Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze

Corso di Laurea in Matematica

Geodetiche su superfici dello spazio euclideo tridimensionale

Tesi di Laurea in Geometria

Relatrice:
Chiar.ma Prof.
Mirella Manaresi

Presentata da:
Matzeu Giacomo

Sessione II
Anno Accademico 2014-2015

A Maria,
senza la quale questo giorno
non sarebbe mai arrivato

Introduzione

É ben noto che nel piano le rette soddisfano le seguenti proprietà:

1. Dati due punti, per essi passa una e una sola retta;

2. preso un punto e fissata una direzione, esiste una ed una sola retta per il punto avente la direzione data;

3. dati due punti, il segmento di retta che li unisce è la curva di lunghezza minima tre quelle che uniscono i due punti;

4. i vettori tangenti alla retta sono paralleli.

Se anzichè nel piano ci si mette su una superficie S di $\mathbb{R}^3$ non è affatto vero che presi due punti ci sia una retta che li unisca. Ad esempio nella sfera non giace nessuna retta. Tuttavia, se ci limitiamo a considerare solamente superfici connesse due punti possono essere sempre uniti da almeno una curva, quindi viene spontaneo domandarsi se esistono curve sulle superfici che soddisfano le proprietà precedenti opportunamente modificate. Questo problema motiva l'introduzione di geodetica e a tale studio è dedicato questo lavoro. Il primo capitolo è dedicato un richiamo sulla teoria delle curve e superfici. Nel secondo capitolo si introdurrà su una superficie di $\mathbb{R}^3$ la nozione di derivata covariante di un campo di vettori lungo una curva, che generalizza la derivazione ordinaria degli spazi euclidei e che permette di dare una nozione di parallelismo per campi di vettori lungo curve. Si definirà così geodetica una curva il cui campo dei vettori tangenti sia parallelo lungo la curva stessa. Dalla definizione di geodetica segue immediatamente che vale la proprietà quattro. Si dimostrerà che la proprietà due vale localmente, nel senso che dato un punto sulla superficie e fissato un vettore tangente alla superficie in quel punto esiste un unica geodetica per il punto e con vettore tangente il vettore assegnato. Il terzo capitolo è dedicato allo studio delle geodetiche nelle superfici di rotazione. Per quanto riguarda le proprietà uno e tre il discorso è più complicato in quanto si vedrà che la prima vale solo localmente e non globalmente e in generale non vale neanche la proprietà tre. A questo studio è dedicato il quarto capitolo e richiederà tecniche non elementari di geometria differenziale quali ad esempio la nozione di mappa esponenziale.

Indice

Capitolo 1

Curve e superfici di $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo ricordiamo alcuni risultati sulle curve e superfici necessari a sviluppare lo studio delle geodetiche che verrà affrontato nei successivi capitoli

1.1 Curve

Ricordiamo alcuni risultati riguardanti le curve di $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.1 (curva parametrizzata)**.** Una *curva parametrizzata* di classe C^k in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k dove $I \subset \mathbb{R}$ è un'intervallo. Il *sostegno* di una curva è l'immagine $\alpha(I)$, mentre $t \in I$ è chiamato *parametro* della curva.

Definizione 1.2 (diffeomorfismo)**.** Si chiama diffeomorfismo di classe C^k tra sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile, invertibile e con inversa differenziabile.

Definizione 1.3 (curve equivalenti)**.** Due curve parametrizzate $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$, $\beta\colon J \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k, si dicono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $\varphi\colon J \to I$ di classe C^k tale che $\beta = \alpha \circ \varphi$. In tal caso β si dice anche *riparametrizzazione* di α e φ un *cambio di parametro*. Si verifica facilmente che questa è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.4 (curva)**.** Una *curva* di classe C^k è una classe di equivalenza di curve parametrizzate di classe C^k secondo la relazione introdotta precedentemente. Un elemento della classe è detto *parametrizzazione* della curva.

Definizione 1.5 (vettore tangente)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizzata di classe almeno C^1. Il vettore $\alpha'(t)$ è il *vettore tangente* alla curva nel punto $\alpha(t)$. Se $\alpha(t) \neq 0\ \forall t \in I$, α è detta *regolare*. A volte i vettori $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ verranno chiamati rispettivamente *velocità* e *accelerazione* della curva.

Definizione 1.6 (lunghezza di una curva)**.** Data una curva $\alpha\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ di classe almeno C^1, questa ha lunghezza:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definizione 1.7 (lunghezza d'arco)**.** Data una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k. Sia $t_0 \in I$, la *lunghezza d'arco* di α è la funzione $s\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^k data da

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

Teorema 1.1. Ogni curva orientata regolare ammette una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco s, unica a meno di traslazioni e tale che:

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \quad \forall s$$

Dimostrazione. Vedi [4] capitolo 6 paragrafo 30. □

Esempio 1.1. La curva parametrizzata $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$$

Con $a > 0$ e $r \in \mathbb{R} - 0$ ha come sostegno l'*elica circolare* di *raggio* r e *passo* a.

Esempio 1.2. Si consideri la seguente curva parametrizzata:

$$\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad r > 0$$

La si può riparametrizzare d'arco nel seguente modo, scegliendo $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} s(t) =& \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \|(-R\sin u, R\cos u)\| du = \\ =& \int_0^t R du = \\ =& Rt \end{aligned}$$

Dunque il parametro t dipende da s secondo la seguente $t(s) = \frac{s}{R}$. Dunque la parametrizzazione d'arco della curva è la seguente:

$$\alpha(s) = \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

1.2 Superfici

In questo paragrafo si espongono alcuni risultati riguardanti le superfici.

Definizione 1.8 (superficie regolare)**.** Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è un suo sottoinsieme connesso S tale che per ogni $p \in S$ esiste un aperto U di $\mathbb{R}^2$ e un'applicazione $h\colon U \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ che soddisfi le seguenti condizioni:

1. $h(U) \subset S$ è un intorno aperto di p in S.

2. h sia un omeomorfismo con l'immagine

3. il differenziale $dh_q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sia iniettivo per ogni $q \in U$

Si dice *parametrizzazione locale* una h che soddisfi le condizioni precedenti.

Osservazione 1.1. dire che il differenziale dh_q è iniettivo significa che la sua matrice jacobiana $J_h(q) = |h_x(q) \quad h_y(q)|$ ha rango 2. I simboli h_x e h_y denotano i vettori $\partial h/\partial x$ e $\partial h/\partial y$.

Definizione 1.9 (vettore tangente a una superficie)**.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e p un punto su di essa. Un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ si dice tangente ad S nel punto p se esiste $\alpha\colon (-\epsilon, +\epsilon) \to S$ curva differenziabile tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Definizione 1.10 (spazio tangente)**.** L'insieme di tutti i vettori tangenti ad S in p è detto spazio tangente a S in p.

Proposizione 1.1 (piano tangente)**.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, $p \in S$ e $h\colon U \to S$ una sua parametrizzazione locale in p. Sia $q \in U$ tale che $h(q) = p$. Allora dh_q è un isomorfismo. Inoltre $dh_q(\mathbb{R}^2) = T_{h(q)}S$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2 che chiameremo *piano tangente*. Una base è data da $\{h_x, h_y\}$ e dipende dalla parametrizzazione usata.

Dimostrazione. Vedi [3, capitolo 3 paragrafo 3] □

Si nota che il piano tangente, in quanto spazio vettoriale, passa per l'origine mentre, il piano tangente affine a S al punto p sarà il traslato del piano tangente alla superficie nel punto p.

1.2.1 Esempi di superfici

Si vedono ora alcune superfici notevoli che saranno oggetto di studio di questo lavoro.

Definizione 1.11 (superfici di rotazione)**.** Sia α una curva regolare nel piano xz dello spazio tale che non intersechi l'asse coordinato z. Sia $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ con $f(t) > 0$ $\forall t \in I$ intervallo di $\mathbb{R}$. Facendo ruotare la curva α attorno all'asse z si ottiene la *superficie di rotazione* S. Una sua parametrizzazione è $h\colon U \to \mathbb{R}^3$ dove $U = \{(t, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \phi < 2\pi,\ t \in I\}$ ed è data da:

$$h(t, \phi) = (f(t)\sin(\phi), f(t)\cos(\phi), g(t))$$

La curva α è detta *curva generatrice*, l'asse z *asse di rotazione*, le varie posizioni assunte da α nella rotazione sono dette *paralleli* e hanno equazione $h(t_0 = \text{cost.}, \phi)$, le curve di equazione $h(t, \phi_0 = \text{cost.})$ sono dette *meridiani*.

