

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

# Ottimizzazione di un controllo di temperatura per Diodi Laser

**Relatore:**  
**Prof. Marco Prevedelli**

**Presentata da:**  
**Mauro Falchi**

**Sessione II**  
**Anno Accademico 2014/2015**



# Indice

<b>1</b>	<b>Teoria del Controllo</b>	<b>4</b>
1.1	Anelli di Regolazione . . . . .	4
1.2	Formalizzazione . . . . .	5
1.2.1	Trasformata di Laplace . . . . .	5
1.2.2	Funzione di Trasferimento . . . . .	8
1.2.3	Stabilità . . . . .	9
1.2.4	Approssimanti di Padé . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Parte Sperimentale</b>	<b>12</b>
2.1	L'apparato . . . . .	12
2.2	Caratterizzazione . . . . .	17
2.2.1	Introduzione . . . . .	17
2.2.2	Misure . . . . .	17
2.2.3	Adattamento dati . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Analisi</b>	<b>27</b>
3.1	Trasferimento ad anello aperto . . . . .	27
3.2	Trasferimento ad anello chiuso . . . . .	28
3.3	Misure Finali . . . . .	32
3.4	Conclusioni . . . . .	35

## Bibliografia

# Abstract

In questo lavoro di tesi si studia un processo sperimentale necessario alla realizzazione di un esperimento di Fisica Atomica.

L'attività svolta consiste nell'ottimizzazione dei parametri di un algoritmo di controllo PI (proporzionale-integrale) atto a stabilizzare la temperatura di un Diodo Laser entro  $1mK$ .

Nella branca dell'Ottica Non Lineare (dove la polarizzazione del mezzo ha una risposta non lineare al campo elettrico) si possono presentare casi in cui la birifrangenza del mezzo ha una forte dipendenza dalla temperatura. Questa può essere controllata per il raggiungimento delle condizioni di phase matching. Le fluttuazioni di temperatura possono minare tramite la dilatazione termica la precisione di una cavità Fabry-Perot, utilizzata per controllare e misurare la lunghezza d'onda della luce, dato che nominalmente  $\Delta\nu/\nu = -\Delta L/L$ . Negli esperimenti di Laser Cooling infine si lavora spesso con transizioni la cui larghezza naturale  $\Gamma \sim 1MHz$ , mentre la frequenza di un laser può dipendere dalla temperatura con coefficienti tipicamente dell'ordine del  $GHz/K$ .

Questa stabilizzazione risulta dunque fondamentale per una vasta classe di esperimenti nei quali le derivate termiche possono influenzare drammaticamente il processo di misura.

La tesi, in particolare, si apre con un capitolo nel quale si tratta brevemente il contesto matematico di riferimento per i sistemi di controllo a retroazione. Tra questi è di particolare interesse la regolazione proporzionale-integrale. Il secondo capitolo si concentra sulla caratterizzazione del sistema in oggetto al fine di trovare la sua funzione di trasferimento ad anello aperto.

Nel terzo capitolo infine, si utilizzano gli strumenti matematici descritti precedentemente per ottimizzare i parametri del regolatore e si discutono i risultati ottenuti e le misure finali.

# Capitolo 1

## Teoria del Controllo

### 1.1 Anelli di Regolazione

L'azione del controllo si propone di portare il comportamento di un sistema a seguire una regola desiderata. Per fare questo è necessario agire opportunamente sulla base della misura dello stato del sistema.

La trattazione qui data si limita ai risultati utili al lavoro svolto, per maggiori approfondimenti si veda [1].

La formulazione del problema del controllo avviene tipicamente tramite la definizione dell'insieme delle "variabili da controllare"

$$\vec{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$$

i cui valori di riferimento (setpoint)

$$\vec{y}^o(t) = \{y_1^o(t), \dots, y_n^o(t)\}$$

rappresentano il traguardo dell'azione di controllo. Quest'ultima è attuata, sulla base del confronto tra l'obiettivo fissato e l'attuale situazione, agendo opportunamente su un altro set di valori detto "variabili di controllo"

$$\vec{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}.$$

Per poter ultimare la formalizzazione bisogna che il sistema in oggetto sia descritto da delle leggi fisiche, da cui un modello matematico che permetta di prevederne il comportamento. Tipicamente le leggi che regolano il sistema sono equazioni differenziali ed i modelli usati sono sistemi dinamici.

È dunque necessario per il controllore estrarre informazioni sullo stato del sistema a seconda della disponibilità e calcoli i valori opportuni per le variabili di controllo per fare in modo che le variabili da controllare abbiano l'andamento il più possibile

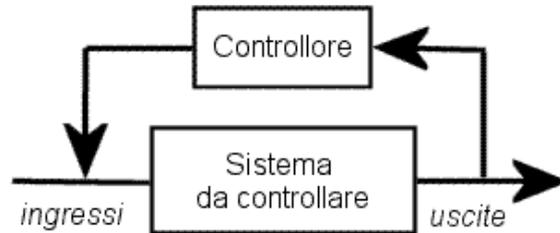


Figura 1.1: lo schema della retroazione.

vicino a quello desiderato.

Alcuni problemi, come la presenza di disturbi non misurabili nel sistema impongono che il controllo sia raggiungibile unicamente tramite lo schema della retroazione o feedback (Figura 1.1) in quanto misura dell'effetto sortito è fondamentale per calcolare il miglior valore della variabile di controllo.

Un buon anello regolatore è in grado di portare l'errore virtualmente a zero a regime, di farlo nel minor tempo possibile smorzando al massimo le oscillazioni delle variabili da controllare e delle variabili di controllo dovendo nel contempo garantire le prestazioni desiderate in condizioni di lavoro sufficientemente ampie.

Inoltre, nello specifico, è richiesto a un buon regolatore di soddisfare una serie di requisiti quali rapidità nei confronti di variazioni dei valori di riferimento o disturbi additivi; limitatezza delle oscillazioni (overshoot) durante le fasi transitorie; robustezza contro rumore, comportamenti non lineari e variazioni dei parametri del sistema; moderazione nelle variazioni delle variabili di controllo.

Dei vincoli opportuni nella legge di controllo possono garantire questi requisiti al costo di una complessa formulazione matematica del problema.

## 1.2 Formalizzazione

### 1.2.1 Trasformata di Laplace

Numerosi strumenti matematici sono stati proposti dalla teoria del controllo, durante i suoi sviluppi, per l'analisi dei più svariati sistemi dinamici. Di questi i più impiegati sono quelli basati sulla trasformazione secondo Laplace delle equazioni

differenziali descrittivi il sistema.

La Trasformata di Laplace è uno strumento standard trattato in molti testi di teoria del Controllo come [2] o [3]. In seguito si riportano i risultati più importanti che saranno utilizzati per la discussione e il trattamento dei dati sperimentali.

## Definizione

Sia  $f(t)$  una funzione definita sui numeri reali per  $t \geq 0$ . La sua trasformata di Laplace unilatera è la funzione definita da

$$\mathcal{L}\{f\}(s) \equiv F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.1)$$

dove  $s \in \mathbb{C}$ .

Ad ogni funzione  $f(t)$  corrisponde un'unica trasformata  $F(s)$  e viceversa.

La trasformata di Laplace è un'applicazione ampiamente utilizzata nell'analisi dei sistemi dinamici. Essa trasforma una funzione di variabile reale  $f(t)$  in una funzione di variabile complessa  $F(s)$ . La proprietà più immediata che la rende un potente strumento nella risoluzione di equazioni differenziali è che, sotto di essa, la derivata e l'integrale della funzione trasformanda si riducono rispettivamente alla moltiplicazione e alla divisione per il parametro complesso  $s$ .

## Proprietà della Trasformata di Laplace

- *Linearità:*

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (1.2)$$

- *Derivazione:*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (1.3)$$

- *Integrazione:*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (1.4)$$

- *Traslazione complessa:*

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - a) \quad (1.5)$$

- *Traslazione temporale:*

$$\mathcal{L}\{f(t-a) \cdot \Theta(t-a)\} = e^{-as} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad (1.6)$$

dove  $\Theta(t)$  è la funzione gradino di Heaviside.

- *Convolutione:*

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (1.7)$$

È inoltre possibile enunciare il seguente:

### **Teorema del valore finale:**

se esiste ed è finito  $f(\infty)$  vale

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathcal{L}\{f(x)\} \quad (1.8)$$

### **Alcune trasformate notevoli**

- *Delta di Dirac:*

$$\mathcal{L}\{\delta(x)\}(s) = 1 \quad (1.9)$$

- *Gradino di Heaviside:*

$$\mathcal{L}\{\Theta(x)\}(s) = \frac{1}{s} \quad (1.10)$$

- *Esponenziale:*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \quad (1.11)$$

### **Trasformata inversa**

L'antitrasformata di Laplace di una funzione  $F(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  è  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

È possibile provare che se  $F(s)$  ha trasformata inversa, ovvero esiste  $f(t)$ , continua a tratti, che soddisfa la condizione sopra, allora  $f(t)$  è univocamente determinata. Una formula per l'antitrasformata, chiamata integrale di Mellin, è data dall'integrale di linea:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \equiv f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} \cdot F(s) ds \quad (1.12)$$

L'integrazione avviene lungo la linea verticale  $\Re(s) = \gamma$  sul piano complesso, con  $\gamma$  maggiore della parte reale di tutte le singolarità di  $F(s)$  al fine di assicurare la convergenza. Se tutte le singolarità di  $F(s)$  sono nel semipiano sinistro o se  $F(s)$  non ha singolarità si può porre  $\gamma = 0$  e la formula dell'antitrasformata diventa uguale all'antitrasformata di Fourier.

