

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

Studio di cavità Fabry-Perot  
per laser ultrastabili

Relatore:  
Prof. Marco Prevedelli

Presentata da:  
Giuseppe Carratta

Sessione autunnale  
Anno Accademico 2014/2015



*“ Bisogna avere il caos dentro di sé  
per partorire una stella danzante ”*



## Sommario

Lo scopo di questo lavoro di tesi è stato quello di studiare il comportamento di un fascio laser interagente con un risonatore ottico, grazie al quale il laser può essere stabilizzato agganciando la sua frequenza di emissione ad uno dei modi della cavità. In sintesi la lunghezza d'onda del fascio è vincolata ad assumere valori multipli della lunghezza della cavità, dato che in questo modo si possono decisamente migliorare le caratteristiche spettrali di un laser tipico. La stabilizzazione, e il restringimento di riga del laser, vengono effettuati agganciando la sua frequenza sul modo trasverso fondamentale tramite un sistema di feedback. La cavità è però soggetta a sua volta a fluttuazioni di tipo termico e meccanico. Una variazione in lunghezza del risonatore comporta una variazione in frequenza dei modi.

Le derive di frequenza dovute agli effetti termici si possono limitare utilizzando materiali con bassa dilatazione termica posti in ambienti la cui temperatura viene stabilizzata tramite un sistema di feedback. Per le vibrazioni, invece, il lavoro è più complicato: non essendo sufficiente mettere il sistema in ambienti isolati per attenuare le fluttuazioni, è stato recentemente proposto di studiare la posizione migliore dei sostegni affinché le fluttuazioni, e quindi le conseguenti variazioni in lunghezza della cavità, risultino minime. Per analizzare questo problema è stato utilizzato un software open-source per l'analisi agli elementi finiti, Salome-Meca, tramite il quale è stata riprodotta la geometria del un risonatore ottico a nostra disposizione, per simularne il comportamento sotto l'effetto del campo gravitazionale. Da qui si sono ottenuti i dati riguardo lo spostamento degli specchi della cavità in funzione della posizione del sostegno, dai quali si è riuscito a trovare il punto di posizionamento del supporto capace di ridurre lo spostamento di un ordine di grandezza.



<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Laser</b>	<b>3</b>
1.1 Modi di un fascio laser . . . . .	3
1.1.1 Modi longitudinali . . . . .	4
1.1.2 Modi trasversali . . . . .	6
1.1.3 Modi gaussiani . . . . .	9
<b>2 Cavità ottiche</b>	<b>13</b>
2.1 Cos'è un risonatore ottico? . . . . .	13
2.2 Stabilità . . . . .	15
2.3 Analisi dei modi . . . . .	17
2.4 Cavità di Fabry-Perot . . . . .	21
<b>3 Stabilizzazione del fascio laser</b>	<b>25</b>
3.1 Densità spettrali . . . . .	25
3.1.1 Rumore di fase . . . . .	28
3.1.2 Rumore termico . . . . .	29
3.1.3 Rumore sismico . . . . .	30
3.2 Pound-Drever-Hall . . . . .	31
3.2.1 Shot-noise . . . . .	33
<b>4 Metodo degli elementi finiti</b>	<b>35</b>
4.1 Analisi agli elementi finiti . . . . .	35
4.2 Salome-Meca . . . . .	36
4.3 Analisi dati . . . . .	39





## INTRODUZIONE

La presente tesi, suddivisa in quattro capitoli, ha lo scopo di analizzare la stabilità in frequenza di un fascio laser asservito a una cavità ottica. Queste sono dispositivi capaci di confinare un'onda elettromagnetica al loro interno sfruttando gli specchi riflettenti posti ai loro estremi. Tramite questi è possibile riflettere più volte l'onda all'interno per consentire la trasmissione di un fascio con larghezza di riga molto ridotta, maggiore è il coefficiente di riflessione degli specchi più piccola sarà la banda uscente. Durante la propagazione interna al risonatore, ci saranno diverse onde sfasate, per via della riflessione, rispetto quella incidente, di queste solo quelle in accordo con i modi della cavità riusciranno a sopravvivere senza generare un fenomeno di interferenza distruttiva.

Con le tecniche odierne si riescono a raggiungere valori di stabilità relativa di frequenza dell'ordine di  $10^{-16}$ - $10^{-18}$ [1][2], che risultano utili nell'ambito della ricerca scientifica come per l'interferometro per onde gravitazionali, Virgo[3] o per sviluppare dispositivi di alta precisione come p.e. le fibre ottiche, la spettroscopia atomica o per applicazioni spaziali[4].