Proposizione 1.2. Le superfici di rotazione sono superfici regolari

Dimostrazione. Basta verificare le proprietà della definizione (1.8) □

Esempio 1.3 (Sfera)**.** La superficie sferica è il seguente sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

La si ottiene come superficie di rotazione facendo ruotare la curva parametrizzata $\alpha(\theta) = (\sin\theta, \cos\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ nel piano xz di $\mathbb{R}^2$ attorno all'asse z. La sua parametrizzazione canonica è

$$h(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \quad \phi \in \{0, 2\pi\} \tag{1.1}$$

Ponendo $a = \sin\theta_0$ e $b = \cos\theta_0$ i paralleli hanno equazione:

$$h(\theta_0, \phi) = (a\cos\phi, a\sin\phi, b) \tag{1.2}$$

Mentre i suoi meridiani hanno equazione

$$h(\theta, \phi_0) = (c\sin\theta, d\sin\theta, \cos\theta) \tag{1.3}$$

Avendo posto $c = \cos\phi_0$ e $d = \sin\phi_0$.

Esempio 1.4 (Cilindro circolare retto)**.** Il *cilindro circolare retto* è il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; x^2 + y^2 = 1\}$$

É possibile ottenerlo come superficie di rotazione facendo ruotare attorno l'asse z la retta di equazione $\alpha(t) = (1, t)$ nel piano xz. Una sua parametrizzazione è la seguente:

$$h(t, \phi) = (\cos\phi, \sin\phi, t) \quad 0 < \phi < 2\pi$$

I suoi paralleli hanno equazione $h(t_0, \phi) = (\cos\phi, \sin\phi, t_0)$. Si riconoscono essere le circonferenze sul piano $z = t_0$. I meridiani invece sono le curve aventi equazione $h(t, \phi_0) = (a, b, t)$ con $a = \cos\phi_0$ e $b = \sin\phi_0$. Queste sono tutte le rette verticali partenti dalla circonferenza generatrice.

Esempio 1.5 (Semi cono senza l'origine)**.** Il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{con } (x, y) \neq 0\}$$

è il *cono meno l'origine*. É ottenuto come superficie di rotazione facendo ruotare attorno l'asse z la seguente curva parametrizzata nel piano xz :

$$\alpha(t) = (t, t)$$

con $t \in (0, \infty)$. La sua parametrizzazione canonica è la seguente:

$$h(t, \phi) = (t \cos \phi, t \sin \phi, t) \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad t \in (0, \infty)$$

Esempio 1.6 (Toro)**.** Il *toro* è una superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare una circonferenza nel piano xz di centro $(a, 0)$ e raggio $r < a$. Pertanto la sua curva generatrice ha equazione $\alpha(\theta) = (r \cos \theta + a, 0, r \sin \theta)$ e la parametrizzazione canonica è:

$$h(\theta, \phi) = ((r \cos \theta + a) \cos \phi, (r \cos \theta + a) \sin \phi, r \sin \theta)$$

Si osservi che la curva descritta nell'esempio (1.2) pensata immersa in $\mathbb{R}^3$, ponendo $R = r - a$ e riparametrizzandola in $\phi = \phi(t)$ è il *parallelo minimo* del toro. In questo contesto avrà equazione:

$$\alpha(\phi) = h(\pi, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)$$

Banalmente una volta riparametrizzata d'arco avrà equazione:

$$\alpha(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

Questo parallelo del toro ci tornerà utile in seguito.

1.3 Prima forma fondamentale e simboli di Christoffel

Come spazio euclideo, $\mathbb{R}^3$ è munito di un prodotto scalare che viene ereditato dai suoi sottospazi.

Definizione 1.12 (prima forma fondamentale)**.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie e $p \in S$. Si chiama *prima forma fondamentale di S in p* e si indica con I_p la forma quadratica definita positiva associata al prodotto scalare indotto da quello euclideo sullo spazio tangente a s in p. Dunque tale che $I_p(v) =< v, v >_p \geq 0 \quad \forall v \in T_pS$.

Osservazione 1.2. L'algebra lineare ci fornisce un metodo per ricavare una espressione esplicita della forma quadratica $I_p \colon T_pS \to \mathbb{R}$ (si veda [1]). Data una parametrizzazione $h \colon U \to S$, questa ci fornisce $\{h_x, h_y\}$ come base per il piano tangente. Dunque dato $v \in T_pS$, $v = v_1 h_x + v_2 h_y$. Sia poi A la matrice associata al prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$ rispetto alla base $\{h_x, h_y\}$:

$$A = \begin{vmatrix} < h_x, h_x > & < h_x, h_y > \\ < h_y, h_x > & < h_y, h_y > \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} < h_x, h_x > & < h_x, h_y > \\ < h_x, h_y > & < h_y, h_y > \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

Quindi:

$$I_p(v) = vAv^T = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij} v_i v_j = E v_1^2 + 2F v_1 v_2 + G v_2^2 \tag{1.4}$$

Inoltre per definizione di vettore tangente, $\forall v \in T_pS$ deve esistere α tale che $v = \alpha'(0)$, dunque

$$I_p(v) = I_p(\alpha'(0)) = E(\alpha_1')^2 + 2F\alpha_1'\alpha_2' + G(\alpha_2')^2 \tag{1.5}$$

Data una curva parametrizzata $\alpha \colon I \to S$ possiamo esprimere la sua lunghezza d'arco nel seguente modo:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt$$

In particolare se la curva è contenuta in un intorno coordinato di una superficie possiamo scrivere $\alpha(t) = h(x(t), y(t))$ e dunque l'espressione precedente assume la seguente forma:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(x')^2 + Fx'y' + G(y')^2} dt$$

I coefficienti E, F, G vengono detti *coefficienti* della prima forma fondamentale nella parametrizzazione h.

Definizione 1.13 (angolo tra curve)**.** Sia S una superficie nello spazio e p un suo punto. Si chiama *determinazione dell'angolo* fra due vettori tangenti $v_1, v_2 \in T_pS$ l'angolo con θ tale che:

$$\cos\theta = \frac{< v_1, v_2 >_p}{\sqrt{I_p(v_1)I_p(v_2)}}$$

Se $\alpha_1, \alpha_2 \colon (-\epsilon, +\epsilon) \to S$ sono due curve tali che $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$ chiameremo *angolo* tra α_1 e α_2 la determinazione dell'angolo tra i vettori $\alpha_1'(0)$ e $\alpha_2'(0)$

É immediato notare che la prima forma fondamentale ci permette di misuare le distanze e gli angoli degli oggetti che giaciono sulla superficie indipendentemente da come è immersa nello spazio. Dunque le proprietà che dipendono solo dalla prima forma fondamentale sono dette *proprietà intrinseche* della superficie.

Definizione 1.14 (isometria)**.** Siano S_1, S_2 superfici e $p \in S_1$. Sia poi $M \colon S_1 \to S_2$ un'applicazione di classe C^∞ e tale che $\forall v \in T_pS_1$ si abbia

$$I_{M(p)}(dM_p(v)) = I_p(v)$$

Allora diremo che M è una *isometria* in p. Diremo anche che M è una *isometria locale* se per ogni $p \in S_1$ esiste U intorno di p tale che $M|_U$ sia un'isometria in ogni punto di U.

Esempio 1.7. Un'importante esempio di isometria è il seguente: Siano S_1 il piano $z = 0$, e S_2 il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Sia poi $M \colon S_1 \to S_2$ tale che $M(x, y, 0) = (\cos x, \sin x, y)$. Abbiamo che:

$$dM_p(v) = v_1 M_x(p) + v_2 M_y(p) = (-v_1 \sin x, v_1 \cos x, v_2)$$

Con $p \in S_1$ e $v \in T_pS$. Verifico che tale M è un'isometria locale:

$$I_{M(p)}(dM_p(v)) = \|dM_p(v)\|^2 = v_1^2 + v_2^2 = \|v\|^2 = I_p(v)$$

É triviale notare che M è la parametrizzazione del cilindro vista nell'esempio (1.4). Dunque la parametrizzazione del cilindro fornisce un'isometria locale tra esso e il piano.

