

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**GEOMETRIA  
E TOPOLOGIA  
DELLE SUPERFICI**

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
MASSIMO FERRI  
Correlatore:  
Dott.ssa  
ALESSIA CATTABRIGA

Presentata da:  
CHIARA BUCCIARELLI

II Sessione  
Anno Accademico 2014/2015



*Non preoccuparti delle difficoltà che incontri in matematica,  
ti posso assicurare che le mie sono ancora più grosse.*  
*Albert Einstein*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Nozioni generali</b>	<b>3</b>
1.1 Rivestimenti e azioni di gruppo . . . . .	3
1.1.1 Gruppo fondamentale . . . . .	3
1.1.2 Azioni di gruppo . . . . .	4
1.1.3 Rivestimenti . . . . .	5
1.2 Varietà topologiche e differenziabili . . . . .	6
1.2.1 Metrica riemanniana . . . . .	7
1.3 Isometrie e gruppi discreti di isometrie . . . . .	10
<b>2 Superfici</b>	<b>11</b>
2.1 Definizioni . . . . .	11
2.2 Classificazione delle superfici . . . . .	12
<b>3 Il piano euclideo e la sfera</b>	<b>17</b>
3.1 Il piano euclideo . . . . .	17
3.1.1 Isometrie di $\mathbb{E}^2$ . . . . .	18
3.2 La sfera . . . . .	22
3.2.1 Isometrie di $S^2$ . . . . .	23
<b>4 Il piano iperbolico</b>	<b>25</b>
4.1 Modelli del piano iperbolico . . . . .	25
4.2 Le isometrie del piano iperbolico . . . . .	27
4.2.1 Isometrie in termini di punti fissi . . . . .	28
4.2.2 Isometrie in termini di traccia della matrice associata . . . . .	30
4.2.3 Isometrie come composizione di riflessioni . . . . .	31
4.2.4 Isometrie classificate geometricamente . . . . .	32
4.3 Metriche iperboliche . . . . .	33
<b>Bibliografia</b>	<b>37</b>



# Introduzione

Il concetto di varietà topologica è definito con lo scopo di modellare spazi a più dimensioni, eventualmente curvi, che localmente hanno le stesse peculiarità dello spazio euclideo, ma che visti globalmente possono assumere le forme più svariate. Un caso particolare di varietà sono le superfici (varietà di dimensione 2): l'analisi di quest'ultime negli ultimi due secoli ha interessato numerosi matematici, tra cui Riemann, Möbius, Klein, Poincaré, Seifert e Jordan. Un problema a lungo studiato è quello della classificazione delle superfici. Si giunse a una soluzione nel 1888 con il teorema enunciato da Van Dick, che afferma che qualsiasi superficie compatta, connessa e senza bordo è omeomorfa alla sfera o alla somma connessa di un determinato numero di tori o di piani proiettivi, dimostrato poi nel 1921 da Brahana. Per il caso delle superfici non compatte, venne enunciato un teorema da Kerékjártò (1922-1923) e poi sistemato da Richards (1963). Le varietà, e nello specifico le superfici, possono essere viste sia come elementi della categoria **Top** (la categoria che ha come oggetti le varietà topologiche e come morfismi le funzioni continue) sia come elementi della categoria **Diff** (che contiene le varietà differenziabili con morfismi le funzioni differenziabili). In generale queste due categorie non coincidono, poiché non tutte le varietà topologiche ammettono struttura differenziabile ed inoltre alcune possono ammettere più strutture differenziabili non equivalenti; nel caso delle superfici è però possibile identificarle. La classificazione topologica delle superfici vale quindi anche per le superfici differenziabili. Per poter estendere alle superfici il concetto di lunghezza, misura di angoli, area e curvatura è necessario introdurre un'ulteriore struttura detta tensore metrico. Questo venne introdotto da Riemann per la prima volta nella sua dissertazione del 1851 quando parlò di superfici differenziabili a cui è associato un tensore metrico, le cosiddette superfici riemanniane. Ad esse è possibile associare il concetto di curvatura, e in base al valore che la curvatura assume le superfici complete possono essere suddivise in ellittiche (se hanno curvatura costante 1), piatte (se hanno curvatura costante 0) e iperboliche (se hanno curvatura costante -1). Un risultato fondamentale nella teoria delle superfici riemanniane è il Teorema di Uniformizzazione che

afferma che qualunque superficie a curvatura costante può essere ottenuta come  $X/G$ , con  $X = S^2, \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$  e  $G$  gruppo di isometrie che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su  $X$ . Il teorema venne però dimostrato in maniera incompleta da Riemann. Con lo sviluppo di ulteriori strumenti analitici, Poincaré e Koebe, indipendentemente l'uno dall'altro, riuscirono a darne una dimostrazione completa.

In questa tesi affronteremo lo studio delle superfici riemanniane compatte, connesse, orientabili e senza bordo al fine di dimostrare che la sfera è l'unica superficie ellittica, che il toro è l'unica superficie piatta e che le superfici iperboliche sono le somme connesse di  $g$  tori, con  $g \geq 2$ . Per poter fare ciò utilizzeremo il Teorema di Uniformizzazione; studieremo quindi le isometrie e i gruppi di isometrie che agiscono in maniera libera e propriamente discontinua sul piano euclideo, sulla sfera e sul piano iperbolico.

Nel primo capitolo daremo definizioni e risultati generali necessari per affrontare i capitoli successivi. Dopo aver parlato di gruppo fondamentale, di azioni di gruppo e di rivestimenti, introdurremo la nozione di varietà riemanniana descrivendo la metrica associata e le isometrie su di essa. Mostreremo inoltre il legame che intercorre tra questi concetti.

Nel secondo capitolo ci concentreremo principalmente sulle varietà di dimensione 2, le superfici. Definiremo il concetto di curvatura gaussiana, di genere e di caratteristica di Eulero-Poincaré, ed enunceremo il Teorema di Classificazione delle superfici. Enunceremo poi il teorema che classifica le superfici in base alla loro curvatura, che dimostreremo, punto per punto, nel terzo e nel quarto capitolo.

Scopo del terzo capitolo sarà quello di studiare il piano euclideo (nella prima sezione) e la sfera (nella seconda sezione). Ci concentreremo in particolar modo sulle loro isometrie e sui sottogruppi discreti del gruppo delle isometrie che conservano l'orientazione.

L'ultimo capitolo riguarderà il piano iperbolico. Dopo aver presentato due dei modelli che lo descrivono, parleremo delle sue isometrie definendole in modi differenti equivalenti fra loro. Infine parleremo dei gruppi Fuchsiani, cioè i gruppi discreti di isometrie su  $\mathbb{H}^2$ , e vedremo quali di questi agiscono su  $\mathbb{H}^2$  in modo da dare origine a una superficie connessa, compatta e orientabile. Concluderemo definendo lo spazio di Teichmüller, senza studiarlo in maniera approfondita.



# Capitolo 1

## Nozioni generali

Per poter parlare di superfici e della loro classificazione sarà innanzitutto necessario fornire definizioni e teoremi che verranno poi utilizzati in seguito. Per approfondimenti si vedano [1], [2].

### 1.1 Rivestimenti e azioni di gruppo

**Definizione 1.1.1.** Uno spazio topologico  $X$  si dice *spazio di Hausdorff* se è separabile, cioè se  $\forall x, y \in X$  esistono degli intorni aperti  $U, V$  di  $x, y$  tali che  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definizione 1.1.2.** Un *omeomorfismo* fra due spazi topologici  $X$  e  $Y$  è una funzione biunivoca continua  $f : X \rightarrow Y$  la cui inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  è anch'essa continua. Due spazi  $X$  e  $Y$  si dicono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo tra essi, in tal caso scriveremo  $X \cong Y$ .

**Definizione 1.1.3.** Sia  $X$  un insieme e  $\tau$  una topologia su  $X$ . La *compattezza di Alexandroff* di  $X$  è lo spazio topologico dato dall'insieme  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$  e dalla topologia  $\hat{\tau} = \tau \cup \{V \cup \{\infty\} \mid X \setminus V \text{ chiuso e compatto in } X\}$ .

#### 1.1.1 Gruppo fondamentale

**Definizione 1.1.4.** Siano  $X$  e  $Y$  due spazi topologici e  $f, g : X \rightarrow Y$  due funzioni continue. Un'*omotopia* tra  $f$  e  $g$  è un'applicazione continua  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tale che  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ .

Dato  $K$  un sottospazio compatto di  $X$ , un'*omotopia relativa a  $K$*  tra  $f$  e  $g$  è un'omotopia  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tra  $f$  e  $g$  tale che  $F(k, t) = f(k) = g(k) \forall k \in K, \forall t \in [0, 1]$ .

**Definizione 1.1.5.** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $I = [0, 1]$ , un *arco* è una funzione continua  $f : I \rightarrow X$ .

Un arco  $f$  è chiamato *cappio* se  $f(0) = f(1)$ ; in particolare il punto  $x = f(0) = f(1)$  si dice *base* del cappio  $f$  e il cappio si dice *basato su*  $x$ .

Se  $f$  e  $g$  sono due archi in uno spazio topologico  $X$  con  $f(1) = g(0)$ , il loro *prodotto* è l'arco  $f * g$  definito da:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Definizione 1.1.6.** Dato  $X$  spazio topologico si dice *gruppo fondamentale* di  $X$  con punto base  $x$  l'insieme  $\pi_1(X, x)$  delle classi di omotopia rel $\{0, 1\}$  di cappi basati su  $x \in X$  con l'operazione  $[f][g] = [f * g]$ , dove  $*$  indica il prodotto di archi.

**Proposizione 1.1.1.** Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi, allora  $\forall x, y \in X$  si ha che  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$ . In tal caso scriveremo semplicemente  $\pi_1(X)$ .

## 1.1.2 Azioni di gruppo

**Definizione 1.1.7.** Un'azione di un gruppo  $G$  su uno spazio topologico  $X$  è un omomorfismo

$$\rho : G \rightarrow \text{Homeo}(X),$$

dove il gruppo  $\text{Homeo}(X)$  indica il gruppo di tutti gli omeomorfismi di  $X$  in sé.

Quindi ad ogni  $g \in G$  è associato un omeomorfismo  $\rho(g) : X \rightarrow X$ , che per semplicità indicheremo ancora con  $g : X \rightarrow X$ . Chiedere che  $\rho$  sia un omomorfismo equivale a chiedere che  $g_1(g_2(x)) = (g_1g_2)(x) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$ .

In particolare se  $\rho$  è iniettivo, allora identifica  $G$  con il sottogruppo  $\rho(G) \subset \text{Homeo}(X)$ .

Fissata un'azione  $G \rightarrow \text{Homeo}(X)$  possiamo dare le seguenti definizioni.

**Definizione 1.1.8.** L'*orbita* di un punto  $x \in X$  è l'insieme

$$O(x) = \{g(x) : g \in G\} \subset X$$

mentre lo *stabilizzatore* di  $x \in X$  è

$$G_x = \{g : g(x) = x\}$$

ed è un sottogruppo di  $G$ .

