

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Ottica geometrica e ondulatoria,
e applicazioni astrofisiche**

Elaborato Finale

Presentata da:
Ambra Di Piano

Relatore:
Prof. Daniele Dallacasa



Sessione III
Anno Accademico 2014 - 2015

Sommario

Lo studio dell'ottica si incentra sull'indagine della natura della luce, delle sue proprietà e delle leggi che ne regolano i fenomeni fisici. Si possono, in complessivo, identificare tre branche: l'ottica geometrica, l'ottica ondulatoria e l'ottica quantistica. Quest'ultima esula dalla presente trattazione, che piuttosto si concentra sull'aspetto geometrico ed ondulatorio della radiazione luminosa. Con l'*ottica geometrica* viene identificato lo studio della luce come propagazione rettilinea di raggi luminosi. Essa include lo studio degli specchi e delle lenti, di particolare interesse per le applicazioni nella strumentazione astrofisica. All'interno del primo capitolo, dunque, sono enunciate le principali leggi che definiscono la propagazione rettilinea della luce, la sua riflessione contro una superficie o la sua rifrazione attraverso due mezzi differenti. L'ottica geometrica, in effettivo, consiste in un caso limite della più generica trattazione fornita dall'*ottica ondulatoria*. La condizione che demarca la possibilità di approssimare la trattazione nell'ambito geometrico, è definita dalla richiesta che la λ (lunghezza d'onda della radiazione in esame) sia di molto inferiore alle dimensioni lineari dell'ostacolo con cui interagisce. Qualora tale condizione non fosse soddisfatta, la considerazione della natura ondulatoria della luce non sarebbe più trascurabile. Nel secondo capitolo dell'elaborato, dunque, vengono presi in esame il modello ondulatorio della radiazione elettromagnetica ed alcuni fenomeni fisici che ne avvalorano la fondatezza; in particolare i fenomeni dell'interferenza e della diffrazione. Infine, nel terzo ed ultimo capitolo, sono affrontati alcuni esempi di applicazioni astrofisiche, sia nell'ambito dell'ottica geometrica che nell'ambito dell'ottica ondulatoria.

Indice

1	Ottica geometrica	1
1.1	Le leggi	1
1.2	Il principio di Fermat	2
1.3	Il principio di Huygens	4
2	Ottica ondulatoria	6
2.1	Interferenza: l'esperienza di Young	6
2.2	Diffrazione: la conformazione di Fraunhofer	8
3	Applicazioni astrofisiche	11
3.1	Eclissi	11
3.2	Telescopi	12
3.3	Interferometria radio	14
	Bibliografia	17

Capitolo 1

Ottica geometrica

1.1 Le leggi

La condizione di validità di una trattazione nell'ambito dell'ottica geometrica prevede $\lambda \ll L$; dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione in esame ed L la lunghezza lineare dell'ostacolo con cui questa interagisce. Le tre principali leggi su cui l'ottica geometrica si basa sono:

- la legge della *propagazione rettilinea*;
- la legge della *riflessione*;
- la legge della *rifrazione*.

La legge della propagazione rettilinea

La prima formulazione risale alla filosofia greca ed afferma che la luce si propaga in un *mezzo omogeneo* o nel *vuoto* seguendo percorsi rettilinei.

Pertanto la frapposizione di un oggetto opaco fra una sorgente S di luce puntiforme ed uno schermo, getta un'ombra dai contorni nitidi. Chiaramente si tratta di un'astrazione matematica dal momento che le sorgenti di luce reali hanno tutte una dimensione finita; ciò comporta una transizione non netta fra le zone di ombra e luce, parzialmente illuminate da S . Tali zone sono chiamate zone di *penombra*.

Leggi di riflessione e rifrazione

Consideriamo la rappresentazione dei fasci di luce come raggi. Questi sono figurati come linee rette perpendicolari ai *fronti d'onda (piani)* e ne indicano la direzione di propagazione. Generalmente quando un raggio (a) incide sulla superficie di separazione fra due mezzi differenti, omogenei ed isotropi, questo viene in parte riflesso (b), ed in parte rifratto (c). La normale nel punto di incidenza del raggio, alla superficie di separazione fra i mezzi, definisce così tre angoli distinti: l'angolo di incidenza i_1 , l'angolo di riflessione i'_1 e l'angolo di rifrazione r , come mostrato in figura 1.1.

Si osserva che, anzitutto, il raggio incidente, il raggio rifratto ed il raggio riflesso, giacciono tutti nello stesso piano perpendicolare alla superficie di separazione fra i mezzi, chiamato *piano di incidenza*.

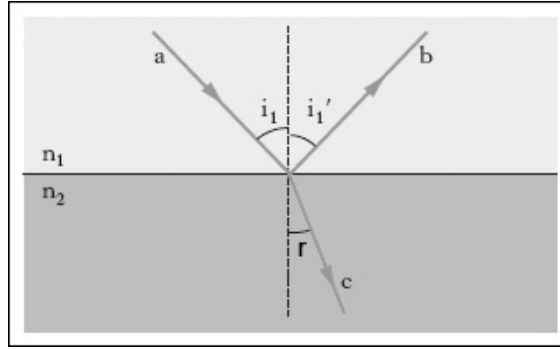


Figura 1.1: Angoli di incidenza, riflessione e rifrazione rispetto alla normale alla superficie di separazione fra i mezzi n_1 ed n_2 .

La **legge della riflessione** afferma che gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali: $i_1 = i_1'$.

La **legge della rifrazione** (anche nota come *legge di Snell*) afferma invece che sono uguali i prodotti dei seni degli angoli di incidenza e rifrazione con il rispettivo indice di rifrazione:

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(r) \quad (1.1)$$

dove n_1 è l'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga il raggio incidente, n_2 quello del mezzo in cui si propaga il raggio rifratto. Gli indici n_1 ed n_2 sono adimensionali, e definiti come il rapporto fra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo di pertinenza ($n = c/v$). Gli indici di rifrazione di un materiale, in genere, variano al variare della *lambda* della radiazione che attraversa il materiale, si può pertanto utilizzare la rifrazione per analizzare un fascio di luce scomponendolo nelle lunghezze d'onda che lo compongono. Si può notare che se la sorgente di luce si trova nel mezzo con indice di riflessione maggiore, allora esiste un *angolo limite* θ_l per il quale il raggio viene *riflesso totalmente*.¹

Dalla (1.1) si ricava infatti, ponendo ($i_1 = \frac{\pi}{2}$):

$$\theta_l = \arcsin \frac{n_1}{n_2} \quad \text{con} \quad n_2 > n_1.$$

1.2 Il principio di Fermat

Prendiamo in esame la figura 1.2 che esamina la rifrazione² di un raggio incidente con un certo angolo θ_1 sulla superficie (piana) di separazione fra i due mezzi n_1 ed n_2 , venendone rifratto con un angolo θ_2 .