Definizione 1.15 (versori normale)**.** Data una superficie regolare S e $p \in S$ si dice *versore normale* ad S in p un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $|v| = 1$ e $< v, w >= 0 \quad \forall w \in T_pS$.

Definizione 1.16 (campo di versori)**.** Sia $V \subset S$ un aperto. La mappa N definita nel seguente modo: $p \in V \mapsto N(p)$ di classe C^∞, dove $N(p)$ è un versore normale ad S in p, è detta *campo di versori*.

Definizione 1.17 (mappa di Gauss)**.** Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata. La *mappa di Gauss* di S è il campo di versori normali identificato dalla seguente applicazione $N \colon S \to S^2$. Questa determina l'orientazione della superficie.

Osservazione 1.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con parametrizzazione $h \colon U \to S$ e mappa di Gauss $N \colon h(U) \to S^2$ data canonicamente da $N = \frac{h_x \wedge h_y}{\|h_x \wedge h_y\|}$. Poichè $\{h_x, h_y, N\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ allora devono esistere $\Gamma^k_{ij}, a_{ij} \in C^\infty$ tale che

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma^1_{ij} h_x + \Gamma^2_{ij} h_y + a_{ij} N \qquad i, j = 1, 2 \tag{1.6}$$

Definizione 1.18 (simboli di Christoffel)**.** Si definiscono i simboli di Christoffel Γ^k_{ij} moltiplicando scalarmente la (1.6) per h_x e h_y ottenendo così

$$\begin{cases} E\ \Gamma^1_{11} + F\ \Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} E_x \\ E\ \Gamma^1_{11} + G\ \Gamma^2_{11} = F_x - \frac{1}{2} E_y \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} E\ \Gamma^1_{12} + F\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} E_y \\ F\ \Gamma^1_{12} + G\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} G_x \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} E\ \Gamma^1_{22} + F\ \Gamma^2_{22} = F_y - \frac{1}{2} G_x \\ F\ \Gamma^1_{22} + G\ \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} G_y \end{cases} \tag{1.9}$$

Volendo risolvere ed esplicitare dunque i simboli di Christoffel otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_x - 2FF_x + FE_y}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_x - EE_y + FE_y}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_y - FG_x}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_x - FE_y}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_y - GG_x + FG_x}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_y - 2FF_y + FG_x}{2(EG - F^2)}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Si nota subito che i simboli dipendono solamente dai coefficienti della prima forma fondamentale nella parametrizzazione h. Sono quindi delle quantità intrinseche della superficie. Inoltre grazie al teorema di Schwaz i simboli di Christoffel sono simmetrici rispetto agli indici in basso, per questo motivo si è studiato solo uno tra Γ_{12}^k e Γ_{21}^k.

Nella seguente sezione studio i simboli di Christoffel nel caso che più interessa questo lavoro, quello delle superfici di rotazione.

1.3.1 Simboli di Christoffel per una superficie di rotazione

Sia $S \in \mathbb{R}^3$ una superficie di rotazione parametrizzata canonicamente $h(t,\phi) = (f(t)\cos\phi, f(t)\sin\phi, g(t))$ Sappiamo che

$$E =< h_t, h_t > \quad F =< h_t, h_\phi > \quad G =< h_\phi, h_\phi >$$

Considerando che:

$$\begin{aligned}
h_t &= (f'(t)\cos\phi, f'(t)\sin\phi, g'(t)) \\
h_\phi &= (-f(t)\sin\phi, f(t)\cos\phi, 0)
\end{aligned}$$

Ricavo dunque i coefficienti metrici relativi ad una superficie di rotazione:

$$\begin{aligned} E &= f'(t)^2\cos^2\phi + f'(t)^2\sin^2\phi + g'(t)^2 = f'(t)^2 + g'(t)^2 \\ F &= -f(t)f'(t)\sin\phi\cos\phi + f(t)f'(t)\sin\phi\cos\phi = 0 \\ G &= f(t)^2\sin^2\phi + f(t)^2\cos^2\phi = f(t)^2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Da cui derivando:

$$\begin{aligned} E_t =& 2f'(t)f''(t) + 2g'(t)g''(t) \\ G_t =& 2f(t)f'(t) \\ E_\phi =& F_\phi = F_t = G_\phi = 0 \end{aligned}$$

Inserendo questi risultati in (1.10) e considerando che:

$$EG - F^2 = f(t)^2(f'(t)^2 + g'(t)^2)$$

ottengo:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{2f(t)^2(f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t))}{2f(t)^2(f'(t)^2 + g'(t)^2)} \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{2(f'(t)^2 + g'(t)^2)(f(t)f'(t))}{2f(t)^2(f'(t)^2 + g'(t)^2)} \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{-2f(t)^2f'(t)f''(t)}{2f(t)^2(f'(t)^2 + g'(t)^2)} \\ \Gamma^2_{11} &= \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = 0 \end{aligned}$$

Con le dovute semplificazioni arrivo al risultato conclusivo:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2} \\ \Gamma^2_{11} &= 0 \\ \Gamma^1_{12} &= 0 \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{f'(t)}{f(t)} \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{-f(t)f'(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2} \\ \Gamma^2_{22} &= 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Capitolo 2

Geodetiche, definizioni e risultati principali

In questo secondo capitolo viene esposta la teoria generale che riguarda le geodetiche. Nel primo paragrafo viene data una necessaria introduzione sui campi vettoriali lungo una curva, riconducibile allo studio delle geodetiche in quanto queste ne costituiscono un particolare caso. Le definizioni e i risultati principali che riguardano più strettamente le geodetiche sono esposte nel secondo paragrafo.

Le curve in esame sono tutte di classe C^∞ e con sostegno in una superficie S di $\mathbb{R}^3$. Inoltre si scriverà h_{x_1} e h_{x_2} in luogo della base canonica dello spazio tangente.

2.1 Campi vettoriali lungo curve

Definizione 2.1 (campo vettoriale)**.** Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare. Si chiama campo vettoriale lungo la curva α un'applicazione $\xi : I \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $\xi(t) \in T_{\alpha(t)}S$ per ogni $t \in I$. Si indichi con $\mathcal{T}(\alpha)$ lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali lungo la curva.

Esempio 2.1. Il classico esempio di campo vettoriale lunga una curva α è il campo dei vettori tangenti fornito da $\alpha' : I \to \mathbb{R}^3$.

Definizione 2.2 (derivata covariante)**.** Sia $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ un campo vettoriale. La sua derivata covariante è il campo vettoriale $D\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ tale che

$$D\xi(t) = \pi_{\alpha(t)}\Big(\frac{d\xi}{dt}(t)\Big)$$

Ove $\pi_{\alpha(t)} : \mathbb{R}^3 \to T_{\alpha(t)}S$ è la proiezione ortogonale sul piano tangente.

Quando si ha una superficie parametrizzata, come si scrive la derivata covariante? Sia $h\colon U \to S$ una parametrizzazione della superficie S. Sia α una curva il cui sostegno sia contenuto in $h(U)$. Quindi $\alpha(t) = h(x_1, x_2)$. La base dello spazio tangente è $\{h_{x_1}, h_{x_2}\}$, dunque $\xi(t) = \xi_1(t)h_{x_1}\big|_{\alpha(t)} + \xi_2(t)h_{x_2}\big|_{\alpha(t)}$ qualunque t. Allora:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{d}{dt}(\xi_1 h_{x_1} \circ \alpha + \xi_2 h_{x_2} \circ \alpha)\\ &= \frac{d}{dt}(\xi_1 h_{x_1} \circ \alpha) + \frac{d}{dt}(\xi_2 h_{x_2} \circ \alpha)\\ &= \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{d\xi_i}{dt}h_{x_i}\big|_\alpha + \xi_i(\alpha_1'\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1 \partial x_i} \circ \alpha + \alpha_2'\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2 \partial x_i} \circ \alpha)\right]\end{aligned}$$

Usando i simboli di Christoffel:

$$D\xi = \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{d\xi_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2}(\Gamma_{ij}^k \circ \alpha)\alpha_i'\xi_j\right] h_k\big|_\alpha \tag{2.1}$$

Si evince che, essendo i simboli di Christoffel delle quantità intrinseche alla superficie, la derivata covariante è una quantità intrinseca, indipendente dal modo in cui la superficie è immersa nello spazio euclideo tridimensionale.

