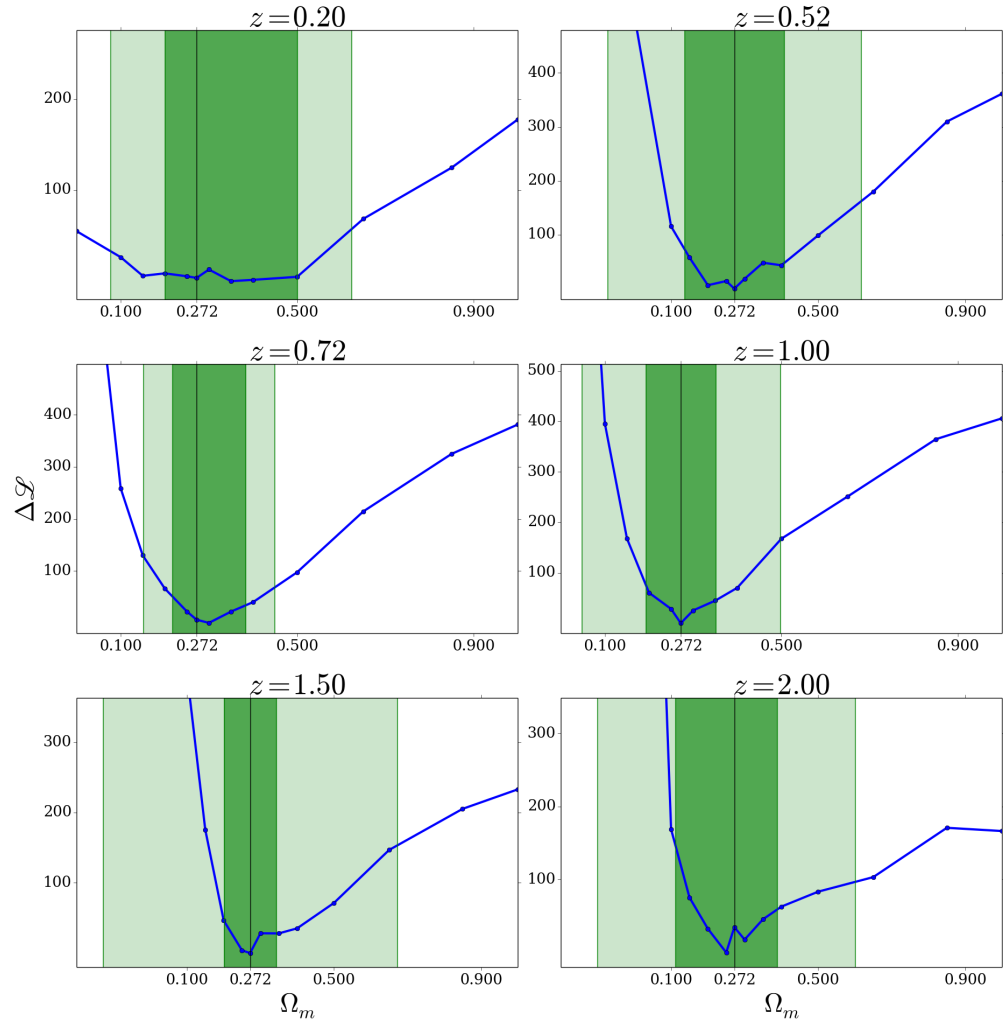


Figura 6.26: Funzioni di verosimiglianza che identificano il livello di accordo tra la funzione di correlazione ed il modello. La linea nera verticale identifica il valore *corretto* $\Omega_m = 0.272$. Le curve mostrano l'aspettata forma a campana (anche ad alti z) eccezion fatta per il caso $z = 0.2$, dove la minor ampiezza delle distorsioni geometriche unite all'esiguo numero d'oggetti (circa un fattore due meno degli AGN ed un fattore sei meno delle galassie allo stesso redshift) non consente un efficace confronto tra modello e ξ misurata. Le bande verdi rappresentano l'incertezza sulla determinazione di Ω_m a 1σ e 3σ , ottenute come illustrato precedentemente.

Come per i casi precedenti sono state combinate le misure effettuate ai vari redshift per migliorare l'identificazione del corretto Ω_m . Anche in questo caso la combinazione delle varie misure identifica il valore $\Omega_m = 0.272$ come quello che introduce le minori distorsioni geometriche e, come già visto anche in precedenza, si può osservare che il contributo maggiore alla misura è dato dai redshift intermedi ed in particolare da $z = 1$, redshift in cui ampiezza delle distorsioni e numero d'oggetti disponibili generano l'effetto più apprezzabile. I risultati della combinazione delle varie misure sono riportati, seguendo lo stesso schema utilizzato in precedenza, nelle Figure 6.27 e 6.28.

L'errore sull'identificazione di Ω_m ad 1σ risulta essere ± 0.05 ed è stato ottenuto, come per i singoli redshift, studiando la dispersione della funzione di distribuzione dei minimi di $\sum_z \mathcal{L}$ ottenuti dalle varie sotto-BOX.

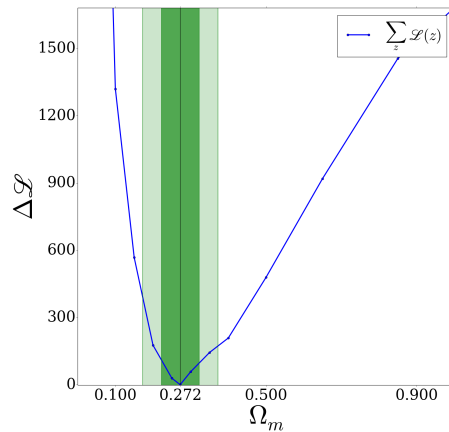


Figura 6.27: Funzione di verosimiglianza *totale* ottenuta per somma diretta delle funzioni di verosimiglianza \mathcal{L} dei singoli cataloghi. Le bande verdi rappresentano l'errore sulla determinazione di Ω_m ad 1σ e 3σ .

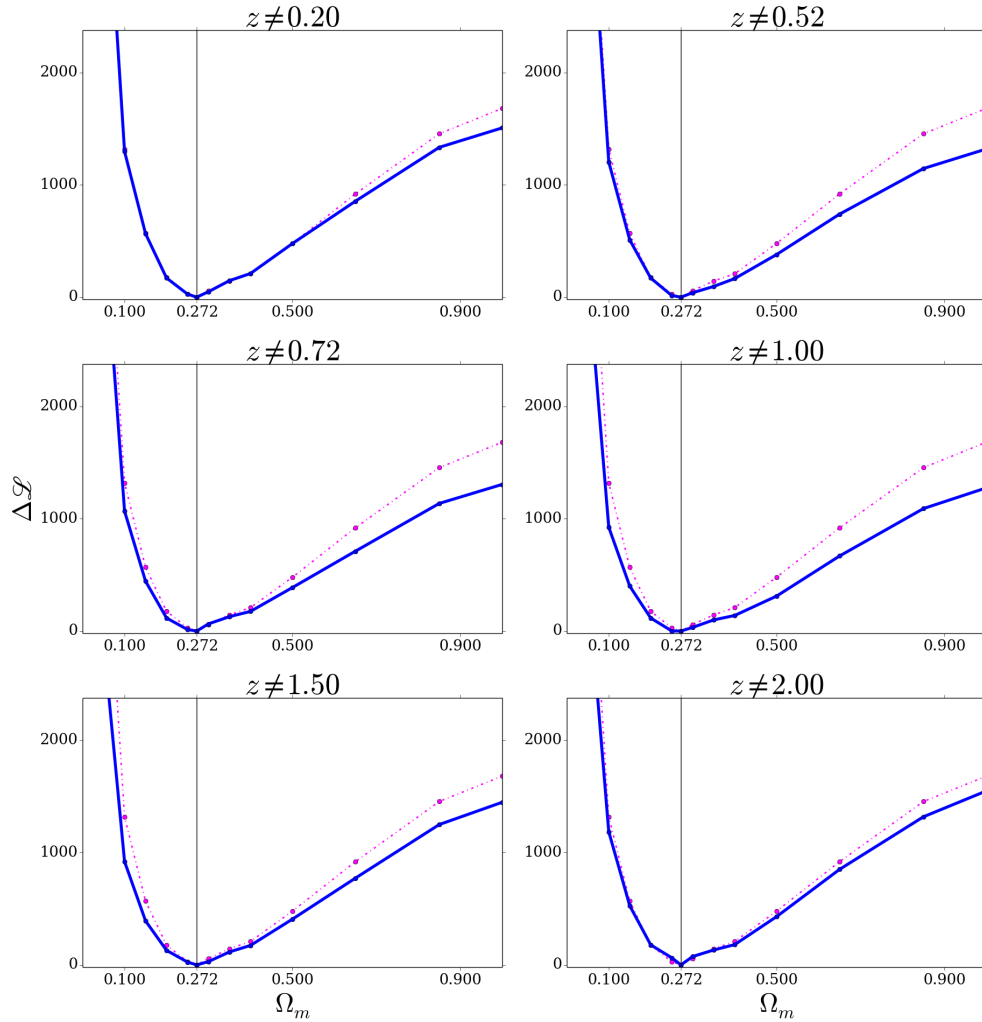


Figura 6.28: In blu è mostrata la funzione di verosimiglianza ottenuta sommando i contributi di tutti i redshift tranne quello indicato dal titolo del pannello. La curva tratteggiata magenta, riportata per confronto ed uguale in ogni pannello, è la somma totale mostrata anche in Figura 6.27. Anche in questo caso si può notare come il contributo dei redshift estremi, che singolarmente producono il risultato meno accurato, non sia significativo: non considerarlo nella somma non modifica la larghezza della curva rispetto a quella totale.

Spazio dei redshift

La funzione di correlazione degli ammassi di galassie non mostra Fingers of God, effetto generato dal moto casuale degli oggetti *interni* agli ammassi stessi, quindi non è necessario tenere in considerazione nella determinazione del modello di *best-fit* il parametro σ_{12} . In questo caso si sono quindi modellate le distorsioni dinamiche solamente attraverso il parametro β .