Consideriamo A e B come mostrati in figura (ovvero contenuti in due mezzi aventi diverso indice di rifrazione) ed indichiamo con v_1 la velocità del raggio in n_1 , con v_2 la

¹Il fenomeno della riflessione totale è sfruttato in tecnologie quali le fibre ottiche e nei telescopi per raggi X.

²Procedimento analogo per il fenomeno della riflessione.

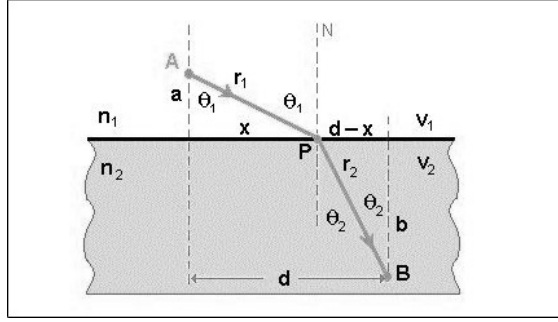


Figura 1.2: Rifrazione di un raggio luminoso in corrispondenza della superficie di separazione fra i mezzi n_1 e n_2 analizzata secondo il principio di Fermat; il raggio si propaga dal punto A al punto B subendo in P la rifrazione.

velocità del raggio in n_2 . Prendiamo quindi in esame il raggio APB ed indichiamo con t il suo tempo di percorrenza.

Facendo uso della relazione $n = c/v$ ed identificando L con il *cammino ottico*³ è possibile riscrivere:

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} \implies t = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{c} = \frac{L}{c} \quad (1.2)$$

considerando $L = l_1 + l_2 = n_1 r_1 + n_2 r_2$.

Prendendo in considerazione un passaggio attraverso un materiale composto da p stratificazioni consecutive, si può scrivere l'equazione precedente in una forma più generale:

$$t = \sum_{i=1}^p \frac{r_i}{v_i} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^p l_i = \frac{L'}{c} \quad (1.3)$$

dove $L' = \sum_{i=1}^p l_i$ è il cammino ottico totale.⁴

Con queste considerazioni è possibile affermare il **Principio di Fermat**, detto anche *principio di minor tempo*:

Un raggio di luce, propagandosi da un punto fisso ad un altro, segue il percorso avente il cammino ottico più breve (e di conseguenza il minor tempo di percorrenza).

Una formulazione più moderna e corretta del principio, afferma che tale percorso è quello che rende *estremale* il tempo di percorrenza.

Tale principio può essere utilizzato per la dimostrazione delle leggi di riflessione e rifrazione; qui di seguito ne viene fatto un esempio in coerenza con il caso esposto in figura 1.2. Scrivendo più esplicitamente il cammino ottico L si ottiene:

$$L = n_1 L_1 + n_2 L_2 = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \quad (1.4)$$

che sostituendo nella (1.2) fornisce:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \frac{dL}{dx} = 2x \frac{n_1}{2c} (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(d-x) \frac{n_2}{2c} [b^2 + (d-x)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

³Da non confondere con il *cammino geometrico* del raggio luminoso, che nell'esempio esposto in figura 1.2 risulta essere pari a $R = r_1 + r_2$, più genericamente espresso come $R = \sum_{i=1}^p r_i$.

⁴Per un mezzo non omogeneo risulta: $L' = \int_S^P n dr$, dove S e P identificano gli estremi del percorso.

Il cammino ottico seguito dal raggio deve essere tale da rendere $dt/dx = 0$, pertanto dalla (1.5) deriva l'uguaglianza:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$$n_1 \frac{x}{r_1} = n_2 \frac{(d-x)}{r_2}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Che è esattamente la legge di rifrazione, espressa nella (1.1).

1.3 Il principio di Huygens

La teoria sviluppata da Huygens assume che la luce si propaghi come un'onda di cui non si sofferma a definire la natura. La base della teoria è puramente una costruzione geometrica e permette di prevedere la posizione di un fronte d'onda piano, in ogni momento, conoscendone la posizione ad un istante dato.

Tutti i punti di un fronte d'onda possono essere considerati come sorgenti puntiformi di onde sferiche secondarie. Dopo un tempo t la nuova posizione del fronte d'onda sarà la superficie di involuppo di queste onde secondarie.

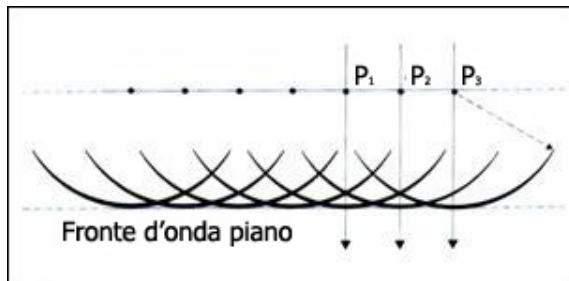


Figura 1.3: Visualizzazione grafica del principio di Huygens.

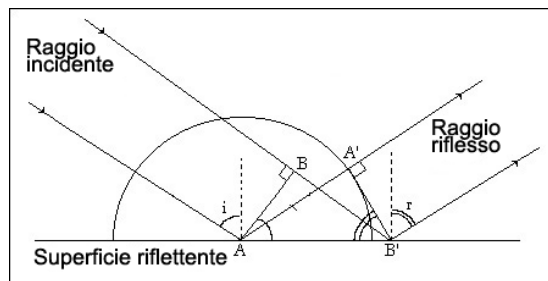


Figura 1.4: Riflessione di un fronte d'onda piano.