Un importante risultato raggiunto attraverso i laser ultra-stabili è stato la realizzazione degli orologi atomici[5] che utilizzano la frequenza delle transizioni atomiche, dell'ordine di  $10^{10} Hz$ . Recentemente la ricerca scientifica ha prodotto anche degli orologi ottici[6] che utilizzando frequenze dell'ordine di  $10^{15} Hz$  che possono raggiungere accuratèzze del livello di  $10^{-18}$ [2]. Durante la sperimentazione e lo studio sulla stabilità dei laser si sono scoperti diversi effetti che provocano fluttuazioni della lunghezza della cavità di stabilizzazione[7][8][9]. I principali contributi sono di carattere termico e vibrazionale[10]. In questo lavoro sono stati analizzati gli effetti del rumore sismico, dovuto a fattori ambientali, che provocano variazioni nella lunghezza della cavità e spostamenti dell'ordine del picometro per gli specchi, che si trasformano in allargamenti della larghezza di riga del laser. Si è inoltre descritta una comune tecnica di stabilizzazione la Pound-Drever-Hall[11][12], che utilizza un circuito di feedback per generare un segnale di errore proporzionale alla variazione di frequenza tra la frequenza del laser e quella di risonanza della cavità.

Infine si è utilizzato un software oper-source, Salome-Meca, sviluppato per risolvere problemi di equazioni differenziali alle derivate parziali tramite la tecnica dell'analisi agli elementi finiti(FEA)[14]. Tramite questo si è creato un modello del risonatore ottico in nostro possesso per simulare il suo comportamento rispetto l'effetto del rumore sismico. Con il calcolatore è stato possibile riprodurre la geometria ed applicarle un *mesh*[15], cioè una suddivisione in maglie sulle quali poter applicare la FEA. Tramite Aster[16], un modulo interno di Salome-Meca, si è eseguita un'analisi elastica del risonatore al quale è stato applicato un campo gravitazionale per misurarne l'effetto.

# CAPITOLO 1

## LASER

In questo capitolo faremo un'analisi del laser descrivendone i modi di propagazione e studiando i fasci gaussiani. Il laser sarà considerato come un'onda elettromagnetica generata da una scatola nera con l'aggiunta, nel Capitolo 3, di un rumore di fase.

### 1.1 Modi di un fascio laser

Trattandosi di onde elettromagnetiche, quindi, possiamo partire dalle equazioni di Maxwell per studiarne il comportamento durante la loro propagazione nello spazio vuoto privo di cariche e correnti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{i})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{ii})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (\text{iii})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \left(\frac{1}{c}\right)^2 \partial_t \vec{E} \quad (\text{iv})$$

Applicando l'identità vettoriale <sup>1</sup> sulla (iii) e (iv), otteniamo l'equazione delle onde di *D'Alembert*:

---

<sup>1</sup> $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\nabla^2 \vec{E} - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \partial_t^2 \vec{E} = 0 \quad (1.1)$$

Questa equazione alle derivate parziali ammette come soluzione diversi sistemi ortonormali completi, quello delle onde piane è uno dei tanti che permette di scrivere il campo elettrico come:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (1.2)$$

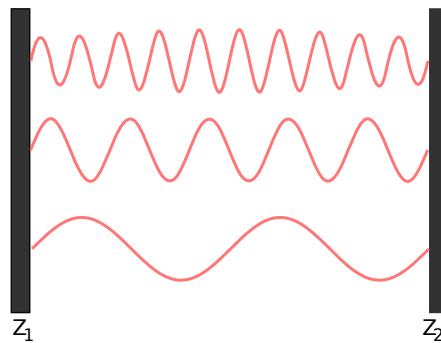
che nel caso di propagazione unidimensionale di un'onda polarizzata linearmente lungo l'asse z:

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{x_0} e^{i(kz - \omega t)} \simeq \vec{E}_{x_0} \cos(kz - \omega t) \quad (1.3)$$

dove l'argomento dell'esponenziale rappresenta la fase dell'onda,  $\vec{k}$  il vettore d'onda, ortogonale a  $\vec{E}_0$  e  $\omega$  la pulsazione.

L'equazione (1.1), però, può avere soluzioni diverse, che vengono scelte analizzando la simmetria rispetto quelle che sono le condizioni al contorno del sistema nel quale si propaga l'onda generata dal laser. Nel nostro caso questi vincoli sono dettati dalle geometrie del risonatore ottico, che possono portare ad oscillazioni diversi dei modi, nel caso in cui questi differiscano per numero di nodi lungo l'asse di propagazione si parla di *modi longitudinali*, se invece hanno un diverso valore di  $\Psi(x, y)$  sullo specchio sono *modi trasversali*.

### 1.1.1 Modi longitudinali



**Figura 1.2.1**  
*Modi longitudinali all'interno di sistema chiuso*

Per quanto riguarda i modi longitudinali la condizione da soddisfare è quella di avere una fase finale, dopo aver compiuto un viaggio da uno specchio all'altro, coincidente con quella iniziale, per cui avremo:

$$\vartheta_{m,l}(z_2) - \vartheta_{m,l}(z_1) = n\pi \quad (1.4)$$

con n,m,l numeri interi ove gli ultimi due rappresentano il modo preso in considerazione e  $\vartheta_{m,l}(z_{1,2})$  la fase dell'onda che si può esprimere come:

$$\vartheta_{m,l}(z_{1,2}) = kz - (m + l + 1) \tan^{-1} \frac{z_{1,2}}{z_0} \quad (1.5)$$