Nelle Figure 6.29 e 6.30 sono riportate, al solito, le curve di isocorrelazione misurate ai vari redshift. Si noti che a $z = 0.2$ le distorsioni geometriche sono del tutto trascurabili. In Figura 6.31 è riportato l'andamento della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} con i relativi errori, calcolati come illustrato nello spazio reale. I valori di Ω_m corrispondenti al minimo della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} sono riportati in Tabella 6.5.

In Figura 6.32 è riportato l'andamento del parametro β di *best-fit* mentre i valori di β corrispondenti alla cosmologia corretta, cioè con $\Omega_m = 0.272$, sono riportati in Tabella 6.6.

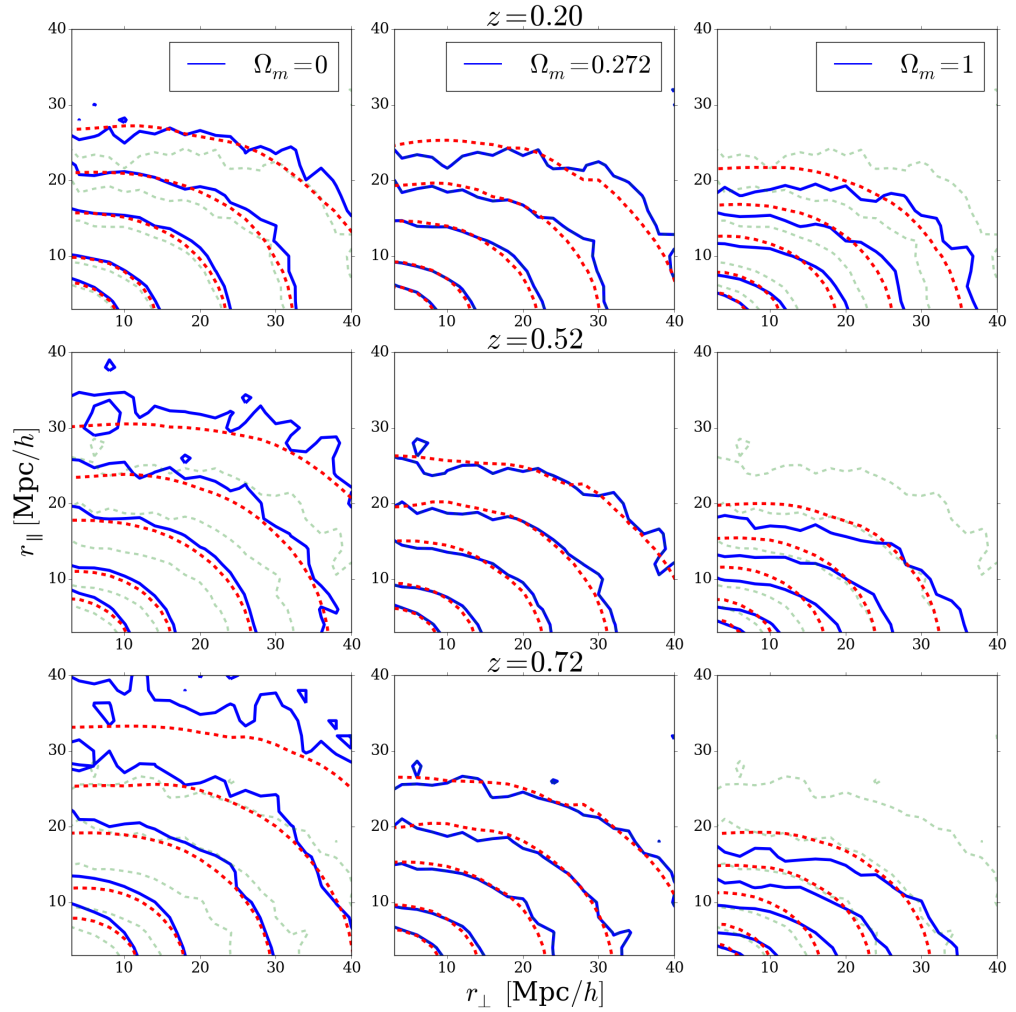


Figura 6.29: Contorni di isocorrelazione relativi ai livelli $\xi(r_{\perp}, r_{\parallel}) = [1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05]$ per i cataloghi di ammassi di galassie nello spazio dei redshift, per i tre redshift indicati: $z = 0.2$ per i pannelli in alto, $z = 0.52$ per i pannelli centrali e $z = 0.72$ per i pannelli in basso. La linea continua blu rappresenta i contorni della funzione di correlazione misurata, alle diverse cosmologie: $\Omega_m = 0$ per la colonna a sinistra, $\Omega_m = 0.272$ per la colonna centrale e $\Omega_m = 1$ per la colonna a destra. La linea tratteggiata rossa rappresenta, nei vari casi, il relativo modello. Per $\Omega_m \neq 0.272$ sono riportate in verde, per confronto, le curve di isocorrelazione misurate alla giusta cosmologia.

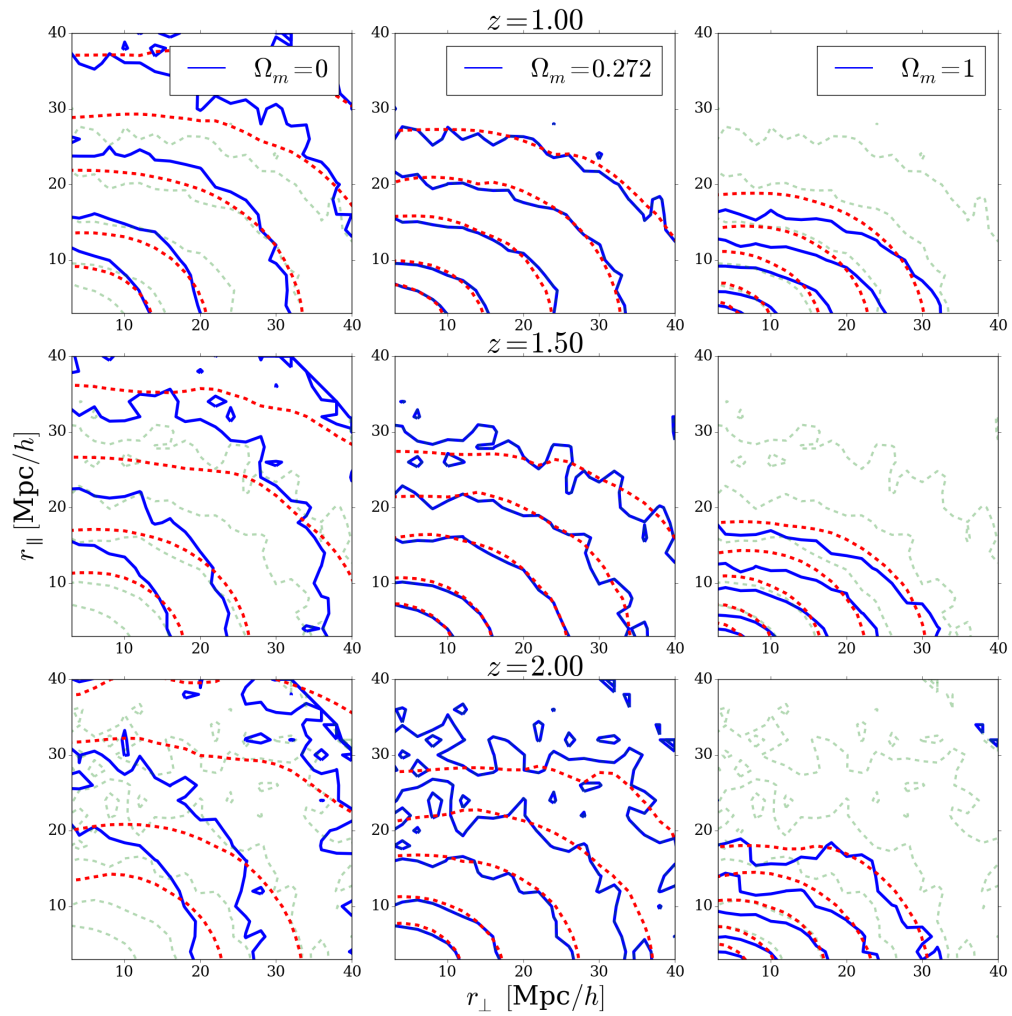


Figura 6.30: Contorni di verosimiglianza per gli ammassi di galassie nello spazio dei redshift, riportati seguendo lo stesso schema utilizzato per la Figura 6.29 ma per i redshift $z = 1$, $z = 1.5$ e $z = 2$.