Anche questo principio permette di dimostrare le leggi della riflessione e della rifrazione, di seguito ne è riportato il procedimento.

Si prenda prima in esame il caso della **riflessione** (Figura 1.4). Sia AB un fronte d'onda piano come mostrato in figura 1.3. I triangoli $AA'B'$ e ABB' sono retti e simili fra loro; avendo il lato AB' in comune, essi sono anche uguali. Gli angoli di incidenza e riflessione sono rispettivamente i ed r , che per la geometria del problema sono uguali rispettivamente agli angoli $B'\hat{A}A'$ e $B\hat{A}B'$ e dunque $i = r$; i raggi, incidente e riflesso, giacciono in un piano perpendicolare alla superficie riflettente. La conclusione è, dunque, che la legge di riflessione segue il principio di Huygens.

Il secondo passo è, quindi, mostrarne la validità rispetto le leggi della **rifrazione**. Si prenda ad esempio la figura 1.5 e si consideri il fronte d'onda piano AB incidente

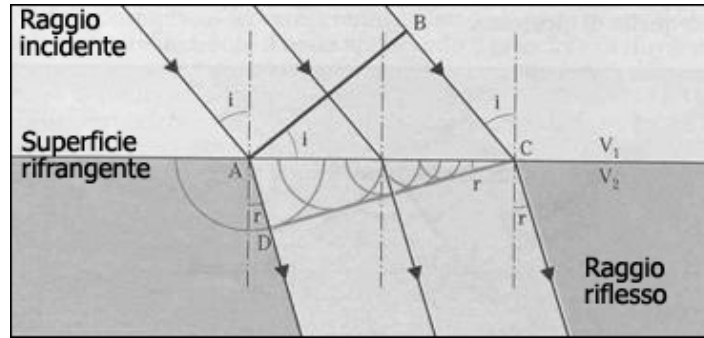


Figura 1.5: Rifrazione di un fronte d'onda piano.

sulla superficie di separazione fra i due mezzi (identificati nell'immagine con le relative velocità di propagazione v_1 e v_2). Nel momento in cui il fronte d'onda raggiunge la superficie rifrangente in A , rispetto a B si trova ancora a distanza \overline{BC} dal punto C . Nel tempo in cui questo tratto viene percorso, il punto A dà origine ad onde secondarie il cui raggio AD è proporzionale a BC come lo è la velocità di propagazione v_1 rispetto a v_2 :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{v_2}{v_1} \quad (1.6)$$

Come prima, le onde secondarie che hanno origine nei punti intermedi fra A e B hanno raggi proporzionali alla loro distanza da C . In questo modo l'involuppo delle onde secondarie è identificato con il fronte d'onda piano CD ; si può osservare che il raggio incidente ed il raggio rifratto sono complementari ed in particolare giacciono su un piano perpendicolare alla superficie rifrangente. Si noti che l'angolo di incidenza i è pari all'angolo $B\hat{A}C$ e che l'angolo di rifrazione r è pari all'angolo $A\hat{C}D$:

$$\overline{BC} = \overline{AC} \sin(i) \quad \text{e} \quad \overline{AD} = \overline{AC} \sin(r) \quad (1.7)$$

Considerando la (1.6) e la (1.7), con le opportune sostituzioni date dalla relazione $n = c/v$, si riottiene la legge di Snell.

Capitolo 2

Ottica ondulatoria

Come si è precedentemente accennato l'ottica geometrica non è altro che un caso limite dell'ottica ondulatoria, dove le onde elettromagnetiche che compongono la radiazione luminosa sono figurate attraverso la concezione di raggio. A seguito dell'esperienza di Huygens si venne a creare, nella comunità scientifica del XVII secolo, un dibattito relativo alla natura della luce. La contrapposizione verteva sull'approccio corpuscolare, identificato nella teoria di Newton, e quello ondulatorio, supportato dalla teoria di Huygens.

Un celebre esperimento che avvalora l'ipotesi della natura ondulatoria della luce si ha agli inizi del XIX secolo, ad opera di T. Young.

2.1 Interferenza: l'esperienza di Young

L'interferenza è un fenomeno relativo alla sovrapposizione di due (o più) onde in un punto dello spazio. Essa può essere *distruttiva* o *costruttiva* rispettivamente se l'intensità netta risultante dalla combinazione delle onde è maggiore o minore della singola intensità originaria delle onde di partenza. L'esperimento originale (Figura 2.1) prevede l'incidenza della luce solare su di uno schermo, fornito di un piccolo foro S (dimensioni confrontabili alla lunghezza d'onda del fascio) oltre il quale l'onda piana incidente subisce una diffrazione alla Huygens. Questo significa che assumendo il fronte d'onda (piana) come insieme di sorgenti di onde sferiche secondarie, al momento dell'incidenza lo schermo blocca la trasmissione di ogni onda sferica secondaria eccetto quella la cui sorgente è coincidente con l'apertura.

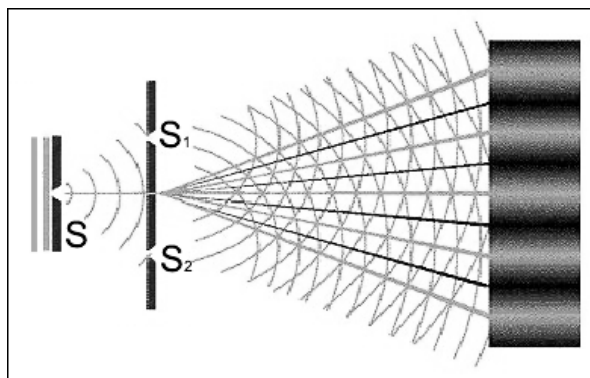


Figura 2.1: Esperimento di Young.

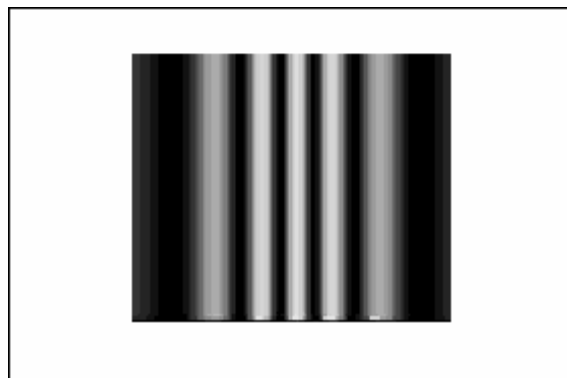


Figura 2.2: Frange di interferenza.