La condizione di risonanza, tramite le (1.4) e (1.5), risulta essere:

$$k_n l - (m + l + 1) \left( \tan^{-1} \frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1} \frac{z_1}{z_0} \right) = n\pi \quad (1.6)$$

dalla quale segue:

$$k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{L} \quad (1.7)$$

che in termini di frequenza<sup>2</sup>:

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2L} \quad (1.8)$$

Dalla (1.5) si può notare come la fase non dipenda da m e l ma dalla loro somma, per cui per un n fissato gli stati con egual (m+l) sono detti degeneri. Per differenti valori di (m+l) vale:

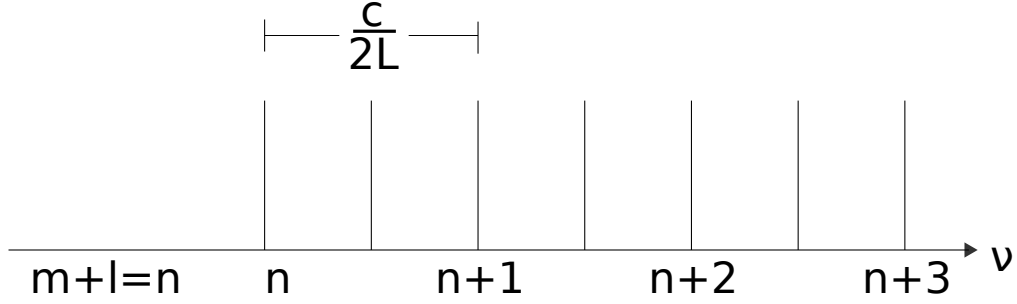
$$(k_1 - k_2)L = [(m + l + 1)_1 - (m + l + 1)_2] \left( \tan^{-1} \frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1} \frac{z_1}{z_0} \right) \quad (1.9)$$

---

<sup>2</sup> $k = \frac{2\pi\nu}{c}$

utilizzando la stessa trasformazione della (1.8) si arriva a:

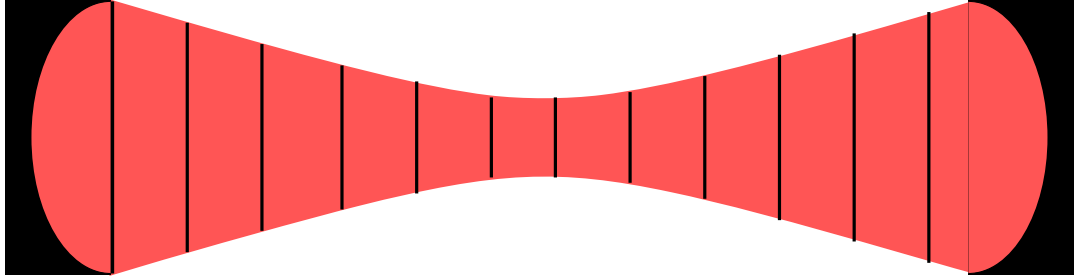
$$\Delta\nu = \frac{c}{2\pi L} \Delta(m+l) \left( \tan^{-1} \frac{z_2}{z_0} - \tan^{-1} \frac{z_1}{z_0} \right) \quad (1.10)$$



**Figura 1.2.2**

*Spettro della frequenza di risonanza di un risonatore avente specchi sferici di equal raggio*

### 1.1.2 Modi trasversali



**Figura 1.2.3**

*Propagazione di un'onda trasversale in un risonatore confocale*

All'interno di un risonatore ottico possiamo avere dei casi nei quali il campo elettromagnetico può essere descritto prendendo in considerazione la sola componente trasversa alla direzione di propagazione. Questo problema fu studiato da Fox e Li[24] negli anni '60, avvalendosi della *Teoria scalare di Kirchoff* presero in esame una generica distribuzione  $\vec{E}$  del campo su uno dei due specchi del risonatore per valutare poi il comportamento della stessa sul secondo specchio che doveva coincidere, a meno di una costante moltiplicativa, con la distribuzione analizzata

inizialmente.

Nota la funzione sugli specchi si è poi potuto trovare la distribuzione del campo elettromagnetico in ogni punto della cavità.

Iterando questo processo Fox e Li dimostrarono che per ogni distribuzione presa in considerazione sugli specchi, a patto che questa faccia un considerevole numero di viaggi tra uno specchio e l'altro, il campo elettromagnetico si stabilizza.