### 1.2.2 Funzione di Trasferimento

Considerando il sistema ad anello aperto (con la retroazione spenta), non è realistico supporre che le variabili di controllo (input) abbiano un effetto immediato sulle variabili da controllare (output), dunque l'output al tempo  $t$  dipenderà dalla storia passata dell'input.

Consideriamo per semplicità che gli ingressi e le uscite siano codificabili in due funzioni siffatte

$$i(t), o(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Una generica relazione lineare tra  $i(t)$  e  $o(t)$  è:

$$o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, t') \cdot i(t') dt' \quad (1.13)$$

Data questa, si noti come  $o(t)$  sia proporzionale a  $i(t)$ , come nel caso ideale, se  $g(t, t') \propto \delta(t - t')$ . Assumendo che il sistema rispetti il principio di causalità,  $g(t)$  deve essere nulla se  $t < t'$ . Aggiungendo l'ulteriore ipotesi di invarianza per traslazioni temporali deve valere  $g(t, t') = g(t - t')$  e la relazione tra ingressi e uscite diventa

$$o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t') \cdot i(t') dt' = g(t) * i(t) \quad (1.14)$$

per cui, ricordando la proprietà di convoluzione della trasformata di Laplace (1.7), se  $O(s)$ ,  $G(s)$  e  $I(s)$  sono le trasformate di Laplace rispettivamente di  $o(t)$ ,  $g(t)$  e  $i(t)$  vale:

$$G(s) = \frac{O(s)}{I(s)} \quad (1.15)$$

$G(s)$  è chiamata la *Funzione di Trasferimento* del sistema ed è definita proprio come il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'ingresso e la trasformata di Laplace dell'uscita.

Se nelle equazioni che descrivono il sistema non c'è una dipendenza esplicita dei parametri dal tempo, il sistema si dice "tempo-invariante". Se queste sono anche

lineari il sistema si dice lineare. In questo caso la Funzione di Trasferimento (nel caso Single Input-Single Output) si presenta convenientemente nella forma:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i \cdot s) \prod_i (1 + 2\zeta_i \cdot s / \alpha_{ni} + s^2 / \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i \cdot s) \prod_i (1 + 2\zeta_i \cdot s / \omega_{ni} + s^2 / \omega_{ni}^2)} \quad (1.16)$$

dove  $\mu$  è detto guadagno,  $g \in \mathbb{Z}$  è detto tipo di sistema (ed è uguale a 1 nella stragrande maggioranza delle applicazioni),  $\alpha_{ni}$  e  $\omega_{ni}$  sono le pulsazioni naturali delle coppie di zeri e poli complessi coniugati,  $\zeta_i$  e  $\xi_i$  sono i corrispondenti smorzamenti e, se  $z_i$  e  $p_i$  sono zeri e poli reali cambiati di segno,  $\tau_i = 1/z_i$  e  $T_i = 1/p_i$ . La Funzione di Trasferimento si presenta tipicamente come una funzione razionale, frazione di due polinomi  $N(s)/D(s)$ , dove  $N(s)$  ha grado strettamente minore del grado di  $D(s)$ .

È utile ora definire la funzione di sensitività complementare  $F(s)$ . Questa non è altro che la funzione di trasferimento tra il setpoint  $y^0(t)$  e l'uscita  $y(t)$  [1]. Se  $G(s)$  è la Funzione di Trasferimento del sistema ad anello aperto e  $\beta(s)$  è la trasformata di Laplace della controreazione vale

$$F(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{y^0(t)\}} = \frac{\beta(s) \cdot G(s)}{1 + \beta(s) \cdot G(s)} \quad (1.17)$$

Considerando inoltre il sistema *ad anello chiuso* valutiamo la sua Funzione di Trasferimento  $G_C(s)$  come:

$$G_C(s) = \frac{G(s)}{1 + \beta(s) \cdot G(s)} \quad (1.18)$$

Il prodotto  $L(s) = \beta(s) \cdot G(s)$  prende il nome di Funzione di Trasferimento d'anello.

### 1.2.3 Stabilità

Per sistemi lineari e tempo-invarianti la determinazione delle proprietà di stabilità si può effettuare in modo relativamente semplice in quanto queste sono determinate dall'evoluzione temporale delle variabili in gioco. Per di più anche il calcolo di questa evoluzione può essere evitato in quanto è possibile dare condizioni *necessarie e sufficienti* di stabilità asintotica riferite alle sole proprietà del sistema.

Un sistema è detto *asintoticamente stabile* se, perturbato in uno dei suoi stati di equilibrio, esso tende a ritornarvi. In particolare è possibile dimostrare come condizione *necessaria e sufficiente* per la stabilità asintotica sia che la Funzione di Trasferimento del sistema abbia poli solo a parte reale negativa. La condizione sui poli della Funzione di Trasferimento si può trasferire agli zeri del suo denominatore  $D(s)$  che prende il nome di polinomio caratteristico.

## Diagramma di Bode

Una importante rappresentazione della risposta in frequenza di un sistema lineare tempo-invariante è il diagramma di Bode. Questo consiste in due grafici che rappresentano rispettivamente l'ampiezza e la fase della funzione complessa di risposta in frequenza.

Questa rappresentazione non avviene su un unico piano ma su due piani che hanno in ascissa, come variabile indipendente, la frequenza  $\omega$ , e in ordinata il modulo dell'ampiezza  $|F(i\omega)|$  o il modulo della fase  $|\phi| = |\arg(F(s))|$ . I due diagrammi nei sistemi a fase minima (causali, stabili e con Funzione di Trasferimento razionale) non possono essere modificati indipendentemente: agendo sulla risposta in modulo si modifica anche la risposta in frequenze e viceversa.

Tipicamente nel diagramma del modulo si rappresenta in scala log-log la frequenza in ordinata e il modulo in ascissa espresso in decibel:

$$|F(i\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}(|F(i\omega)|) \quad (1.19)$$

### 1.2.4 Approssimanti di Padé

La funzione di trasferimento di un segnale ritardato di un tempo finito  $t_0$ , è data da:

$$\mathcal{L}\{f(t - t_0)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot e^{-st_0} \quad (1.20)$$

Al fine di non perdere il vantaggio di poter esprimere la funzione di trasferimento tramite un rapporto tra polinomi può essere utile descrivere l'effetto del ritardo in modo approssimato tramite i cosiddetti "approssimanti di Padé", che in generale hanno ordine arbitrario. Nell'ambito del controllo PI, nell'interesse di questo lavoro, consideriamo gli approssimanti del primo ordine. Grazie allo sviluppo dell'esponenziale

$$e^{-st_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-st_0)^n}{n!} = 1 - st_0 + \frac{(st_0)^2}{2} + \dots \quad (1.21)$$

si può effettuare una approssimazione in un rapporto tra due polinomi  $P(s)/Q(s)$ . Considerando dunque  $s \cdot t_0 \ll 1$  e indicando le possibili approssimazioni con due interi  $(p; q)$ , rispettivamente gradi di  $P(s)$  e  $Q(s)$ , nel caso dell'esponenziale possiamo scrivere, per i primi ordini, gli approssimanti come:

$$\begin{aligned} (0;1) &= \frac{1}{1 + t_0 \cdot s} \\ (1;0) &= 1 - t_0 \cdot s \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$(1;1) = \frac{1 - t_0 \cdot s/2}{1 + t_0 \cdot s/2}$$

Non è difficile convincersi che, tra questi, l'approssimante  $(1;1)$  sia il più accurato in quanto, sotto la condizione  $s \cdot t_0 \ll 1$  si può riscrivere come

$$(1;1) = \frac{1 - t_0 \cdot s/2}{1 + t_0 \cdot s/2} \simeq (1 - t_0 \cdot s/2) \cdot (1 - t_0 \cdot s/2) = 1 - st_0 + \frac{(st_0)^2}{2}$$

che replica bene lo sviluppo in serie della funzione esponenziale fino al secondo ordine. Tuttavia, ai fini di questo lavoro in cui i tempi caratteristici del sistema relativamente piccoli rispetto al ritardo  $t_0$ , l'approssimante  $(0;1)$  fornisce una descrizione sufficientemente buona.

# Capitolo 2

## Parte Sperimentale

L'attività svolta consiste nella ricerca della risposta all'impulso del sistema lineare in esame. Questo consiste in un laser a diodo a cavità estesa, descritto ampiamente in [4], studiato in questo lavoro prettamente dal punto di vista della stabilità termica. Questa è fondamentale in un generico esperimento di fisica atomica in quanto la frequenza di un laser ha tipicamente una forte dipendenza dalla temperatura.

### 2.1 L'apparato

L'apparato è costituito dal montaggio meccanico del laser oggetto dello studio, un termistore atto a misurarne la temperatura interna, un modulo Peltier che fa da pompa di calore ed infine un microcontroller interfacciato da una porta seriale a un personal computer e supportato da un circuito elettrico apposito che costituisce il regolatore.

Il laser è realizzato tramite il sistema di montaggio descritto in [4] ed è costituito sostanzialmente da tre parti (Figura 2.1): un blocco metallico a forma di "L" che mantiene il diodo, un collimatore ottico e un reticolo di diffrazione regolabile che permette di sintonizzare il laser su diverse lunghezze d'onda. Il blocco principale è dunque posto sul modulo Peltier montato su una piastra che funge da pozzo termico e l'intero sistema è posto in una scatola metallica. Tutte le parti metalliche sono realizzate in Alluminio.