*Osservazione 1.1.1.* Le orbite definiscono una partizione dello spazio  $X$ : due punti  $x, y \in X$  appartengono alla stessa orbita se e solo se  $y = g(x)$  per qualche  $g \in G$ .

**Definizione 1.1.9.** Lo spazio topologico  $X/G$  è l'insieme ottenuto identificando i punti che stanno nella stessa orbita con la topologia quoziente ed è detto *quoziente rispetto all'azione di  $G$* .

**Definizione 1.1.10.** L'azione di  $G$  si dice:

- *libera* se ogni elemento  $g$  non banale ha un insieme vuoto di punti fissi, cioè  $g(x) \neq x \quad \forall x \in X$ ;
- *propriamente discontinua* se per ogni sottoinsieme compatto  $C$  di  $X$ , l'insieme  $\{g \in G : g(C) \cap C \neq \emptyset\}$  è finito, in particolare  $G_x$  è finito  $\forall x \in X$ ;
- *transitiva* se  $\forall x_1, x_2 \in X \exists g \in G$  tale che  $g(x_1) = x_2$ .

### 1.1.3 Rivestimenti

**Definizione 1.1.11.** Una *proiezione di rivestimento* di uno spazio  $X$  è una mappa  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  tale che ogni  $x \in X$  ammette un intorno aperto  $U$  con la proprietà che  $p^{-1}(U)$  è unione disgiunta di aperti di  $\tilde{X}$ , ognuno dei quali è applicato omeomorficamente da  $p$  in  $U$  ( $U$  è *regolarmente ricoperto*). Lo spazio  $\tilde{X}$  è detto *spazio di rivestimento* di  $X$ .

Una proiezione di rivestimento  $\tilde{X} \rightarrow X$  è detta *rivestimento universale* di  $X$  se  $\tilde{X}$  è semplicemente connesso.

È immediato vedere che la fibra di  $x \in X$ , cioè  $p^{-1}(x)$ , è uno spazio discreto per ogni  $x \in X$ ; inoltre  $p$  risulta suriettiva, ed è un omeomorfismo locale.

Per semplicità supponiamo che  $X$  e  $\tilde{X}$  siano connessi per archi.

**Proposizione 1.1.2.** *Un rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  induce una mappa iniettiva  $p_* : \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X)$ .*

*Se  $p_*(\pi_1(\tilde{X}))$  è un sottogruppo normale di  $\pi_1(X)$  il rivestimento si dice regolare.*

Il prossimo risultato collega il concetto di rivestimento con quello di azione di gruppo.

**Proposizione 1.1.3.** *Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff e  $G$  un gruppo che agisce su di esso. Sono fatti equivalenti :*

1.  $G$  agisce in maniera libera e propriamente discontinua;
2.  $X/G$  è di Hausdorff e la proiezione  $p : X \rightarrow X/G$  è un rivestimento.

**Definizione 1.1.12.** Un *automorfismo* di un rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un omeomorfismo  $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  tale che  $p \circ f = p$ . Gli automorfismi di un rivestimento formano un gruppo indicato con  $\text{Aut}(p)$ .

**Proposizione 1.1.4.** Il gruppo  $\text{Aut}(p)$  agisce in maniera libera e propriamente discontinua su  $X$ .

In seguito a questa proposizione è naturale chiedersi se il rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  sia un quoziente rispetto a tale azione.

**Teorema 1.1.5.** Se  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un rivestimento regolare, allora  $X = \tilde{X}/\text{Aut}(p)$  e vale l'isomorfismo

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X)/p_*(\pi_1(\tilde{X})).$$

**Corollario 1.1.6.** Se  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un rivestimento universale, allora  $X = \tilde{X}/\text{Aut}(p)$  e vale l'isomorfismo

$$\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X).$$

Questi risultati permettono di identificare i rivestimenti regolari e le azioni libere e propriamente discontinue.

## 1.2 Varietà topologiche e differenziabili

**Definizione 1.2.1.** Una *varietà topologica*  $M$  di dimensione  $n$  è uno spazio di Hausdorff tale che esiste un ricoprimento di  $M$  in cui ogni aperto è omeomorfo a un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.2.2.** Sia  $M$  una varietà topologica. Una *carta*  $(U_i, \phi_i)$  è un omeomorfismo  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  tra un aperto  $U_i$  di  $M$  e un aperto  $V_i$  di  $\mathbb{R}^n$ . Un atlante è un insieme di carte  $\{(U_i, \phi_i)\}$  tale che gli aperti  $U_i$  ricoprono  $M$ . Un *atlante differenziabile* è un atlante in cui le *funzioni di transizione*

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_i \cap U_j)} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

sono lisce (cioè sono di classe  $C^\infty$ ).

Una *varietà differenziabile* è una varietà topologica dotata di atlante differenziabile.

**Definizione 1.2.3.** Una trasformazione  $f : M \rightarrow N$  tra due varietà differenziabili  $M$  e  $N$  si dice *liscia* se per ogni carta  $(U, \phi)$  in  $M$  e ogni carta  $(V, \psi)$  in  $N$  tali che  $f(U) \subset V$ , la composizione

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

è liscia.

In particolare una funzione liscia  $f : I = [0, 1] \rightarrow M$  è detta *curva*.

Un *diffeomorfismo*  $f : M \rightarrow N$  è una funzione liscia che ammette inversa liscia.

*Osservazione 1.2.1.* Non tutte le varietà topologiche ammettono una struttura differenziabile: in generale la categoria delle varietà topologiche con le funzioni continue **Top** e la categoria delle varietà differenziabili con le funzioni differenziabili **Diff** non coincidono. È possibile però identificare le due categorie nel caso di varietà di dimensione  $n$  con  $n \leq 3$ .

**Definizione 1.2.4.** Una varietà differenziabile è *orientata* se è dotata di un atlante in cui tutte le funzioni di transizione preservano l'orientazione di  $\mathbb{R}^n$ , cioè se il determinante del loro differenziale è in ogni punto maggiore di 0.

Non tutte le varietà possono essere orientate. Un esempio di varietà non orientabile è il piano proiettivo.

### 1.2.1 Metrica riemanniana

**Definizione 1.2.5.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Dato un qualsiasi punto  $p \in M$ , sia  $A_p := \{\gamma : ]-a, a[ \rightarrow M : \gamma(0) = p, a \in \mathbb{R}^+\}$  e sia  $\sim$  la relazione di equivalenza data da:

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \phi_i \circ \gamma, \phi_i \circ \gamma' \text{ hanno la stessa tangente in } \phi_i(p) \text{ per una carta } (U_i, \phi_i).$$

Si può dimostrare che tale definizione non dipende dalla scelta della carta.

Si definisce lo *spazio tangente a  $M$  in  $p$*  lo spazio

$$T_p M = A_p / \sim .$$

Gli elementi di  $T_p M$  si dicono *vettori tangenti a  $M$  in  $p$* .

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Preso  $p \in M$  si ha che*

$$T_p M \cong \mathbb{R}^n .$$

Inoltre ogni trasformazione liscia  $f : M \rightarrow N$  tra due varietà differenziabili  $M$  e  $N$  induce in ogni punto  $p \in M$  una trasformazione lineare  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  fra spazi tangenti che manda la curva  $\gamma$  nella curva  $f \circ \gamma$ .

Per poter introdurre alcuni concetti geometrici, tra cui la distanza tra due punti e la lunghezza di una curva, è necessario definire il *tensore metrico*.

**Definizione 1.2.6.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Un *tensore metrico* per  $M$  è il dato di un prodotto scalare  $g_p$  su  $T_p M \forall p \in M$  che varia in modo differenziabile al variare di  $p$  in  $M$ . Su ogni carta il prodotto scalare è esprimibile come una matrice i cui coefficienti devono variare in modo liscio rispetto al punto.

**Definizione 1.2.7.** Una *varietà riemanniana* è una varietà differenziabile dotata di un tensore metrico. Generalmente si indica come  $(M, g)$ , dove  $M$  è la varietà e  $g$  il tensore.

**Definizione 1.2.8.** Sia  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva; la sua *velocità*  $\gamma'(t)$  in  $t \in I$  è il vettore tangente  $\gamma'(t) = d\gamma_t(1)$ , dove con 1 si intende il vettore 1 in  $T_t I \cong \mathbb{R}$ .

Il tensore metrico  $g$  definisce in particolare una norma per ogni vettore tangente, ed un angolo fra vettori tangenti nello stesso punto. La velocità  $\gamma'(t)$  di una curva ha quindi un modulo  $\|\gamma'(t)\| \geq 0$  ben definito, e due curve che si incontrano in un punto con velocità non nulle formano un angolo ben definito.

**Definizione 1.2.9.** La lunghezza di una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  si definisce come

$$L(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt$$

e può essere finita o infinita.

Grazie a questa definizione è possibile definire la distanza tra due punti.

**Definizione 1.2.10.** La distanza  $d(p, q)$  fra due punti  $p, q \in M$  è definita come

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

al variare fra le curve  $\gamma$  che collegano  $p$  e  $q$ .

La varietà  $M$  dotata della distanza  $d$  è uno spazio metrico (che induce su  $M$  la stessa topologia di  $M$ ).

**Definizione 1.2.11.** Una *geodetica* è una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  con velocità costante (in modulo) che realizza localmente le distanze. In altre parole il modulo  $k = \|\dot{\gamma}(t)\|$  non deve dipendere da  $t$ , e per ogni  $t \in I$  deve esistere  $\varepsilon > 0$  tale che  $d(\gamma(t), \gamma(t')) = k\|t - t'\| \quad \forall t, t' \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ .

Un altro concetto che si può definire grazie al tensore metrico è quello di *volume*. È innanzitutto necessario definire una *n-forma differenziale*, dove  $n$  è la dimensione di  $M$ .

**Definizione 1.2.12.** Una *n-forma differenziale*  $\omega$  è il dato in ogni spazio tangente  $T_p M$  di una forma multilineare alternante

$$\omega_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

che varia in maniera liscia rispetto a  $p$ .

A meno di riscalamento esiste una sola *n-forma differenziale*. Le *n-forme* sono utili perché possono essere integrate: in altre parole ha senso la scrittura

$$\int_D \omega$$

su qualsiasi aperto  $D \subset M$ .

**Definizione 1.2.13.** Una *forma volume* in una varietà orientata  $M$  è una *n-forma differenziale*  $\omega$  tale che  $\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0$  su ogni base positiva  $(v_1, \dots, v_n)$  di  $T_p M$  e per ogni  $p \in M$ .

Il tensore metrico determina una forma volume che soddisfa  $\omega_p(e_1, \dots, e_n) = 1$  per ogni base ortonormale positiva  $(e_1, \dots, e_n)$  di  $T_p M$ . Con questa definizione, ogni aperto  $D$  di  $M$  ha un ben definito *volume*

$$\text{Vol}(D) = \int_D \omega$$

con  $\omega$  forma volume indotta dalla metrica. Il volume di  $D$  è un numero reale positivo oppure infinito.