Valutando questa situazione all'interno di un risonatore confocale, che permette un numero di cammini maggiore rispetto le altre tipologie di risonatori, si ha una distribuzione del campo come segue:

$$E_{l,m}(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_l \left[ \sqrt{2} \frac{x}{\omega(z)} \right] H_m \left[ \sqrt{2} \frac{y}{\omega(z)} \right] \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - ikz + i(l + m + 1)\eta \right] \quad (1.11)$$

dove:

$$\omega(z) = \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{Dimensione del fascio} \quad (1.12)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = z + \frac{z_0^2}{z} \quad \text{Raggio di curvatura} \quad (1.13)$$

$$\eta = \tan^{-1} \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad \text{Fattore di fase} \quad (1.14)$$

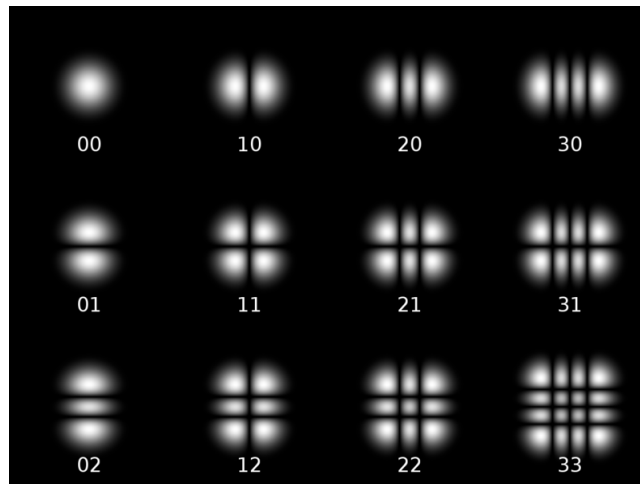
le quali verificano le (1.4)-(1.8).

Nella (1.11)  $H_m$  e  $H_l$  sono i polinomi di Hermite (di grado  $m$  e  $l$  rispettivamente), questi sono una famiglia di polinomi ortogonali definiti tramite la formula di Rodrigues[17]:

$$H_m(\zeta) = (-1)^m \exp(\zeta^2) d_\zeta^m \exp(\zeta^2) \quad (1.15)$$

sono utilizzati in meccanica quantistica per descrivere il comportamento dell'oscillatore armonico quantistico.

La quantità espressa in (1.11) è nota come *fascio gaussiano di ordine  $m$  e  $l$*  e viene indicata con la sigla  $TEM_{l,m}$  ( Transverse Electric and Magnetic), che esprime la perpendicolarità dei campi elettrici e magnetici dei modi rispetto  $\vec{k}$ .

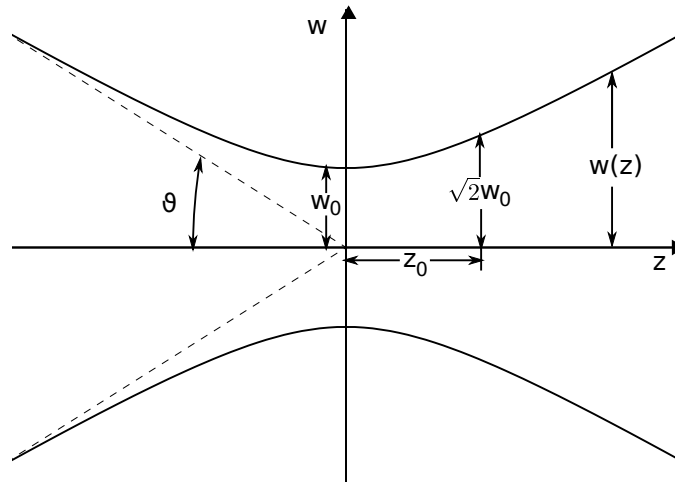


**Figura 1.2.4**

*Si possono osservare le varie configurazioni che assume l'intensità del fascio, proporzionale al modulo quadro del campo, al variare di  $l$  e  $m$*



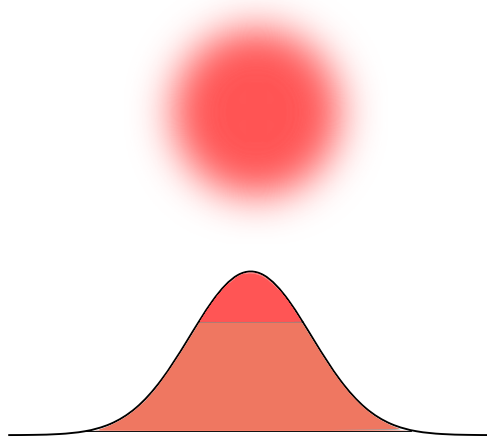
### 1.1.3 Modi gaussiani



**Figura 1.2.5**  
*Andamento di un fascio gaussiano*

Dalla Figura 1.2.5 si nota che l'evoluzione spaziale del fascio è guidata da diversi parametri:

- $\omega(z)$  è chiamato “*larghezza del fascio*” e risulta dipendere dalla distanza  $z$ , considerando la direzione radiale questa ha un andamento gaussiano;
- $\omega_0$  è la dimensione minima del fascio, in  $z = 0$ , e rappresenta il punto nel quale l'intensità dell'onda è maggiore. Quindi avremo  $\omega(0) = \omega_0$  ed in questo caso il raggio di curvatura inizia a divergere e si ha la presenza di un fronte d'onda piano;
- $z_0$  è detta *Distanza di Rayleigh*, punto nel quale l'intensità e la dimensione del fascio sono variati rispettivamente di un fattore  $1/2$  e  $\sqrt{2}$ ;
- $\vartheta$  è l'angolo compreso tra i due asintoti della distribuzione gaussiana, detto anche “Parametro di divergenza angolare”, per un fascio laser tipico questo risulta essere molto piccolo.