Il sensore di temperatura utilizzato è un termistore  $QTLC - 14$ , con una resistenza nominale di  $R_t = 10k\Omega$  alla temperatura  $T_0 = 25^\circ C$ . Intorno a  $T_0$  il valore della resistenza diminuisce circa del 4% ogni volta che la temperatura aumenta di  $1K$ . Il processo di misura utilizza un partitore di tensione formato da  $R_1 = 10k\Omega$  (Figura 2.2) e dal termistore  $R_t$ . Il partitore è alimentato dalla tensione di riferimento

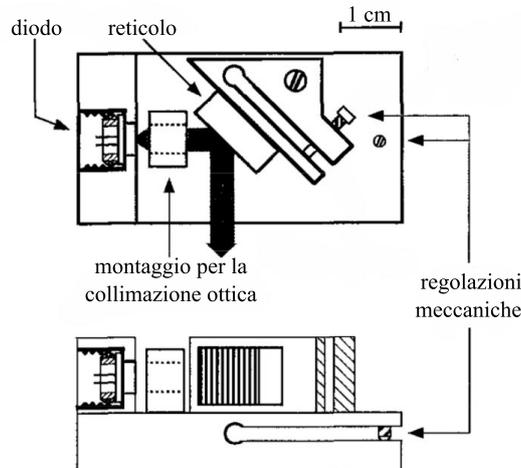


Figura 2.1: schema del montaggio del laser, da [4].

$V_{REF} = 2.5V$  e il valore  $V_{REF} \cdot \frac{R_t}{R_t + R_1}$  è letto da un convertitore analogico-digitale a 24-bit (AD7745, IC6 in Figura 2.2) usando la stessa  $V_{REF}$  come riferimento per il fondo scala in modo da non rendere necessaria la stabilità della stessa.

Solitamente gli algoritmi di stabilizzazione richiedono la linearità del segnale di errore tra la temperatura misurata  $T_{mis}$  e la temperatura di setpoint  $T_{set}$ . La linearità richiesta tipicamente non è elevata, tuttavia i termistori sono dispositivi non lineari. Processando digitalmente il segnale diventa facile calcolare la temperatura misurata  $T_{mis}$  a partire dalla resistenza  $R_t(T)$ .

L'equazione standard per termistori NTC è

$$R_t(T) = R_t(T_0) \cdot \exp\left(\frac{\beta}{T_0} - \frac{\beta}{T}\right) \quad (2.1)$$

dove  $\beta, T, T_0$  sono misurati in Kelvin.  $T_0$  è la temperatura di riferimento (tipicamente  $25^\circ C = 298.15K$ ) e  $R_t(T_0)$  è il valore nominale della resistenza alla temperatura di riferimento, nel nostro caso  $10k\Omega$ .

Il valore di  $\beta$  è facilmente estraibile dalla caratteristica del dispositivo, reperibile nella documentazione relativa, tramite un fit non lineare dell'equazione 2.1 da cui si determina  $\beta = 3880.5K$ .

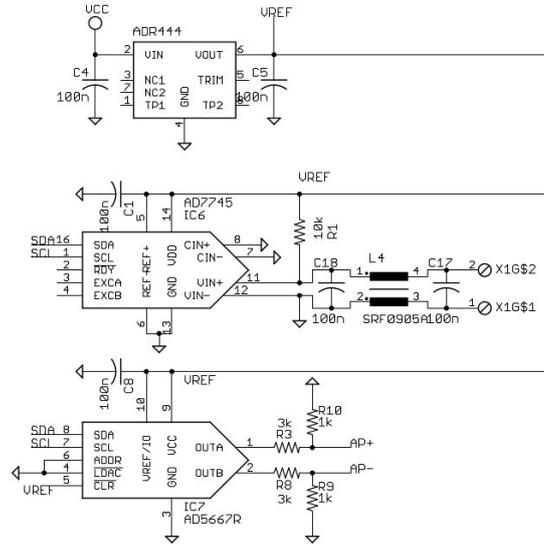


Figura 2.2: dettaglio del circuito, partitore di tensione.

È utile a questo punto valutare il rapporto caratteristico del partitore

$$A(T) = \frac{R_t(T)}{R_1 + R_t(T)} \quad (2.2)$$

per cui ponendo  $R_1 = R_t(T_0) = 10k\Omega$  vale

$$A(T) = \frac{\exp\left(\frac{\beta}{T_0} - \frac{\beta}{T}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\beta}{T_0} - \frac{\beta}{T}\right)}$$

che si può espandere se  $T = T_0 + \Delta T$ ,  $\Delta T \ll T_0$  intorno a  $T_0$  come

$$A(T) \simeq 1/2 - \frac{\alpha}{4} \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{\alpha}{4} \left[\frac{\Delta T}{T_0}\right]^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 12)}{48} \left[\frac{\Delta T}{T_0}\right]^3 + \dots \quad (2.3)$$

dove si è posto  $\alpha = \beta/T_0 \sim 13$ .

Possiamo valutare il contributo relativo dei termini non lineari semplicemente come  $\Delta T/T_0$  nel caso del termine di secondo ordine e  $\frac{(\alpha^2-12)}{12} [\Delta T/T_0]^2$  per il termine del terzo ordine. Sapendo che  $|\Delta T_{MAX}| \sim 10K$  e  $\alpha \sim 13$  questi danno un contributo stimato rispettivamente al 3.4% e 1.5%.

Per valutare la bontà di questa approssimazione lineare è stata impiegata la caratteristica del termistore per calcolare il valore di  $A(T)$  nell'intervallo di lavoro opportuno

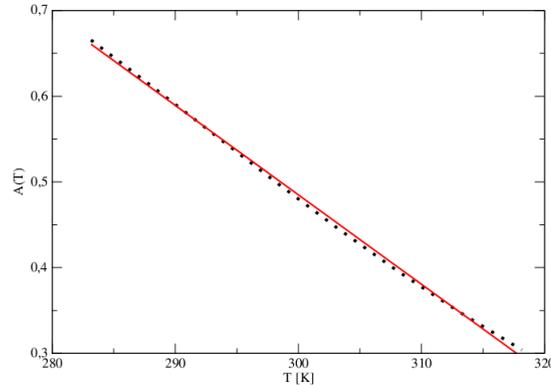


Figura 2.3: in nero il rapporto  $A(T)$ ; in rosso la retta di best fit.

(da  $10^{\circ}\text{C}$  a  $45^{\circ}\text{C}$ ). La curva risultante è riportata in Figura 2.3 insieme alla retta che meglio la asseconda. L'errore relativo massimo dovuto alle non linearità, il quale si vede alle temperature più alte dell'intervallo di lavoro, è inferiore al 3%.

Il valore  $V(T) = V_{REF} \cdot A(T)$  (dall'equazione 2.2) è campionato dall'AD7745 (IC6 in Figura 2.2). Questo è un ADC ad alta risoluzione inizializzato per acquisire continuamente a  $122.1\text{ms}$  così da evitare disturbi dati tipicamente dalla rete elettrica. Questa scelta della frequenza di campionamento determina una risoluzione effettiva di 21.1 bit, dunque l'ADC può distinguere differenze di tensione di  $V_{REF} \cdot 2^{-21.1} \sim 1.1\mu\text{V}$ . Dalla 2.3 possiamo stimare la sensibilità del termistore come il coefficiente moltiplicativo del termine lineare in  $\Delta T$ . Questa risulta essere approssimativamente  $\sim 27.3\text{mV/K}$  per cui il valore minimo di temperatura leggibile dall'ADC è di  $40.7\mu\text{K}$ .

Il regolatore usa un alimentatore esterno da  $5\text{V } 2\text{A}$  per fornire energia elettrica all'attuatore e a se stesso. Il collegamento al laser è dato da due cavi per il termistore e altrettanti per il modulo Peltier mentre la comunicazione con il computer avviene mediante un bus USB tramite cui può scrivere e ricevere in diretta comandi ASCII. Il fulcro del regolatore è costituito da un Atmel ATmega328P, un microcontroller a 8-bit programmabile che realizza l'algoritmo PI implementato tramite codice C++ con guadagni  $g_p = 4.58 \cdot 10^{-3}\text{A/K}$  e  $g_i = 1.53 \cdot 10^{-3}\text{HzA/K}$ .

Per poter invertire comodamente la polarità dell'alimentazione è conveniente l'uso di un ponte H o "full bridge" (Figura 2.4) collegato a un capo alla tensione  $V_{REF}$  e all'altro a massa. Il controller dunque determina il segno della corrente da erogare

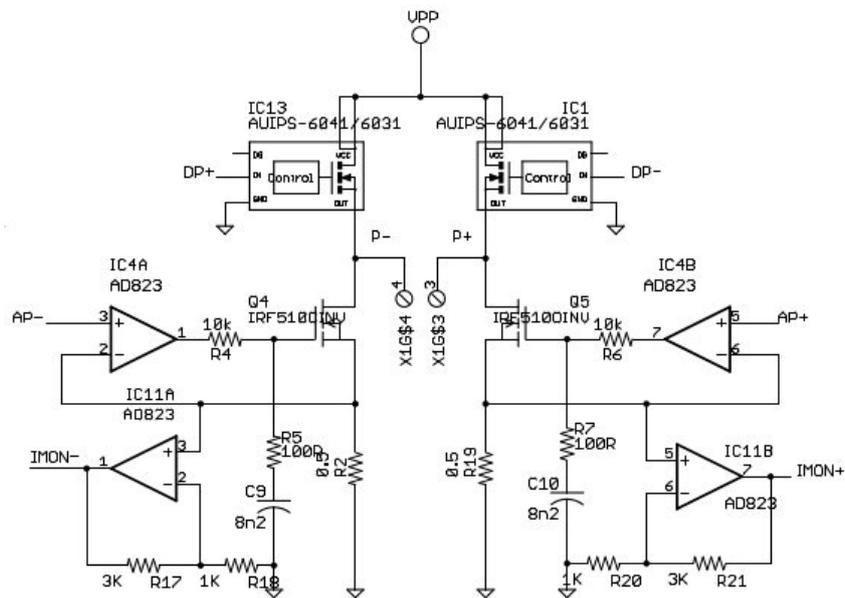


Figura 2.4: dettaglio del circuito, ponte H.

nel modulo Peltier tramite il ponte H mentre un DAC decide il modulo dell'intensità.