Se  $D$  è relativamente compatto (cioè la sua chiusura è compatta) il volume è necessariamente finito. In particolare, una varietà riemanniana compatta  $M$  ha un volume finito.

### 1.3 Isometrie e gruppi discreti di isometrie

**Definizione 1.3.1.** Dati due spazi metrici  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è detta *isometria* fra  $X$  e  $Y$  se per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in X$  vale l'uguaglianza:

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

**Definizione 1.3.2.** Le isometrie da una varietà  $M$  in sé formano un gruppo che viene indicato con  $\text{Iso}(M)$ . Se  $M$  è una varietà orientata, l'insieme delle isometrie che conservano l'orientazione è un sottogruppo che denoteremo con  $\text{Iso}^+(M)$ .

**Definizione 1.3.3.** Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile. Si dice che  $f$  è un'*isometria locale* in  $P \in M$  se esistono  $U$  e  $V$  intorno aperti rispettivamente di  $P$  in  $M$  e di  $f(P)$  in  $N$  tali che  $f|_U : U \rightarrow V$  è un'isometria. Inoltre  $f : M \rightarrow N$  è un'*isometria locale* se lo è in ogni punto  $P \in M$ .

Vogliamo vedere come si comporta una metrica rispetto a un rivestimento.

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  un rivestimento fra spazi topologici. Se  $M$  è una varietà riemanniana, allora  $\tilde{M}$  ha un'unica struttura di varietà riemanniana tale che  $p$  sia un'isometria locale.*

La struttura riemanniana non scende con altrettanta facilità da  $\tilde{M}$  a  $M$ . Consideriamo il caso di il rivestimento regolare: in tal caso per la Proposizione 1.1.5 è il quoziente di un'azione.

**Proposizione 1.3.2.** *Sia  $G$  un gruppo che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su una varietà riemanniana  $M$  e  $M \rightarrow M/G$  il rivestimento indotto. Esiste una struttura di varietà riemanniana su  $M/G$  che rende la proiezione  $p$  un'isometria locale se e solo se  $G$  è un gruppo di isometrie di  $M$ . Questa struttura, se esiste, è unica.*

**Definizione 1.3.4.** Sia  $G$  un sottogruppo di  $\text{Iso}(M)$ ; diciamo che  $G$  è un *sottogruppo discreto* se, per ogni  $P \in M$ , esiste un intorno  $U$  di  $P$  in  $M$  tale che,  $g(P) = P$  oppure  $g(P) \notin U$ , per ogni  $g \in G$ .

Se  $G$  è un gruppo di isometrie di una varietà riemanniana  $M$ , è facile capire quando  $G$  agisce in modo propriamente discontinuo.

**Proposizione 1.3.3.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana e sia  $G \subset \text{Iso}(M)$  un sottogruppo di isometrie di  $M$ . L'azione di  $G$  su  $M$  è propriamente discontinua se e solo se  $G$  è un sottoinsieme discreto di  $\text{Iso}(M)$ .*

**Corollario 1.3.4.** *Sia  $G$  sottogruppo di  $\text{Iso}(M)$ . Se  $G$  è discreto e agisce in modo libero, allora il quoziente  $M/G$  è una varietà riemanniana e  $p : M \rightarrow M/G$  è un rivestimento ed un'isometria locale.*



# Capitolo 2

## Superfici

### 2.1 Definizioni

**Definizione 2.1.1.** Una *superficie* è una varietà topologica di dimensione  $n = 2$ .

Per l'Osservazione 1.2.1 è possibile identificare le superfici topologiche con quelle differenziabili.

Ci occuperemo da qui in avanti soltanto di superfici compatte, connesse e orientabili.

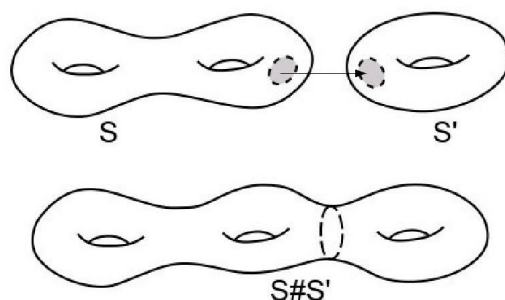


Figura 2.1: La somma connessa di due superfici: si rimuovono le parti interne di due dischi, e si incollano le due circonferenze rimanenti. Il risultato di questa operazione è una nuova superficie.

**Definizione 2.1.2.** Siano  $S$  e  $S'$  due superfici. Siano  $D' \subset S$  e  $D'' \subset S'$  due aperti tali che le loro chiusure siano omeomorfe al disco chiuso  $\overline{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ . Allora  $D'$  e  $D''$  sono omeomorfi al disco aperto  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$  e il loro bordo è omeomorfo a  $S^1$ . Sia quindi  $\phi : \partial D' \rightarrow \partial D''$  un omeomorfismo fissato. La *somma connessa* di  $S$  e  $S'$  è definita come lo

spazio che si ottiene rimuovendo i due dischi aperti da  $S$  e  $S'$  ed incollando successivamente i bordi tramite la mappa  $\phi$  (si veda la Figura 2.1). Questa nuova superficie così ottenuta si indica con  $S\sharp S'$ . Formalmente, sia  $\sim$  la relazione che identifica ogni  $x \in \partial D'$  con la sua immagine  $\phi(x) \in \partial D''$ , allora

$$S\sharp S' = (S \setminus \partial D') \cup (S' \setminus \partial D'') / \sim .$$

Si può dimostrare che la definizione appena data non dipende dalle scelte fatte.

## 2.2 Classificazione delle superfici

**Teorema 2.2.1** (Van Dick). *Sia  $S$  una superficie connessa, compatta e orientabile. Vale una delle seguenti affermazioni:*

1.  $S \cong S^2$ , con  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ;
2. esiste  $g \geq 1$  tale che  $S \cong T_g = \underbrace{T\sharp \dots \sharp T}_g \text{ volte}$ , dove  $T$  è il toro  $S^1 \times S^1$ .

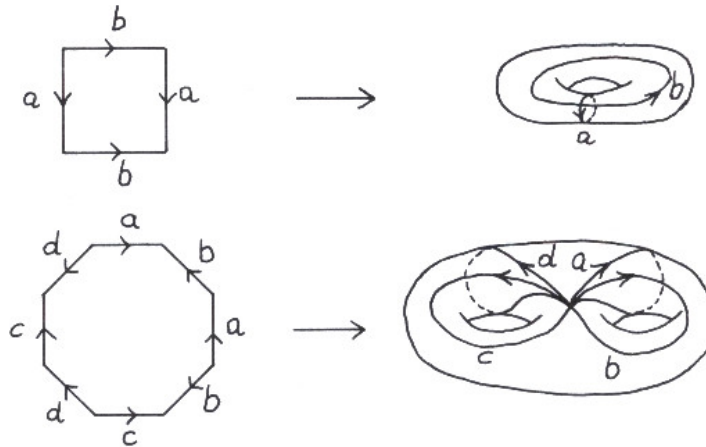


Figura 2.2: Il toro  $T$  e la somma connessa di due tori  $T_2$

Ogni superficie è quindi omeomorfa a  $S^2$  o a  $T_g$  per un  $g$  opportuno. Si veda la Figura 2.2 per una costruzione di  $T$  e  $T_2$ . Possiamo quindi dare le seguenti definizioni.

**Definizione 2.2.1.** Sia  $S$  una superficie, il *genere della superficie*  $S$   $g(S)$  è definito nel seguente modo:

$$g(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } S \cong S^2 \\ g & \text{se } S \cong T_g \end{cases}.$$

La *caratteristica di Eulero-Poincaré* di  $S$  è

$$\chi(S) = 2 - 2g(S).$$

*Osservazione 2.2.1.* Si può osservare che  $\chi(S^2) > 0$ ,  $\chi(T) = 0$  e  $\chi(T_g) < 0$  per  $g \geq 2$ .

*Esempio 2.2.1.* Forniamo ora alcuni importanti esempi di superfici riemanniane. I primi due saranno approfonditi nel Capitolo 3 e il terzo nel Capitolo 4.

- Il *piano euclideo*  $\mathbb{E}^2$  è la superficie riemanniana  $(\mathbb{R}^2, g_{\mathbb{E}^2})$  con tensore associato

$$g_{\mathbb{E}^2}((x, y), (x', y')) = xx' + yy'.$$

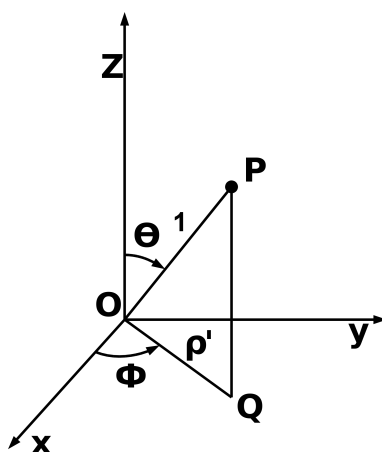


Figura 2.3: Le coordinate sferiche

- La *sfera*  $S^2$  è la superficie riemanniana  $(S^2, g_{S^2})$  con

$$g_{S^2}((\theta, \phi), (\theta', \phi')) = \theta\theta' + \phi\phi' \sin^2 \theta$$

dove  $\theta$  e  $\phi$  sono coordinate sferiche, vedi Figura 2.3. Si può passare dalle coordinate euclidee  $(x, y, z)$  alle coordinate sferiche  $(\theta, \phi)$  tramite le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \phi \\ y = \sin \theta \sin \phi \\ z = \cos \theta \end{cases}.$$

- Il *piano iperbolico*  $\mathbb{H}^2$  è una superficie riemanniana definita tramite diversi modelli. Uno di questi è il modello del disco di Poincaré  $(D, g_D)$ , con

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$$

e con

$$g_D = \left( \frac{2}{1 - z^2} \right)^2 \cdot g_{\mathbb{E}^2}$$

tensore associato. Nel Capitolo 4 approfondiremo lo studio di questo modello e vedremo anche il modello del semipiano  $(H, ds_H^2)$ .

**Proposizione 2.2.2.** *In una superficie riemanniana  $S$ , per ogni punto  $p \in S$  esiste un  $\epsilon > 0$  tale che il disco  $D_p(\epsilon)$  centrato in  $p$  di raggio  $\epsilon$  sia diffeomorfo al disco usuale in  $\mathbb{R}^2$ .*

L'area di questo disco  $D_p(\epsilon)$  non è però necessariamente uguale all'area di un disco euclideo: può essere più grande o più piccola. Possiamo utilizzare questa discrepanza per dare una definizione di *curvatura (gaussiana)*.

**Definizione 2.2.2.** Sia  $(S, g)$  una superficie. La *curvatura (gaussiana)* in un punto  $p$  è definita come

$$K_p = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( (\pi\epsilon^2 - \text{Vol}(D_p(\epsilon))) \cdot \frac{12}{\pi\epsilon^4} \right).$$

In altre parole, vale la formula

$$\text{Vol}(D_p(\epsilon)) = \pi\epsilon^2 - \frac{\pi\epsilon^4}{12} K_p + o(\epsilon^4).$$

Notiamo in particolare che  $K_p$  è positivo (nullo, negativo) se  $D_p(\epsilon)$  ha area più piccola (uguale, più grande) di quella usuale euclidea.