Definizione 2.3 (campo parallelo)**.** Sia $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$. Se $D\xi = 0$ allora si dice parallelo.

Il prossimo risultato è di importanza fondamentale in quanto mostra l'esistenza di campi vettoriali paralleli.

Proposizione 2.1. Sia $\alpha\colon I \to S$ una curva sulla superficie S. Allora:

1. Dato $t_0 \in I$ e $v \in T_{\alpha(t)}S$ esiste un unico campo vettoriale $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ parallelo tale che $\xi(t_0) = v$

2. Siano $\xi, \bar{\xi} \in \mathcal{T}(\alpha)$ campi vettoriali paralleli lungo α. Allora $< \xi, \bar{\xi} >$ è costante.

Dimostrazione. (1) La (2.1) dice che $D\xi = 0$ è, localmente, un sistema di due equazioni differenziali ordinarie lineari, quindi l'asserto segue dai risultati di esistenza e unicità della teoria classica delle equazioni differenziali(vedi [5] capitolo 1 paragrafo 6) e questo basta per dimostrare la prima affermazione.

(2) É possibile scrivere $\xi = D\xi + \omega$ con $\omega \colon I \to \mathbb{R}^3$ applicazione differenziale C^∞ ortogonale a $T_\alpha(t)S$ qualunque t. Abbiamo che:

$$< \xi', \bar{\xi} >=< D\xi + \omega, \bar{\xi} >=< D\xi, \bar{\xi} >$$

Dato $\bar{\omega}$ l'analogo di ω per $\bar{\xi}$ e derivando:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} < \xi', \bar{\xi} > &=< \xi', \bar{\xi} > + < \xi, \bar{\xi}' > \\ &=< D\xi + \omega, \bar{\xi} > + < \xi, D\bar{\xi} + \bar{\omega} > \\ &=< D\xi, \bar{\xi} > + < \xi, D\bar{\xi}, >= 0\end{aligned}$$

Perchè per ipotesi ξ e $\bar{\xi}$ sono paralleli. Dunque $< \xi', \bar{\xi} >$ è costante. □

2.2 Geodetiche

É possibile ora dare una definizione rigorosa di geodetica.

Definizione 2.4 (geodetica)**.** Una geodetica su una superficie S è una curva $\alpha \colon I \to S$ di classe C^∞ tale che $\alpha' \in \mathcal{T}(\alpha)$ sia parallelo ($D\alpha' = 0$).

Usando una parametrizzazione della superficie S e ricordando (2.1) abbiamo il seguente sistema fondamentale per il calcolo esplicito delle geodetiche:

$$\alpha_k'' + \sum_{i,j=1}^{2} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha)\alpha_i'\alpha_j' = 0 \qquad k = 1, 2 \tag{2.2}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari del secondo ordine che può essere sempre ricondotto ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine introducendo delle variabili ausiliarie. Ponendo dunque $\chi_k = \alpha_k'$ ottengo:

$$\begin{cases} \chi_k' + \sum_{i,j=1}^{2} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha)\chi_i\chi_j = 0 & k = 1,2 \\ \alpha_k' = \chi_k & k = 1,2 \end{cases} \tag{2.3}$$

I risultati sull'esistenza e unicità delle soluzioni di sistemi di equazioni differenziali ordinarie forniscono il seguente risultato

Teorema 2.1 (Esistenza e unicità delle geodetiche)**.** Sia S una superficie di $\mathbb{R}^3$. Allora per ogni $p \in S$ e $v \in T_pS$ esiste una geodetica $\alpha\colon I = (-\epsilon, +\epsilon) \to S$ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Inoltre se $\beta\colon J = (-\delta, +\delta) \to S$ è una geodetica tale che $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = v$ allora α e β coincidono su $I \cap J$. In particolare per ogni $p \in S$ e $v \in T_pS$ esiste un intervallo massimale $I_v \subset \mathbb{R}$ e un'unica geodetica $\alpha_v\colon I_v \to S$ tale che $\alpha_v(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$

Dimostrazione. I risultati sulle equazioni differenziali (vedi [5])applicati a (2.3) dicono che devono esistere $\epsilon > 0$ e una curva $\alpha\colon I = (-\epsilon, +\epsilon) \to S$ soluzione di (2.2) con le condizioni iniziali $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Se esiste un'altra geodetica $\beta\colon J = (-\delta, +\delta) \to S$ tale che $\beta(0) = p$ e $\beta'(0) = v$ allora devono coincidere su un'intorno di 0. Si supponga che il massimo intervallo in cui questo accade sia I_0 e che $I_0 \subset I \cap J$. Allora deve esistere un $t_0 \in I \cap J$ estremo di I_0. Riapplicando gli stessi risultati delle equazioni differenziali (si veda [3] pagina 254) su $\alpha(t_0)$ e $\beta(t_0)$ questi dicono che α e β devono coincidere anche in un intorno di t_0, ma questo crea un assurdo perchè ciò significherebbe che I_0 non sarebbe massimale. Dunque $I_0 = I \cap J$. □

La prossima proposizione dice che, localmente, le isometrie conservano le geodetiche. Questo è una fatto molto utile perchè permette di confrontare geodetiche su superfici diverse ma che si sanno essere localmente isometriche.

Proposizione 2.2 (geodetiche e isometrie)**.** Siano S_1 e S_2 due superfici tra loro localmente isometriche tramite M. Sia inoltre α una curva su S_1. Allora per ogni $\xi \in \mathcal{T}(\alpha)$ si ha che $dM_\alpha(\xi) \in \mathcal{T}(M \circ \alpha)$ e $D(dM_\alpha(\xi)) = dM_\alpha(D\xi)$. Questo implica che α è una geodetica su S_1 se e solo se $M \circ \alpha$ lo è su S_2.

Dimostrazione. Scegliamo $t_0 \in I$ e una parametrizzazione di S_1 $h\colon U \to S_1$ tale che $M\big|_{h(U)}$ sia un'isometria con l'immagine. Quindi $M \circ \alpha = \bar{h}$ sia una parametrizzazinoe di S_2, indicati con Γ^k_{ij} e $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ i simboli di Christoffel rispettivamente di h e $\bar{h}$ si ha $\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} \circ h$ sempre con $i, j, k = 1, 2$. Per i risultati sui differenziali si ha che $\bar{h}_j\big|_{M\circ\alpha} = dM_\alpha(h_j\big|_\alpha)$ con $j = 1, 2$ e $\{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ è la base indotta da $\bar{h}$. Dunque da $\alpha = h(\alpha_1, \alpha_2)$ e $\xi = \xi_1 h_{x_1}\big|_\alpha + \xi_2 h_{x_2}\big|_\alpha$ si scrive $M \circ h = \bar{h}(\alpha_1, \alpha_2)$ e $dM_\alpha = \xi_1 \bar{h}_1\big|_\alpha + \xi_2 \bar{h}_2\big|_\alpha$. Ora usando questi fatti si ottine (2.1):

$$
\begin{aligned}
&DM_\alpha(t_0)(D\xi(t_0)) = \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{d\xi_k}{dt}(t_0) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^k_{ij}(\alpha(t_0))\alpha_i'(t_0)\xi_j(t_0) \right] \bar{h}_k\big|_{M(\alpha(t_0))} \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{d\xi_k}{dt}(t_0) + \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\Gamma}^k_{ij}(M(\alpha(t_0)))\alpha_i'(t_0)\xi_j(t_0) \right] \bar{h}_k\big|_{M(\alpha(t_0))} \\
&\qquad = D(dM_{\alpha(t_0)}(\xi(t_0)))
\end{aligned}
$$

Che era quanto affermato. Inoltre essendo dM iniettivo ho che:

$$D(dM_\alpha(\xi)) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad D\xi = 0$$

Quindi $D(M \circ \alpha) = 0$ se e solo se $D\alpha' = 0$. □

Il prossimo risultato fornisce degli utilissimi criteri per il calcolo esplicito delle geodetiche.