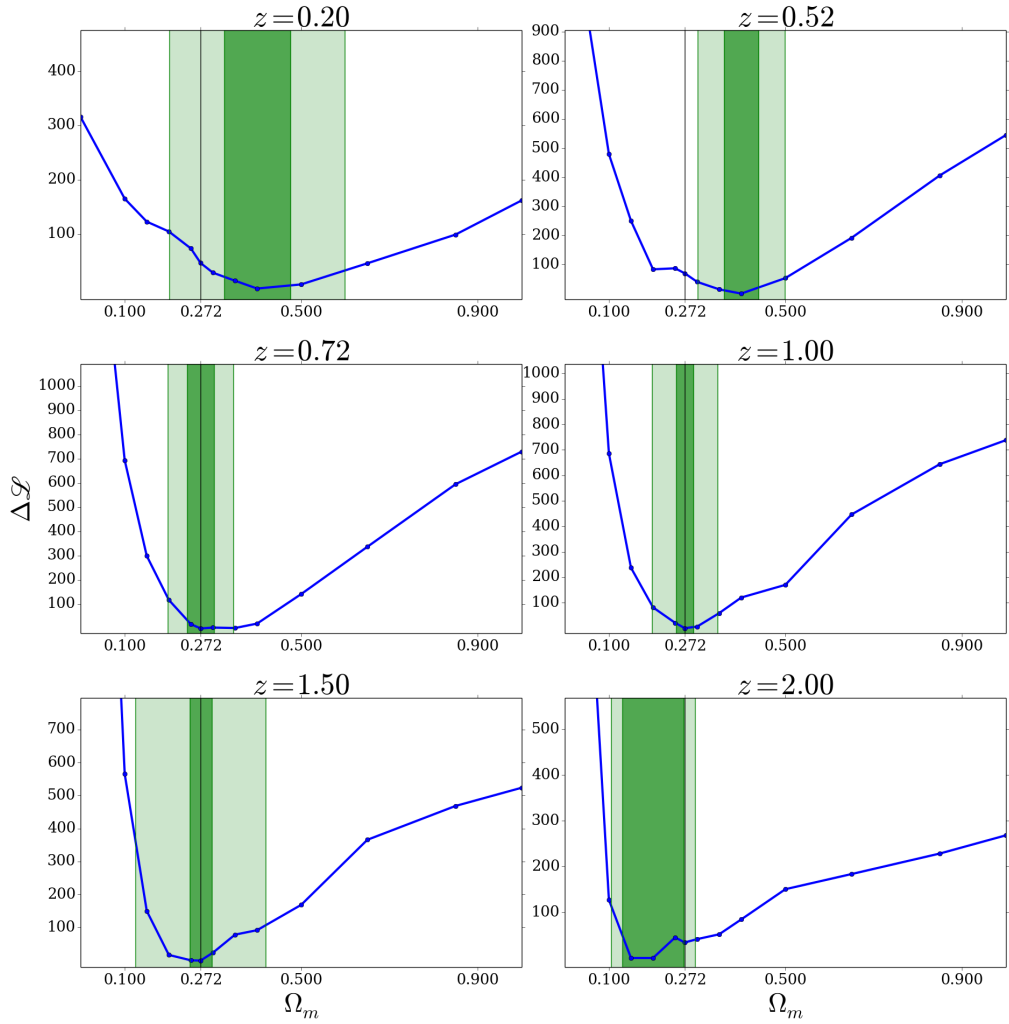


Figura 6.31: Funzioni di verosimiglianza che identificano il livello di accordo tra la funzione di correlazione ed il modello. Le bande verdi rappresentano l'incertezza sulla determinazione di Ω_m a 1 e 3 σ . La linea nera verticale identifica il valore *corretto* $\Omega_m = 0.272$. Analogamente a quanto osservato nello spazio reale l'errore inizialmente diminuisce all'aumentare del redshift, di pari passo con l'aumentare dell'ampiezza delle distorsioni geometriche, per poi risalire quando la misura è dominata dalla confusione dovuta alla scarsità del numero d'oggetti.

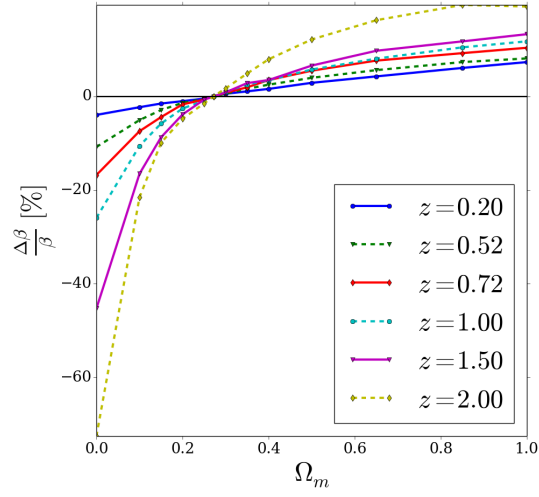


Figura 6.32: Andamento ai vari redshift del parametro β di *best-fit*. Il valore ottenuto in corrispondenza di $\Omega_m = 0.272$ è riportato in Tabella 6.6.

Anche in questo caso si è provveduto a combinare le misure ottenute ai vari redshift. La curva totale con il relativo errore è mostrata in Figura 6.33, il valore di Ω_m ottenuto è 0.30 ± 0.05 , a 3σ . I contributi dei singoli redshift è riportato al solito in Figura 6.34 dalla quale si può osservare che i contributi meno rilevanti a \mathcal{L}_{tot} sono quelli derivanti dai redshift estremi mentre il contributo massimo è quello dovuto a $z = 1$.

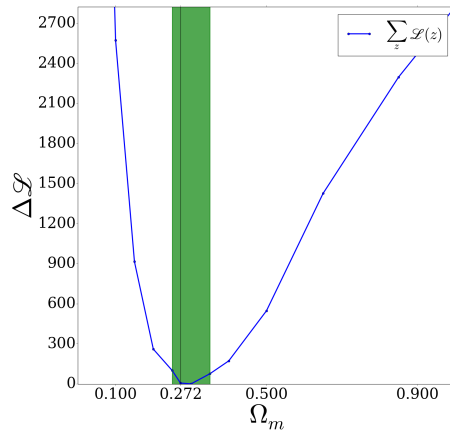


Figura 6.33: In Figura è riportata la funzione di verosimiglianza *totale* ottenuta per somma diretta delle \mathcal{L} dei singoli cataloghi. La banda verde rappresenta l'errore a 3σ ottenuto come descritto in precedenza.

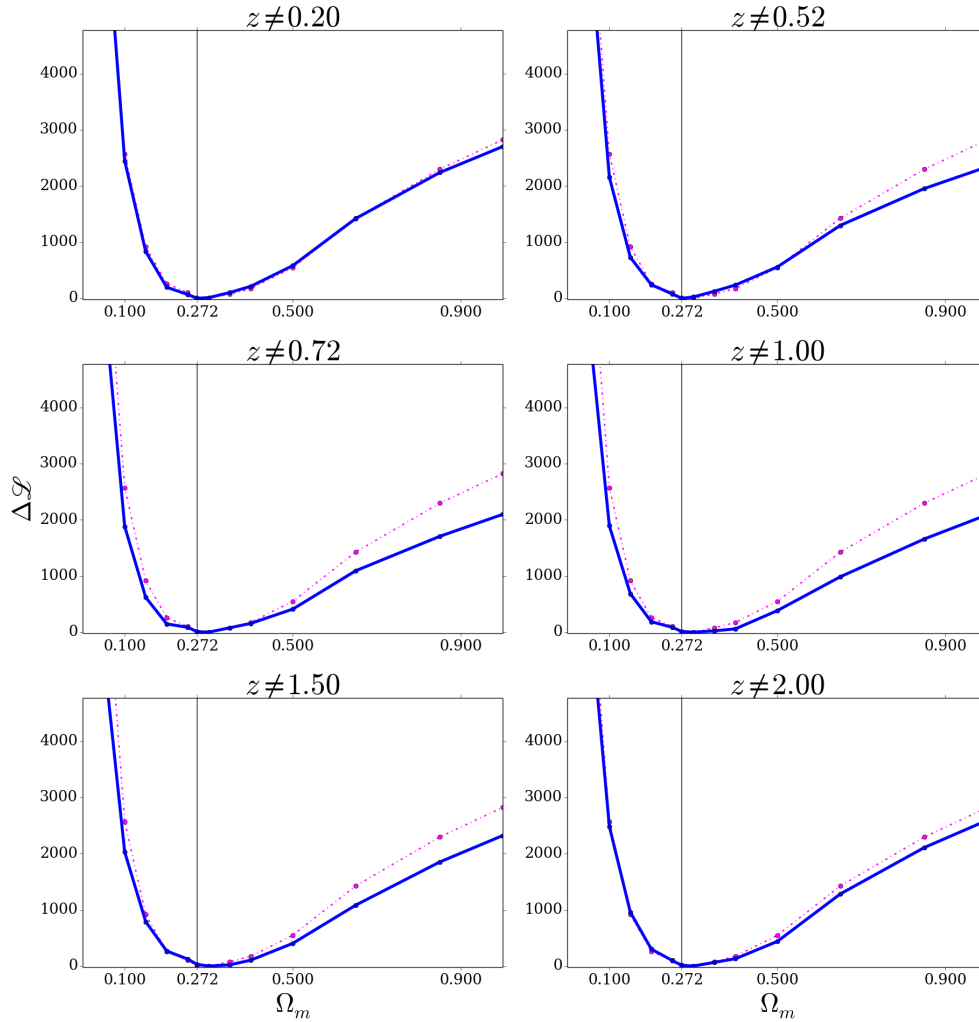


Figura 6.34: In blu è mostrata la funzione di verosimiglianza ottenuta sommando i contributi di tutti i redshift tranne quello indicato dal titolo del pannello. La curva tratteggiata magenta, riportata per confronto ed uguale in ogni pannello, è la somma totale mostrata anche in Figura 6.33. Nuovamente si nota che il contributo alla somma delle misure ottenute ai redshift estremi (dell'intervallo considerato) sono le meno influenti.

Riepilogo dei risultati ottenuti per i cataloghi di ammassi di galassie

In Tabella 6.5 sono riportati i valori di Ω_m identificati come responsabili delle minori dispersioni geometriche dall'AP test effettuato sui cataloghi di ammassi di galassie. Sono riportati i risultati ottenuti sia nello spazio reale che nello spazio dei redshift. La colonna $\sum z$ identifica, al solito, la misura di Ω_m ottenuta combinando le funzioni verosimiglianza ai vari redshift, come descritto in precedenza. In Tabella 6.6 sono invece riportati i valori del parametro β di *best-fit* ottenuti per $\Omega_m = 0.272$.

	z	0.20	0.52	0.72	1.00	1.50	2.00	$\sum z$
Spazio reale	Ω_m	0.35	0.272	0.3	0.272	0.272	0.25	0.272
	1σ	0.15	0.14	0.09	0.08	0.07	0.14	0.05
	3σ	0.28	0.35	0.15	0.23	0.4	0.35	0.1
Spazio dei redshift	Ω_m	0.4	0.4	0.272	0.272	0.272	0.2	0.3
	1σ	0.08	0.04	0.03	0.02	0.03	0.07	—
	3σ	0.2	0.1	0.08	0.08	0.15	0.1	0.05

Tabella 6.5: Valori di Ω_m corrispondenti, ai vari redshift, al minimo della funzione di verosimiglianza \mathcal{L} . In Tabella sono riportati anche gli errori sulle misure ottenuti ripetendo l'AP test su un insieme di 27 cataloghi estratti dalla realizzazione detta BOX0 della simulazione *Magneticum*, come illustrato all'inizio di questa sezione.

z	0.20	0.52	0.72	1.00	1.50	2.00
$\beta _{\Omega_m=0.272}$	0.369	0.382	0.372	0.349	0.302	0.261

Tabella 6.6: In Tabella sono riportati i valori di *best-fit* del parametro β alla cosmologia *corretta*, ai vari redshift. La funzione di correlazione degli ammassi di galassie non ha Fingers of God, per definizione, quindi il parametro σ_{12} non è stato inserito nel modello ed è quindi da considerarsi, ad ogni redshift, fissato a 0.