L'onda sferica (se l'apertura è sufficientemente piccola) da qui generata si propaga fino ad incidere su un secondo schermo, parallelo al primo, dove sono posti due piccoli forellini (S_1 e S_2) equidistanti da S . Ciascuno di questi due fori dà origine, a sua volta, ad un raggio diffratto. Su un terzo schermo, parallelo ai precedenti, si avrà la visualizzazione dell'effetto di sovrapposizione delle due onde. La figura di interferenza che ne risulta è definita *a frange* (Figura 2.2). Il fenomeno è dovuto alla sovrapposizione in fase delle due onde (*interferenza costruttiva*) corrispondente alle frange luminose, oppure in opposizione di fase (*interferenza distruttiva*) corrispondente alle bande oscure.

Per formalizzare analiticamente la situazione si faccia riferimento alla figura 2.3, dove d indica la distanza fra S_1 ed S_2 ; D la distanza fra il secondo ed il terzo schermo ed x la distanza di P dal punto centrale O .

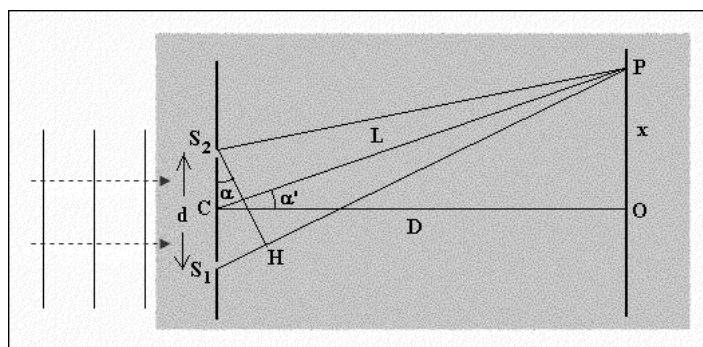


Figura 2.3: Schematizzazione in dettaglio della figura 2.1.

Per assicurarci di prendere in esame due fasci coerenti, assumiamo il caso di un'onda piana che incida sullo schermo dove sono presenti le aperture S_1 e S_2 , da cui il punto P è distante rispettivamente $\overline{PS_1}$ e $\overline{PS_2}$. Si consideri il segmento $\overline{S_2H}$ tale che $\overline{PS_2} = \overline{PH}$; assumendo $d \ll D$ si possono approssimare gli angoli $\widehat{HS_2P} = \widehat{S_2HP} = \frac{\pi}{2}$. Questo significa che, per la geometria illustrata in figura 2.3, $\alpha \approx \alpha'$.

La natura dell'interferenza nel punto P è determinata dal numero di lunghezze d'onda contenute nel tratto $\overline{S_1H}$ che quantifica la differenza del cammino ottico dei raggi in esame. Affinché P abbia un *massimo* di intensità (frangia luminosa), i due raggi devono giungere in fase; $\overline{S_1H}$ deve quindi contenere un numero intero di lunghezze d'onda:

$$\overline{S_1H} = d \sin \alpha = m\lambda \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Affinché in P si abbia un *minimo* di intensità (frangia scura) è necessario che nel tratto $\overline{S_1H}$ siano contenute un numero semi-intero di lunghezze d'onda:

$$\overline{S_1H} = d \sin \alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

In generale, sullo schermo di destra vi saranno frange illuminate nei punti di interferenza costruttiva e frange oscurate nei punti di interferenza distruttiva. Si noti che, al contrario di quanto suggerirebbe una trattazione corpuscolare del problema, in corrispondenza del punto O si ottiene (ricordando la condizione che impone alle due onde di essere coerenti) interferenza distruttiva.

In realtà l'apparato sperimentale normalmente utilizzato prevede l'inserimento di una lente convergente che focalizza i raggi sul secondo schermo. Questo, però, non modifica

il risultato ottenuto in quanto l'inserimento della lente non provoca cambiamenti nei cammini ottici; rende anzi meno approssimate le relazioni precedentemente descritte in quanto possiamo considerare paralleli i raggi emessi da S_1 e S_2 , con $\alpha = \alpha'$.

2.2 Diffrazione: la conformazione di Fraunhofer

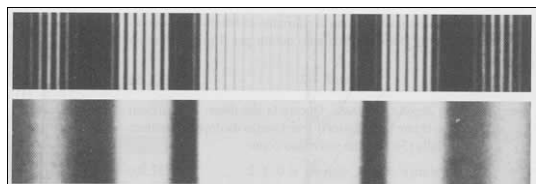


Figura 2.4: Comparazione fra frange di interferenza generate da doppia fenditura (sopra) e frange di diffrazione generate da una singola fenditura (sotto).

La diffrazione è quell'effetto di deviazione che subisce un'onda quando incontra un ostacolo (barriera o apertura) sul suo cammino. La più semplice figura di diffrazione da analizzare è quella prodotta da una singola fenditura. Al passaggio della luce quello che si viene a ricreare sullo schermo posto oltre la fenditura è una configurazione di frange simili a quelle dell'interferenza (Figura 2.4).

Il fenomeno della diffrazione è un'ulteriore conferma della natura ondulatoria della luce.¹ Per semplificare il calcolo della distribuzione dell'intensità luminosa I , si prenderanno in considerazione diffrazioni in *conformazione di Fraunhofer*, ovvero il caso in cui fronti d'onda piani sono diffratti da uno schermo posto a grande distanza dall'osservatore e dalla sorgente luminosa.²

Diffrazione da singola fenditura

Prendiamo dunque in considerazione la figura 2.5: un'onda piana incide perpendicolarmente su di uno schermo C , in cui è presente una fenditura di dimensione a , e produce delle frange di diffrazione sullo schermo D . In P_0 i raggi paralleli all'asse centrale, focalizzati dalla lente, sono certamente in fase e pertanto in corrispondenza di tale punto si verifica un massimo di intensità luminosa (frangia illuminata). In P i raggi focalizzati dalla lente giungono con un angolo θ di fuoriuscita dalla fenditura, determinato dal raggio $\overline{AP_1}$ che attraversa la lente senza subire alcuna rifrazione passandone per il suo centro. Imponiamo la scelta di θ tale per cui $\overline{BB'}$ sia pari a $\lambda/2$ così che r_1 e r_2 giungano in P_1 in opposizione di fase (interferenza distruttiva). Per ogni raggio che giunge dalla fenditura corrisponde un raggio a distanza $\lambda/2$ per cui, in P , la loro sovrapposizione giunge con opposizione di fase e dia quindi come risultato un effetto di interferenza distruttiva. Si può quindi assumere che l'intensità luminosa in P sia nulla.