I moduli Termoelettrici Peltier sono dispositivi a stato solido capaci, tramite l'omonimo effetto, di tradurre una corrente in un gradiente di temperatura che può essere utilizzato sia per il raffreddamento che per il riscaldamento. Questi sono costituiti essenzialmente da un insieme di semiconduttori di due tipi, *p-type* ed *n-type*, messi in parallelo termicamente ed in serie elettricamente e infine posti in piano tra due lastre elettricamente isolanti ma termicamente conduttrici (tipicamente ceramica). Quando alle due estremità libere è collegata una differenza di potenziale, si crea un gradiente di temperatura tra le due facce del modulo. La differenza di temperatura fa sì che il calore si sposti da una faccia all'altra e sia possibile distinguere il lato freddo e il lato caldo. Quest'ultimo, al fine di garantire il corretto funzionamento del dispositivo, richiede un metodo di rimozione del calore in modo che la faccia fredda possa portare l'oggetto con cui è a contatto a temperature sensibilmente minori rispetto alla temperatura ambiente. È possibile invertire la direzione del flusso di calore invertendo la corrente che attraversa il Peltier.

## 2.2 Caratterizzazione

### 2.2.1 Introduzione

Ai fine di valutare il sistema dal punto di vista della stabilità asintotica è necessario studiare la sua risposta ad uno dei segnali canonici i.e. impulso, rampa o scalino. Studiando le risposte canoniche sarà possibile giungere alla sua funzione di trasferimento che, per quanto detto precedentemente, descrive esaustivamente la risposta termica del sistema.

È ragionevole assumere che il sistema sia relativamente lento e che presenti caratteristiche tipiche dei sistemi del primo o secondo ordine almeno in prima approssimazione e lontano dagli eventuali bruschi transienti della variabile di controllo. Prendendo atto dunque degli inevitabili limiti dell'attuatore possiamo concludere che lo scalino sia il segnale canonico più adatto a rendere conto delle proprietà termiche del sistema.

Il lavoro svolto dunque è consistito nell'analisi della risposta in temperatura del laser in seguito a un segnale di ingresso del tipo

$$I(t) = \bar{I} \cdot \Theta(t) \quad (2.4)$$

dove  $\Theta(t)$  è la funzione gradino di Heaviside e  $\bar{I}$  è una corrente assegnata e costante.

Il valore di  $\bar{I}$  deve essere regolato in modo che il sistema subisca, all'asintoto, una variazione di temperatura apprezzabile. Non bisogna comunque tralasciare il fatto che, nonostante l'obiettivo del lavoro sia il raggiungimento dell'efficienza nelle correzioni in temperatura, dal punto di vista della stabilità asintotica è necessario che il sistema sia studiato per entrare velocemente a regime dove l'errore è entro il  $mK$ .

Detto questo, è chiaro che il sistema sarà esaminato per  $\Delta T$  asintotiche, dunque intensità  $\bar{I}$ , sensibilmente più alte di quelle tipiche della situazione di regime in modo da essere insensibili ad eventuali fonti di disturbo, come ad esempio le derive termiche date dalla instabilità della temperatura ambiente o generali disturbi sul carico a causa dei quali i sistemi in retroazione sono stati in primo luogo messi a punto.

### 2.2.2 Misure

Il regolatore è capace di applicare una corrente ai capi dell'attuatore a partire dal valore  $n$  e dal segno positivo o negativo, comunicati dall'utente tramite la seriale virtuale per valori di picco  $|I_{max}| = 2.048A$ , con un'incertezza dell'1%, per  $n_{max} = 2^{16} = 65536$ . È conveniente definire dunque  $I_0$  come il modulo della corrente erogata dal regolatore quando  $n = 1$ , ovvero  $I_0 = 3.125 \cdot 10^{-5}A$ , in modo che da ora in

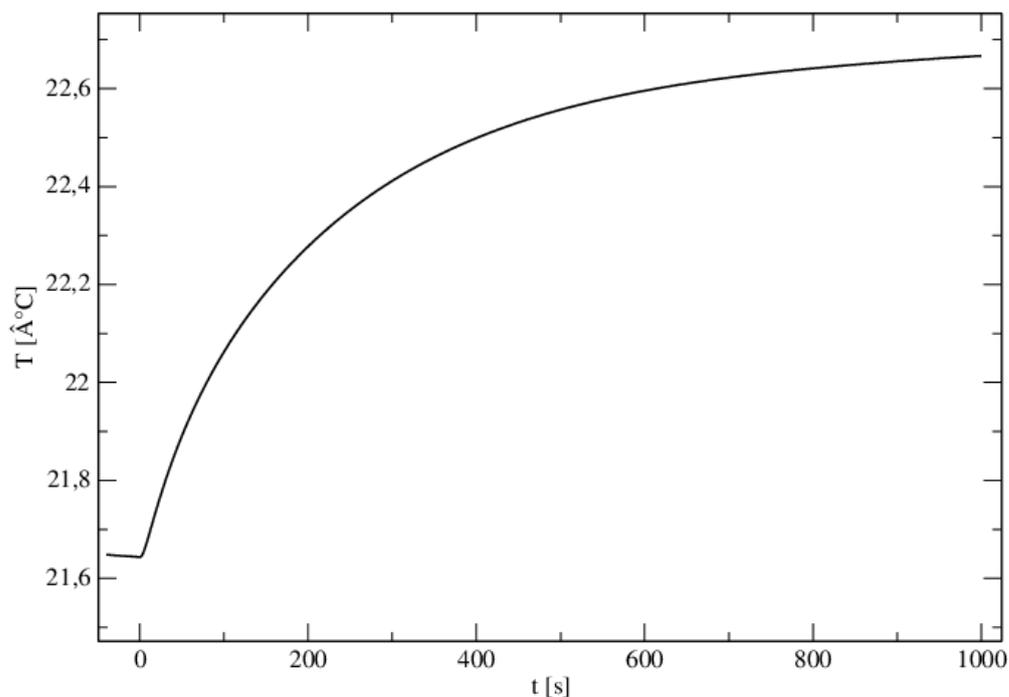


Figura 2.5: risposta  $T(t)$  con  $\bar{I} = 500 \cdot I_0$

poi ci si possa riferire ai valori della corrente erogata semplicemente come multipli della corrente  $I_0$ . Il verso della corrente è fissato convenzionalmente in modo che le correnti positive facciano scaldare la faccia del modulo Peltier a contatto con il diodo laser.

È ragionevole iniziare a misurare le risposte allo scalino a partire da correnti piccole in modulo, per poi procedere gradualmente verso correnti più ampie prestando attenzione a non spingersi troppo oltre i limiti di buona linearità del termistore, ovvero da  $10^\circ\text{C}$  a  $40^\circ\text{C}$ .

Dato il segnale in ingresso 2.4 con  $\bar{I} = 500 \cdot I_0$  si misura la temperatura del diodo laser in funzione del tempo, campionando il valore una volta al secondo fino a  $t = 1000\text{s}$ . La curva risultante è mostrata in Figura 2.5.

### 2.2.3 Adattamento dati

I sistemi del primo e secondo ordine sono caratterizzati da una funzione di trasferimento del tipo:

$$F(s) = \frac{\mu \cdot e^{-s \cdot t_0}}{(1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2)} \quad (2.5)$$

dove  $t_0$  indica il tempo impiegato dal sistema a reagire alla variazione brusca della variabile di controllo, più semplicemente il ritardo. Il sistema si dice del primo ordine se  $T_2 = 0$ , mentre è del secondo se  $T_{1,2}$  sono simultaneamente non nulli.

È facile vedere, effettuando una trasformata inversa, come la risposta in temperatura sia esprimibile come:

$$\begin{cases} T(t) = T_0 & \text{per } t < t_0 \\ T(t) = T_0 + b_1 [1 - \exp(-\alpha_1(t - t_0))] + b_2 [1 - \exp(-\alpha_2(t - t_0))] & \text{per } t > t_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

dove possiamo facilmente identificare la differenza di temperatura asintotica come

$$\Delta T_{as}(\bar{I}) = b_1(\bar{I}) + b_2(\bar{I}) \quad (2.7)$$

Inoltre  $\alpha_{1,2} = 1/T_{1,2}$  sono l'inverso delle costanti di tempo del sistema e  $t_0$  è il ritardo.

Per garantire la convergenza del fit non lineare è necessario effettuare delle buone stime iniziali dei parametri per cui si può valutare

$$\begin{cases} T_0 \sim 21^\circ C \\ b_1 \sim 1^\circ C \\ b_2 \sim 0.1^\circ C \\ \alpha_1 \sim 0.005 Hz \\ \alpha_2 \sim 0.02 Hz \\ t_0 \sim 1 \end{cases}$$

Questi valori sono così stimati alla luce del fatto che la presenza del secondo esponenziale non è lampante, dunque questo ha un coefficiente ( $b_2$ , nell'equazione 2.6) piccolo rispetto al primo ( $b_1$ ) e un tempo caratteristico più corto.