Come abbiamo visto, a ogni superficie  $S$  è associato un valore  $\chi(S) \in \mathbb{Z}$ . Il teorema di Gauss-Bonnet collega la curvatura alla caratteristica di Eulero di  $S$ .

**Teorema 2.2.3 (Gauss-Bonnet).** *Sia  $S$  una superficie compatta. Vale l'uguaglianza*

$$\int_S K_p = 2\pi\chi(S).$$

**Definizione 2.2.3.** Sia  $S$  una superficie riemanniana completa<sup>1</sup>, allora è detta

<sup>1</sup>Sia  $S$  una superficie, una successione  $\{x_n\} \subset S$  è una *successione di Cauchy* se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un numero  $N(\epsilon) > 0$  tale che  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  per ogni  $n, m > N(\epsilon)$ . In una superficie, ogni successione convergente è di Cauchy. Una varietà si dice *completa* se ogni successione di Cauchy è convergente.

- *ellittica* se ha curvatura costante 1;
- *piatta* se ha curvatura costante 0;
- *iperbolica* se ha curvatura costante -1.

**Teorema 2.2.4** (Killing-Hopf). [2, Teorema B.1.8.] *Una superficie semplicemente connessa ellittica, piatta o iperbolica è isomorfa a  $S^2$ ,  $\mathbb{E}^2$  o  $\mathbb{H}^2$ , rispettivamente.*

**Corollario 2.2.5** (Teorema di Uniformizzazione). *Se  $S$  è una superficie ellittica, piatta o iperbolica allora il rivestimento universale di  $S$  è  $X = S^2$ ,  $\mathbb{E}^2$  o  $\mathbb{H}^2$  e  $S = X/G$ , dove  $G$  è un gruppo di isometrie che agisce liberamente e in maniera propriamente discontinua su  $X$  chiamato gruppo di rivestimento universale e si ha che  $G \cong \pi_1(S)$ .*

Viceversa se  $G \subset \text{Iso}(X)$  agisce liberamente e in maniera propriamente discontinua, allora  $p : X \rightarrow X/G$  è un rivestimento e  $S = X/G$  è una superficie sferica, euclidea o iperbolica.

Da quanto detto finora studiare la classificazione delle superfici orientabili  $S$  a meno di isometrie corrisponde a studiare le classi dei sottogruppi  $G \subset \text{Iso}^+(X)$  che agiscono in maniera libera e propriamente discontinua a meno di coniugio. Usando questa corrispondenza, nei prossimi capitoli dimostreremo il seguente risultato.

**Teorema 2.2.6.** [2, Teorema B.3.1.]

1.  $S^2$  è l'unica superficie connessa, compatta e orientabile che ammette una struttura ellittica;
2.  $T$  è l'unica superficie connessa, compatta e orientabile che ammette una struttura piatta;
3. Per  $g \geq 2$ ,  $T_g$  ammette una struttura iperbolica.



# Capitolo 3

## Il piano euclideo e la sfera

In questo capitolo tratteremo le superfici ellittiche e piatte. Per ulteriori approfondimenti si vedano [3], [4], [6].

### 3.1 Il piano euclideo

In questa sezione ci occuperemo dello studio delle superfici piatte. Forniamo ora alcune definizioni e proprietà del piano euclideo  $\mathbb{E}^2$ .

**Definizione 3.1.1.** Il *piano euclideo*  $\mathbb{E}^2$  è la superficie riemanniana  $(\mathbb{R}^2, g_{\mathbb{E}^2})$  con tensore associato

$$g_{\mathbb{E}^2}((x, y), (x', y')) = xx' + yy'$$

(come visto nell'Esempio 2.2.1). La norma di  $(x, y)$  è

$$\|(x, y)\| = \sqrt{g_{\mathbb{E}^2}((x, y), (x, y))}.$$

**Proposizione 3.1.1.** *Siano  $x, y \in \mathbb{E}^2$ ,  $x \neq y$ , esiste un solo cammino che realizza la distanza tra  $x$  e  $y$  ed è il segmento che li unisce.*

Quindi le geodetiche in  $\mathbb{E}^2$  sono le rette e i segmenti.

**Definizione 3.1.2.** Una *circonferenza euclidea* è il luogo dei punti  $\{x \in \mathbb{E}^2 : \|x\| = r\}$  per un qualche  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Si può estendere la definizione di circonferenza euclidea considerando  $r = \infty$ ; in questo caso la circonferenza è una retta. Sono quindi circonferenze euclidee tutte le circonferenze e le rette del piano.

### 3.1.1 Isometrie di $\mathbb{E}^2$

Le isometrie del piano possono essere divise in quattro classi.

**Traslazioni** La *traslazione* di vettore  $v = (v_1, v_2)$  è data da

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Le traslazioni sono isometrie che conservano l'orientazione e non hanno punti fissi a meno che  $v$  non sia il vettore nullo, e in questo caso  $T_v = id_{\mathbb{E}^2}$ .

**Rotazioni** Sia  $O = (0, 0) \in \mathbb{E}^2$ , e consideriamo lo stabilizzatore  $\text{Iso}^+(\mathbb{E}^2)_O$  di  $O$  in  $\text{Iso}^+(\mathbb{E}^2)$ . Le isometrie appartenenti a  $\text{Iso}^+(\mathbb{E}^2)_O$  si dicono *rotazioni di centro  $O$*  e sono rappresentate da matrici appartenenti a  $SO_2(\mathbb{R})$ . Gli elementi di  $SO_2(\mathbb{R})$  sono matrici della forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e  $\theta \in \mathbb{R}$  è detto *angolo della rotazione*. Sia  $C \in \mathbb{E}^2$ , una rotazione di centro  $C$  e angolo  $\theta$  è data da

$$R_{C,\theta} = T_{\vec{OC}} \circ R_\theta \circ T_{\vec{CO}}$$

con  $R_\theta \in \text{Iso}^+(\mathbb{E}^2)_O$ , e  $T_{\vec{OC}}$  e  $T_{\vec{CO}}$  due traslazioni rispettivamente di vettori  $\vec{OC}$  e  $\vec{CO}$ .

**Riflessioni** Un'isometria  $\rho_r$  di  $\text{Iso}(\mathbb{E}^2)$  diversa dall'identità che fissa tutti i punti della retta  $r$  è detta *riflessione*. La retta  $r$  è l'*asse* della riflessione. La riflessione è involutoria, cioè coincide con la propria inversa. In particolare le riflessioni con asse passante per  $O$  si identificano con gli elementi di  $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ , perché fissano l'origine ma non sono rotazioni. Ognuna di esse è quindi rappresentata da una matrice

$$A_\theta = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

con  $\theta \in \mathbb{R}$ . In particolare si ha che

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



**Glissoriflessioni** Una *glissoriflessione* (o, equivalentemente, *glissosimmetria*, *antitraslazione*, *simmetria con scorrimento*) è un'isometria del piano euclideo che si ottiene da una riflessione  $\rho_s$  di asse  $s$  composta con una traslazione  $T_v \neq id_{\mathbb{E}^2}$  di vettore parallelo a  $s$ . In generale, la composizione di isometrie non gode della proprietà commutativa, ma il vincolo che  $s$  e  $v$  siano paralleli fa sì che  $(\rho_s \circ T_v)(x) = (T_v \circ \rho_s)(x) \forall x \in \mathbb{E}^2$ . Si può anche dimostrare che questo è l'unico caso in cui la composizione di una traslazione e una riflessione è commutativa. Le glissoriflessioni sono isometrie che rovesciano l'orientazione.

In generale una qualsiasi isometria del piano  $\mu$  (vista come composizione di riflessioni, traslazioni e rotazioni) si può rappresentare nella seguente maniera:

$$\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \quad A \in O_2(\mathbb{R})$$

**Definizione 3.1.3.** Siano  $(H, \cdot)$  e  $(K, *)$  gruppi e sia  $\tau : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  un omomorfismo. Si definisce *prodotto semidiretto* di  $(H, \cdot)$  e  $(K, *)$  secondo  $\tau$ , e si indica con  $H \rtimes_{\tau} K$ , il prodotto cartesiano  $H \times K$  dotato dell'operazione seguente:

$$(h, k) \star (h', k') = (h \cdot \tau(k)(h'), k * k').$$

**Proposizione 3.1.2.** Il gruppo delle isometrie del piano  $\text{Iso}(\mathbb{E}^2)$  è isomorfo a  $\mathbb{E}^2 \rtimes O_2(\mathbb{R})$ .

Enunciamo ora un lemma che servirà per dimostrare l'importante Teorema di Chasles.

**Lemma 3.1.3.** 1. Siano  $r$  una retta di  $\mathbb{E}^2$ ,  $C \in r$  un suo punto e  $R_{C,\theta}$  una rotazione di centro  $C$  e angolo  $\theta$ . Esistono rette  $s$  e  $t$  contenenti  $C$  tali che

$$R_{C,\theta} = \rho_r \circ \rho_s = \rho_t \circ \rho_r.$$

Viceversa, per ogni coppia di rette  $r$  e  $s$  passanti per un punto  $C$ , la composizione  $\rho_r \circ \rho_s$  è una rotazione di centro  $C$  e  $\rho_r \circ \rho_s = id_{\mathbb{E}^2}$  se e solo se  $r = s$ .

2. La composizione  $R_{C,\theta} \circ R_{D,\phi}$  di due rotazioni di centro i punti  $C$  e  $D$  e di angoli  $\theta$  e  $\phi$  rispettivamente, è una rotazione di angolo  $\phi + \theta$ , a meno che non si abbia  $\theta + \phi = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; in questo caso  $R_{C,\theta} \circ R_{D,\phi}$  è una traslazione, che è diversa dall'identità se e solo se  $C \neq D$ .
3. Se  $C$  e  $D$  sono due punti distinti ed  $r$  la retta che li contiene, e se le rotazioni  $R_{C,\theta}$  e  $R_{D,\phi}$  sono non banali e  $\theta + \phi \neq 2k\pi$ , allora le rotazioni  $R_{C,\theta} \circ R_{D,\phi}$  ed  $R_{C,-\theta} \circ R_{D,-\phi}$  hanno centri distinti e simmetrici rispetto a  $r$ .