Dal momento che $\overline{BB'} = \frac{a}{2} \sin \theta$, la condizione che da luogo al primo minimo può essere esplicitata come:

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \implies \quad a \sin \theta = \lambda \quad (2.3)$$

L'equazione (2.3) indica che la larghezza del massimo centrale è inversamente proporzionale alle dimensioni della fenditura; per una fenditura tale che $a = \lambda$ si ottiene che

¹Si noti che nell'originale esperimento di Young (Figura 2.1) si fa uso di tale fenomeno al momento del passaggio dell'onda piana attraverso la fenditura S posta sul primo schermo.

²Anche in questo caso, come per l'interferenza da doppia fenditura, si fa utilizzo di lenti convergenti.

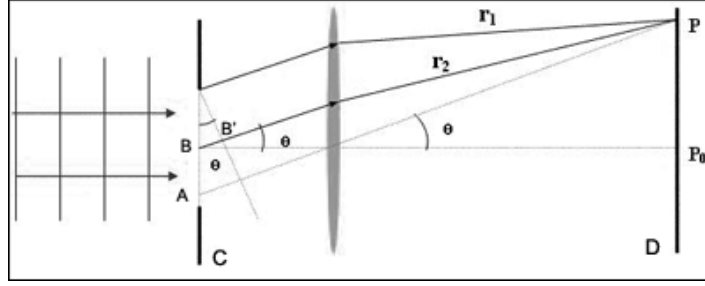


Figura 2.5: Formazione del primo minimo nella figura di diffrazione; θ tale che $\overline{BB'} = \lambda/2$

il primo minimo di intensità si ha con $\theta = \frac{\pi}{2}$. La localizzazione di ulteriori *minimi* segue lo stesso procedimento, la cui estensione può essere riassunta secondo la seguente formula:

$$a \sin \theta = m\lambda \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

Si noti che l'equazione (2.4) suggerisce l'esistenza di due minimi, rispettivamente corrispondenti a $\pm m$ per i raggi provenienti dalla metà superiore o inferiore della fenditura. Approssimativamente esiste un massimo al centro di ogni coppia consecutiva di minimi, la cui intensità luminosa è dipendente dall'angolo θ secondo la legge:

$$I_\theta = I_{max} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{a\pi \sin \theta}{\lambda} \quad (2.5)$$

dove 2α è la differenza di fase fra i raggi provenienti dall'estremità superiore ed inferiore della fenditura, ed essendo la differenza di cammino tra questi pari ad $a \sin \theta$, si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\text{differenza di fase}}{2\pi} &= \frac{\text{differenza di cammino}}{\lambda} \\ \implies 2\alpha &= \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \\ \implies \alpha &= \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \end{aligned}$$

Diffrazione da foro circolare

La focalizzazione di un'immagine attraverso una lente consiste nella rifrazione della sola luce incidente sul suo perimetro circolare. Da questo punto di vista, una qualsiasi lente, si comporta come un'apertura circolare in uno schermo opaco, i cui effetti di diffrazione costituiscono un limite alle capacità degli strumenti ottici che ne fanno uso. Un esempio riguarda gli stessi telescopi, le cui immagini possono essere distorte da ulteriori fenomeni sia dovuti ai limiti di costruzione della strumentazione che ai limiti di ricezione della radiazione; quali aberrazione cromatica ed aberrazione sferica o l'effetto del seeing atmosferico. E' possibile ridurre significativamente o eliminare questi ultimi effetti, dando forme opportune alle lenti oppure introducendo elementi correttivi nel sistema ottico, tuttavia il limite della diffrazione rimane insormontabile.

L'immagine di sinistra (Figura 2.6) mostra la figura di diffrazione di una sorgente puntiforme e distante (stella) impressa su una pellicola fotografica posta sul piano focale della lente convergente di un telescopio. Come si può notare essa non è puntiforme

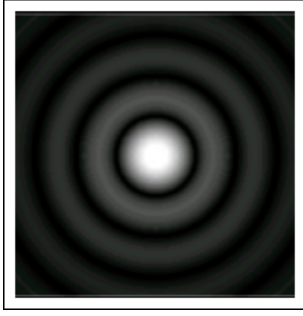


Figura 2.6: Figura di diffrazione prodotta da un'apertura circolare; il massimo centrale è chiamato *disco di Airy* attorno cui si presentano concentricamente gli anelli luminosi dei massimi secondari della figura di diffrazione.

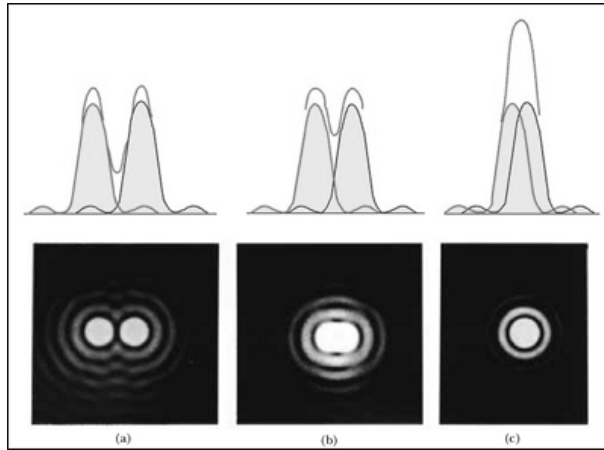


Figura 2.7: a) Sorgenti puntiformi risolte; b) Sorgenti puntiformi al limite di risoluzione, la cui separazione risponde al criterio di Rayleigh; c) Sorgenti puntiformi non risolte.