Teorema 2.2. Sia $\alpha\colon I \to S$ una curva di classe C^∞. Allora

1. α è una geodetica se e solo se α'' è sempre ortogonale alla superficie. Cioè se e solo se $\alpha'' \perp T_{\alpha(t)}S \quad \forall t \in I$
2. Se α è una geodetica allora è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco. Cioè $\|\alpha'\|$ è costante.

Dimostrazione. La prima affermazione segue da come è stata definita la derivata covariante e dal significato di campo vettoriale parallelo.

$$0 = D\alpha' = \pi_{\alpha(t)}(\frac{d\alpha'}{dt}) = \pi_{\alpha(t)}(\alpha'')$$

se e solo se

$$\alpha'' \perp T_{\alpha(t)}S \quad \forall t \in I$$

La seconda affermazione viene dalla (2) di (2.1). □

Capitolo 3

Geodetiche su superfici di $\mathbb{R}^3$

In questo capitolo ci occupiamo di determinare le geodetiche su alcune superfici quali la sfera e le superfici di rotazione. Ci saranno molti riferimenti al primo capitolo dove sono state introdotte le parametrizzazioni più comuni delle superfici in esame.

3.1 Geodetiche nel piano

Nel piano abbiamo che lo spazio tangente ad ogni suo punto è se stesso, dunque la relazione $D\alpha'(t) = \pi_{\alpha(t)}\left(\frac{d\alpha'}{dt}(t)\right)$ per una curva α nel piano acquista il seguente significato:

$$\alpha'' = 0$$

da cui si ricava che le geodetiche nel piano sono le rette di equazione seguente:

$$\alpha(t) = at + b \qquad a \neq 0$$

3.2 Geodetiche sulle superfici di rotazione

Sia l una parametrizzazione di una superficie di rotazione S ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la curva generatrice $\gamma(t) = (f(t), g(t))$

$t \in I$ intervallo di $\mathbb{R}$ e $f(t) \gneq 0$

$$l(t,\phi) = (f(t)\cos\phi, f(t)\sin\phi, g(t)) \qquad \text{con } f(t) > 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Una curva parametrizzata d'arco α si deve poter scrivere come $\alpha(s) = h(t(s), \phi(s))$. Usando i simboli di Christoffel dati da (1.12) e sostituti in (2.1) ottengo il sistema differenziale per le geodetiche di superfici di rotazione:

$$\begin{cases} t'' - \frac{f(t)f'(t)}{f'(t)^2+g'(t)^2}\phi'^2 + \frac{f'(t)f''(t)+g'(t)g''(t)}{f'(t)^2+g'(t)^2}t'^2 = 0 \\ \\ \phi'' + 2\frac{f'(t)}{f(t)}\phi' t' = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Osserviamo che le funzioni t e ϕ sono in funzione di s e le funzioni f e g lo sono rispetto a $t(s)$ e $\phi(s)$.

Proposizione 3.1. I meridiani di una superficie di rotazione sono geodetiche.

Dimostrazione. Ricordando che i meridiani hanno equazione $(t(s), \phi = \text{cost.},)$, devono essere soddisfatte le equazioni (3.1). Si verifica facilmente che le coordinate dei meridiani soddisfano la seconda equazione(basta osservare che $\phi'' = \phi' = 0$). Per la prima è meno immediato e serve un calcolo esplicito. Sostituiamo le coordinate $(t(s), \phi = \text{cost.})$ nella prima di (3.1).

$$t'' + \frac{f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2}t'^2 = 0$$

Per esplicitare t' in termini di f e g si ricordi l'espressione della prima forma fondamentale (1.4). Da essa, per i meridiani, si ha che $E(t')^2 = 1$. D'altra parte per una superficie di rotazione $E = f'(t)^2 + g'(t)^2$. Unendo le due espressioni si ottiene:

$$t'^2 = \frac{1}{f'(t)^2 + g'(t)^2}$$

Derivando rispetto ad s primo e secondo membro di questa espressione ottengo:

$$t'' = -\frac{f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2}t'^2$$

Sostituendo queste espressioni di t' e t'' in (3.1) otteniamo facilmente un'identità.

□

Proposizione 3.2. Gli unici paralleli che sono geodetiche sono quelli che hanno vettori tangenti paralleli all'asse di rotazione

Dimostrazione. I paralleli sono le curve di equazione

$$\alpha(s) = h(t = \text{cost.}, \phi(s)) \tag{3.2}$$

Scrivendo il sistema (3.1) per queste curve otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{f(t)f'(t)}{f'(t)^2+g'(t)^2}\phi'^2 = 0 \\ \\ \phi'' = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Dalla seconda equazione si ricava $\phi'(s) = \text{cost.} = c$ che sostituita nella prima equazione del sistema dà:

$$\frac{f(t)f'(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2}c^2 = 0 \tag{3.4}$$

Per le superfici di rotazione si ha $f(t) \gneq 0$, inoltre $f'(t)^2+g'(t)^2 \neq 0$ altrimenti sia f che g sarebbero costanti e la superficie non sarebbe di rotazione. Dunque per essere soddisfatta la (3.4) si deve avere:

$$f'(t) = 0$$

Ricordando però che una superficie di rotazione è ottenuta ruotando la curva generatrice $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ con $f(t) \gneq 0$ si ha evidentemente che un parallelo che soddisfa la condizione $f'(t) = 0$ ha retta tangente parallela all'asse di rotazione □

Proposizione 3.3 (relazione di Clairaut)**.** Sia θ l'angolo formato tra una geodetica α e un parallelo. Sia r il raggio del parallelo nel punto di intersezione con la geodetica. Allora vale la relazione di Clairaut

$$r \cos\theta = \text{cost.} \tag{3.5}$$

Dimostrazione. La seconda equazione del sistema (3.1) può essere riscritta nel seguente modo:

$$f(t)^2\phi'' + 2f(t)f'(t)\phi't' = 0$$

Osservando che $(f(t)^2\phi')' = f(t)^2\phi''+2f(t)f''(t)\phi't'$ è possibile scrivere $(f(t)^2\phi')' = 0$

$$f(t)^2\phi' = \text{cost} = c$$

Sia ora θ come da ipotesi e la geodetica in questione $\alpha(s) = h(t(s), \phi(s))$.

$$\cos\theta = \frac{< \alpha'(s), h_\phi >}{|h_\phi||\alpha'(s)|} \qquad 0 < \theta < 2\pi \tag{3.6}$$

Dove $\alpha'(s) = t'h_t + \phi'h_\phi$ è il vettore tangente alla geodetica in $\alpha(s) = p \in S$. La (3.6) diventa

$$\cos\theta = \frac{< \phi'h_\phi + t'h_t, h_\phi >}{|h_\phi|} = \frac{|\phi'G + t'F|}{\sqrt{G}} \tag{3.7}$$

Ricordando il valore dei coefficienti della prima forma fondamentale per le superfici di rotazione:

$$\cos\theta = \frac{|\phi' f(t)^2|}{f(t)}$$

Sia $r = f(t)$ il raggio del parallelo nel punto di intersezione con la geodetica. L'ultima espressione diviene:

$$r\cos\theta = \text{cost}.$$

Ovvero si è ricavata la relazione di Clairaut. $\square$

L'importanza della relazione di Clairaut risiede nel fatto che permette di calcolare l'equazione di un'arco di geodetica su una superficie di rotazione che non sia né un meridiano né un parallelo. Ecco come:

Sia $\beta(s) = h(t(s), \phi(s))$ una geodetica parametrizzata mediante la lunghezza d'arco che non sia né un meridiano né un parallelo. La seconda delle (3.1) per i discorsi precedenti implica che:

$$f(t)^2\phi' = \text{cost} = c$$

Con $c \neq 0$ perchè altrimenti si dovrebbe avere necessariamente $t =$ cost. e la curva sarebbe un meridiano, fatto contrario alle nostre ipotesi. Usando l'espressione (1.5) e dati i coefficienti metrici delle superfici di rotazione abbiamo la seguente espressione per la prima forma fondamentale:

$$1 = (f'(t)^2 + g'(t)^2)t'^2 + f(t)^2\phi'^2 \tag{3.8}$$

Che equivale alla seconda delle (3.1) , infatti

$$t'(s)^2(f'(t)^2 + g'(t)^2) = 1 - f(t)^2\phi'(s)^2$$

Ma da $f(t)^2\phi' = c$ si ha $\phi' = \frac{c}{f(t)^2}$ allora:

$$t'(s)^2(f'(t)^2 + g'(t)^2) = 1 - f(t)^2\frac{c^2}{f(t)^4}$$

Differenziando rispetto ad s membro a membro:

$$\begin{aligned}
&2t'(s)t''(s)\left[f'(t)^2 + g'(t)^2\right] + \\
&t'(s)^2\left[2f'(t)f''(t) + 2g'(t)g''(t)\right]t'(s) = \\
&\frac{2c^2f(t)f'(t)}{f(t)^4}t'(s)
\end{aligned}$$