**Teorema 3.1.4** (Chasles, 1831). *Un'isometria del piano euclideo che fissa un punto è una rotazione oppure una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria che non fissa alcun punto è una traslazione oppure una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa.*

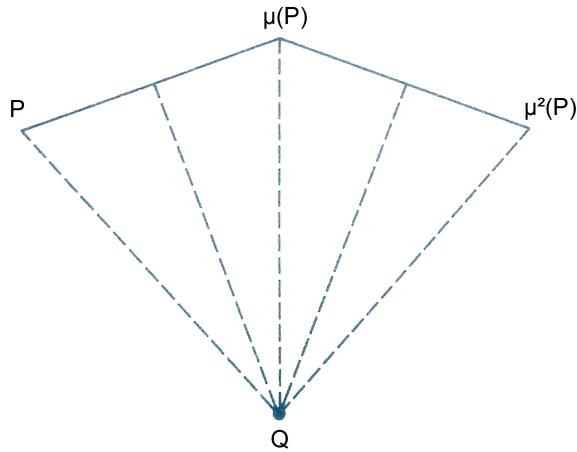


Figura 3.1

*Dimostrazione.* Se  $\mu \in \text{Iso}(\mathbb{E}^2)$  fissa un punto, il fatto che sia una riflessione o una rotazione segue dal Lemma 3.1.3. Supponiamo ora che  $\mu$  sia un'isometria che conserva l'orientazione priva di punti fissi. Allora anche  $\mu^2$  è priva di punti fissi, perché se si avesse  $P = \mu^2(P)$  per qualche  $P$ , il segmento  $P\mu(P)$  verrebbe trasformato da  $\mu$  nel segmento

$$\mu(P)P = \mu(P)\mu^2(P),$$

cioè nello stesso con gli estremi scambiati, e quindi il suo punto medio sarebbe fissato da  $\mu$ , il che non è possibile.

Per ogni  $P \in \mathbb{E}^2$  consideriamo i tre punti  $P, \mu(P), \mu^2(P)$  che sono distinti per quanto appena visto, e facciamo vedere che sono allineati. Se così non fosse (Figura 3.1) gli assi dei due segmenti  $P\mu(P)$  e  $\mu(P)\mu^2(P)$  si incontrerebbero in un punto  $Q$ : poiché  $d(P, \mu(P)) = d(\mu(P), \mu^2(P))$ , si avrebbe anche

$$d(Q, P) = d(Q, \mu(P)) = d(Q, \mu^2(P)).$$

Poiché  $\mu$  preserva l'orientazione, ne segue che il triangolo di vertici  $Q, \mu(P), \mu^2(P)$  viene trasformato da  $\mu$  nel triangolo di vertici  $Q, \mu(P), \mu^2(P)$ , e quindi  $Q =$

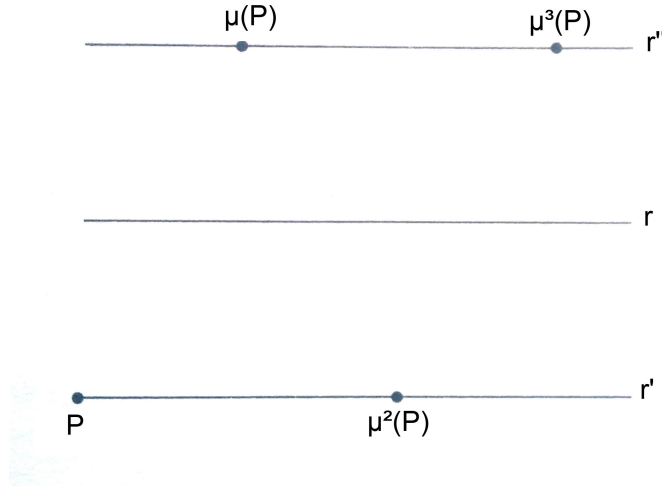


Figura 3.2

$\mu(Q)$ , una contraddizione. Ne segue che i punti  $P, \mu(P), \mu^2(P), \dots, \mu^i(P), \dots$  sono allineati, sicché  $\mu$  agisce sulla retta che li contiene come traslazione. Poiché è un'isometria che conserva l'orientazione,  $\mu$  deve agire come la stessa traslazione su tutto il piano, e quindi è una traslazione.

Supponiamo infine che  $\mu$  sia un'isometria che rovescia l'orientazione priva di punti fissi. Allora  $\mu^2$  è un'isometria che conserva l'orientazione e, ragionando come nel caso precedente, si dimostra che  $\mu^2 = T_v$  per qualche vettore  $v$ . Consideriamo un punto  $P \in \mathbb{E}^2$  qualsiasi: le rette  $r' = \overline{P\mu^2(P)}$  e  $r'' = \overline{\mu(P)\mu^3(P)}$  sono parallele (ma non necessariamente distinte) e vengono scambiate da  $\mu$ . Quindi  $\mu$  trasforma in sé stessa la retta  $r$  parallela a  $r'$  e  $r''$  ed equidistante da esse (Figura 3.2). Ma allora, poiché  $\mu^2$  agisce su  $r$  come la traslazione  $T_v$ ,  $\mu$  agisce su  $r$  come la traslazione  $T_{v/2}$ . La composizione  $T_{-v/2} \circ \mu$  fissa quindi tutti i punti di  $r$  e perciò, non essendo l'identità perché è un'isometria che rovescia l'orientazione, essa è una riflessione. Da ciò segue che  $\mu = T_{v/2} \circ (T_{-v/2} \circ \mu)$  è una glissoriflessione.  $\square$

**Proposizione 3.1.5.** *Sia  $G$  un sottogruppo discreto di  $\text{Iso}^+(\mathbb{E}^2)$ . Allora vale una delle seguenti affermazioni:*

1.  $G = \{id_{\mathbb{E}^2}\}$ .
2.  $G$  è generato da  $T_v$  con  $v$  vettore non nullo, in tal caso  $G$  contiene solo traslazioni di vettori tra loro collineari (giacenti sulla stessa retta); scriveremo  $G = \langle T_v \rangle$ .

3.  $G$  è generato da  $T_v$  e  $T_u$  con  $u, v$  vettori non nulli linearmente indipendenti, in tal caso  $G$  contiene anche traslazioni di vettori tra loro non collineari; scriveremo  $G = \langle T_v, T_u \rangle$ .

Possiamo ora dimostrare il secondo punto del Teorema 2.2.6.

**Teorema 3.1.6.** *L'unica superficie connessa, compatta e orientabile piatta è  $T$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $R$  una superficie piatta, connessa e orientabile, allora, per il Corollario 2.2.5,  $R = \mathbb{E}^2/G$ , dove  $G$  è un sottogruppo discreto di  $\text{Iso}^+(\mathbb{E}^2)$ . Per la Proposizione 3.1.5 si ha che  $G = \{id_{\mathbb{E}^2}\}$ ,  $G = \langle T_v \rangle$  oppure  $G = \langle T_v, T_u \rangle$  ( $u, v$  vettori non nulli).

1. Se  $G = \{id_{\mathbb{E}^2}\}$ , allora  $R = \mathbb{E}^2$ .
2. Se  $G = \langle T_v \rangle$ , allora  $R$  è un cilindro, che è una superficie non compatta.
3. Infine se  $G = \langle T_v, T_u \rangle$ , allora  $R$  è un toro (Figura 2.2).

Si ha quindi che l'unica superficie piatta compatta, connessa e orientabile è il toro  $T$ . □

## 3.2 La sfera

In questa sezione mostreremo che l'unica superficie ellittica è  $S^2$ . Innanzitutto richiamiamo la definizione di sfera (vedi l'Esempio 2.2.1).

**Definizione 3.2.1.** La *sfera*  $S^2$  è la superficie riemanniana  $(S^2, g_{S^2})$  con

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

e con

$$g_{S^2}((\theta, \phi), (\theta', \phi')) = \theta\theta' + \phi\phi' \sin^2 \theta$$

dove  $\theta$  e  $\phi$  sono coordinate sferiche.

Si può verificare che tale metrica coincide con quella indotta dalla metrica di  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 3.2.1.** *Siano  $x, y \in S$ . Se  $y \neq -x$ , esiste un solo cammino che realizza la distanza da  $x$  a  $y$  ed è l'arco dell'unica circonferenza massima passante per  $x$  e  $y$ . Se  $y = -x$  i cammini che realizzano la distanza da  $x$  a  $-x$  sono le semicirconferenze massime di estremi  $x$  e  $-x$ .*

Le geodetiche sulla sfera sono quindi le circonferenze di raggio massimo e gli archi di circonferenza massima.

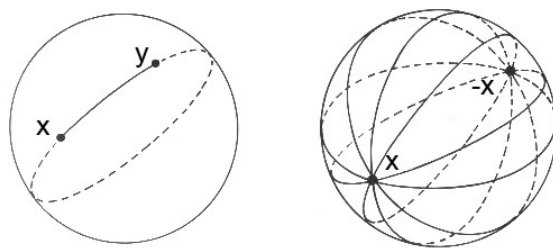


Figura 3.3: Le geodetiche nella sfera

### 3.2.1 Isometrie di $S^2$

Siccome la metrica su  $S^2$  è indotta dalla metrica euclidea, allora anche  $\text{Iso}(S^2)$ , il gruppo delle isometrie di  $S^2$ , è un sottoinsieme di  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$ . In particolare coincide con l'insieme degli elementi di  $\text{Iso}(\mathbb{R}^3)$  che fissano  $S^2$ , cioè

$$\text{Iso}(S^2) = \{f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^3) : f(S^2) = S^2\}.$$

**Proposizione 3.2.2.** *Il gruppo  $\text{Iso}(S^2)$  è isomorfo a  $O_3(\mathbb{R})$ , il gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3. Il gruppo  $\text{Iso}^+(S^2)$  è isomorfo a  $SO_3(\mathbb{R})$ , il gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3 con determinante 1.*

A ogni  $\mu \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$  è associato:

- un'unica retta  $d$  tale che  $\mu(P) = P \forall P \in d$ , chiamata *asse* di  $\mu$ ;
- un unico angolo  $\theta \in ]0, \pi]$  tale che  $\mu$  ristretta a un piano ortogonale a  $d$  è una rotazione di angolo  $\theta$ .

Se l'angolo  $\theta$  vale  $\pi$ , allora  $\mu$  si indica con  $\sigma_d$ .

Mostriamo ora che  $S^2$  è l'unica superficie ellittica.

**Teorema 3.2.3.** *[3, Teorema 8.5.1] Il gruppo  $SO_3(\mathbb{R})$  è semplice, cioè non ammette alcun sottogruppo diverso da quello banale.*

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che dato  $G \subset SO_3(\mathbb{R})$ , sottogruppo proprio diverso da quello banale, esiste una retta  $d$  tale che  $\sigma_d \in G$ ; infatti se  $g \in G$ ,  $g = \sigma_d$  e  $\mu \in SO_3(\mathbb{R})$ , allora  $\mu g \mu^{-1} = \sigma_{\mu(d)}$  appartiene ancora a  $G$ . È possibile dimostrare che l'azione di  $SO_3(\mathbb{R})$  è transitiva sulle basi ortonormali orientate positivamente, cioè date due basi ortonormali orientate positivamente, è sempre possibile trovare una matrice di  $SO_3(\mathbb{R})$  che

trasforma l'una nell'altra. Da ciò segue che  $SO_3(\mathbb{R})$  è transitivo sulle rette di  $\mathbb{R}^3$  e quindi per ogni retta  $r$  esiste  $\mu \in G$  tale che  $\mu(d) = r$ , dunque  $\sigma_r \in G \forall$  retta  $r$ . Inoltre si può mostrare che  $\forall \mu \in SO_3(\mathbb{R})$ , esistono una, due o tre rette  $r_i$ , con  $i = 1, 2, 3$  tali che  $\mu$  è il prodotto delle  $\sigma_{r_i}$ , quindi preso un qualsiasi  $\mu \in SO_3(\mathbb{R})$ , esisteranno al più tre rette  $r_i$  tali che  $\mu = \sigma_{r_1}\sigma_{r_2}\sigma_{r_3}$  e quindi  $\mu \in G$ . Si ha quindi che  $G = SO_3(\mathbb{R})$ .