Dalla Figura 2.6 si evince chiaramente come il sistema sia descritto al meglio dalla funzione di trasferimento tipica dei sistemi del secondo ordine. Questa permette di

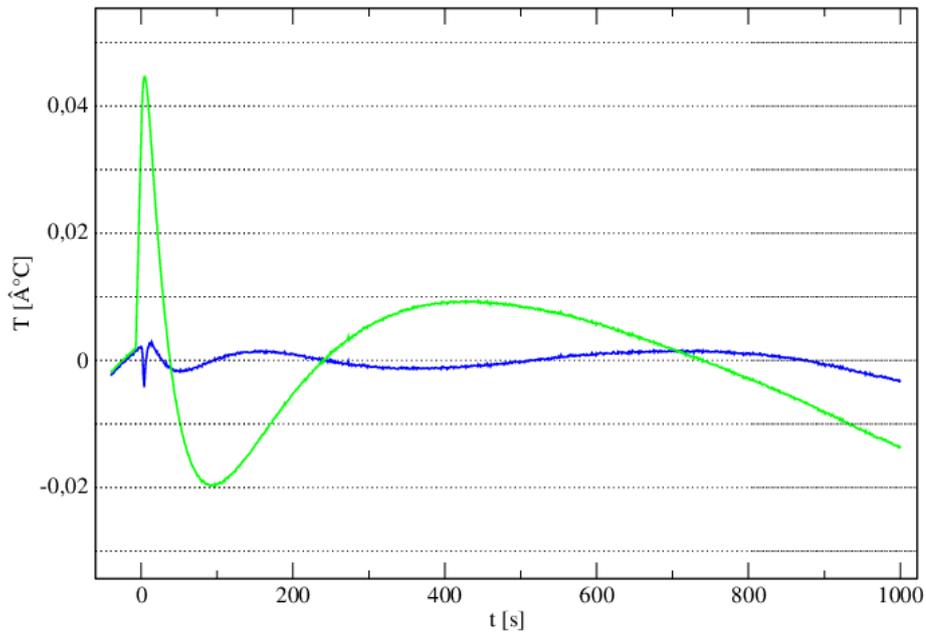


Figura 2.6: residui del fit eseguito sulla curva in Figura 2.5. In verde il residuo ottenuto considerando il sistema del primo ordine, in blu considerandolo del secondo ordine.

replicare la curva reale con un errore sotto i  $4mK$  in modulo, un ordine di grandezza in meno rispetto all'errore commesso considerando il sistema del primo ordine. Il modello può essere considerato ragionevolmente buono ma solo dopo la fase iniziale di transiente, dove sarebbe richiesto un contributo polinomiale, ritenuto inessenziale per il lavoro qui svolto.

Riguardo la misura iniziale discussa, il fit eseguito tramite la Formula 2.6 ha come risultato:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = 21.646^\circ C \\ b_1 = 0.844^\circ C \\ b_2 = 0.193^\circ C \\ \alpha_1 = 0.00384 Hz \\ \alpha_2 = 0.0172 Hz \\ t_0 = 3.723 s \end{array} \right.$$

Questo procedimento viene ripetuto aumentando di volta in volta  $|\bar{I}|$  di un valore pari a  $1000 \cdot I_0 = 3.125 \cdot 10^{-2} A$  fino a raggiungere il valore

$$\bar{I}_{ex} = 10500 \cdot I_0 \sim 0.33 A$$

Dunque si replica ancora il processo per gli stessi valori di  $|I_0|$ , ma con la polarità invertita in modo da poter effettuare l'analisi del comportamento del sistema in seguito ad un ampio ventaglio di scenari possibili all'interno dell'intervallo di lavoro specificato. In questo modo sono state ottenute sei curve rappresentanti il comportamento dei parametri caratteristici della Formula 2.6 al variare dell'ampiezza dello scalino di corrente applicato al modulo Peltier.

La temperatura iniziale  $T_0$  in questo contesto è chiaramente non correlata con l'ampiezza dello scalino. Inoltre anche nel dominio di Laplace questa grandezza non contribuisce a caratterizzare il sistema dunque si procederà con l'analisi ponendo per comodità  $T_0 = 0^\circ C$ .

Per quanto detto precedentemente sull'efficienza a regime, possiamo dire riguardo ai dati mostrati in Figure 2.7 e 2.8, rappresentanti gli andamenti dei parametri  $b_{1,2}(\bar{I})$  che le curve mostrano una buona linearità nei pressi dell'origine. Ai fini della stabilità a regime dunque, possiamo fermarci con la descrizione all'ordine più basso trascurando il termine parabolico in  $\bar{I}$  che consentirebbe una descrizione più precisa agli estremi dell'intervallo di lavoro. Il contributo parabolico, comunque, è facilmente giustificabile valutando che il modulo Peltier, lontano dalle basse intensità i.e.  $|\bar{I}| \gg I_0 \sim 3 \cdot 10^{-5} A$ , non possa evitare di dissipare parte di quella corrente in calore indipendentemente dal verso in cui la corrente scorre, finendo inevitabilmente per scaldare il sistema.

Alla luce di questo possiamo scrivere

$$b_{1,2} = b'_{1,2} \cdot \bar{I}$$

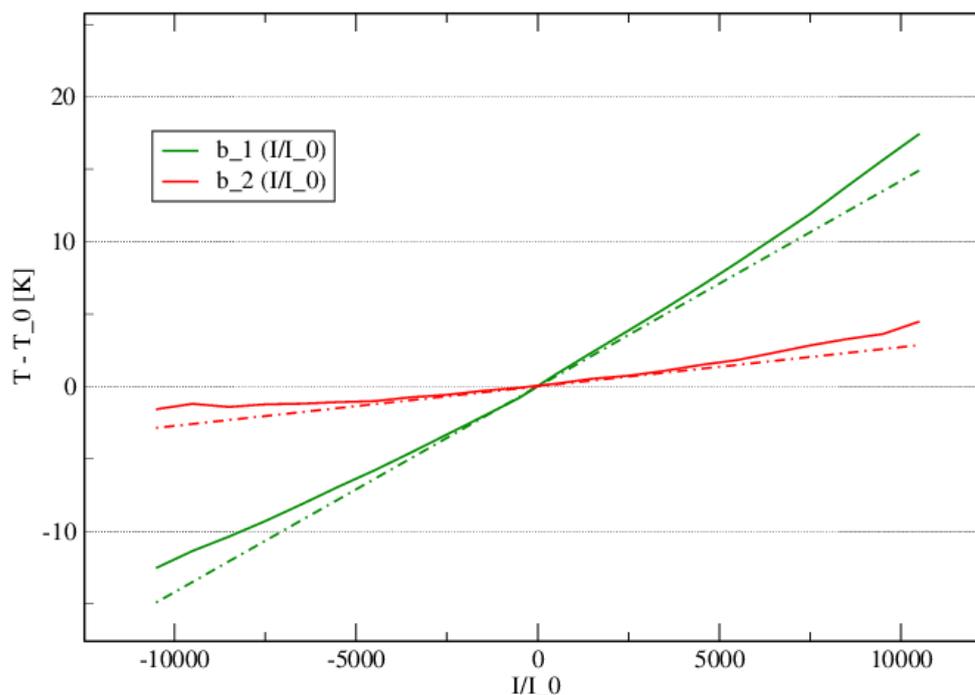


Figura 2.7: andamento di  $b_{1,2}$  in funzione dell'ampiezza  $\bar{I}$ . In linea continua i dati acquisiti, in linea tratteggiata la retta di best fit.

dove si intende con  $b'_{1,2}$  la pendenza della curva nell'origine, uguale alla pendenza della retta di best fit.

In questo modo possiamo valutare la differenza di temperatura asintotica, ricordando la definizione della stessa in 2.7 come

$$\Delta T_{as} = T' \cdot \bar{I}$$

dove si è posto  $b'_1 + b'_2 = T'$ .

Il risultato del fit eseguito sui dati rappresentati in Figura 2.7 e 2.8 è

$$\begin{cases} b'_1 = 45.47K/A \\ b'_2 = 8.71K/A \\ T' = 54.18K/A \end{cases}$$

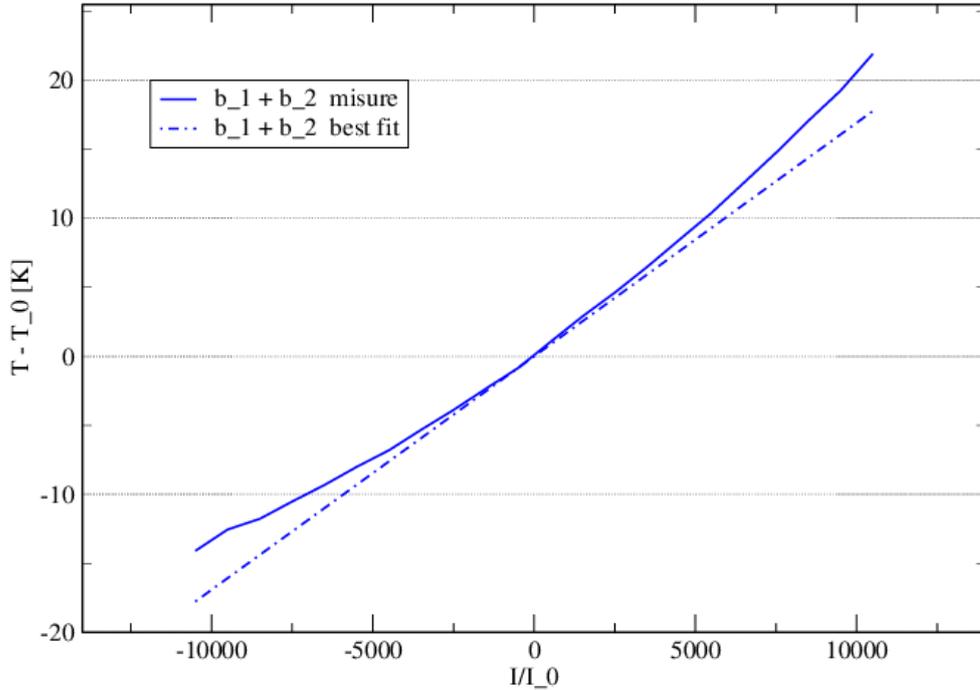


Figura 2.8: andamento di  $\Delta T_{as}$  in funzione dell'ampiezza  $\bar{I}$ . In linea continua i dati acquisiti, in linea tratteggiata la retta di best fit.