**Figura 1.2.6**

*In alto viene mostrato il profilo d'intensità di un fascio gaussiano visto perpendicolarmente alla direzione di propagazione, al di sotto si ha l'andamento del campo elettrico in funzione della distanza  $z$ .*

Per  $m=l=0$  si ha il *fascio gaussiano fondamentale* (Figura 1.2.6) che ha la seguente espressione<sup>3</sup>:

$$E_{0,0}(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - ikz + i\eta \right] \quad (1.16)$$

Nel caso di grandi distanze, cioè  $z \gg \pi\omega_0^2$  il fascio si propaga come se i fronti d'onda fossero di forma sferica, per cui<sup>4</sup>:

$$R(z) \longrightarrow z \quad \omega(z) \longrightarrow \frac{\lambda z}{\pi\omega_0} \quad (1.17)$$

si può notare come la dimensione del fascio aumenti linearmente con la distanza, da questa è possibile derivare il parametro di divergenza angolare:

$$\vartheta = \partial_z \omega(z) = \frac{\lambda}{\pi\omega_0} \quad (1.18)$$

<sup>3</sup>Notiamo la scomparsa dei polinomi di Hermite  $H_{l,m}$  poiché  $H_0=1$ .

<sup>4</sup>Il valore di  $\omega(z)$  deriva dallo sviluppo in serie della radice.

Trattandosi di un laser tradizionale la (1.18) assume un valore molto piccolo<sup>5</sup>, possiamo quindi applicare l'approssimazione parassiale e introdurre la *legge ABCD dei fasci gaussiani*.

### Legge ABCD dei fasci gaussiani

Avendo preso in esame un sistema ottico centrato possiamo analizzare il nostro fenomeno facendo uso dell'ottica matriciale grazie alla quale possiamo descrivere, tramite una matrice 2x2, ogni effetto del sistema ottico sul fascio.

Come primo passo introduciamo il raggio di curvatura complesso:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2(z)} \quad (1.19)$$

dalle (1.12) e (1.13) possiamo trovare che  $q(z) = q_0 + z$  con:

$$\frac{1}{q_0} = -i \frac{\lambda}{\pi \omega_0^2} \quad (1.20)$$

Richiamando qualche concetto base della trigonometria, possiamo definire il raggio di curvatura come il rapporto tra l'ordinata rispetto l'origine e il seno dell'angolo opposto allo stesso:

$$q(z) = R(z) = \frac{z}{\sin \alpha} \simeq \frac{z}{\alpha} \quad (1.21)$$

Tramite la notazione matriciale possiamo ricavare il raggio di curvatura complesso dopo aver percorso una distanza  $z$ :

$$\begin{vmatrix} z_2 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ \alpha_1 \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

---

<sup>5</sup>Per un laser tradizionale  $\lambda \sim 500$  nm e  $\omega \sim mm$  la divergenza è quindi molto piccola, per un diodo laser  $\omega \sim \mu m$ , il parametro di divergenza può essere di decine di gradi.

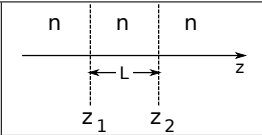
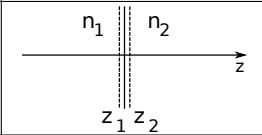
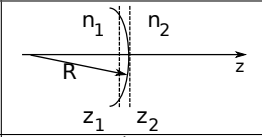
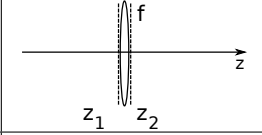
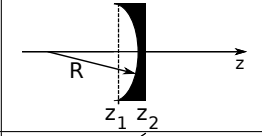
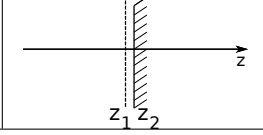
$$\begin{cases} z_2 = Az_1 + B\alpha_1 \\ \alpha_2 = Cz_1 + D\alpha_1 \end{cases}$$

Facendo il rapporto tra  $z_2$  e  $\alpha_2$  e mettendo poi in evidenza  $\alpha_1$  si ottiene:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (1.23)$$

nota come relazione ABCD di propagazione per fasci gaussiani.

Si riporta di seguito una tabella con le principali matrici di trasferimento:

Propagazione in un mezzo omogeneo		$\begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Superficie rifrangente piana tra mezzi diversi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Superficie rifrangente sferica tra due mezzi diversi		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
Lente sottile		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Specchio sferico		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
Specchio Piano		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

## 2.1 Cos'è un risonatore ottico?

Un risonatore ottico è un dispositivo che permette di confinare al suo interno un'onda elettromagnetica, nel nostro caso generata da un fascio laser, ad una frequenza fissata.