Sia  $\mu \in G$ ,  $\mu \neq id_{\mathbb{E}^3}$ ; esiste dunque una retta  $s$  e una rotazione di asse  $s$  e di angolo  $\theta \in (0, \pi)$  (se  $\theta = \pi$ ,  $\mu = \sigma_s$ ). Siccome  $\mu^n \in G, n \in \mathbb{N}$ , allora esiste  $n$  tale che  $n\theta \in [\pi/2, \pi[$ ; possiamo dunque supporre che  $\theta \in ]\pi/2, \pi[$ . Allora esiste una retta  $d$  tale che le due rette  $d$  e  $\mu(d)$  siano ortogonali. Per vederlo prendiamo degli assi di coordinate  $\{s, t, z\}$  di  $\mathbb{E}^3$ , dove  $s$  è l'asse di  $\mu$  orientato,  $t$  è una qualunque retta orientata ortogonale a  $s$  e  $z = \mu(t)$ . Quando la retta  $d$  varia nel piano di assi  $s$  e  $t$  da  $t$  a  $s$  l'angolo tra  $d$  e  $\mu(d)$  varia da  $\theta > \pi/2$  a 0, dunque a un certo punto assume valore  $\pi/2$ . Poniamo allora  $g = \sigma_d$  e

$$h = g\mu g\mu^{-1};$$

pertanto  $h$  applicata a  $\mu(d)$  vale

$$\mu(d) \ni m \xrightarrow{\mu^{-1}} \mu^{-1}(m) \xrightarrow{g^{-1}} \mu^{-1}(m) \xrightarrow{\mu} m \xrightarrow{g} -m \in \mu(d).$$

Ciò significa che  $h|_{\mu(d)} = -id_{\mu(d)}$  e quindi  $h = \sigma_l$ , con  $l$  retta ortogonale a  $\mu(d)$ .  $\square$

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il primo punto del Teorema 2.2.6.

**Teorema 3.2.4.** *L'unica superficie connessa, compatta e orientabile ellittica è la sfera.*

*Dimostrazione.* Sia  $R$  una superficie che ammette una struttura ellittica. Allora per il Corollario 2.2.5  $R = S^2/G$ , dove  $G \subset \text{Iso}^+(S^2)$  agisce in maniera libera, cioè  $\forall g \in G, g$  non banale,  $g(x) \neq x \forall x \in S^2$ . Ma per il Teorema 3.2.3  $G$  è il sottogruppo banale, quindi  $R = S^2$ .  $\square$

# Capitolo 4

## Il piano iperbolico

In questo capitolo ci occuperemo del piano iperbolico; per ulteriori referenze si veda [2], [5], [7].

### 4.1 Modelli del piano iperbolico

È possibile fornire modelli differenti per descrivere il *piano iperbolico*, che indicheremo con  $\mathbb{H}^2$ ; questi modelli sono isometricamente diffeomorfi l'un l'altro. Noi siamo interessati in particolare a quello del disco e a quello del semipiano.

**Il disco di Poincaré** Il primo modello per  $\mathbb{H}^2$  è  $(D, g_D)$ , con

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$$

il disco centrato nello zero di  $\mathbb{C}$  di raggio unitario e

$$g_D = \left( \frac{2}{1 - z^2} \right)^2 \cdot g_{\mathbb{E}^2}$$

la metrica riemanniana associata (come visto nell'Esempio 2.2.1). Il bordo di  $D$  è la circonferenza  $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ . Le geodetiche in  $D$  sono gli archi di circonferenza ortogonali al bordo e i diametri del disco, come mostrato in Figura 4.1. Questo modello si dice conforme perché l'ampiezza degli angoli rispetto alla metrica euclidea è uguale a quella calcolata rispetto alla metrica iperbolica.

**Il semipiano di Poincaré** Un altro modello per  $\mathbb{H}^2$  è  $(H, g_H)$ , dove

$$H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$$

è il semipiano superiore di  $\mathbb{C}$ , mentre

$$g_H = \frac{1}{y^2} \cdot g_{\mathbb{E}^2}$$

è la metrica Riemanniana associata. Come bordo di  $H$  si considera la compattificazione di Alexandroff (vedi Definizione 1.1.3) della retta reale per avere una corrispondenza con  $\partial D$ , cioè  $\partial H = \{y = 0\} \cup \{\infty\}$ . Le geodetiche in  $H$  sono le rette verticali e le semicirconferenze ortogonali a  $\partial H$  (vedi Figura 4.1). Anche questo modello è conforme.

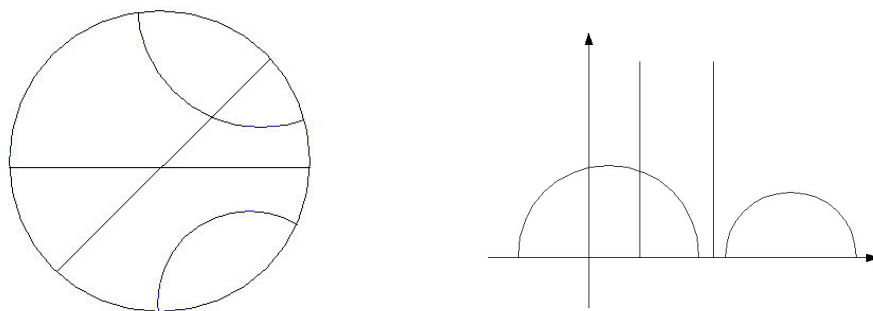


Figura 4.1: Le geodetiche nel modello del disco e nel modello del semipiano

Un esempio di diffeomorfismo tra  $D$  e  $H$  è il seguente

$$g : D \rightarrow H \quad z \mapsto 2 \frac{z + i}{\|z + i\|^2} - i.$$

*Osservazione 4.1.1.* È possibile utilizzare lo stesso simbolo  $\rho(z, w)$  per indicare la distanza tra i punti  $z$  e  $w$  in  $D$  o  $H$  mediante

$$\rho(z, w) = \log \left( \frac{1 + \tau(z, w)}{1 - \tau(z, w)} \right),$$

dove

$$\tau(z, w) = \left\| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right\|, \quad \tau(z, w) = \left\| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right\|$$

rispettivamente in  $D$  e  $H$ .

Esistono altri due modelli che descrivono il piano iperbolico: il *modello dell'iperboloide* e il *modello proiettivo*. Anche questi modelli sono isometricamente diffeomorfi a  $D$  e  $H$ , ma non saranno trattati in questa tesi. In generale indicheremo con  $\mathbb{H}^2$  un modello qualsiasi del piano iperbolico. Indicheremo con  $\overline{\mathbb{H}^2}$  la chiusura del piano iperbolico:  $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ .



## 4.2 Le isometrie del piano iperbolico

In questa sezione studiamo le isometrie del piano iperbolico. Iniziamo fornendo la seguente definizione.

**Definizione 4.2.1.** Una *trasformazione di Möbius* è una funzione  $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , con  $\hat{\mathbb{C}}$  è la compattificazione di Alexandroff di  $\mathbb{C}$ , tale che

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Valgono in particolare le seguenti relazioni:

- $\phi(-\frac{d}{c}) = \frac{ad-bc}{0} = \infty$
- $\phi(-\frac{b}{a}) = \frac{0}{-cb+ad} = 0$
- $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$ .

Ogni trasformazione di Möbius può essere rappresentata tramite una matrice di ordine 2 a coefficienti in  $\mathbb{C}$  con determinante diverso da 0, e ogni matrice di questo genere determina una trasformazione di Möbius. Denotiamo l'insieme delle trasformazioni di Möbius con  $\text{Möb}(\mathbb{C})$ .

**Proposizione 4.2.1.** Sia  $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$  il gruppo  $GL_2(\mathbb{C})/\sim$ , dove  $A \sim B \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*$  tale che  $A = \lambda B \quad \forall A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ . Allora  $\text{Möb}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}GL_2(\mathbb{C})$ .

Siamo interessati alle trasformazioni di Möbius che lasciano  $\mathbb{H}^2$  invariato.

**Proposizione 4.2.2.** 1. Le trasformazioni di Möbius che lasciano  $D$  invariato sono della forma

$$z \mapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad \|a\|^2 - \|c\|^2 = 1$$

dove  $\bar{x}$  indica il coniugato di  $x$ .

2. Le trasformazioni che lasciano  $H$  invariato sono della forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

**Teorema 4.2.3.** Un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  che preserva l'orientazione è una trasformazione di Möbius che lascia  $\mathbb{H}^2$  invariato, cioè  $\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2) = \{\phi \text{ trasformazione di Möbius} : \phi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2\}$ . In particolare se  $\mathbb{H}^2 = H$  allora  $\text{Iso}^+(H) = SL_2(\mathbb{R})/\pm I = \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R})$ , dove  $SL_2(\mathbb{R})$  è il gruppo delle matrici reali di ordine 2 con determinante 1 e  $I$  è la matrice identità.

Esistono tre classi di isometrie che preservano l'orientazione del piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$ , cioè le *isometrie iperboliche*, le *isometrie paraboliche* e le *isometrie ellittiche*. È possibile definirle in diversi modi.

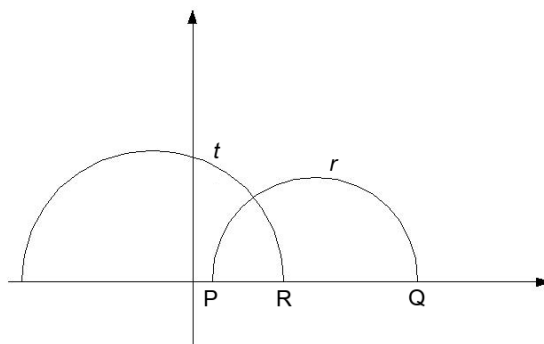


Figura 4.2

### 4.2.1 Isometrie in termini di punti fissi

**Teorema 4.2.4** (di Brouwer o del punto fisso). *Sia  $D^2 \subset \mathbb{C}$  il disco chiuso. Ogni mappa  $f : D^2 \rightarrow D^2$  ammette almeno un punto fisso  $x$  (cioè tale che  $f(x) = x$ ).*

Grazie a questo importante teorema è possibile dimostrare la seguente proposizione, che permette di classificare le isometrie di  $\mathbb{H}^2$  in termini di punti fissi.

**Proposizione 4.2.5.** *Sia  $\mu$  un'isometria di  $\mathbb{H}^2$ . Allora vale uno (e uno solo) dei fatti seguenti:*

1.  $\mu$  non ha punti fissi in  $\mathbb{H}^2$  e ne ha esattamente due in  $\partial\mathbb{H}^2$ ;
2.  $\mu$  ha almeno un punto fisso in  $\mathbb{H}^2$ ;
3.  $\mu$  non ha punti fissi in  $\mathbb{H}^2$  e ne ha esattamente uno in  $\partial\mathbb{H}^2$ .