6.4 Effetti della riduzione del numero di parametri liberi nella costruzione del modello

Come descritto nel Capitolo 5, le distorsioni dinamiche sono state incluse nel modello di funzione di correlazione attraverso i parametri β , a grandi scale, e σ_{12} , a piccole scale.

Il parametro σ_{12} , tuttavia, introduce delle difficoltà sia concettuali che numeriche. Abbiamo detto in precedenza che esso è interpretabile come la dispersione di velocità degli oggetti all'interno degli ammassi. Questo è vero se si assume che la funzione di distribuzione delle velocità (equazione (5.4)) sia corretta. In caso contrario il parametro σ_{12} è sì collegato alla dispersione di velocità delle galassie ma in senso più lato: è il valore dell'ipotetica dispersione che meglio riproduce le osservazioni una volta assunto un modello per $f(v)$, potenzialmente errato.

Dal punto di vista numerico, inoltre, è necessario imporre un limite inferiore oltre il quale non far scendere σ_{12} per evitare problemi di convergenza dell'integrale (5.3). Questo può rappresentare un problema soprattutto per valori del parametro di densità $\Omega_m \gg \Omega_{m,true}$. Come si può osservare ad esempio in Figura 6.2, la generale contrazione delle lunghezze che si osserva aumentando il parametro di densità fa sì che, per valori estremi di Ω_m , l'effetto di distorsione dei Fingers of God esca dall'intervallo considerato per la costruzione del modello. In questo caso σ_{12} tende a 0, ma viene limitato dal vincolo inferiore posto appunto per garantire la stabilità dell'integrale (5.3).

È lecito chiedersi come cambia la stima di Ω_m omettendo o fissando σ_{12} rispetto ai risultati ottenuti in precedenza (nei quali σ_{12} è lasciato libero). Di seguito sono riportati, limitatamente ai casi di galassie e AGN a $z = 1$, le curve di verosimiglianza ottenute lasciando σ_{12} libero, fissandolo al valore *corretto* (cioè ottenuto per $\Omega_m = 0.272$) e modellando le distorsioni dinamiche unicamente attraverso il parametro β (cioè in maniera equivalente a porre $\sigma_{12} = 0$), come fatto per gli ammassi.

Galassie

Procediamo a descrivere i risultati mostrati in Figura 6.35. La curva rossa del pannello di sinistra rappresenta la funzione di verosimiglianza $\Delta\mathcal{L}$ ottenuta da un modello senza σ_{12} nel quale, quindi, i Fingers of God non sono inclusi. Si può notare come per $\Omega_m \gg \Omega_{m,true}$ l'accordo tra ξ misurata e modello a $\sigma_{12} = 0$ è maggiore di tutti gli altri casi, a riprova del fatto che

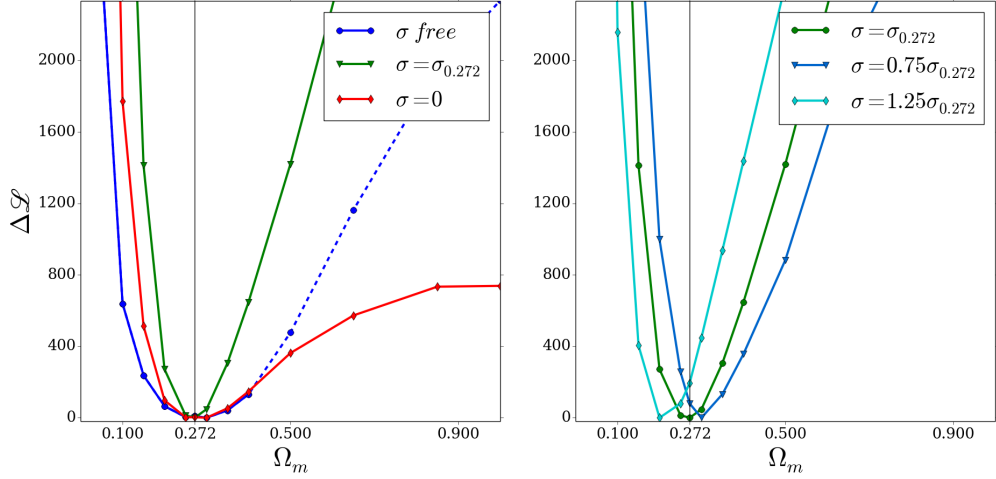


Figura 6.35: Curve di verosimiglianza ottenute confrontando la funzione di correlazione delle galassie a $z = 1$ con modelli ottenuti con diversi valori del parametro σ_{12} . Nel pannello a sinistra sono riportate la curva ottenuta lasciando libero il parametro σ_{12} (curva blu), la curva ottenuta fissando σ_{12} al valore trovato alla giusta cosmologia (curva verde) e la curva ottenuta omettendo σ_{12} nel modello, procedimento del tutto equivalente a fissare $\sigma_{12} = 0$ (curva rossa). Nel pannello a destra è nuovamente riportata (in verde) la curva di verosimiglianza ottenuta fissando σ_{12} al valore *corretto* ottenuto per $\Omega_m = 0.272$, le curve blu e azzurra sono invece state ottenute fissando σ_{12} ad un valore *errato*.

all'aumentare del parametro di densità l'effetto di distorsione esce dall'intervallo di integrazione. La curva blu quantifica invece l'accordo tra ξ misurata ed un modello in cui σ_{12} è un parametro libero e corrisponde ai risultati mostrati in precedenza. Come si può notare dalla Figura 6.9 per $\Omega_m > 0.5$ il parametro σ_{12} è limitato dal vincolo imposto per la stabilità dell'integrale (5.3), per cui possiamo assumere che nell'intervallo $\Omega_m \in [0.5, 1]$ (in assenza di vincoli) la curva blu corrisponderebbe alla curva rossa. La curva verde è invece ottenuta fissando il parametro σ_{12} al valore ottenuto per $\Omega_m = 0.272$. Come si può notare in questo caso si ottiene il miglior risultato in termini di identificazione del *corretto* valore di Ω_m : la curva di verosimiglianza è la più stretta possibile, centrata a $\Omega_{m,true}$. Da queste considerazioni si conclude, in primo luogo, che considerare i Fingers of God nella costruzione del modello migliora l'efficienza del metodo di identificare il *corretto* valore di Ω_m ¹. In secondo luogo si può

¹Almeno fintantoché si considera un intervallo di scale fisso. Si potrebbe, in alternativa, variare l'intervallo di scale considerato per la costruzione del modello di pari passo con la contrazione delle distanze dovuta all'aumentare di Ω_m . In questo modo l'importanza dei Fingers of God, ad ogni cosmologia, rimarrebbe la stessa e quindi un modello senza σ_{12} riprodurrebbe sempre ugualmente bene (o ugualmente male) la funzione di correlazione misurata (al netto delle distorsioni geometriche).

osservare che l'imposizione del corretto valore di σ_{12} migliora sensibilmente l'identificazione di $\Omega_{m,best}$.

Possiamo quindi chiederci quanto accurata debba essere la misura di $\sigma_{12,real}$ affinché la funzione di verosimiglianza restituisca il corretto valore di Ω_m . Nel pannello a destra della Figura 6.35 si può vedere che il minimo di $\Delta\mathcal{L}$ si sposta considerevolmente deviando anche soltanto del 25% dal valore *corretto* di σ_{12} . Tale risultato conferma che una misura imprecisa di σ_{12} compromette l'efficacia dell'AP test nel riconoscimento della corretta cosmologia.

Se tuttavia supponiamo di conoscere σ_{12} al netto di un'incertezza e assumiamo quindi che il *corretto* valore del parametro sia compreso in tale incertezza, possiamo procedere a ridurre l'intervallo (rispetto al caso completamente libero) in cui σ_{12} può variare senza tuttavia fissarlo ad un valore arbitrario. Il risultato ottenuto in questo caso è riportato in Figura 6.36. Il valore di σ_{12} assunto è lo stesso dei casi precedenti, ma questa volta si permette al parametro di variare in un intervallo che comprenda $\sigma_{12,real}$ simulando un'incertezza sulla misura. Si può osservare come l'identificazione di Ω_m sia in questo caso corretta e come la funzione di verosimiglianza sia comunque più stretta del caso in cui σ_{12} è completamente libero (curva tratteggiata blu).

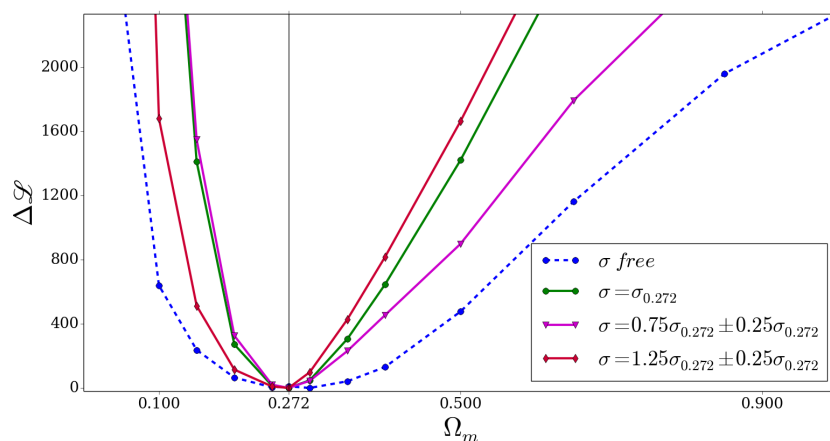


Figura 6.36: Curve di verosimiglianza ottenute ponendo nel modello un parametro σ_{12} diverso da quello *corretto*, ma con un'incertezza adeguata. In questo caso il corretto valore di Ω_m è in entrambi i casi identificato e la curva di verosimiglianza ottenuta è più stretta rispetto al caso in cui σ_{12} è lasciato del tutto libero (curva tratteggiata blu).