Poichè si sta supponendo che la geodetica non sia né un meridiano né un parallelo si ha che $t'(s) \neq 0$, dunque dividendo la relazione precedente per $2t'(s)$

$$t''(s)\left[f'(t)^2 + g'(t)^2\right] + t'(s)^2\left[f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t)\right] = \frac{c^2f(t)f'(t)}{f(t)^4}$$

Ricavando t'':

$$t'' = \frac{c^2f(t)f'(t)}{f(t)^4(f'(t)^2 + g'(t)^2)} - \frac{f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2}t'^2 \tag{3.9}$$

Sapendo che $f(t)^2\phi' =$ cost. $\Rightarrow \phi' = \frac{c}{f(t)^2} \Rightarrow \phi'^2 = \frac{c^2}{f(t)^4}$ che sostituita in (3.9) si ha:

$$t'' - \frac{f(t)f'(t)}{(f'(t)^2 + g'(t)^2)}\phi'^2 + \frac{f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t)}{f'(t)^2 + g'(t)^2}t'^2 = 0$$

Che è proprio la prima delle (3.1). Non essendo un meridiano si ha che vale la relazione di Clairaut, si ha cioè $r\cos\theta = |c|$ e $c \neq 0$. Infatti se per assurdo fosse $c = 0 \Rightarrow r\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$ il che implicherebbe che la geodetica sia un meridiano, fatto contrario alle nostre ipotesi. La relazione di Clairaut può essere scritta $f^2(t)\phi' = c \Rightarrow \phi'(s) = \frac{c}{f(t)^2} \neq 0$ perchè $\phi'(s) \neq 0$ perchè non è un meridiano. Invertendo la funzione $\phi(s)$ abbiamo $t = t(s(\phi))$. Moltiplicando per $s'(\phi)^2$ la (3.8):

$$s'(\phi)^2 = \left[f'(t)^2 + g'(t)^2\right](t'(s)s'(\phi))^2 + f(t)^2(\phi'(s)s'(\phi))^2 \tag{3.10}$$

Poichè $\phi'(s) = d\phi/ds = c/f(t)^2 \Rightarrow ds/d\phi = f(t)^2/c \Rightarrow s'(\phi)^2 = f(t)^4/c^2$ Sostituendo questa espressione in (3.10) si ottiene:

$$\frac{f(t)^4}{c^2} = f(t)^2 + (f'(t)^2 + g'(t)^2)(t'(s)\Big(\frac{f(t)^4}{c^2}\Big)$$

Allora:

$$f(t)^4 = c^2 f(t)^2 + (f'(t)^2 + g'(t)^2)f(t)^4 t'(s)^2$$

Sapendo che $t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{dt}{d\phi}\frac{c}{f(t)^2}$:

$$f(t)^4 = c^2 f(t)^2 + (f'(t)^2 + g'(t)^2)f(t)^4 t'(\phi)^2 \frac{c^2}{f(t)^4}$$

da cui semplificando e dividendo per $f(t)^2$

$$f(t)^2 = c^2 + \frac{c^2(f'(t)^2 + g'(t)^2)}{f(t)^2}t'(\phi)^2$$

Da cui si ricava ϕ' dopo aver integrato rispetto a t:

$$\phi = c\int \frac{1}{f(t)}\sqrt{\frac{f'(t)^2 + g'(t)^2}{f(t)^2 - c^2}}dt + \text{cost} \tag{3.11}$$

Questa equazione esprime la relazione che deve intercorrere tra la t e la ϕ affinché la curva $h(t, \phi)$ sia una geodetica senza che essa sia né un meridiano né un parallelo.

3.3 Geodetiche sulla sfera

Si consideri ora la superficie sferica nello spazio descritta nell'esempio (1.3). Poichè la sfera è una superficie di rotazione abbiamo che i meridiani sono delle geodetiche su di essa. Questi hanno equazione (1.2). Si è inoltre dimostrato che i paralleli i cui punti hanno vettore tangente parallelo all'asse di rotazione sono geodetiche. Dunque ricordando che i paralleli hanno equazione (1.3) e i risultati di (3.3) si ha che:

$$\cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Dunque l'unico parallelo ad essere una geodetica ha equazione $h(\frac{\pi}{2}, \phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$, che si riconosce essere facilmente l'equatore.

Sia ora $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s))$ una circonferenza parametrizzata d'arco passante per l'origine giacente sulla sfera. Essendo sulla superficie deve essere soddisfatta la seguente condizione:

$$x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = 1 \quad \forall\ s$$

Ma essendo parametrizzata d'arco vale $x'(s)^2+y'(s)^2+z'(s)^2 = 1$. Derivando entrambi i membri si ottiene $2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) + 2z'(s)z''(s) = 0$ che si può interpretare così:

$$< (x'(s), y'(s), z'(s)), (x''(s), y''(s), z''(s)) >=< \beta'(s), \beta''(s) >= 0$$

Dunque applicando (2.2) si ha che β è una geodetica. Le curve appena studiate sono centrate nell'origine e si chiamano *cerchi massimi*. Notando che anche i meridiani e l'equatore sono dei cerchi massimi si è appena dimostrato che questi sono le uniche geodetiche sulla sfera.

3.4 Geodetiche sul cilindro

Si consideri il cilindro circolare retto come descritto nel esempio (1.4)). I meridiani sono geodetiche, ovvero tutte le rette verticali contenute nel cilindro. Usando invece la proposizione (2.2) si vede che le circonferenze sul cilindro ottenute intersecando perpendicolarmente l'asse di rotazione con un piano sono geodetiche, in quanto aventi vettore accelerazione perpendicolare al piano tangente. Si cercano ora le geodetiche che non siano nè meridiani nè paralleli. Si supponga che $\beta(s) = h(t(s), \phi(s))$ sia una geodetica parametrizzata d'arco sul cilindro e che passi per un punto $p = h(0,0)$. Si è visto nel capitolo 1 che che la parametrizzazione h è una locale isometria del piano nel cilindro (vedi esempio (1.7)). Quindi $h^{-1}\colon h(U) \to U$ con U intorno aperto di 0 è un'isometria. Essendo β una geodetica su $h(U)$ (per ipotesi passa per p, ed essendo invariante per isometria (vedi (2.2)) abbiamo che $h^{-1}(\beta)$ è una geodetica sul piano $t\phi$, dunque, è necessariamente una retta in questo caso passante per l'origine. Quindi:

$$h(t(s), \phi(s)) = (as, bs) \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Essendo la curva parametrizzata d'arco abbiamo:

$$\|h(t(s), \phi(s))\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = 1$$

Quindi:

$$h(t(s), \phi(s)) = h(as, bs) = (\cos(bs), \sin(bs), as)$$

Che si riconosce essere l'equazione di un'elica di raggio 1 e passo a. Riassumendo, le geodetiche sul cilindro circolare retto sono:

1. Le rette ottenute per intersezione con un piano passante per l'asse di rotazione;

2. Le circonferenze ottenute intersecando il cilindro con piani perpendicolari all'asse di rotazione;

3. Tutte le eliche giacenti sul cilindro.

Osservazione 3.1. Dati due punti esistono infinite eliche che li collegano. Dunque esistono infinite geodetiche sul cilindro, contrariamente a quanto accade nel piano.