Per valutare la bontà dell'approssimazione al primo ordine valutiamo il contributo non lineare del secondo ordine: eseguendo il fit sulla curva riportante la differenza di temperatura asintotica in funzione dell'ampiezza dello scalino applicato considerandola espressa da

$$\Delta T_{as}(\bar{I}) = T' \cdot I + T'' \cdot I^2$$

possiamo stimare il contributo non lineare relativo, nella situazione di regime, come il rapporto tra il secondo e il primo termine, valutato al valore di  $\bar{I}$  tale che  $\Delta T_{as} = 1K$ .

Questo rapporto è semplicemente

$$|I_{1K}| \cdot \frac{T''}{T'} \sim \frac{T''}{T'} \cdot 1.8 \cdot 10^{-2} A$$

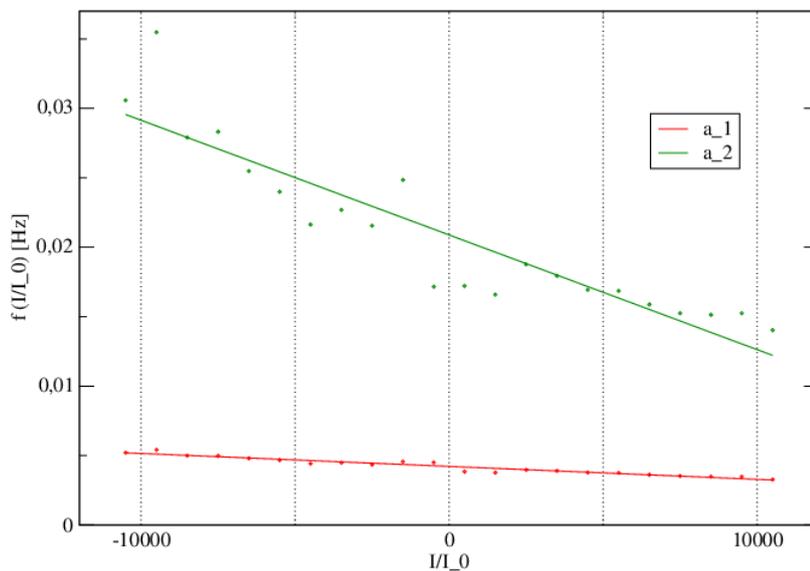


Figura 2.9: andamento dei parametri  $\alpha_{1,2}(\bar{I})$ .

dal quale, posto  $T'' = 37.58K/A^2$  dal fit portano a non linearità inferiori al 2%, per cui possiamo ritenere ragionevole l'approssimazione al primo ordine.

Proseguendo con l'analisi delle curve che descrivono il comportamento dei parametri al variare dell'intensità si apprende che i tempi caratteristici del sistema  $T_{1,2}, t_0$  non sono propriamente costanti, bensì mostrano un andamento approssimativamente lineare con una importante dispersione, soprattutto nel caso del polo secondario, intorno alla retta che meglio si adatta ai dati. In particolare i valori analizzati non sono i tempi caratteristici ma i loro inversi  $\alpha_{1,2} = 1/T_{1,2}$  che ci si aspetterebbe essere costanti, analogamente ai tempi caratteristici stessi, rispetto a variazioni di intensità.

Anche in questo caso si è scelto di eseguire la regressione lineare e dunque approssimare all'ordine più basso, ovvero i parametri di tempo sono approssimati come costanti ed uguali al valore della retta di best fit in  $\bar{I} = 0$ .

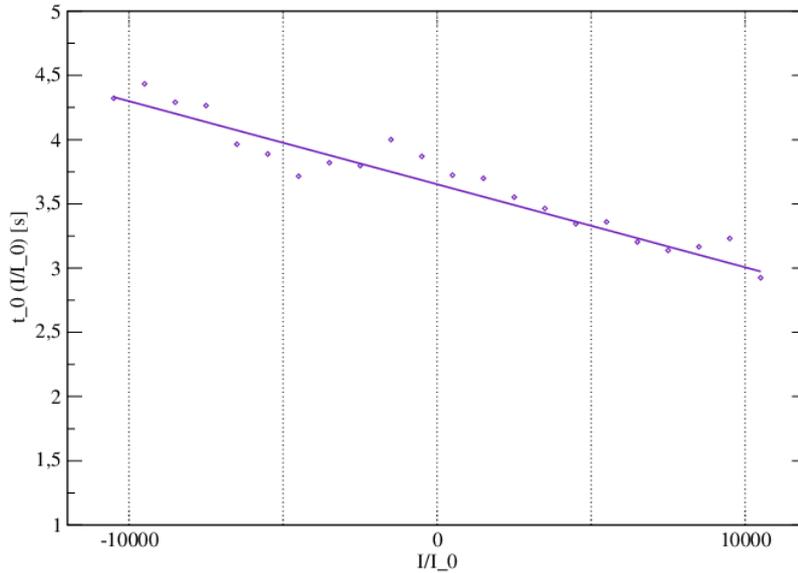


Figura 2.10: andamento di  $t_0(\bar{I})$ .

$$\begin{cases} \alpha_1(\bar{I}) = (4.23\text{Hz} - 2.99\text{HzA}^{-1} \cdot \bar{I}) \cdot 10^{-3} \\ \alpha_2(\bar{I}) = (2.15\text{Hz} - 2.67\text{HzA}^{-1} \cdot \bar{I}) \cdot 10^{-2} \\ t_0(\bar{I}) = 3.65\text{s} - 2.06\text{sA}^{-1} \cdot \bar{I} \end{cases}$$

Valutando il regime di basse intensità (e dunque basse temperature) è facile vedere come sotto la condizione  $\bar{I} < I_{1K}$  le variazioni delle frequenze caratteristiche  $\alpha_{1,2}$  e del ritardo  $t_0$  siano sotto il 3%, dunque si considererà da ora in avanti semplicemente:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4.23 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} & T_1 = 236.3 \text{ s} \\ \alpha_2 = 2.15 \cdot 10^{-2} \text{ Hz} & T_2 = 46.5 \text{ s} \\ \alpha_3 = 0.274 \text{ Hz} & t_0 = 3.65 \text{ s} \end{cases}$$

Grazie all'attività sperimentale svolta, risultano ora determinati tutti i parametri si-

stema in esame nell'approssimazione di basse intensità che permettono di caratterizzare l'oggetto dello studio tramite la sua Funzione di Trasferimento 2.5.

# Capitolo 3

## Analisi

Al fine di avere una caratterizzazione più completa possibile, seppur approssimata in un intervallo di lavoro definito, è possibile alla luce delle misure e delle considerazioni precedentemente discusse scrivere la Funzione di Trasferimento del sistema partendo dalla Trasformata di Laplace della risposta allo scalino 2.6.

### 3.1 Trasferimento ad anello aperto

Ricordando la 1.6 è facile trattare il ritardo  $t_0$  limitando la trattazione alle basse frequenze i.e.  $s \cdot t_0 \ll 1$ . Inoltre

$$\mathcal{L}[(1 - e^{-\alpha t}) \cdot \Theta(t)] = \frac{\alpha}{s \cdot (s + \alpha)}$$

così che, ricordando che la temperatura iniziale  $T_0$  è irrilevante dunque è posta convenzionalmente uguale a zero,

$$\mathcal{L}[T(t)](s) = F(s) = \frac{e^{-t_0 s}}{s} \left( \frac{b_1}{s + \alpha_1} + \frac{b_2}{s + \alpha_2} \right) \quad (3.1)$$

che, grazie alla 1.22 e posto  $\alpha_3 = 1/t_0 = 0.274 \text{ Hz}$  scriviamo come

$$F(s) = \frac{\alpha_3 [(b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2) s + \alpha_1 \alpha_2 (b_1 + b_2)]}{s(s + \alpha_1)(s + \alpha_1)(s + \alpha_3)}$$

Per giungere dalla risposta allo scalino alla risposta all'impulso applichiamo la proprietà 1.3 della Trasformata di Laplace ricordando che è stato posto  $T(0) = 0$  per cui possiamo scrivere finalmente la Funzione di Trasferimento del sistema nella forma

$$G(s) = \frac{k(s + \beta')}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_1)(s + \alpha_3)} \quad (3.2)$$

dove si è posto

$$k = \alpha_3 \cdot (b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2) \simeq 0.104 \text{ Hz}^2\text{K}/A$$

e

$$\beta' = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdot (b_1 + b_2)}{k} \simeq 1.38 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$$

Possiamo a questo punto valutare i diagrammi di Bode validi a basse frequenze i.e.  $s \ll \alpha_3$ . Questi sono riportati in Figura 3.1 e 3.2.