AGN

Il comportamento riportato in Figura 6.37 delle curve di verosimiglianza ottenuto per gli AGN è sostanzialmente identico a quello descritto nel paragrafo precedente per le galassie con un'importante differenza. Gli AGN sono un sottocampione di galassie per le quali l'effetto di distorsione detto Fingers of God è particolarmente importante. Non modellando il parametro σ_{12} (curva rossa nel pannello a sinistra della Figura 6.37) il corretto valore di Ω_m non è identificato ed in generale l'accordo tra ξ misurata e modello è sempre minore dei casi in cui si tiene conto del parametro σ_{12} .

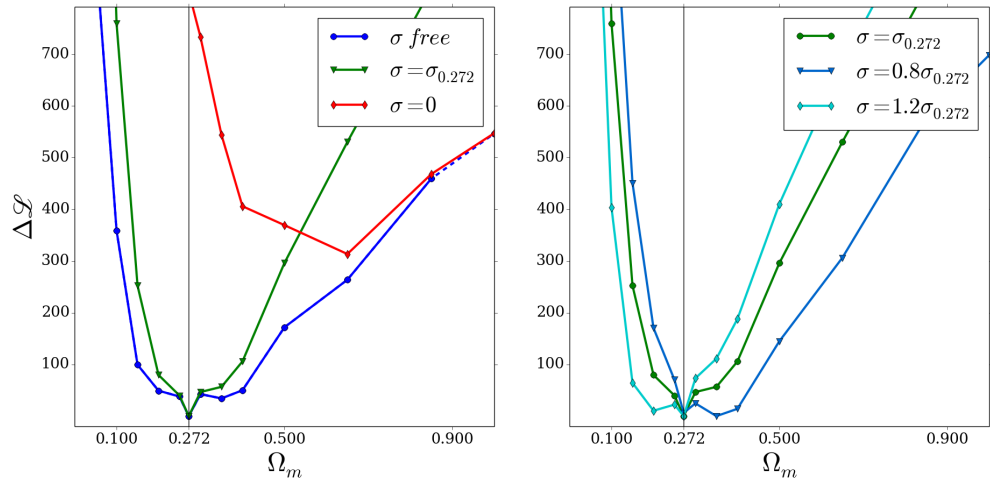


Figura 6.37: Curve di verosimiglianza ottenute confrontando la funzione di correlazione degli AGN a $z = 1$ con modelli ottenuti con diversi valori del parametro σ_{12} . Nel pannello a sinistra sono riportate la curva ottenuta lasciando libero il parametro σ_{12} (curva blu), la curva ottenuta fissando σ_{12} al valore trovato alla giusta cosmologia (curva verde) e la curva ottenuta omettendo σ_{12} nel modello, procedimento del tutto equivalente a fissare $\sigma_{12} = 0$ (curva rossa). La curva rossa non è riscalata al proprio valore minimo ma al minimo della curva blu per evidenziare come, nel caso degli AGN, il modello ottenuto non includendo i Fingers of God non solo produca un minimo di \mathcal{L} ad un valore errato di Ω_m ma riproduca generalmente in maniera peggiore la funzione di correlazione misurata: aspetto visibile dal fatto che $\mathcal{L}|_{\sigma_{12}=0} > \mathcal{L}|_{\sigma_{12} \text{ free}}, \forall \Omega_m$. Nel pannello a destra è nuovamente riportata (in verde) la curva di verosimiglianza ottenuta fissando σ_{12} al valore *corretto* ottenuto per $\Omega_m = 0.272$, le curve blu e azzurra sono invece state ottenute fissando σ_{12} ad un valore *errato*.

Per classi di oggetti per cui i Fingers of God sono prominenti non si può prescindere nella costruzione del modello dal parametro σ_{12} , pur limitandosi a scale dove l'influenza dei Fingers of God è limitata. Nel pannello a destra della Figura 6.37 si può osservare un andamento analogo a quanto visto per le galassie qualora si imponga a σ_{12} un valore diverso da quello *corretto*. Tuttavia, anche in questo caso, si può assumere che σ_{12} sia noto entro un certo errore ed ottenere delle curve analoghe a quelle riportate in Figura 6.36.

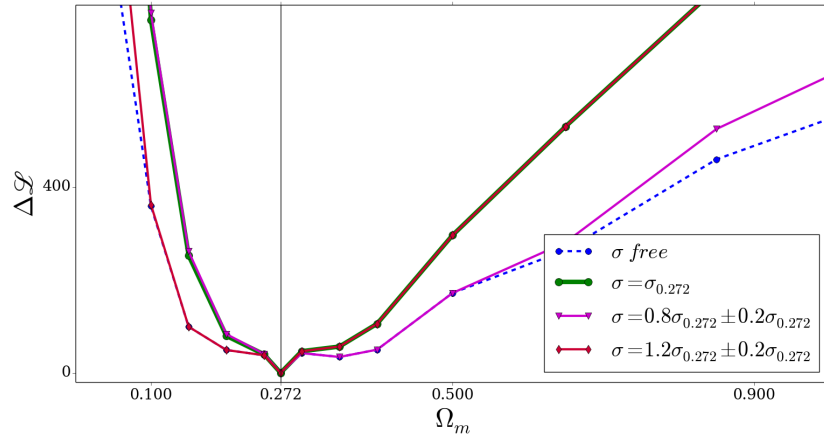


Figura 6.38: Risultati analoghi a quelli riportati in Figura 6.36. Anche in questo caso, assumendo che il valore di σ_{12} sia noto al netto di un'incertezza, si ottiene il corretto valore di Ω_m in maniera più definita che nel caso in cui σ_{12} sia lasciato completamente libero.

Conclusioni

It's done. Wouldn't you agree?

- Capitano James McGrow,
meglio noto come Capitano James Flint

In questo lavoro di Tesi si sono studiate le potenzialità dell'AP test utilizzando diversi cataloghi prodotti dalla simulazione idrodinamica cosmologica *Magneticum*. L'AP test, descritto nel Capitolo 3, permette di misurare i parametri cosmologici studiando l'effetto di distorsione che un'errata assunzione del modello cosmologico introduce nella misura della funzione di correlazione a due punti bidimensionale $\xi_{2D}(r_{\perp}, r_{\parallel})$. Il principio cosmologico assicura infatti che, assunta correttamente la cosmologia per la misura delle distanze ed in assenza di distorsioni dinamiche, il segnale della funzione di correlazione sia isotropo e quindi le curve di isocorrelazione perfettamente circolari. L'assunzione di una cosmologia errata per la misura delle distanze introduce invece un effetto di distorsione geometrica che modifica in maniera differente le distanze lungo la linea di vista e perpendicolarmente ad essa. È quindi possibile misurare la funzione di correlazione a due punti bidimensionale per diverse cosmologie ed identificare quale insieme di parametri cosmologici introduca nel segnale le minori distorsioni geometriche.

L'AP test fornisce una stima dei parametri cosmologici del tutto libera da assunzioni a priori, eccezion fatta per il principio di isotropia sul quale poggia comunque l'intero modello cosmologico attuale (descritto nei brevemente nei Capitoli 1 e 2) e che quindi non dev'essere considerata un'assunzione eccessivamente stringente. Tale misura dei parametri cosmologici non dipende quindi che dall'assunzione di isotropia ed è perciò indipendente dalle misure ottenute con altri approcci, per esempio misurando $H(z)$ utilizzando le supernove come candele standard [56] oppure studiando i picchi acustici dello spettro di potenza della CMB [35]

[53]. Pertanto il test così descritto può essere invertito, qualora si avessero informazioni esterne sulla cosmologia *corretta*, per provare l'isotropia dello spaziotempo.

In questo lavoro di Tesi si è effettuato l'AP test su cataloghi di diversi traccianti prodotti da una simulazione, i cui parametri cosmologici sono noti, per testare l'efficacia del metodo. Si è assunta nota la costante di curvatura dimodoché la piatezza dell'universo sia sempre verificata e si è quindi proceduto a variare unicamente il parametro di densità della materia Ω_m . Il metodo seguito per implementare il test è descritto nel Capitolo 5 ed ha, rispetto al metodo *standard* descritto nel Capitolo 3, il principale vantaggio di essere maggiormente libero da assunzioni per la costruzione del modello di funzione di correlazione da confrontare con le misure. Il modello è infatti costruito a partire dalla funzione di correlazione misurata nello spazio reale, alla quale vengono aggiunte (nello spazio dei redshift) le distorsioni dinamiche attraverso un fit di due parametri: β e σ_{12} . I risultati ottenuti sono riportati nel Capitolo 6 e possono essere riassunti come segue.