3.5 Geodetiche sul semicono senza il vertice

Dato il cono senza il vertice descritto nell'esempio (1.5) si ha ancora una volta che i meridiani sono delle geodetiche. Nel cono hanno equazione

$$h(t, \phi_0) = (at, bt, t)$$

Che si riconoscono essere le rette generatrici. Si ha che nessun parallelo è una geodetica. Infatti l'espressione di un parallelo è

$$h(t_0, \phi) = (t_0 \cos \phi, t_0 \sin \phi, t_0) \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1$$

Queste sono equazioni di circonferenze di raggio t_0 nel piano $z = t_0$. Infatti i vettori tangenti dalle rette generatrici non possono per costruzione essere paralleli all'asse di rotazione.

Per vedere quali altre curve siano delle geodetiche si applica la (3.11) che nel caso in questione diventa:

$$\phi = c \int \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{t^2 - c^2}} dt + \text{cost}$$

Facendo la sostituzione di variabile $t = \frac{c}{\sin v}$ si ha:

$$\phi = -\int \sin v \sqrt{\frac{2 \sin^2 v}{c(1 - \sin^2 v)}} \frac{\cos v}{\sin v} dv + \text{cost}$$

Allora:

$$\phi = -\sqrt{2} \int dv + \text{cost} = -\sqrt{2} v + \text{cost}$$

Da cui considerando che per via del cambio di variabile si ha la seguente relazione $v = \arcsin \frac{c}{t}$ si ottiene in definitiva:

$$\phi(s) = -\sqrt{2} \arcsin \frac{c}{t(s)} + \text{cost}$$

Che è la relazione che deve intercorrere tra le funzioni coordinate $t(s)$ e $\phi(s)$ affinchè la curva $\beta(t(s), \phi(s))$ sia una geodetica senza che questa sia un meridiano del cono.

3.6 Geodetiche sul toro

Il toro è la superficie di rotazione descritta in (1.6). Ancora una volta tutti i suoi meridiani sono geodetiche e hanno equazione $h(\theta, \phi_0)$. Si vede facilmente che quasi tutti i paralleli hanno vettori tangenti non perpendicolari all'asse di rotazione ma l'intuizione sembra dire che il parallelo minimo e quello massimo siano gli unici a soddisfare questa richiesta. Per verificarlo si usa ancora una volta (2.2). É già stato osservato nell'esempio (1.6) che il parallelo minimo ha equazione:

$$\beta(\phi) = h(\pi, \phi) = ((a-r)\cos\phi, (a-r)\sin\phi, 0)$$

Per poter applicare il risultato citato devo utilizzare la parametrizzare d'arco vista nell'esempio (1.6):

$$\beta(s) = h(\pi, s) = \Big((a-r)\cos\Big(\frac{s}{a-r}\Big), (a-r)\sin\Big(\frac{s}{(a-r}\Big), 0\Big)$$

Da cui si calcola facilmente:

$$\beta(s)' = \Big(-\sin\Big(\frac{s}{a-r}\Big), \cos\Big(\frac{s}{a-r}\Big), 0\Big)$$

$$\beta(s)'' = \Big(-\frac{1}{a-r}\cos\Big(\frac{s}{a-r}\Big), \frac{1}{a-r}\sin\Big(\frac{s}{a-r}\Big), 0\Big)$$

Semplici calcoli mostrano che:

$$<\beta'(s), \beta''(s)>= 0$$

É quindi verificata la prima del teorema (2.2) completando così la discussione. Con dei calcoli totalmente analoghi si dimostra che il parallelo massimo $h(0, \phi)$ è un'altra geodetica. Ulteriori geodetiche possono essere ricavate grazie a (3.11) che richiede però uno sforzo eccessivo per gli scopi di questo lavoro.

Capitolo 4

Proprietà di minimo

Lo scopo di questo capitolo è quello di dimostrare la peculiare proprietà delle geodetiche, ovvero quella di essere, almeno localmente, il cammino più breve che collega due punti su una superficie. É immediato vedere che questa affermazione non è valida globalmente in quanto si può portare il seguente controesempio:

Esempio 4.1. In S^2 un arco di un cerchio massimo che sia più lungo di π non è la curva più breve che collega i suoi estremi in quanto il suo arco complementare è più corto.

Non è nemmeno detto che dati due punti debba esistere una geodetica che gli unisce. Anzi si può dire di più, non si è nemmeno sicuri dell'esistenza di percorsi minimi come mostra l'esempio seguente:

Esempio 4.2. Sia $S = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, consideriamo p e $-p$ in S, qualunque sia la curva che congiunge i due punti ne esiste sempre una più corta.

In ogni caso quando esiste una curva di lunghezza minimale che collega due punti questa non è detto che sia unica, ad esempio esistono infiniti cerchi massimi che collegano due punti antipodali nella sfera.

4.1 Mappa esponenziale

É vero, però, il viceversa, cioè che il percorso di lunghezza minima che collega due punti è necessariamente una geodetica. Infatti:
Il teorema (2.1) ci garantisce che, dato $p \in S$, $v \in T_pS$, allora esiste un'unica geodetica:

$$\alpha\colon (-\epsilon, +\epsilon) \to S \quad \text{tale che} \quad \alpha(0) = p \text{ e } \alpha'(0) = v$$

Si nota che la geodetica dipende fortemente dalla scelta del vettore tangente. La si può quindi pensare nel seguente modo, considerati il disco B_λ di T_pS di raggio $\lambda > 0$ una geodetica è una mappa:

$$\alpha\colon (-\epsilon, +\epsilon) \times B_\lambda \to S \quad \text{tale che} \quad \alpha(0, w) = p \text{ e } \alpha'(0, w) = v$$

Lemma 4.1. Sia $\alpha(t, v)$ una geodetica definita per $t \in (-\epsilon, +\epsilon)$, allora la geodetica $\alpha(t, kv)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ è definita per $t \in (-\epsilon/k, +\epsilon/k)$. Inoltre:

$$\alpha(t, kv) = \alpha(kt, v)$$

Dimostrazione. Vedi [2] capitolo 4 paragrafo 6. □

Si consideri ora la seguente definizione:

Definizione 4.1. Sia $p \in S$ e $v \in T_pS$. Sia $\alpha\colon (-\epsilon, +\epsilon) \to S$ l'unica geodetica data dal teorema (2.1) per p e per v. Se $1 \in (-\epsilon, +\epsilon)$ possiamo definire la *mappa esponenziale* $exp_p\colon W \subset T_pS \to S$ dove W è un'intorno aperto contenente l'origine nel seguente modo:

$$exp_p(v) = \alpha(1, v) \quad \text{e} \quad exp_p(0) = p$$

In termini di mappa esponenziale una geodetica $\alpha(t)$ per p si denota nel seguente modo:

$$\alpha(t) = \alpha(t, v) = \alpha(1, tv) = exp_p(tv)$$

La condizione $1 \in (-\epsilon, +\epsilon)$ può sembrare troppo restrittiva, ma per fortuna si rivela essere meno forte di quanto sembri in quanto vale il seguente risultato:

Proposizione 4.1. Sia $p \in S$, allora esiste un $\delta > 0$ tale che è definita exp_p ed è differenziabile in un disco aperto con centro l'origine e raggio δ denotato B_δ.

Dimostrazione. Dal lemma è evidente che si può prendere v sufficientemente piccolo tale per cui 1 appartenga all'intervallo di definizione di $\alpha(t, v)$, inoltre questa riduzione può essere effettuata uniformemente in tutte le direzioni. Si rimanda a [2] capitolo 4 paragrafo 6 proposizione 1 per una spiegazione più dettagliata. □

Una prima conseguenza è il seguente:

Corollario 4.1. exp_p è un diffeomorfismo tra $U \subset B_\epsilon$ e $exp_p(U) \subset S$. Chiameremo quest'ultimo *intorno normale* di $p \in S$.

Dimostrazione. Vedi [2] capitolo 4 paragrafo 6, proposizione 2. □

Non solo esiste una mappa esponenziale per ogni p ma, restringendo opportunamente il dominio è anche un diffeomorfismo.

E in un intorno normale è possibile introdurre un sistema di coordinate ereditato dallo spazio tangente. I principali sistemi di coordinate che si utilizzano sono i seguenti:

1. *Coordinate normali* che corrispondono ad un sistema ortogonale nel piano tangente.

2. *Coordinate geodetiche polari* corrispondenti alle coordinate polari sul piano tangente.