*Un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  si dice iperbolica nel primo caso, ellittica nel secondo, parabolica nel terzo.*

*Dimostrazione.* Si può dimostrare che ogni isometria  $\mu : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  si estende ad un unico omeomorfismo  $\overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ . Poiché  $\mathbb{H}^2$  è omeomorfo al disco chiuso, il teorema del punto fisso di Brouwer garantisce l'esistenza di un punto fisso per  $\mu$ . Ci resta solo da mostrare che se non ci sono punti fissi in  $\mathbb{H}^2$  allora i punti fissi al bordo sono al massimo due. Supponiamo per assurdo che siano almeno tre:  $P, Q, R$ . Un'isometria che fissa due punti al bordo fissa anche l'unica geodetica che collega i due punti. Quindi  $\mu$  fissa la geodetica  $r$  che collega  $P$  e  $Q$ . D'altra parte è facile vedere che fra le infinite

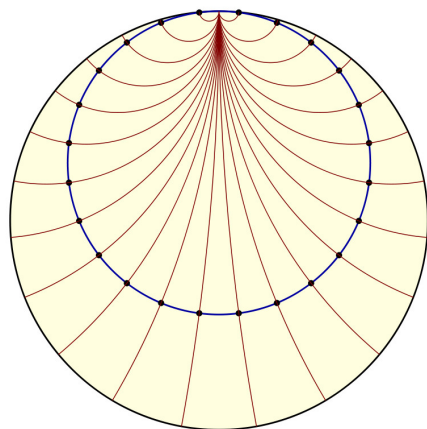


Figura 4.3: Un orociclo in  $D$  centrato in  $P$  è una circonferenza tangente internamente a  $D$  in  $P$ .

geodetiche che passano per  $R$  ce n'è una sola  $t$  ortogonale a  $r$  (vedi Figura 4.2). L'isometria fissa  $R$  e quindi deve fissare anche  $t$ . In particolare fissa il punto di intersezione  $r \cap t$  e ciò è assurdo.  $\square$

Osserviamo ora le tre diverse tipologie di isometrie maggiormente nel dettaglio. Per fare questo diamo le seguenti definizioni.

**Definizione 4.2.2.** Sia  $P$  un punto di  $\partial\mathbb{H}^2$ . Un *orociclo* centrato in  $P$  è una circonferenza ortogonale a tutte le geodetiche uscenti da  $P$ .

**Definizione 4.2.3.** Data  $C$  una circonferenza euclidea, due punti  $z$  e  $z'$  ( $\notin C$ ) sono *punti opposti* rispetto a  $C$  se e solo se ogni circonferenza euclidea passante per  $z$  e  $z'$  è ortogonale a  $C$ .

**Le isometrie iperboliche di  $\mathbb{H}^2$**  Un'isometria iperbolica  $\mu$  ha due punti fissi distinti su  $\partial\mathbb{H}^2$ . Esiste una e una sola geodetica che collega i punti fissi, ed è chiamata *asse*  $\mathcal{A}_\mu$  di  $\mu$ .

**Le isometrie ellittiche di  $\mathbb{H}^2$**  Un'isometria ellittica  $\mu$  ha due punti fissi  $\alpha$  e  $\beta$ , con  $\alpha \in \mathbb{H}^2$ ,  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{H}^2$  e  $\alpha$  e  $\beta$  punti opposti rispetto a  $\partial\mathbb{H}^2$  (se  $\mathbb{H}^2 = H$  allora  $\beta = \bar{\alpha}$ ; se  $\mathbb{H}^2 = D$  allora  $\beta = 1/\bar{\alpha}$ ). Ogni circonferenza che ha  $\alpha$  e  $\beta$  come punti opposti è invariante per  $\mu$  in  $D$ . Infatti gli elementi di  $D$  fissati da  $\mu$  sono le circonferenze di centro  $\alpha$  poiché  $\mu$  ruota  $D$  intorno al punto  $\alpha$ .

**Le isometrie paraboliche di  $\mathbb{H}^2$**  Un'isometria parabolica  $\mu$  ha esattamente un punto fisso  $\zeta \in \partial\mathbb{H}^2$ . Possiamo pensare a  $\mu$  come al caso limite

di entrambi i due tipi precedenti di isometrie quando i due punti fissi si sovrappongono, e per questo motivo le isometrie paraboliche vengono chiamate anche "rotazioni limite". Gli orocicli centrati in  $\zeta$  sono invarianti per  $\mu$ .

*Esempio 4.2.1.* Forniamo ora un esempio di isometria per ogni tipo.

1.  $f_k : H \rightarrow H$   $f_k(x) = kx$  tale che  $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  è un'isometria iperbolica che fissa i punti  $0$  e  $\infty$ . Si tratta di una dilatazione (se  $k > 1$ ) o di una contrazione (se  $k < 1$ ) sul semipiano di Poincaré  $H$ .
2.  $f_h : D \rightarrow D$   $f_h(x) = hx$  tale che  $h \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\|h\| = 1$  è un'isometria ellittica che fissa il punto  $0$ . Si tratta di una rotazione di centro  $0$  in  $D$ .
3.  $f_a : H \rightarrow H$   $f_a(x) = x + a$  tale che  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  è un'isometria iperbolica che fissa il punto  $\infty$ . Si tratta di una traslazione di vettore orizzontale sul semipiano  $H$ .

**Proposizione 4.2.6.** *Ogni isometria  $\mu \in \text{Iso}(\mathbb{H}^2)$  iperbolica (rispettivamente ellittica o parabolica) è coniugata tramite una mappa di Möbius ad un'isometria di tipo  $f_k$  (rispettivamente  $f_h$  o  $f_a$ ) presentata nell'Esempio 4.2.1, cioè esiste una trasformazione di Möbius  $\phi$  tale che  $\mu = \phi^{-1} \circ f_k \circ \phi$  (rispettivamente  $\mu = \phi^{-1} \circ f_h \circ \phi$  o  $\mu = \phi^{-1} \circ f_a \circ \phi$ ).*

## 4.2.2 Isometrie in termini di traccia della matrice associata

Ricordando che  $\text{Iso}(\mathbb{H}^2) \cong SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ , la classificazione delle isometrie si può effettuare anche basandosi sul calcolo della traccia della matrice che le rappresenta.

**Proposizione 4.2.7.** *Sia  $\mu \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$  rappresentata dalla matrice  $A \in SL(2, \mathbb{R})$ :*

1. se  $|tr(A)| > 2$ , allora  $\mu$  è iperbolica;
2. se  $|tr(A)| < 2$ , allora  $\mu$  è ellittica;
3. se  $|tr(A)| = 2$ , allora  $\mu$  è parabolica

dove  $tr(A)$  indica la traccia di  $A$ .

### 4.2.3 Isometrie come composizione di riflessioni

Un altro metodo per determinare il tipo di isometria è basato sull'idea della riflessione rispetto ad una geodetica iperbolica.

**Definizione 4.2.4.** Sia  $C$  una circonferenza euclidea. La *riflessione* (o *inversione*) *iperbolica* rispetto a  $C$  è la mappa  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $z \mapsto z'$  che porta  $z$  nel suo punto opposto  $z'$  estesa naturalmente a  $C$  fissando  $C$ . La indichiamo con  $R_C$  e  $C$  si dice *asse* della riflessione. Se  $C = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = r\}$ , allora  $R_C$  è la trasformazione di Möbius di equazione

$$z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z}}.$$

Si noti che come trasformazione di Möbius,  $R_C$  manda le circonferenze in circonferenze e preserva l'ortogonalità. Inoltre se  $z$  e  $z'$  sono punti opposti rispetto a  $C$ , allora, per ogni trasformazione di Möbius  $\phi$ , i punti  $\phi(z)$  e  $\phi(z')$  sono punti opposti rispetto a  $\phi(C)$ .

**Definizione 4.2.5.** La *riflessione rispetto alla geodetica iperbolica*  $\gamma$  è la riflessione rispetto all'unica circonferenza euclidea che contiene  $\gamma$ , e  $\gamma$  è detta *asse* della riflessione.

**Proposizione 4.2.8.** *La riflessione rispetto a una geodetica è un'isometria che inverte l'orientazione di  $\mathbb{H}^2$ ; in particolare la composizione di due riflessioni è un'isometria che preserva l'orientazione di  $\mathbb{H}^2$ .*

Descriviamo ora la classificazione delle isometrie in termini di composizione di due riflessioni.

**Le isometrie iperboliche di  $\mathbb{H}^2$**  Cominciamo con un esempio. Consideriamo le due geodetiche  $\alpha$  e  $\beta$  in  $H$  date rispettivamente dalle circonferenze di equazione  $\|z\| = r_\alpha$  e  $\|z\| = r_\beta$ . Allora si ha che

$$R_\beta \circ R_\alpha = \left( \frac{r_\beta}{r_\alpha} \right)^2 z$$

che è della forma  $z \mapsto kz$ . Questa è un'isometria iperbolica con l'asse lungo l'asse immaginario (che è l'unica circonferenza euclidea ortogonale a  $\alpha$  e  $\beta$ ). Inoltre se  $z$  giace su questo asse allora

$$\rho(R_\beta R_\alpha(z), z) = 2 \log(r_\beta/r_\alpha) = 2d(\alpha, \beta)$$

dove  $d(\alpha, \beta)$  è la distanza iperbolica tra le geodetiche  $\alpha$  e  $\beta$ .

Siccome ogni isometria iperbolica è coniugata a un'isometria della forma  $z \mapsto kz$  che agisce su  $H$ , questo esempio è piuttosto generale. Cioè

se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due geodetiche qualsiasi in  $\mathbb{H}^2$  le cui chiusure in  $\overline{\mathbb{C}}$  sono disgiunte, allora  $R_\alpha \circ R_\beta$  è un'isometria iperbolica con l'asse lungo l'unica circonferenza euclidea ortogonale sia a  $\alpha$  che  $\beta$ . Inoltre l'uguaglianza  $\rho(R_\beta R_\alpha(z), z) = 2d(\alpha, \beta)$  rimane valida anche nel caso più generale, poiché i due termini sono invarianti per le isometrie di  $\mathbb{H}^2$ .

Infine vale anche il viceversa. Data una qualsiasi isometria iperbolica  $\mu$  con asse  $\gamma$ , sia  $d = \rho(\mu(z), z)$ , dove  $z \in \gamma$ . Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due geodetiche qualsiasi ortogonali a  $\gamma$  e a distanza  $\frac{1}{2}d$  (misurata lungo  $\gamma$ ). Allora  $\mu$  è  $R_\beta \circ R_\alpha$  oppure  $R_\alpha \circ R_\beta$ , in base all'etichettatura di  $\alpha$  e  $\beta$ , cioè l'insieme  $\{\mu, \mu^{-1}\}$  coincide con  $\{R_\beta \circ R_\alpha, R_\alpha \circ R_\beta\}$ .