### 3.2 Trasferimento ad anello chiuso

Consideriamo l'azione del regolatore e andiamo a valutare la Funzione di Trasferimento della reazione. L'algoritmo PI fornisce una reazione all'errore che si scrive nel dominio del tempo come

$$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \int e(t)dt \quad (3.3)$$

dove  $e(t) = T(t) - T_s$  è la differenza tra la temperatura attuale e quella desiderata (setpoint). Nel dominio di Laplace, questo tipo di azione corrisponde a una funzione di trasferimento

$$\beta(s) = g_p + \frac{g_i}{s} \quad (3.4)$$

Per proseguire nell'analisi è necessario a questo punto introdurre delle ulteriori approssimazioni. Un metodo molto comune che permette di descrivere un sistema, riducendone l'ordine ma conservandone le principali caratteristiche, consiste nel cercare coppie di zeri e poli vicini nel semipiano  $\Re s < 0$  e "forzarne" la cancellazione i.e. se  $\omega_1 \sim \omega_2$  si può approssimare

$$\frac{s + \omega_1}{s + \omega_2} \simeq 1$$

Nel caso del sistema preso in esame si nota che  $\beta' \sim \alpha_2$  per cui possiamo forzare la cancellazione dello zero e del polo lasciando invariati i restanti parametri.

Un altro metodo molto comune è quello che risponde al nome di "approssimazione di polo dominante". Se una funzione di trasferimento ha almeno due poli  $\alpha_{1,2}$  e risulta ad esempio  $\omega_1 \ll \omega_2$  si può considerare

$$\frac{k}{(s + \omega_1) \cdot (s + \omega_2)} \simeq \frac{k}{\omega_2 \cdot (s + \omega_1)}$$

ovvero trascurare l'effetto del polo secondario lasciando invariati gli altri parametri.

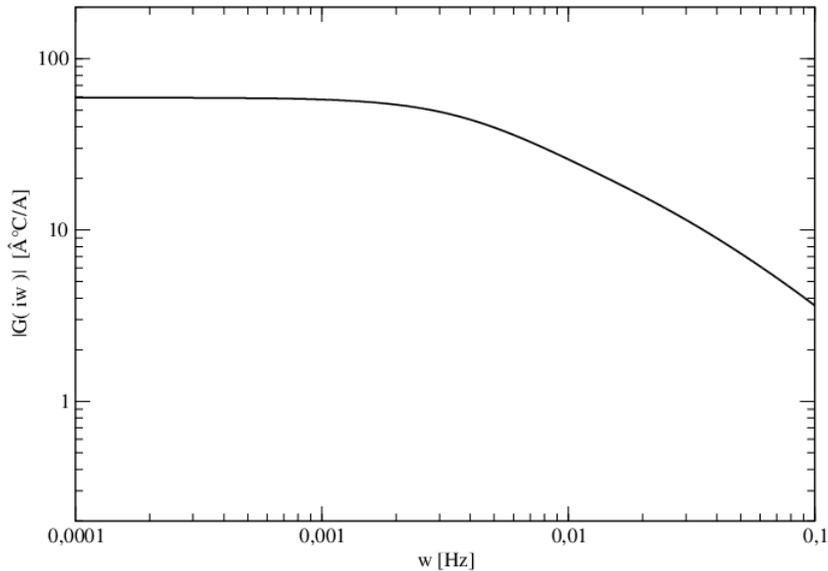


Figura 3.1: diagramma di Bode  $|G(i\omega)|$ .

Notando che  $\alpha_1 \ll \alpha_3$  possiamo riscrivere la 3.2 come

$$G(s) \simeq \frac{k}{\alpha_3 \cdot (s + \alpha_1)} = \frac{\alpha_1 \cdot k'}{(s + \alpha_1)} \quad (3.5)$$

dove abbiamo posto per comodità  $k' = \frac{k}{\alpha_1 \cdot \alpha_3} = 1.142 \cdot 10^3 \text{ KA}^{-1}$ . Il sistema risulta dunque approssimato al primo ordine.

A questo punto possiamo valutare la 1.18

$$G_C(s) = \frac{G(s)}{1 + \beta(s) \cdot G(s)} \simeq \frac{1}{\beta(s)} \quad \text{se} \quad |\beta(s) \cdot G(s)| \gg 1$$

Nel regime basse frequenze, ricordando la 3.4, si vede facilmente che

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \beta(s) = \infty \quad (3.6)$$

per cui sapendo che nel dominio di Laplace la risposta a un input  $O(s)$  è nella forma 1.15 e ricordando la trasformata della funzione scalino è  $1/s$  possiamo scrivere

$$O(s) = \bar{I} \cdot \frac{G_C(s)}{s} \quad (3.7)$$

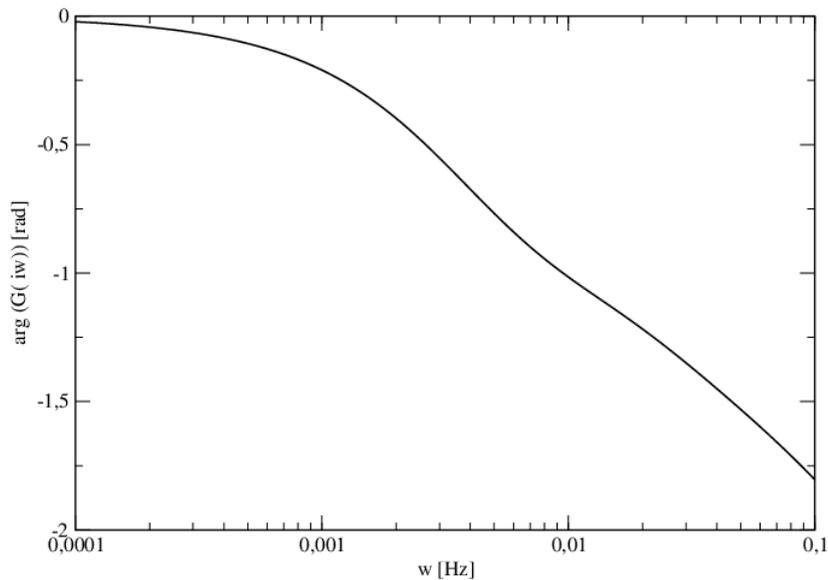


Figura 3.2: diagramma di Bode  $\arg[G(i\omega)]$ .

Impiegando il Teorema de valore finale 1.8 dunque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} o(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot O(s) = \bar{I} \lim_{s \rightarrow 0^+} G_C(s) \simeq \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\bar{I}}{\beta(s)} \rightarrow 0$$

Questo equivale a dire che il regolatore è in grado di compensare a regime un disturbo modellizzabile come uno scalino.

Valutiamo ora la funzione di trasferimento d'anello, definita a partire dalla 3.4

$$L(s) = \beta(s) \cdot G(s) \simeq \frac{\alpha_1 \cdot k' (g_p s + g_i)}{s \cdot (s + \alpha_1)} \quad (3.8)$$

si ha che

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} L(s) \simeq \frac{g_i \cdot k'}{s} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} L(s) \simeq \frac{\alpha_1 \cdot g_p \cdot k'}{s} \rightarrow 0$$

da cui possiamo dire che esiste  $s_1$  tale che valga

$$|\beta(s_1) \cdot G(s_1)| = 1 \quad (3.9)$$

e che questa prende il nome di "frequenza di guadagno unitario". A partire da questa chiamiamo

$$\phi_1 = \arg(\beta(s_1)G(s_1))$$

da cui definiamo il "margine di fase" come

$$\theta = |\phi_1 - \pi| \quad (3.10)$$

Questa risulta essere una quantità rappresentativa della stabilità del sistema in quanto se  $\theta \sim 0$  i.e.  $\phi_1 \sim \pi$  la funzione di trasferimento in anello chiuso 1.18 tende a divergere portando il sistema a subire oscillazioni incontrollate e in generale all'instabilità. Come già detto precedentemente, è estremamente raro che modulo e fase di  $G(s)$  siano indipendenti. A causa di questo, tipicamente  $\theta < \pi/2$ .

A partire dalla 3.8 è ora possibile trovare in modo relativamente semplice la frequenza di guadagno unitario: assumendo  $s_1 \gg \alpha_1$ ,  $g_p s_1 \gg g_i$ ,  $\gamma^2 = k' g_p \gg 1$  si ha

$$|L(s)| \simeq \left| \frac{\alpha_1 k' g_p}{s_1} \right| \simeq 1$$

da cui banalmente  $|s_1| = \alpha_1 k' g_p$ . Ponendo dunque  $s = i\omega$  si ha  $\theta = \pi/2$ . È possibile semplificare ulteriormente regolando  $g_p$  e  $g_i$  in modo che zero e polo della funzione di trasferimento d'anello si compensino per cui si fissa  $g_i = \alpha_1 g_p$  così che

$$L(s) = \beta(s)G(s) = \frac{\alpha \gamma^2}{s}$$

e possiamo riscrivere la funzione di trasferimento ad anello chiuso come

$$G_C(s) = \frac{\alpha_1 k' s}{s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.11)$$

dove si è posto

$$\begin{cases} \omega_0 = s_1 = \alpha_1 \gamma & \text{frequenza naturale} \\ \zeta = \frac{1 + \gamma^2}{2\gamma} & \text{fattore di smorzamento} \end{cases}$$

Il sistema così descritto è detto del secondo ordine e richiamando la 3.7 possiamo

dire che il comportamento del sistema dipende esclusivamente dai poli di  $G_C(s)$ . Questi sono, per  $\gamma > 1$  come nel caso di questo lavoro

$$s_{\pm} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\alpha_1\gamma^2, \quad -\alpha_1 < 0$$

Sia  $\alpha$  che  $\gamma$  sono grandezze definite positive, dunque è garantita la stabilità asintotica.

Si noti come, nel caso più generale in cui  $\zeta$  può assumere valori positivi arbitrari (si è assunto  $\gamma^2 \gg 1$ ) la ricerca degli zeri del polinomio caratteristico della 3.11 porta a due soluzioni complesse coniugate se  $\zeta < 1$  e a due soluzioni reali e coincidenti se  $\zeta = 1$ . In ogni caso  $\Re s_{\pm} < 0$  dunque risulta assicurata la stabilità asintotica. Nel primo caso si parla di *sottosmorzamento*, nel secondo di *smorzamento critico*.