Questi due sistemi di coordinate sono importanti perchè permettono di individuare facilmente le geodetiche.

4.1.1 Coordinate normali

Fissata una base $\{e_1, e_2\}$ nello spazio tangente si può identificare un vettore $u \in U \subset T_pS$ con una coppia di numeri reali di un aperto A di $\mathbb{R}^2$

tramite:

$$xe_1 + ye_2 \mapsto (x, y)$$

Allora abbiamo che la mappa esponenziale:

$$(x, y) \in A \mapsto exp_p(xe_1 + ye_2) \in V$$

è un diffeomorfismo tra A e V. Poichè verifica tutte le condizioni richieste nella definizione (1.8) può considerarsi una parametrizzazione locale di p. Dunque le coordinate di un $p \in V$ tramite questa parametrizzazione sono (x, y), queste sono le coordinate normali. Si osserva che tali coordinate dipendono fortemente dalla scelta della base nello spazio tangente.

Come si esprimono le geodetiche in queste coordinate? Sono tutte e sole le immagini delle linee passanti per l'origine.
Infatti:

Siano $(at, bt) \in T_pS$ le linee passanti per l'origine. Allora, ponendo $v = (a, b)$:

$$exp_p(at + bt) = exp_p(t(a + b)) = exp_p(tv)$$

che riconosciamo essere una geodetica. D'altra parte, sia $exp_p(tv)$ una geodetica parametrizzata in coordinate normali, allora:

$$exp_p(tv) = exp_p(t(v_1e_1 + v_2e_2)) = exp_p(tv_1e_1 + tv_2e_2)$$

che riconosciamo essere l'immagine tramite exp_p di una retta per l'origine di equazioni parametriche (tv_1, tv_2).

4.1.2 Coordinate polari geodetiche

Per definire, invece, le coordinate geodetiche polari si sceglie nello spazio tangente un sistema di coordinate polari centrato nell'origine. Denotiamo tali coordinate con (r, θ) con $r \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Sia l la semiretta chiusa corrispondente a $\theta = 0$. Tale semiretta non è definita in questo sistema. Sia

$L = exp_p(l)$. Essendo la mappa esponenziale un diffeomorfismo, lo saranno anche le sue restrizioni. Dunque

$$exp_p \colon U - l \to V - L$$

è un diffeomorfismo e possiamo identificare T_pS con $\mathbb{R}^2$ tramite le coordinate polari (r, θ) analogamente a quanto fatto per le coordinate normali. Dunque la mappa esponenziale è una parametrizzazione locale che fornisce le seguenti coordinate:

$$exp_p(v) \mapsto (r, \theta)$$

Con $v \in T_pS$ tale che $\|v\| = r$ e che ha angolo θ con la semiretta l. Queste coordinate permettono di definire le *circonferenze geodetiche* su V come l'immagine tramite exp_p delle circonferenze in U centrate nell'origine. Si definiscono invece: *raggi geodetici* su V come le immagini tramite exp_p delle rette per l'origine di U. Abbiamo che su $V - L$ le circonferenze geodetiche sono i punti di coordinate $r = \text{cost}$, mentre i raggi geodetici hanno coordinate $\theta = \text{cost}$. I raggi geodetici sono tutte e sole le geodetiche uscenti per p.

4.2 Proprietà di minimo

Ora si hanno tutti gli strumenti per dimostrare il risultato fondamentale di questo capitolo. Per comodità di notazione si denoti la lunghezza d'arco di una curva con la lettera l, e le eventuali dipendenze da parametri verranno evidenziati con dei pedici.

Teorema 4.1. Dato $p \in S$, esiste un intorno di p $V \subset S$ tale che se $\alpha \colon I \to V$ è una geodetica con $\alpha(0) = p$, $\alpha(t_1) = q$ e $\beta \colon [0, t_1] \to S$ è una curva che collega p e q allora:

$$l(\alpha) \leq l(\beta)$$

Dimostrazione. Sia V un intorno normale di p. Sia C una regione chiusa e limitata da un cerchio geodetico di raggio r_0 contenuto in V. Si considerino poi delle coordinate geodetiche polari centrate in p su $C - L$ in modo che $q \in$

L. In quanto geodetica per ipotesi, α è un raggio geodetico. Si distinguono tre casi:

Sia $\beta(\ ]0,t_1[\ ) \subset C - L$. Considerando $\beta(t) = (r(t), \theta(t))$ si ha:

$$\begin{aligned} l_\epsilon(\beta) = \int_\epsilon^{t_1-\epsilon} \sqrt{r'(t)^2 + \theta'(t)^2}dt \geq \int_\epsilon^{t_1-\epsilon} \sqrt{r'(t)^2}dt \geq \\ \geq \int_\epsilon^{t_1-\epsilon} r(t)'dt = t_1 - 2\epsilon = l(\alpha) - 2\epsilon \end{aligned}$$

Facendo tendere ϵ a 0 abbiamo che $l(\beta) \geq l(\alpha)$. L'uguale vale solo quando $\theta = \text{cost}$ e $r' > 0$ ovvero quando β è un raggio geodetico. Segue che $l(\beta) = l(\alpha)$ solamente se la loro traccia coincide.

Si supponga invece che $\beta(]0,t_1[)$ intersichi L e che questo avvenga nel punto $\beta(t_2)$ $0 < t_2 < t_1$. Allora per quanto detto sopra la tesi è vera tra 0 e t_2. Poichè $\beta([0,t_1])$ e L sono compatti deve esistere un $\bar{t}$ tale che o $\beta([\bar{t},t_1])$ è contenuto in L o $\beta(\bar{t})$ è l'ultimo punto dove $\beta((0,t_1))$ interseca L. In entrambi i casi $l(\alpha) \leq l(\beta)$.

Sia infine $\beta([0,t_1])$ non interamente contenuta in V. Sia t_0 il primo valore per cui β incontra la circonferenza geodetica nel punto $x = \beta(t_0)$. Sia γ la geodetica radiale congiungente p e x e sia $\bar{\beta} = \beta|_{[0,t_0]}$. É chiaro che $l(\bar{\beta}) \leq l(\beta)$, ma anche che $l(\gamma) \leq l(\bar{\beta})$. Essendo q un punto interno di V la sua distanza da p è minore di quella tra p e x. Ricordando che le geodetiche α e γ sono raggi geodetici si ha che $l(\alpha) < l(\gamma)$. Unendo le disuguaglianze si ottiene:

$$l(\alpha) < l(\beta),$$

che conclude il ragionamento. □

Come mostrano gli esempi di inizio capitolo il teorema non è valido in globalmente. Ma se una curva minimizza la distanza, questa è una geodetica.

Teorema 4.2. Sia α una curva parametrizzata con un multiplo della lunghezza d'arco. Siano $t_1, t_2 \in I$ e siano $p = \alpha(t_1)$ e $q = \alpha(t_2)$. Se la lunghezza d'arco tra t_1, t_2 di α è minore o uguale della lunghezza di una qualunque

curva che colleghi p e q, cioè se:
$\forall \beta \colon I \to S \mid \quad p = \beta(\tau_1),\ q = \beta(\tau_2) \quad \tau_1, \tau_2 \in I$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\alpha(u)\| du \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\beta(u)\| du$$

allora α è una geodetica.

Dimostrazione. Sia $t \in I$ e sia V l'intorno di $\alpha(t)$ dato dal teorema (4.1) e $\alpha(\bar{t}) \in V$. Per il teorema (4.1) α deve essere necessariamente una geodetica, altrimenti esisterebbe una geodetica radiale con lunghezza d'arco minore di α tra $\alpha(t)$ e $\alpha(\bar{t})$, fatto che contraddice le ipotesi. Essendo regolare α è una geodetica in t_0 per continuità. $\square$

Tutti i discorsi appena fatti possono essere estesi al caso di curve regolari a tratti.

Bibliografia

[1] M.Abate, *Geometria*, McGraw-Hill, Milano 1996

[2] M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prantice-Hall, Englewood Cliffs 1976.

[3] M.Abate F.Tovena, *Curve e superfici*, Springer-Verlag, Milano 2006.

[4] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.

[5] Elsgolts, *Equazioni differenziali e calcolo delle variazioni*, Editori riuniti University Press. Roma 2011.