bensì possiede una dimensione finita del disco centrale (*disco di Airy*), ovvero il massimo centrale della figura di diffrazione, circondato concentricamente da anelli luminosi (massimi secondari della figura di diffrazione) progressivamente meno intensi. Il primo minimo della figura di diffrazione di un foro circolare, nelle condizioni di Fraunhofer, è individuato da un angolo θ , rispetto all'asse centrale, tale che:

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (2.6)$$

dove d rappresenta il diametro dell'apertura. Se paragoniamo la (2.6) con la (2.3) possiamo facilmente riconoscere che il fattore moltiplicativo 1.22 deve essere il risultato dell'integrazione sulle sorgenti elementari di Huygens nelle quali si può suddividere l'apertura circolare. Che le immagini delle lenti diano origine a figure di diffrazione è un fatto importante da considerare nel momento in cui si vogliono distinguere due sorgenti puntiformi molto lontane, la cui distanza angolare reciproca è molto piccola. Nella figura 2.7 si espone un esempio del problema appena menzionato. In particolare si prenda in esame il caso (b): considerando la (2.6) due oggetti che siano separabili per il *criterio di Rayleigh* devono avere una distanza angolare minima θ_R data da:

$$\theta_R = \sin^{-1} \left(\frac{1.22\lambda}{d} \right) \approx 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (2.7)$$

ritenendo valida l'approssimazione per angoli opportunamente piccoli. Nel momento in cui si vuole cercare di risolvere oggetti di limitata distanza angolare, è desiderabile cercare di ottenere un disco centrale della figura di diffrazione il più piccolo possibile. Questo può essere ottenuto (2.7) aumentando il diametro della lente, oppure diminuendo la lunghezza d'onda.³

³Telescopi di largo diametro hanno un potere risolutivo maggiore. Le immagini sono più nitide e luminose, non solo perchè l'immagine viene concentrata in un disco di diffrazione più piccolo, ma anche perchè la quantità di luce raccolta è superiore. Questo permette di individuare oggetti celesti di intensità più deboli.

Capitolo 3

Applicazioni astrofisiche

3.1 Eclissi

Il più vistoso fenomeno che rimanda all'ottica geometrica può certamente essere individuato nelle eclissi di Sole e Luna. Essendo le loro orbite apparenti attorno alla Terra inclinate di circa 5° , quando la luna si trova in prossimità dei nodi della sua orbita con l'eclittica, Terra, Luna e Sole possono presentarsi allineati con la Luna o la Terra interposta tra gli altri due corpi. Nel primo caso Luna e Sole sono in congiunzione e l'ombra della Luna cade su parte della superficie terrestre dove il Sole risulta eclissato; nel secondo caso Luna e Sole sono in opposizione ed è la Luna ad essere eclissata venendosi a trovare nel cono d'ombra creato dalla presenza della Terra. Sole e Luna, benché di dimensioni effettive molto diverse, dalla Terra sono visti con diametri angolari circa uguali (leggermente variabili per effetto della variazione delle loro distanze dalla Terra in seguito all'ellitticità delle orbite lunare e terrestre).

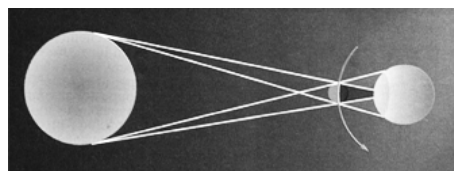


Figura 3.1: Eclissi totale e parziale di Sole.

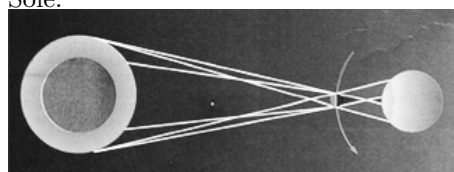


Figura 3.2: Eclissi anulare e parziale di Sole.

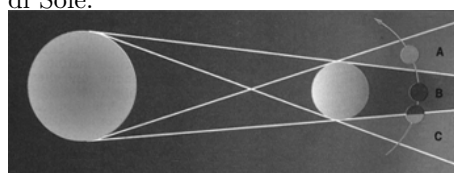


Figura 3.3: A) Eclissi in penombra di Luna; B) Eclissi totale di Luna; C) Eclissi parziale di Luna.

L'eclissi di Sole ha luogo per un effetto di proiezione dovuto alla presenza della Luna in novilunio che proietta un cono d'ombra ed un cono di penombra (Sezione 1.1) nei quali può venirsi a trovare parte della superficie terrestre. A causa della variabilità (per motivazioni di geometria orbitale) delle reciproche distanze Terra-Luna e Luna-Sole si ha che il disco lunare appare angularmente maggiore o minore di quello solare. Nel primo caso si ha l'ottenebramento completo del disco solare (*eclissi totale di Sole*) per quegli osservatori siti nel cono d'ombra, mentre gli osservatori siti nelle zone di penombra potranno osservare la scomparsa parziale del disco solare (*eclissi parziale*);

all'esterno delle zone di ombra e penombra non avviene alcun tipo di oscuramento.¹ Nel caso in cui il disco solare superi, invece, le dimensioni angolari del disco lunare i raggi che delimitano geometricamente il cono d'ombra vanno ad intersecarsi prima di incidere sulla superficie terrestre. Questo fenomeno, per quegli osservatori presenti nelle zone d'ombra, si presenta come un'*eclissi anulare di Sole*; nelle zone di penombra il fenomeno permane un'eclissi parziale ed all'infuori di queste regioni non avviene alcun tipo di occultamento. Le eclissi di sole offrono la possibilità di osservare otticamente, da terra, gli strati più esterni dell'atmosfera solare. In particolare sono queste le uniche occasioni in cui è possibile mettere in prima evidenza la presenza delle regioni coronali più esterne.

Nel caso delle eclissi di Luna, dato che il cono d'ombra della Terra ha una sezione (alla distanza della Luna) di molto maggiore rispetto al disco lunare, il satellite può immergersi completamente nel cono d'ombra contrariamente a quanto avviene nelle eclissi di Sole, durante le quali la Terra non entra mai completamente nel cono di ombra o penombra. Non vi sono, dunque, eclissi anulari di Luna ma soltanto eclissi parziali o totali. Inoltre il fenomeno avviene allo stesso modo e istante per tutti gli osservatori posti nelle regioni interessate (circa un emisfero) in corrispondenza di cui la Luna si trova sopra l'orizzonte. Le modalità dell'eclissi sono infatti indipendenti dalla posizione dell'osservatore, sia esso in una regione di ombra o penombra. Ciò rende, in uno stesso luogo, le eclissi di Luna più frequenti rispetto a quelle di Sole, che sono invece piuttosto rare.