I risonatori ottici sono costituiti da due specchi posti l'uno di fronte l'altro e si differenziano tra loro per la tipologia (piani o sferici) di questi ultimi; la distanza tra essi e la lunghezza focale. Il fascio di luce, una volta entrato, subirà un processo di riflessioni multiple che potrebbero portarlo ad un aumento della propria dimensione, perciò è necessario adottare una corretta geometria che eviti il verificarsi di questo fenomeno e che soddisfi la seguente relazione:

$$F = \frac{a_1 a_2}{\lambda L} \quad (2.1)$$

con  $a_1$  e  $a_2$  che rappresentano una grandezza caratteristica dell'apertura degli specchi e  $L$  la distanza tra gli stessi.

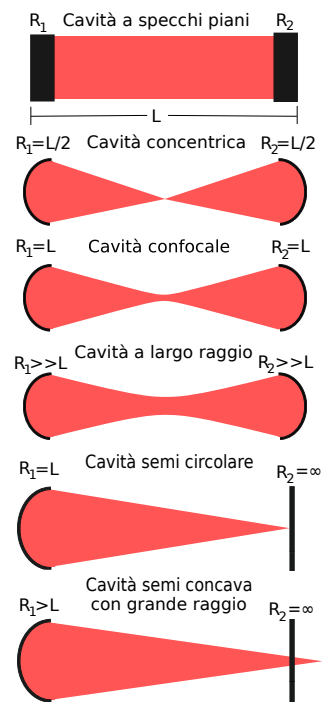


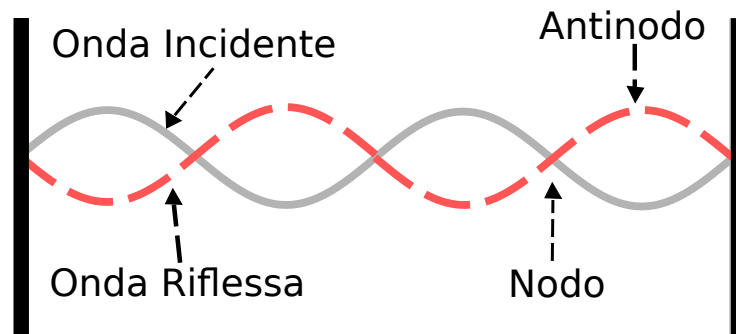
Figura 2.1.1

Schema di diverse cavità ottiche

La relazione (2.1), definisce il *numero di Fresnel*. Esso è una quantità adimensionale che stabilisce le approssimazioni da poter adottare, per  $F < 1$  si può considerare in fascio come in regime di campo lontano, mentre se  $F > 1$  si parla di regime di campo vicino<sup>1</sup>.

Una caratteristica che contraddistingue un buon risonatore è la sua capacità di permettere la riflessione del fascio al suo interno rispettando la relazione (2.1) lasciando quindi invariata la larghezza di riga del laser. Nella *Figura 1.2.4* si possono osservare le varie configurazioni dei modi TEM al variare dell'indice dei polinomi di Hermite[25], dove il primo indice indica il numero di volte che il campo elettrico incontra lo zero lungo l'asse x e il secondo il numero degli zeri lungo y.

La sovrapposizione delle onde riflesse può portare alla generazione di un campo stazionario per il quale l'energia all'interno della cavità non si propagherà più lungo una direzione spaziale ma si limiterà ad un'oscillazione nella scala dei tempi, i punti nei quale l'onda raggiunge la sua ampiezza massima sono detti *antinodi* (*Figura 2.1.2*).



**Figura 2.1.2**

Il campo stazionario verrà creato soltanto in particolari condizioni, cioè quando la frequenza delle onde all'interno del risonatore sarà in risonanza con una delle frequenze proprie del risonatore (*Paragrafo 1.2.1*).

Definita la frequenza dell'onda elettromagnetica entrante, il numero possibile di modi sarà:

$$N = \frac{2d\nu}{c} \quad (2.2)$$

ove N rappresenta il numero di risonanze longitudinali per unità di lunghezza della cavità nell'intervallo di frequenza  $d\nu$ .

---

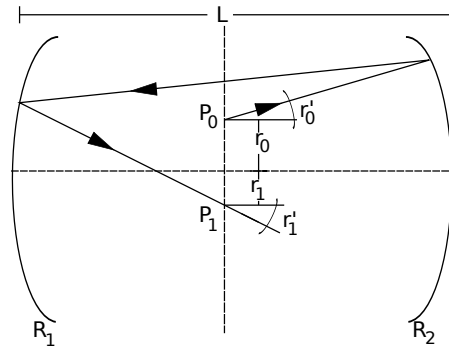
<sup>1</sup>Il confine tra campo lontano e campo vicino è espresso tramite la *Distanza di Fraunhofer*  $\frac{2D^2}{\lambda}$  con D che esprime il diametro della sorgenti.