- La bontà del test è primariamente determinata dal la densità numerica d'oggetti contenuti nel catalogo in esame. Per tutti i traccianti considerati la funzione di correlazione, e di conseguenza la curva di verosimiglianza $\Delta\mathcal{L}$, si fa via via più rumorosa muovendosi ad alto z , dove il numero d'oggetti è minore. Si può osservare inoltre che, come già trovato da Ballinger et al. (1996) [3], l'effetto di distorsione geometrica è massimo attorno a $z \sim 1$, redshift al quale le funzioni di verosimiglianza sono meno rumorose e mostrano, per ogni tracciante considerato, l'aspettata forma a campana rovesciata.
- Si è effettuato l'AP test su cataloghi di galassie, AGN e ammassi di galassie (in senso lato), nello spazio reale (che rappresenta il caso ideale in cui il segnale è completamente decontaminato dalle distorsioni dinamiche) e nello spazio dei redshift. I risultati ottenuti sono riportati nelle Tabelle 6.1, 6.3 e 6.5.
- Per gli ammassi di galassie è stato possibile ripetere il test su un insieme di 27 cataloghi indipendenti e associare quindi un errore alla misura di Ω_m . Come si può osservare in Figura 6.26, nello spazio reale il *corretto* valore di Ω_m è sempre identificato entro l'errore così stimato. Nello spazio dei redshift, i cui risultati sono riportati in Figura 6.31 il *corretto* valore di Ω_m è identificato entro 3σ per i redshift maggiori 0.52. Per redshift minori l'effetto di distorsione geometrica è completamente sovrastato dalle distorsioni dovute alla dinamica degli oggetti rendendo

inaccurato il confronto tra ξ misurata e modello. Si può notare, inoltre, come l'errore sulla misura di Ω_m inizialmente decresca all'aumentare di z , di pari passo con l'aumento d'ampiezza delle distorsioni geometriche (come descritto nel Capitolo 3), fino a quando la scarsità del numero d'oggetti disponibili non rende la misura di ξ troppo incerta.

- Per tutti e tre i traccianti si sono considerate le misure effettuate ai vari redshift come indipendenti. È stato quindi possibile combinarle, sommando le diverse funzioni di verosimiglianza ottenute, per ottenere una migliore stima di Ω_m . In tutti i casi la combinazione delle funzioni di verosimiglianza migliora la misura di Ω_m . Inoltre le misure più incerte di Ω_m , cioè quelle ai redshift più estremi dell'intervallo considerato, sono le meno rilevanti nella somma di $\Delta\mathcal{L}$, come si può osservare nelle Figure 6.11, 6.22 e 6.34. Se ne conclude che combinare le misure effettuate a vari redshift migliora sostanzialmente l'identificazione di Ω_m e che i contributi alla somma dei redshift dove il segnale di distorsione geometrica è minore (perché è sovrastato dalle distorsioni dinamiche o dal rumore nella misura di ξ) non compromettono il risultato finale.

A questo punto è lecito chiedersi quali siano le condizioni ideali per effettuare l'AP test utilizzando l'approccio descritto nel Capitolo 5 ed analizzato in questo lavoro di Tesi.

- In prima approssimazione si può di certo concludere che il miglior redshift in cui misurare la funzione di correlazione e procedere con il test, per i motivi discussi sopra, è $z \sim 1$. Redshift minori, per quanto con maggior densità d'oggetti e quindi con una misura della funzione di correlazione più precisa, mostrano distorsioni geometriche meno marcate e quindi curve di verosimiglianza che identificano il minimo meno chiaramente, in particolar modo nello spazio dei redshift. I cataloghi analizzati a redshift maggiori, viceversa, hanno una densità d'oggetti insufficiente per un'adeguata misura di ξ , la cui incertezza si propaga poi nella costruzione del modello rendendo il confronto tra i due più impreciso.
- Effettuare il test a più redshift e poi combinarne i risultati ne migliora l'accuratezza, come descritto in precedenza, quindi possiamo concludere che la soluzione preferibile è applicare l'AP test a più cataloghi indipendenti, attorno a $z \sim 1$.
- Per quanto riguarda quale sia il tracciante preferibile la risposta è, in un certo senso, meno ovvia. Non avendo avuto a disposizione

cataloghi analoghi alla BOX0 anche per galassie ed AGN e non avendo avuto sufficiente tempo di calcolo per stimare l'errore con metodi *alternativi* quali *jackknife* o *bootstrap*² [47], le misure effettuate su questi due traccianti sono state ottenute prive d'errore. Si può tuttavia osservare che la funzione di verosimiglianza ottenuta nei diversi casi, riportata in Figura 6.39, è sensibilmente più stretta per le galassie che per gli altri due traccianti. Pur non essendo la funzione di verosimiglianza utilizzata una funzione χ^2 *standard*³, possiamo comunque, in prima approssimazione, assumere che nei tre casi lo stesso livello di confidenza corrisponda allo stesso valore di $\Delta \mathcal{L}$. Una curva più stretta identifica quindi *meglio* il valore di Ω_m corrispondente al proprio minimo.

Anche rilassando l'ipotesi forzata che lo stesso livello di confidenza corrisponda allo stesso valore di $\Delta \mathcal{L}$, tuttavia, si può comunque concludere che osservare una curva di verosimiglianza più stretta significa che per $\Omega_m \neq \Omega_{m,true}$ l'accordo tra modello e ξ misurata è peggiore di quello rappresentato da una curva di verosimiglianza più larga. Ciò significa che più la funzione \mathcal{L} è *stretta* più il test riesce efficacemente a misurare Ω_m riconoscendo le distorsioni geometriche. Pertanto possiamo concludere che le galassie (in particolare a $z \sim 1$, per i motivi descritti sopra) siano il miglior tracciante da considerare per effettuare l'AP test.

Si è infine osservato come conoscere un valore del parametro σ_{12} (anche approssimativo, purché con incertezza adeguata) migliori sostanzialmente l'efficacia della determinazione del corretto valore di Ω_m . A tal proposito si faccia riferimento alle figure riportate nel paragrafo 6.4 nelle quali si può osservare come fissare σ_{12} al valore corretto stringa notevolmente la funzione di verosimiglianza rispetto al caso libero: il test migliora di conseguenza seguendo gli stessi ragionamenti descritti sopra. Inoltre si è osservato che modellare i Fingers of God è necessario per la buona riuscita

²Entrambi i metodi, detti metodi *interni* per la determinazione degli errori, permettono di ricavare un errore costruendo realizzazioni *quasi*-indipendenti al catalogo originale a partire dal catalogo stesso. In entrambi i metodi il catalogo viene preliminarmente diviso in N_{sub} sotto-volumi. Con il metodo *jackknife* si costruiscono poi N realizzazioni di $N_{sub} - 1$ sotto-volumi ciascuna. Con il metodo *bootstrap* le realizzazioni sono invece costruite selezionando in maniera casuale N_r degli N_{sub} sotto-volumi [47]. Ripetere la misura sulle N realizzazioni così ottenute fornisce una stima dell'errore sulla misura effettuata sul catalogo di partenza.

³Come descritto nel Capitolo 5 la funzione di verosimiglianza \mathcal{L} non è, per quanto somigliante, una funzione χ^2 *standard*. Questo è dovuto al fatto che le misure ed i relativi modelli (ottenuti a partire dalle misure stesse) hanno un errore non costante al variare di Ω_m .

del test, in particolar modo per gli AGN per i quali il contributo alle distorsioni dovuto ai moti casuali su piccole scale non è trascurabile.

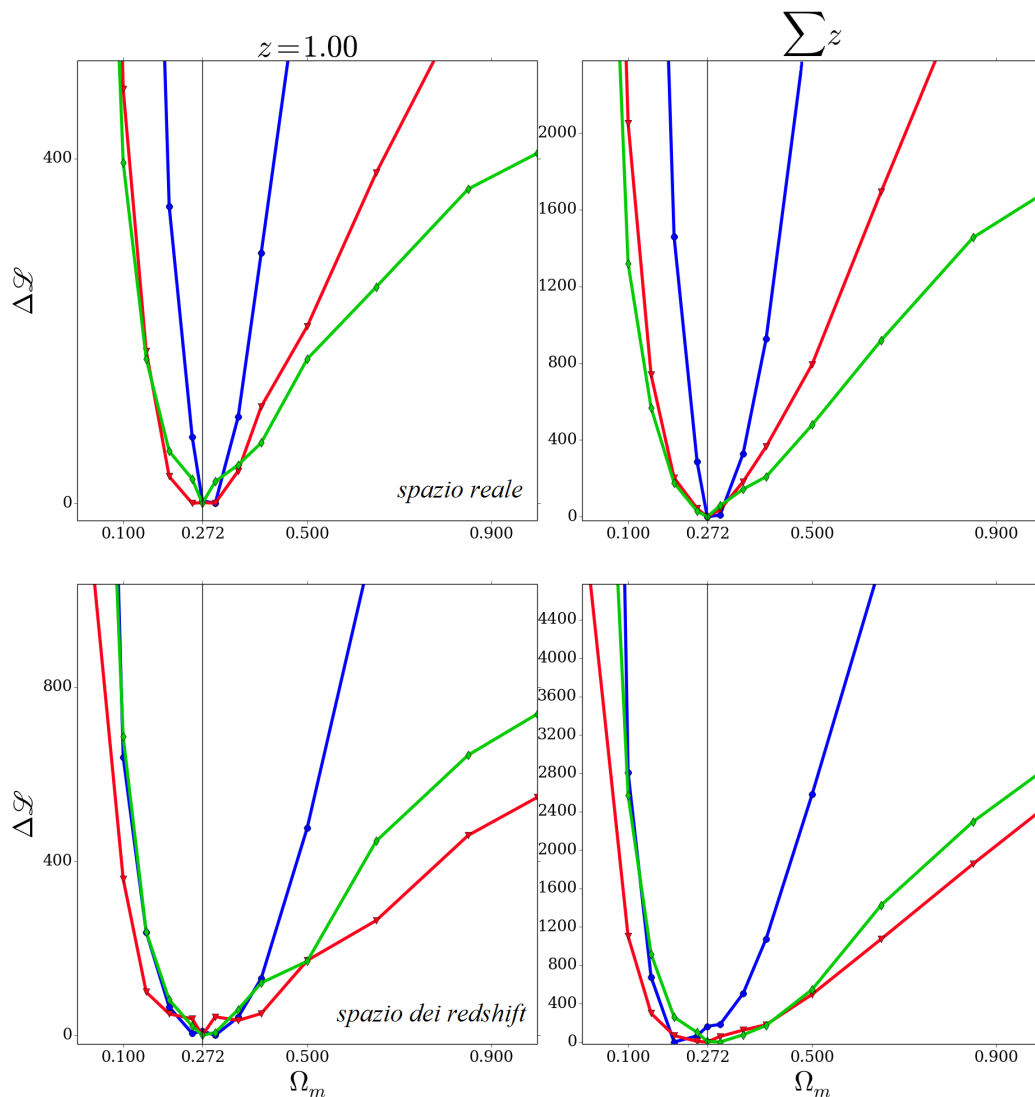


Figura 6.39: Curve di verosimiglianza dei diversi traccianti, mostrate assieme per confronto diretto. Le curve blu si riferiscono alle misure sui cataloghi di galassie, le curve rosse alle misure sui cataloghi di AGN e le curve verdi ai cataloghi di ammassi. I pannelli in alto si riferiscono alle misure effettuate nello spazio reale a $z = 1.00$ (pannello a sinistra) e combinando i contributi di tutti i redshift (pannello a destra). Analogamente i pannelli in basso corrispondono alle misure ottenute a $z = 1.00$ e combinando tutti i redshift, ma nello spazio dei redshift. In tutti i casi si può osservare come la funzione $\Delta \mathcal{L}$ delle galassie (curva blu in ogni pannello) sia la più stretta ed identifici, di conseguenza, il valore di Ω_m corrispondente al proprio minimo in maniera più efficace.