Un fenomeno analogo a quello delle eclissi riguarda le *occultazioni* delle stelle a opera della Luna e, in generale, di pianeti e satelliti (a opera dei rispettivi pianeti). Si tratta di eclissi di stelle (o di satelliti) per effetto dell'interposizione dei dischi lunare o planetari durante il moto di Luna, pianeti e satelliti sulla sfera celeste.

Il discorso è stato esposto relativamente al nostro sistema solare ma vi sono possibilità di applicazioni extrasolari come, ad esempio, la ricerca degli esopianeti o delle binarie ad eclissi. Un metodo di individuazione è quello del *transito*. Esso consiste, brevemente, nella rilevazione fotometrica di variazione di luminosità nella curva di luce di una stella al momento in cui un pianeta (o una seconda stella) transita attraverso la linea di vista dell'osservatore. Si tratta di un metodo fotometrico, valido solo per una piccola percentuale di casi in cui le orbite siano allineate rispetto al punto di vista di un osservatore terrestre. I dati raccolti nella variabilità delle curve di luminosità delle binarie ad eclissi, ad esempio, possono fornire informazioni relative alle temperature effettive delle due stelle ed alle loro dimensioni; questo basandosi sull'ampiezza dei minimi delle curve di luminosità e sulla lunghezza delle eclissi.

3.2 Telescopi

Si possono distinguere principalmente due tipologie di telescopi: *rifrattori* la cui prima montatura risale a Galileo Galilei (1564-1642); e *riflettori* la cui prima montatura si deve a Isaac Newton (1643-1727).

¹Può chiaramente verificarsi un'eclissi parziale di Sole senza che abbia luogo un'eclissi totale, nel caso in cui la Terra attraversi solamente il cono di penombra e non quello d'ombra.

Telescopi rifrattori

La componente principale di un telescopio rifrattore è individuata dalla lente primaria. Lo scopo di questa componente è di raccogliere la maggior quantità di luce possibile con la miglior risoluzione possibile focalizzando la luce sul piano focale. Considerando che la luminosità J decresce con il quadrato del rapporto focale ($J \propto \frac{1}{F^2}$ con il rapporto focale $F \equiv D/f$ dove D è il diametro dell'apertura e f la lunghezza focale della lente) è necessario compensare il calo di luminosità con maggiori dimensioni della lente stessa, che purtroppo comporta una serie di problematiche alla strumentazione. Dal momento che la luce deve passare attraverso le lenti, esse possono essere supportate solamente dai bordi. Questo causa, al crescere delle loro dimensioni, delle deformazioni nella struttura del telescopio a causa della gravità; la forma di queste deformazioni dipende specificatamente dalla posizione dell'obiettivo che cambia, di volta in volta, dalla sua stessa orientazione. Un'altra problematica è la costruzione di lenti il cui intero *volume* sia pressoché perfetto otticamente; entrambe le superfici delle lenti devono possedere imprecisioni di costruzione inferiori a $\lambda/20$.² A ciò si aggiunge la lenta risposta termica all'apertura della cupola ed altri problemi meccanici quali la compensazione del momento torcente causato dalle elevate dimensioni lineari del telescopio. Considerando che al contrario degli specchi le lenti hanno l'aggiuntiva complicazione dell'aberrazione cromatica, le montature dei moderni telescopi di grandi dimensioni sono di tipo *riflettore*.

Telescopi riflettori

Nel telescopio riflettore le lenti sono sostituite da specchi, riducendo significativamente o completamente eliminando alcune problematiche della struttura dei rifrattori. Ad esempio la sola superficie riflettente dello specchio necessita di un'accuratezza di produzione tale da avere difetti ottici di dimensioni inferiori a $\lambda/20$. Inoltre la struttura di supporto può essere estesa all'intera superficie non riflettente dello specchio il cui peso può, fra l'altro, essere minimizzato tramite una struttura a nido d'ape. E' anche possibile inserire, sul lato non riflettente, un sistema a pressione che consenta di correggere o eliminare le distorsioni dello specchio prodotte dagli effetti termici e dall'effetto della gravità (*ottica attiva*).³ Telescopi riflettori, tuttavia, non sono completamente privi di svantaggi. Un esempio è il posizionamento del *primo fuoco* dello specchio primario; questo viene a trovarsi lungo il percorso della radiazione che si vuole raccogliere, causando una diminuzione della quantità luce raccolta dallo strumento proporzionale alle dimensioni del rilevatore.

Telescopi Newtoniani

Newton fu il primo a risolvere la problematica della rilevazione inserendo un piccolo e piano specchio secondario lungo il percorso della luce riflessa, modificando la posizione del primo fuoco. Certamente la presenza dello specchio secondario blocca un certo quantitativo di luce; tuttavia, se il rapporto delle aree fra il primario ed il secondario è sufficientemente grande, l'effetto della perdita di luminosità può essere minimizzato. Lo

²Considerando approssimativamente lo spettro ottico compreso fra i 700nm ed i 400nm si trova che i difetti ottici della lente debbano essere inferiori ai 35-20nm.

³Da non confondere con l'ottica adattiva, che comprende tecniche di deformazione dello specchio per correggere le distorsioni del fronte d'onda dovute ad effetti di seeing.

svantaggio di questo tipo di montatura, però, è che l'oculare deve essere posizionato ad una distanza significativa dal centro di massa del telescopio. Se il rilevatore utilizzato possiede un considerevole peso si viene a creare un significativo momento torcente.