## 2.2 Stabilità

Per prima cosa si introducono due parametri che definiscono la stabilità del risonatore:

$$g_{1,2} = 1 - \frac{L}{R_{1,2}} \quad (2.3)$$

ove  $L$  è la lunghezza della cavità e  $R_{1,2}$  il raggio del primo e del secondo specchio. Un risonatore ottico viene detto stabile se riesce a mantenere confinata all'interno del proprio volume limitato, la radiazione elettromagnetica incidente. Questo problema, che altro non è se non il confinamento e la conservazione dei modi del fascio, può essere studiato considerando le soluzioni, con determinate condizioni al contorno, di un fascio gaussiano che si propaga lungo una serie di lenti biconvesse, si può quindi applicare senza problemi la *Legge ABCD dei fasci gaussiani* che ci permette di trovare le caratteristiche del fascio durante la sua propagazione all'interno della cavità.



**Figura 2.2.1**

*Schema di una cavità stabile*

In riferimento alla *Figura 2.2.1* consideriamo un fascio che parte dal punto  $P_0$ , interno alla cavità, che subisce una doppia riflessione lungo gli specchi 2 e 1 rispettivamente, per poi incidere in  $P_1$  lungo l'asse immaginario perpendicolare l'asse del risonatore sul quale si trova il punto  $P_0$ . Chiamiamo  $r_0$  e  $r_1$  le coordinate di  $P_0$  e  $P_1$  rispetto l'asse del risonatore e  $r'_0$  e  $r'_1$  gli angoli del fascio rispetto quest'ultimo. Si può quindi scrivere:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Per un raggio che parte dal punto  $P_1$  si avrà un processo analogo al primo:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_0' \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Iterando questo processo per n riflessioni avremo, per  $P_n$ :

$$\begin{pmatrix} r_n \\ r_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} r_0 \\ r_0' \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Affinché il risonatore sia stabile bisogna che (2.6) non diverga al crescere di n, ciò vuol dire che non deve farlo neanche la matrice ABCD. La matrice può essere scritta nella forma:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{pmatrix} A \sin(n\vartheta) - \sin(n-1)\vartheta & B \sin(n\vartheta) \\ C \sin(n\vartheta) & D \sin(n\vartheta) - \sin(n-1)\vartheta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

con

$$\cos \vartheta = \frac{A + D}{2} \quad (2.8)$$

Potendo però, il coseno assumere come valori massimi -1 e 1 avremo come condizione di non divergenza:

$$-1 < \frac{A + D}{2} < 1 \quad (2.9)$$

Se questa condizione non dovesse essere soddisfatta avremo, infatti, un angolo  $\vartheta$  immaginario che porterebbe  $\sin(n\vartheta)$  a divergere al crescere di n. Per poter scrivere le condizioni di stabilità bisogna ora trovare la matrice ABCD appropriata per il nostro caso, questa sarà formata dal prodotto di altre quattro, due riguardanti la libera propagazione tra gli estremi della cavità e due riferite alla riflessione del raggio dovuta all'incidenza sugli specchi, queste possono essere scritte, rispettivamente, come:



$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R_{1,2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

per cui avremo:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{2}{R_1} & 1 - \frac{2L}{R_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Risolvendo il prodotto tra matrici:

$$\frac{A + D}{2} = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \quad (2.12)$$

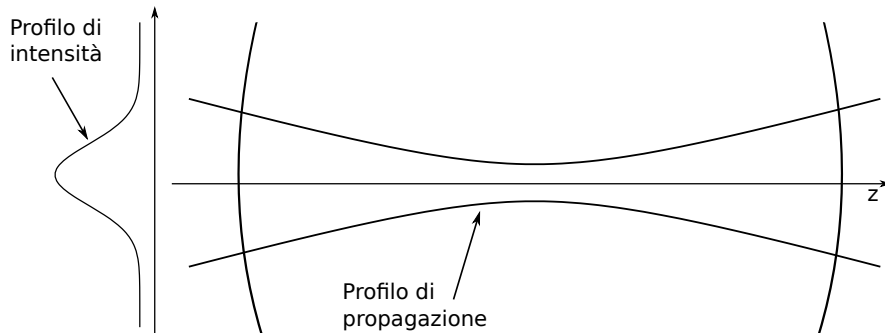
che può essere scritto come:

$$\frac{A + D + 2}{4} = \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) = g_1 g_2 \quad (2.13)$$

si arriva alla condizione di stabilità:

$$0 < g_1 g_2 < 1 \quad (2.14)$$

## 2.3 Analisi dei modi



**Figura 2.3.1**

*Schema di un risonatore ottico su cui incide un fascio gaussiano*

Lo schema del risonatore è illustrato nella *Figura 2.3.1*, gli specchi riflettenti, posti rispettivamente nelle posizioni  $z_1$  e  $z_2$ , hanno gli stessi raggi di curvatura che devono soddisfare, trattandosi di un fascio gaussiano, le seguenti relazioni<sup>2</sup>:

$$-R_1 = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1} \quad (2.15)$$

$$R_2 = z_2 + \frac{z_0^2}{z_2} \quad (2.16)$$

con:

$$z_0 = \frac{\pi\omega_0^2 n}{\lambda} \quad (2.17)$$

dalle equazioni (2.15) e (2.16) si ottiene:

$$z_1 = \frac{R_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_1^2 - 4z_0^2} \quad (2.18)$$

$$z_2 = \frac{R_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{R_2^2 - 4z_0^2} \quad (2.19)$$

e si pone

$$L = z_2 - z_1 \quad (2.20)$$

Mettendo insieme le (2.18), (2.19), (2.20), si ottiene un sistema di tre equazioni in tre incognite, risolvendo si ha<sup>3</sup>:

---

<sup>2</sup>Il segno meno del raggio  $R_1$  è dovuto alla curvatura dello specchio che è in direzione opposta, lungo l'asse  $z$ , per i due specchi.