Prospettive future Per completare l'analisi sull'efficacia di questo metodo d'implementazione dell'AP test è in primo luogo necessario associare un errore anche alle misure effettuate sui cataloghi di galassie ed AGN. Questo si può fare ripetendo il test su un campione di cataloghi equivalenti a quelli utilizzati in questo lavoro, sulla falsa riga di quanto fatto per gli ammassi di galassie, oppure implementando un metodo alternativo per la stima dell'errore, ad esempio il *jackknife*. Data l'onerosità di tempo di calcolo, derivante dalla necessità di calcolare la funzione di correlazione a due punti per ogni cosmologia di test, sarebbe tuttavia importante ottimizzare il codice che implementa l'AP test per poter trattare agilmente anche un numero rilevante di cataloghi.

L'efficacia del test dipende in primo luogo dal numero d'oggetti disponibili per la misura di ξ . Per caratterizzare completamente tale dipendenza è necessario, ai vari redshift, ripetere l'AP test su cataloghi progressivamente sottocampionati per studiare come la minor accuratezza nella misura di ξ influisca sulle barre d'errore relative alla stima di Ω_m . Allo stesso modo è possibile studiare la dipendenza dell'errore sulla misura di Ω_m al variare del fattore di *bias* e del volume disponibile per caratterizzare definitivamente le condizioni ideali in cui effettuare il test.

Infine sarebbe opportuno verificare quanto l'introduzione di un errore sulla misura del redshift osservato, così come l'imposizione di un flusso limite per l'osservabilità degli oggetti, influisca sulla determinazione di Ω_m e sul relativo errore, in modo da poter definire dei vincoli d'applicabilità del test su un catalogo osservato.

Quindi, tornando alla citazione di inizio capitolo: *It's done, wouldn't you agree?* Una possibile risposta potrebbe essere: *Yes, it's done. And now there are many further interesting things to do!*

Bibliografia

- [1] C. Alcock and B. Paczynski. An evolution free test for non-zero cosmological constant. *Nature*, 281:358, October 1979.
- [2] J. S. Bagla. Cosmological N-Body simulation: Techniques, Scope and Status. *Current Science*, 88:1088–1100, April 2005.
- [3] W. E. Ballinger, J. A. Peacock, and A. F. Heavens. Measuring the cosmological constant with redshift surveys. *MNRAS*, 282:877, October 1996.
- [4] M. R. Bate and A. Burkert. Resolution requirements for smoothed particle hydrodynamics calculations with self-gravity. *MNRAS*, 288:1060–1072, July 1997.
- [5] C. Blake, K. Glazebrook, T. M. Davis, S. Brough, et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: measuring the cosmic expansion history using the Alcock-Paczynski test and distant supernovae. *MNRAS*, 418:1725–1735, December 2011.
- [6] S. Bocquet, A. Saro, K. Dolag, and J. J. Mohr. Halo mass function: Baryon impact, fitting formulae and implications for cluster cosmology. *ArXiv e-prints*, February 2015.
- [7] H. Bondi. On spherically symmetrical accretion. *MNRAS*, 112:195, 1952.
- [8] H. Bondi and F. Hoyle. On the mechanism of accretion by stars. *MNRAS*, 104:273, 1944.
- [9] S. Bonoli, F. Marulli, V. Springel, S. D. M. White, E. Branchini, and L. Moscardini. Modelling the cosmological co-evolution of supermassive black holes and galaxies - II. The clustering of quasars and their dark environment. *MNRAS*, 396:423–438, June 2009.

- [10] A. Cabré and E. Gaztañaga. Clustering of luminous red galaxies - I. Large-scale redshift-space distortions. *MNRAS*, 393:1183–1208, March 2009.
- [11] G. Chabrier. Galactic Stellar and Substellar Initial Mass Function. *PASP*, 115:763–795, July 2003.
- [12] A. Cimatti, E. Daddi, and A. Renzini. Mass downsizing and “top-down” assembly of early-type galaxies. *A&A*, 453:L29–L33, July 2006.
- [13] P. Coles and F. Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure, Second Edition*. July 2002.
- [14] M. Colless, B. A. Peterson, C. Jackson, Peacock, et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: Final Data Release. *ArXiv Astrophysics e-prints*, June 2003.
- [15] C. A. Collins, L. Guzzo, H. Böhringer, et al. The ROSAT-ESO Flux-Limited X-ray (REFLEX) galaxy cluster survey - II. The spatial correlation function. *MNRAS*, 319:939–948, December 2000.
- [16] J. da Ângela, P. J. Outram, and T. Shanks. Constraining $\beta(z)$ and Ω_m^0 from redshift-space distortions in $z \sim 3$ galaxy surveys. *MNRAS*, 361:879–886, August 2005.
- [17] M. Davis and P. J. E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. V - The two-point position and velocity correlations. *ApJ*, 267:465–482, April 1983.
- [18] K. Dolag, S. Borgani, G. Murante, and V. Springel. Substructures in hydrodynamical cluster simulations. *MNRAS*, 399:497–514, October 2009.
- [19] G. Efstathiou, M. Davis, S. D. M. White, and C. S. Frenk. Numerical techniques for large cosmological N-body simulations. *ApJS*, 57:241–260, February 1985.
- [20] Dolag et al. In prep.
- [21] G. J. Ferland, K. T. Korista, D. A. Verner, J. W. Ferguson, J. B. Kingdon, and E. M. Verner. CLOUDY 90: Numerical Simulation of Plasmas and Their Spectra. *PASP*, 110:761–778, July 1998.

- [22] C. S. Frenk, S. D. M. White, P. Bode, et al. The Santa Barbara Cluster Comparison Project: A Comparison of Cosmological Hydrodynamics Solutions. *ApJ*, 525:554–582, November 1999.
- [23] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. *MNRAS*, 181:375–389, November 1977.
- [24] F. Haardt and P. Madau. Modelling the UV/X-ray cosmic background with CUBA. In D. M. Neumann and J. T. V. Tran, editors, *Clusters of Galaxies and the High Redshift Universe Observed in X-rays*, 2001.
- [25] M. Hirschmann, K. Dolag, A. Saro, L. Bachmann, S. Borgani, and A. Burkert. Cosmological simulations of black hole growth: AGN luminosities and downsizing. *MNRAS*, 442:2304–2324, August 2014.
- [26] R. W. Hockney. Measurements of Collision and Heating Times in a Two-Dimensional Thermal Computer Plasma. *Journal of Computational Physics*, 8:19–44, August 1971.
- [27] R. W. Hockney and J. W. Eastwood. *Computer Simulation Using Particles*. 1981.
- [28] F. Hoyle and R. A. Lyttleton. The effect of interstellar matter on climatic variation. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35:405, 1939.
- [29] F. Hoyle, P. J. Outram, T. Shanks, B. J. Boyle, S. M. Croom, and R. J. Smith. The 2dF QSO Redshift Survey - VII. Constraining cosmology from redshift-space distortions via $\xi(\sigma, \pi)$. *MNRAS*, 332:311–324, May 2002.
- [30] E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, March 1929.
- [31] J. P. Huchra and M. J. Geller. Groups of galaxies. I - Nearby groups. *ApJ*, 257:423–437, June 1982.
- [32] N. Kaiser. On the spatial correlations of Abell clusters. *ApJ*, 284:L9–L12, September 1984.
- [33] H. Kang, J. P. Ostriker, R. Cen, D. Ryu, L. Hernquist, A. E. Evrard, G. L. Bryan, and M. L. Norman. A comparison of cosmological hydrodynamic codes. *ApJ*, 430:83–100, July 1994.

- [34] M. Kerscher, I. Szapudi, and A. S. Szalay. A Comparison of Estimators for the Two-Point Correlation Function. *ApJ*, 535:L13–L16, May 2000.
- [35] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, Bennett, et al. Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *ApJS*, 192:18, February 2011.
- [36] A. Labatie, J.-L. Starck, M. Lachièze-Rey, and P. Arnalte-Mur. Uncertainty in 2-point correlation function estimators and BAO detection in SDSS DR7. *ArXiv e-prints*, September 2010.
- [37] S. D. Landy and A. S. Szalay. Bias and variance of angular correlation functions. *ApJ*, 412:64–71, July 1993.
- [38] X.-D. Li, C. Park, C. G. Sabiu, and J. Kim. Cosmological constraints from the redshift dependence of the Alcock-Paczynski test and volume effect: galaxy two-point correlation function. *MNRAS*, 450:807–814, June 2015.
- [39] R. Maartens. Is the Universe homogeneous? *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 369:5115–5137, December 2011.
- [40] F. Marulli, D. Bianchi, E. Branchini, L. Guzzo, L. Moscardini, and R. E. Angulo. Cosmology with clustering anisotropies: disentangling dynamic and geometric distortions in galaxy redshift surveys. *MNRAS*, 426:2566–2580, November 2012.
- [41] F. Marulli, M. Bolzonella, Branchini, et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS) . Luminosity and stellar mass dependence of galaxy clustering at 0.5-z-1.1. *A&A*, 557:A17, September 2013.
- [42] F. Marulli, A. Veropalumbo, and M. Moresco. CosmoBolognaLib: Open source C++ libraries for cosmological calculations. Astrophysics Source Code Library, November 2015.
- [43] F. Marulli, A. Veropalumbo, L. Moscardini, A. Cimatti, and K. Dolag. Redshift-space distortions of galaxies, clusters and AGN: testing how the accuracy of growth rate measurements depends on scales and sample selections. *ArXiv e-prints*, May 2015.
- [44] C. McGill. The redshift projection. I - Caustics and correlation functions. *MNRAS*, 242:428–438, February 1990.