Telescopi Cassegrain e Ritchey-Chrétien

Dal momento che la regione dello specchio primario collocata dietro il secondario risulta inutilizzabile come superficie di raccolta, è possibile inserire un buco in questa regione di spazio e montare lo specchio secondario in modo tale da convogliare la radiazione attraverso lo stesso. Così facendo è possibile montare, sul retro del telescopio, strumentazioni di rilevazione di peso considerevole. In questo tipo di montatura lo specchio secondario è solitamente convesso, aumentando di fatto la lunghezza focale del sistema. Solitamente, la montatura Cassegrain, utilizza specchi primari parabolici. La montatura Ritchey-Chrétien è una variante della montatura Cassegrain in cui lo specchio primario ha una curvatura iperbolica, piuttosto che parabolica.⁴

Telescopi Coudé

Se la strumentazione risulta troppo massiccia è possibile prolungare il percorso della luce sino ad una camera (*coudé room*) posizionata al di sotto del telescopio stesso. In questo modo è anche possibile aumentare in modo significativo la focale dell'ottica, permettendo di lavorare sia ad alte risoluzioni che, nello studio delle linee spettrali, ad alta dispersione.

Telescopi Schmidt

Sono strumenti specificamente progettati per coprire un ampio angolo di osservazione con bassa distorsione della radiazione, generalmente usati come camere. Per minimizzare la *coma*⁵ si utilizza uno specchio sferoidale come primario combinandolo con delle lenti correttive che aiutano a rimuovere l'aberrazione sferica. Questi strumenti sono prevalentemente usati negli studi su ampie porzioni di cielo.

3.3 Interferometria radio

Nel campo della *radioastronomia* esiste l'equivalente problema della risoluzione, come per ogni altro tipo di strumentazione. Il criterio di Rayleigh (2.7) si estende ugualmente ai radiotelescopi, eccetto che la lunghezza d'onda in esame è di molto superiore a quella presa in considerazione per le osservazioni ottiche o ad alta frequenza. Considerando la precisione di costruzione della superficie riflettente come $\lambda/20$ si possono, ad esempio, considerare tollerabili imperfezioni dell'ordine del centimetro quando si osserva a 21 cm. D'altro canto, però, è necessaria una dimensione molto maggiore dello specchio primario. La costruzione di parabole sufficientemente grandi da poter raggiungere un potere risolutivo paragonabile a quello ottenuto nella banda visibile dal suolo, non è affatto pratica. Ciò nonostante gli studi in banda radio riescono a risolvere sorgenti al meglio di 0.001". Questo potere risolutivo non indifferente è ottenuto

⁴Un esempio è il telescopio Cassini di Loiano (Bologna), avente una montatura Ritchey-Chrétien, con diametro totale dello specchio primario di 152.4 cm.

⁵Trattasi di un'aberrazione ottica che si verifica quando l'oggetto ripreso è spostato rispetto all'asse del sistema di un angolo θ .

tramite una tecnica riconducibile all'interferenza da doppia fenditura utilizzata nell'esperimento di Young (Sezione 2.1). La figura 3.4 mostra due telescopi separati da una distanza D . La distanza da R_2 alla sorgente è superiore della distanza fra la sorgente e R_1 di una quantità l . Questo implica che in R_2 arriverà uno specifico fronte d'onda dopo che questi abbia raggiunto R_1 . Due segnali giungono quindi *in fase* ai ricevitori (interferenza costruttiva) se $l = n\lambda$ con n intero. Similmente se $l = (n-1/2)\lambda$ (n intero) i segnali arriveranno in opposizione di fase ai rilevatori (interferenza distruttiva).

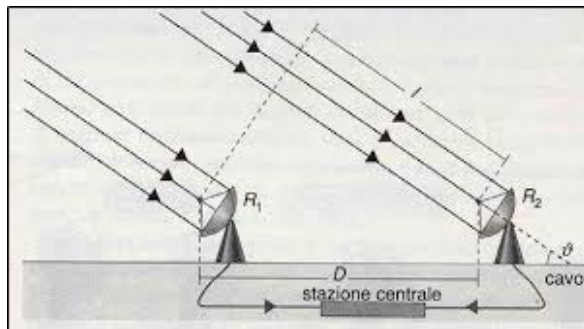


Figura 3.4: Schematizzazione della tecnica interferometrica.

Scegliendo un angolo φ tale che esso sia complementare dell'angolo θ (Figura 3.4) rispetto alla normale al suolo, possiamo ritrovare la formula:

$$\sin \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \frac{l}{D} \quad (3.1)$$

con la quale è possibile determinare accuratamente la posizione della sorgente, sfruttando il pattern di interferenza prodotto dalla combinazione delle due antenne. L'equazione (3.1) è completamente analoga alle (2.1) e (2.2) che descrivono l'esperimento dell'interferenza da doppia fenditura.

Chiaramente il potere risolutivo migliora all'aumentare di D . L'interferometria può essere effettuata su scale continentali o addirittura fra continenti (VLBI: very-long-baseline interferometry).⁶ In tali casi i dati raccolti in uno specifico sito vengono trasmesse ad una stazione centrale di raccolta per una rielaborazione successiva. E' necessario che solamente le osservazioni avvengano in simultanea e che sia registrato l'esatto tempo dell'acquisizione.

⁶Un esempio è rappresentato da ALMA (Atacama Large Millimeter Arrey) un interferometro costituito da 66 antenne paraboliche, sito sull'altopiano di Chajnantor (Cile) a 5000 m di altitudine. Il progetto prevede la collaborazione di Giappone, Taiwan, USA, Canada ed Europa; l'istituto di radioastronomia di Bologna fa parte dell' European ALMA Regional Center (ARC) node.

Bibliografia

- [1] A. E. Roy and D. Clarke, *Astronomy: Principles and Practice*, Institute of Physics Publishing, 2003
- [2] B. W. Carrol and D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Pearson International Edition, 2007.
- [3] D. Halliday, R. Resnick e K. S. Krane, *Fisica 2*, Casa Editrice Ambrosiana, 2006.
- [4] E. Hect, *Optics*, Addison Wesley, 2002.
- [5] E. Persico, *Ottica*, Zanichelli, 1979.
- [6] M. L. Kutner, *Astronomy: A Physical Perspective*, Cambridge University Press, 2011.
- [7] P. Giannone, *Elementi di Astronomia*, Pitagora Editrice, 1996-2004.
- [8] ALMA, <https://almascience.eso.org>.
- [9] Cassini Telescope, <http://www.oabo.inaf.it>.