Si ricorda tuttavia che  $\zeta$  è stato definito come  $\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}$  che risulta sempre maggiore dell'unità in quanto si è assunto  $\gamma \gg 1$ .

Si noti come in questo caso la 3.11 può ora essere scritta come

$$G_C(s) = \frac{\alpha_1 k' s}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_1 \gamma^2)} = \frac{k' s}{\alpha_1(\gamma^2 + 1)} \left[ \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\alpha_1 \cdot \gamma^2}{s + \alpha_1 \gamma^2} \right]$$

Per cui, richiamando la 1.11 e ricordando la convenzione sulla temperatura iniziale  $T_0$ , possiamo antitrasformare  $O(s) = \bar{I} \cdot G_C(s)/s$  per giungere all'output in funzione di  $\gamma^2 = k' g_p$

$$T(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_C(s)}{s} \right] (t) = T_0 + \frac{\bar{I} k'}{\alpha_1(\gamma^2 + 1)} \left[ e^{-\alpha_1 t} - \frac{1}{\gamma^2} \cdot e^{-\alpha_1 \gamma^2 t} \right] \quad (3.12)$$

### 3.3 Misure Finali

Tenendo conto delle approssimazioni che permettono di giungere alla 3.11 non è ragionevole supporre che l'anello di regolazione garantisca stabilità per guadagni arbitrariamente elevati tenendo conto che il ritardo ed il polo secondario, trattati in modo molto approssimato, possono introdurre sfasamenti che portano il sistema all'instabilità. In particolare, a causa del ritardo, un guadagno proporzionale elevato (ricordando che  $\alpha_1 \ll 1$ ) dà luogo a forti sovraelongazioni e un duraturo regime oscillatorio. È possibile comunque giungere all'ottimizzazione mantenendo la compensazione polo-zero i.e.  $g_i = \alpha_1 \cdot g_p$  e aumentando progressivamente i guadagni fintanto che il sistema risponde con sufficiente stabilità. Mediante questa procedura si è giunti a fissare i valori di guadagno come

$$\begin{cases} g_p = 1.15 A/K \\ g_i = g_p \cdot \alpha_1 = 4.88 \cdot 10^{-3} Hz \cdot A/K \end{cases}$$

tramite le quali è stata effettuata la stabilizzazione in risposta ad una variazione del setpoint di  $\Delta T = 1K$ . Per confronto, la stessa procedura di stabilizzazione è stata effettuata nuovamente utilizzando le costanti di guadagno originarie con cui il controller PI era stato in primo luogo implementato. Le curve risultanti sono riportate in figura 3.3.

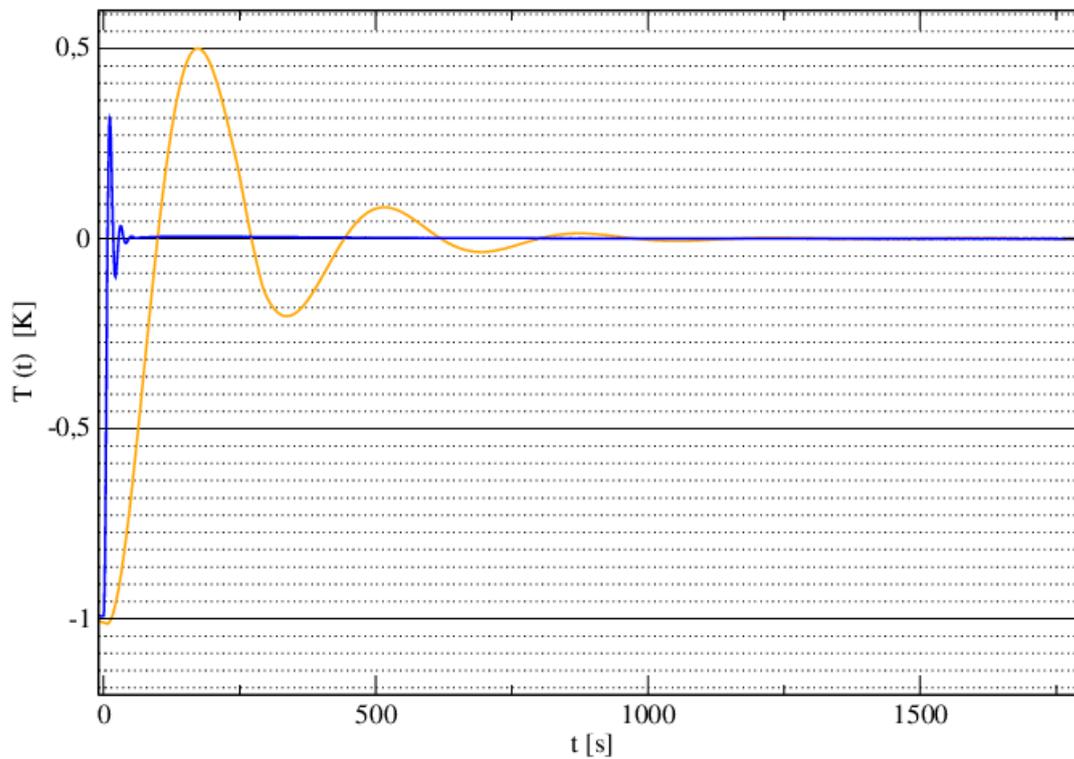


Figura 3.3: azione del controller PI, in arancione effettuata con le costanti di guadagno originarie, in blu con le costanti di guadagno ottimizzate.

Per poter dare un confronto quantitativo tra il controllo originario e quello ottimizzato, si valutano i transienti delle due curve e la stabilità asintotica. Per valutare il transiente è sufficiente dare una grandezza per le sovraelongazioni (overshoot) e per l'abbattimento delle stesse tra un'oscillazione e l'altra. Per la stabilità asintotica si valuta il tempo di assestamento (quello sufficiente al regolatore per portare la temperatura entro  $1mK$  da quella desiderata) e la coda della curva di stabilizzazione, stimata da  $t = 750$  da cui si valutano media e deviazione standard.

### Guadagni originari

La prima sovraelongazione giunge all'apice dopo un tempo di  $t_1 = 177s$  ed è ampia  $\eta_1 = 0.500K$ , la seconda viene a  $t_2 = 519s$  con ampiezza  $\eta_2 = 0.082K$ . Il rapporto tra le ampiezze dopo un periodo di oscillazione (a frequenza  $\sim 3 \cdot 10^{-3}Hz$ ) è di  $\eta_2/\eta_1 = 0.164$ . Il tempo di assestamento risulta di  $t_{as} = 1166s$  mentre per quanto riguarda la stabilità asintotica si ha

$$\Delta T_{av} = 380\mu K$$

$$\sigma_{750s} = 2.20mK$$

### Guadagni ottimizzati

La prima sovraelongazione avviene dopo solo  $t_1 = 11s$  con ampiezza  $\eta_1 = 0.31K$  ed si riduce dopo un'oscillazione (a frequenza  $\sim 0.05Hz$ ) a  $\eta_2 = 0.033K$  con  $t_2 = 31s$ . Lo smorzamento relativo tra un'oscillazione e l'altra è dunque  $\eta_2/\eta_1 = 0.104$  ed il tempo di assestamento è di solo  $t_{as} = 876s$ . Infine dopo  $500s$  dall'accensione del loop di stabilizzazione si ha

$$\Delta T_{av} = 9\mu K$$

$$\sigma_{750s} = 0.21mK$$

## 3.4 Conclusioni

L'obiettivo si può considerare raggiunto in base ad un rapido confronto tra i due processi di stabilizzazione. Il tempo di assestamento risulta dimezzato rispetto alla stabilizzazione eseguita con i guadagni originari, le sovraelongazioni sono sensibilmente minori, con oscillazioni molto più veloci e più smorzate. Infine, all'asintoto, il processo ottimizzato porta la media a una temperatura paragonabile alla minima leggibile dall'ADC con una dispersione migliore di un ordine di grandezza.

I parametri dell'algoritmo risultano ottimizzati ma il controllo in generale può essere ancora migliorato, cercando ad esempio di calcolare la correzione per la temperatura del partitore di tensione utilizzando il termometro interno dell'ADC.

Un ulteriore possibile accorgimento sarebbe l'implementazione di una procedura di approccio al setpoint in due passi: il primo passo, sganciato il loop di stabilizzazione, eroga una corrente opportuna e costante per portare il sistema vicino al setpoint; il secondo passo riaggancia il loop di stabilizzazione quando la temperatura è già vicina a quella desiderata così che le sovraelongazioni siano ridotte al minimo.

# Bibliografia

- [1] M. Veronesi, *Regolazione PID*, Franco Angeli editore (2002);
- [2] G. Marro, *Controlli automatici*, Zanichelli (2004);
- [3] P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavone, *Fondamenti di controlli automatici*, The McGraw Hill Companies (2004);
- [4] L. Ricci, M. Weidemüller, T. Esslinger, A. Hemmerich, C. Zimmermann, V. Vuletic, W. König, T.W. Hänsch, *A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics*, *Optics Communications* **Vol. 117** (1995);

## **Ringraziamenti**

Un sincero grazie va al Professor M. Prevedelli, relatore di questa tesi, che si è dimostrato molto paziente e disponibile nell'accompagnarmi, stimolarmi e guidarmi per tutta la durata del lavoro.

È doveroso inoltre un ringraziamento verso tutte le persone, colleghi ed amici che mi hanno supportato durante il lavoro di stesura.

Infine, desidero ringraziare la mia famiglia che mi ha permesso di arrivare alla fine di questo percorso.