- [45] P. Meszaros. The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. *A&A*, 37:225–228, December 1974.
- [46] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *ARA&A*, 30:543–574, 1992.
- [47] P. Norberg, C. M. Baugh, E. Gaztañaga, and D. J. Croton. Statistical analysis of galaxy surveys - I. Robust error estimation for two-point clustering statistics. *MNRAS*, 396:19–38, June 2009.
- [48] P. J. Outram, T. Shanks, B. J. Boyle, S. M. Croom, and journal = MNRAS eprint = astro-ph/0310873 keywords = surveys, quasars: general, cosmology: observations, large-scale structure of Universe year = 2004 month = mar volume = 348 pages = 745-752 doi = 10.1111/j.1365-2966.2004.07348.x adsurl = http://adsabs.harvard.edu/abs/2004MNRAS.348..745O adsnote = Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System others, title = The 2dF QSO Redshift Survey - XIII. A measurement of Λ from the quasi-stellar object power spectrum, $P^S(k_{\parallel}, k_{\perp})$.
- [49] P. J. E. Peebles. Statistical Analysis of Catalogs of Extragalactic Objects.IV. Cross-Correlation of the Abell and Shane-Wirtanen Catalogs. *ApJS*, 28:37, November 1974.
- [50] P. Peter. Cosmological Perturbation Theory. *ArXiv e-prints*, March 2013.
- [51] Planck Collaboration, R. Adam, P. A. R. Ade, N. Aghanim, Y. Akrami, M. I. R. Alves, M. Arnaud, F. Arroja, J. Aumont, C. Baccigalupi, and et al. Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results. *ArXiv e-prints*, February 2015.
- [52] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, and et al. Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation. *A&A*, 571:A22, November 2014.
- [53] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *ArXiv e-prints*, February 2015.

- [54] W. H. Press and M. Davis. How to identify and weigh virialized clusters of galaxies in a complete redshift catalog. *ApJ*, 259:449–473, August 1982.
- [55] W. H. Press and P. Schechter. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *ApJ*, 187:425–438, February 1974.
- [56] A. G. Riess, A. V. Filippenko, and Challis and others. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *AJ*, 116:1009–1038, September 1998.
- [57] N. P. Ross, J. da Ângela, Shanks, et al. The 2dF-SDSS LRG and QSO Survey: the LRG 2-point correlation function and redshift-space distortions. *MNRAS*, 381:573–588, October 2007.
- [58] P. Sarkar, J. Yadav, B. Pandey, and S. Bharadwaj. The scale of homogeneity of the galaxy distribution in SDSS DR6. *MNRAS*, 399:L128–L131, October 2009.
- [59] A. Saro, J. Liu, J. J. Mohr, et al. Constraints on the CMB temperature evolution using multiband measurements of the Sunyaev-Zel’dovich effect with the South Pole Telescope. *MNRAS*, 440:2610–2615, May 2014.
- [60] A. Schneider, R. E. Smith, and D. Reed. Halo mass function and the free streaming scale. *MNRAS*, 433:1573–1587, August 2013.
- [61] R. Scoccimarro. Redshift-space distortions, pairwise velocities, and nonlinearities. *Phys. Rev. D*, 70(8):083007, October 2004.
- [62] V. Springel. The cosmological simulation code GADGET-2. *MNRAS*, 364:1105–1134, December 2005.
- [63] V. Springel and L. Hernquist. The history of star formation in a Λ cold dark matter universe. *MNRAS*, 339:312–334, February 2003.
- [64] V. Springel, S. D. M. White, A. Jenkins, Frenk, et al. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, 435:629–636, June 2005.
- [65] V. Springel, S. D. M. White, G. Tormen, and G. Kauffmann. Populating a cluster of galaxies - I. Results at $z=0$. *MNRAS*, 328:726–750, December 2001.

- [66] W. R. Stoeger, R. Maartens, and G. F. R. Ellis. Proving almost-homogeneity of the universe: an almost Ehlers-Geren-Sachs theorem. *ApJ*, 443:1–5, April 1995.
- [67] J. M. Stone and M. L. Norman. ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests. *ApJS*, 80:791, June 1992.
- [68] M. Tegmark, M. A. Strauss, Blanton, et al. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Phys. Rev. D*, 69(10):103501, May 2004.
- [69] M. Tegmark and M. Zaldarriaga. Separating the early universe from the late universe: Cosmological parameter estimation beyond the black box. *Phys. Rev. D*, 66(10):103508, November 2002.
- [70] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. July 1972.
- [71] R. P. C. Wiersma, J. Schaye, and B. D. Smith. The effect of photoionization on the cooling rates of enriched, astrophysical plasmas. *MNRAS*, 393:99–107, February 2009.
- [72] Y. B. Zel'dovich. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. *A&A*, 5:84–89, March 1970.

Ringraziamenti

*Many places I have been, many sorrows I have seen
But I don't regret, nor will I forget
All who took that road with me.*

- Billy Boyd, *The last goodbye*

Scrivere i ringraziamenti in fondo ad una Tesi di laurea è quel punto d'arrivo cui sporadicamente, ma non senza una sognante insistenza, si pensa durante tutto il percorso di studi. Quel momento in cui ci si ferma a guardarsi indietro, ripensando a tutti quelli con cui si ha condiviso un pezzo di strada. Il percorso di studi che mi ha condotto a scrivere questi ringraziamenti alla fine di questa Tesi è stato lungo. Magari non particolarmente tortuoso, ma lungo. È cominciato sei anni fa un lunedì mattina con la prima lezione di analisi matematica 1, col professor Venni, dopo che mi ero perso l'intera prima settimana di lezione. Perché com'è noto le lezioni universitarie iniziano ad ottobre. E invece no, ma guarda te. E sei anni dopo finisce qui, adesso⁴. Come in ogni lungo viaggio molte persone mi hanno accompagnato. Alcune sono rimaste fino alla fine, altre le ho perse, altre ancora se ne sono volute andare, tutte hanno lasciato un segno. Nel bene e nel male. Questa breve lista contiene le persone che più sinceramente mi sento di ricordare, e di ringraziare, adesso che sono arrivato qui.

⁴Nota a margine, siccome non imparo mai, ho perso anche la prima settimana del secondo anno per lo stesso motivo.

Innanzitutto ringrazio il professor Lauro Moscardini per l'assistenza fornitami durante la stesura di questa Tesi, certo, ma soprattutto per l'ispirazione che è stato durante i suoi corsi a dimostrazione del fatto che saper insegnare non vuol dire solo far imparare delle cose alla gente. Non sono uno che frequenta assiduamente le lezioni, soprattutto quelle di mattina, ma del corso di informatica e di quello di cosmologia non mi sono perso un minuto.

Ringrazio poi Federico Marulli perché se adesso ho una vaga idea di cosa siano una classe o un puntatore è merito suo. E anche perché con tutto il tempo che ha perso a star dietro ai bug nei miei codici decisamente se lo merita.

Ringrazio in particolar modo Alfonso per l'instancabile supporto e l'aiuto incondizionato, pratico e morale, che mi ha dato in questi mesi. Se una cosa buona è uscita da questa Tesi è di certo l'amicizia con lui.

Elena, grazie di cuore. Niente di tutto questo avrebbe avuto senso se non ci fossi stata.

Grazie anche ai miei genitori, a Lucy e a Toni per avermi dato la possibilità di iniziare e completare questo percorso ma anche di coltivare i miei interessi, supportandomi senza giudizi.

Grazie a Leo e Gab, che non si sono mai straniti di fronte ai miei vaneggiamenti, rettangolari, simmetrici o meno.

Grazie al Circolo Pickwick, ed in particolar modo alle carissime Onnie e Mihret che hanno reso un luogo potenzialmente uguale a tutti gli altri una seconda casa.

Grazie mille pure agli amici da casa (che messa in questo modo sembra di stare ad un quiz televisivo): Silvia, Michael, Mattia, Vanessa, Fabio, Luca, Vania e tutti gli altri: nonostante la lontananza ci siete sempre stati. E grazie anche agli amici Bolognesi, Zocchi e Fra in primis, che per una birra assieme non sono mancati mai.

Infine vorrei ringraziare anche Cri, Manu e la bellissima Pippi (che poi si chiamerebbe Alice), così come Francesco ed Elisa: stare con voi è sempre come stare in famiglia.

Scherzavo, altro che infine. Pensavate che mi fossi dimenticato? Un grazie infinito a tutti i compagni d'università, dottorandi, dottorati, compagni di studio e d'auletta. Costoro più di tutti hanno dovuto sorbirsi la mia presenza. In ordine alfabetico per non far torto a nessuno: Alberto, Alessia, Annalisa, Bobore, Davide, Eleonora, EdT, Emiliano, Giuliano, Lorenzo J Posti, Lucia, Mariaelisabetta (sì, tuttoattaccato), Mario, Marlis, Matte, Matteo Von Bauer, Michele, Nicholas, Nicola, Riccardo, Robin, Roberto, le due Sare, Stefania, Tommy, Valentina, Valeria e Vittorio.

E se mi fossi dimenticato qualcuno, che non se la prenda eccessivamente.

Quando ci si ferma a guardarsi indietro è difficile tirar le somme per bene e qualcosa sfugge sempre. Un po' come quando si contano i sette nani, che tutti sanno essere in realtà sei. Se tu che stai leggendo non compari in questa lista fammelo sapere e provvederò a ringraziarti personalmente.