**Le isometrie ellittiche di  $\mathbb{H}^2$**  Innanzitutto siano  $\alpha$  e  $\beta$  due diametri in  $D$ . Allora la riflessione iperbolica rispetto a ogni diametro coincide con la riflessione euclidea, in questo modo la composizione  $R_\alpha \circ R_\beta$  è una rotazione euclidea intorno all'origine, e quindi anche una rotazione iperbolica intorno all'origine. Siccome ogni isometria ellittica è coniugata a una mappa della forma  $R_\alpha \circ R_\beta$ , si può notare che la composizione di due riflessioni rispetto una qualsiasi coppia di geodetiche incidenti (in  $\mathbb{H}^2$ ) è un'isometria ellittica, e che ogni isometria ellittica può essere espressa in questa forma.

**Le isometrie paraboliche di  $\mathbb{H}^2$**  Questo caso è simile al precedente, eccetto che qui le due geodetiche  $\alpha$  e  $\beta$  hanno in comune un estremo in  $\partial\mathbb{H}^2$ . Un caso particolare si ha quando  $\mathbb{H}^2 = H$ , e le due geodetiche terminano in  $\infty$  (e quindi sono rette verticali in  $\mathbb{C}$ ). In questo caso la composizione delle riflessioni è la traslazione  $z \mapsto z + a$ , dove  $a \in \mathbb{R}$ . Inoltre, ogni isometria parabolica è coniugata a una mappa di questo tipo (per un  $a$  adeguato), quindi la descrizione appena fornita corrisponde alla descrizione del caso generale dell'isometria parabolica.

Riassumiamo quanto detto nel seguente teorema.

**Teorema 4.2.9.** *Siano  $\alpha, \beta$  due geodetiche distinte. Allora:*

- $\alpha \cap \beta = \emptyset$  in  $\overline{\mathbb{H}^2} \Rightarrow R_\alpha \circ R_\beta$  è iperbolica;
- $\alpha \cap \beta = \{P\} \in \mathbb{H}^2 \Rightarrow R_\alpha \circ R_\beta$  è ellittica;
- $\alpha \cap \beta = \{P\} \in \partial\mathbb{H}^2 \Rightarrow R_\alpha \circ R_\beta$  è parabolica.

#### 4.2.4 Isometrie classificate geometricamente

Un'ultima classificazione dell'isometria  $\mu$  è possibile farla osservando le posizioni reciproche della bisettrice dell'angolo  $(x, \mu(x), \mu^2(x))$  e dell'asse del segmento  $[\mu(x), \mu^2(x)]$ , con  $x$  punto non fissato da  $\mu$ .

**Proposizione 4.2.10.** *Sia  $\mu$  un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  che mantiene l'orientazione diversa dall'identità, sia  $x$  un punto che non viene fissato da  $\mu$ , e siano  $l$  e  $l'$  rispettivamente la bisettrice dell'angolo  $(x, \mu(x), \mu^2(x))$  e l'asse del segmento  $\overline{\mu(x), \mu^2(x)}$ . Allora valgono le seguenti affermazioni (si veda la Figura 4.4):*

1. se  $l \cap l' = \emptyset$  in  $\overline{\mathbb{H}^2}$ ,  $\mu$  è iperbolica;
2. se  $l \cap l' = \{P\}$  con  $P \in \mathbb{H}^2$ ,  $\mu$  è ellittica;
3. se  $l \cap l' = \{P\}$  con  $P \in \partial\mathbb{H}^2$ ,  $\mu$  è parabolica.

### 4.3 Metriche iperboliche

Possiamo ora dimostrare il terzo punto del Teorema 2.2.6:

**Teorema 4.3.1.** *Per  $g \geq 2$ ,  $T_g$  ammette una struttura iperbolica.*

*Dimostrazione.* Abbiamo visto che per il Teorema 2.2.1 ogni superficie compatta, connessa e orientabile può essere identificata con  $S^2$  o con  $T_g$  per un  $g$  opportuno. Nel Capitolo 3 abbiamo dimostrato che l'unica superficie ellittica è  $S^2$  e che l'unica superficie piatta è  $T$ . Di conseguenza le superfici iperboliche devono essere le somme connesse di  $g$  tori  $T_g$ , con  $g \geq 2$ .  $\square$

Vediamo ora quali sono i gruppi di isometrie  $G$  che agiscono in maniera libera e propriamente discontinua su  $\mathbb{H}^2$  (per approfondimenti si veda [7]).

**Definizione 4.3.1.** Un *gruppo Fuchsiano*  $G$  è un gruppo discreto di isometrie del piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$ .

Per la Proposizione 1.3.3 un gruppo Fuchsiano agisce in maniera propriamente discontinua. Per far sì che l'azione sia libera il gruppo deve essere privo di elementi ellittici. In particolare per avere superfici compatte il gruppo deve essere privo anche di elementi parabolici; in caso contrario si ha una cuspidale (Figura 4.5). Vale infatti il seguente teorema.

**Teorema 4.3.2.** *Sia  $R$  una superficie riemanniana compatta,  $R = \mathbb{H}^2/G$ . Allora il gruppo  $G$  contiene solo l'identità ed elementi iperbolicici.*

Le possibili metriche che si possono mettere su una superficie iperbolica corrispondono quindi ai gruppi Fuchsiani aventi solo elementi iperbolicici, a meno di coniugio.

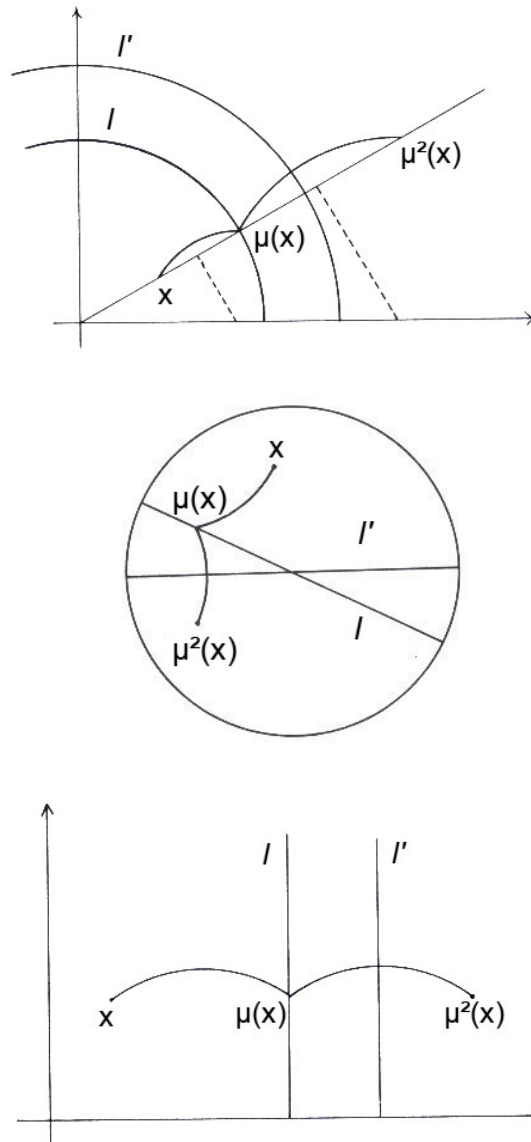


Figura 4.4: Classificazione geometrica delle isometrie: il caso iperbolico, ellittico e parabolico



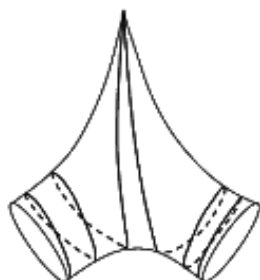


Figura 4.5: Cuspide

**Definizione 4.3.2.** Due diffeomorfismi  $\phi_0$  e  $\phi_1$  di  $M$  su sé stesso sono detti *isotopi* se esiste un diffeomorfismo

$$\varphi : M \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$$

tale che  $\varphi(x, t) = (\phi_t(x), t) \forall x, t$ .

**Definizione 4.3.3.** Lo spazio di Teichmüller di  $T_g$  è lo spazio delle metriche iperboliche su  $T_g$ , viste a meno di isometrie isotope all'identità ed è indicato con  $\text{Teich}(T_g)$ .

Un sistema di riferimento in questo contesto è dato da  $3g-3$  curve semplici chiuse disgiunte che decompongano  $T_g$  in pantaloni e da altre  $3g-3$  curve semplici disgiunte trasverse alle precedenti, che decompongano i pantaloni in esagoni (vedi Figura 4.6).

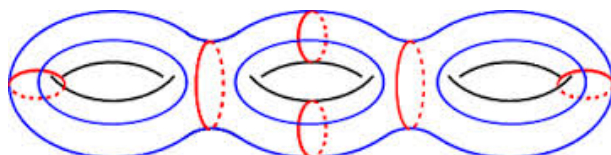


Figura 4.6: Un sistema di riferimento per lo spazio di Teichmüller: 6 curve rosse che dividono  $T_3$  in pantaloni e 4 curve blu che dividono i pantaloni in esagoni

**Teorema 4.3.3.** Un sistema di riferimento per  $T_g$  induce una biezione fra  $\text{Teich}(T_g)$  e  $\mathbb{R}^{6g-6}$ .

Lo studio dello spazio di Teichmüller è particolarmente interessante e piuttosto complesso, ma va al di là dello scopo di questa tesi.



# Bibliografia

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2001).
- [2] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Springer-Verlag (1992).
- [3] M. Berger, *Géométrie 2/ espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères*, Cedric/Fernand Nathan (1977).
- [4] M. Berger, *Géométrie 5/ la sphère pour elle-même*, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères, Cedric/Fernand Nathan (1977).
- [5] B. Martelli, *Lezioni di geometria iperbolica* (2012), [http://www.dm.unipi.it/~martelli/didattica/matematica/2012/Geometria\\_iperbolica.pdf](http://www.dm.unipi.it/~martelli/didattica/matematica/2012/Geometria_iperbolica.pdf).
- [6] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri (1989).
- [7] E. Bujalance, A. F. Costa, E. Martinez, *Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups*, Cambridge University Press (2001).



# Ringraziamenti

Grazie a Alessia Cattabriga, che con grande disponibilità, competenza e (soprattutto) pazienza mi ha aiutata a raggiungere questo traguardo. Grazie a Massimo Ferri per l'entusiasmo trasmesso durante le lezioni di topologia algebrica.

Grazie ai miei genitori che mi hanno sostenuta e spronata, permettendomi di compiere questa esperienza.

Grazie a Bolo, Teo, Gollo, Filo e gli altri compagni di corso e di avventure, perché questi tre anni sarebbero stati decisamente più grigi e monotoni senza di loro.

Grazie al team Raschietto per il supporto tecnico, linguistico e cibario in questi ultimi mesi di stesura della tesi.

E infine grazie a Mirko, che nonostante la mia ansia prima degli esami, i miei discorsi 'incomprensibili' (perché "non è matematica, non ci sono i numeri!" [cit.]) e i miei sbalzi di umore continua a starmi accanto con un sorriso.