<sup>3</sup>Il secondo passaggio è giustificato dall'ipotesi di un risonatore a specchi simmetrici dove  $R_2=R_1=R$ .

$$\begin{aligned}
z_0^2 &= \frac{L(-R_1 - L)(R_2 - L)(R_2 - R_1 - L)}{(R_2 - R_1 - 2L)^2} \\
&= \frac{L(R - L)^2(2R - L)}{4(R - L)^2} = \frac{(2R - L)L}{4} \\
&= \frac{L^2}{4} \left[ \frac{1 + g}{1 - g} \right]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

che risulta essere in accordo anche con la (2.3). Dalle (2.17),(1.12),(2.21) si può trovare la dimensione del fascio incidente sullo specchio, che per quanto detto sarà uguale in  $z_1$  e  $z_2$ :

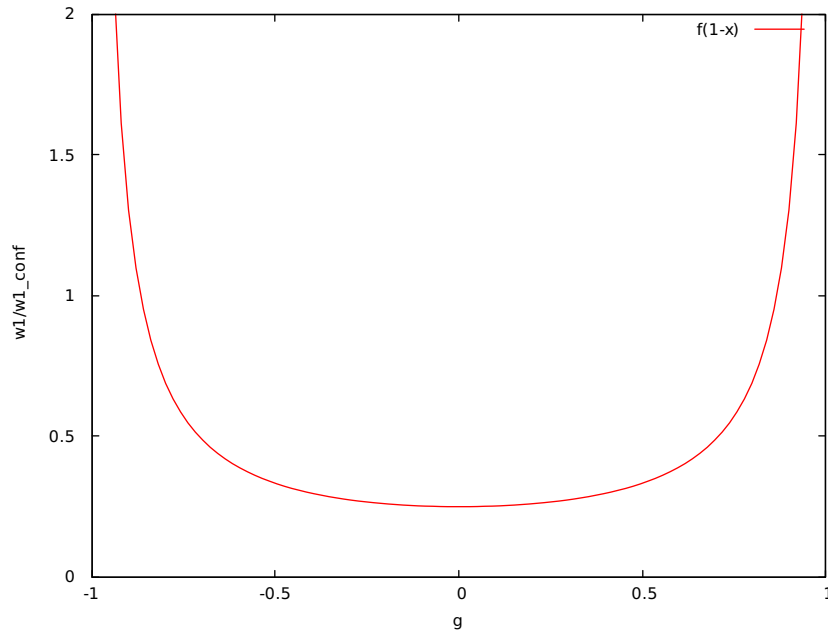
$$\omega_{1,2} = \left( \frac{\lambda L}{2\pi} \right)^{1/2} \left[ \frac{2R^2}{L(R - \frac{l}{2})} \right]^{1/4} = \left( \frac{\lambda L}{\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{1 - g^2} \right)^{1/4} \tag{2.22}$$

che mostra come per  $R \gg L$  si ha  $\omega_{1,2} \simeq \omega_0$ , che comporta una diffusione del fascio molto piccola.

Derivando (2.22) rispetto R, si è trovato per quale valore di quest'ultimo la dimensione del fascio risulta essere minima, cioè  $R=L$ , che è il caso di un risonatore simmetrico confocale. Effettuando questa sostituzione in (2.21):

$$\omega_0^{conf} = \left( \frac{\lambda L}{2\pi} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{1,2}^{conf} \tag{2.23}$$

si ha, quindi, un aumento della dimensione del fascio di un fattore  $\sqrt{2}$  tra il centro del risonatore e gli specchi.



**Figura 2.3.2**

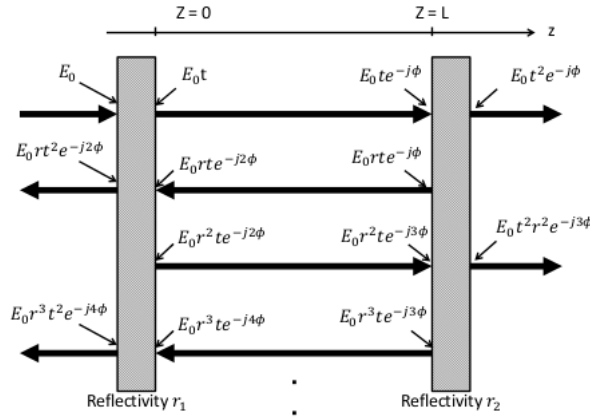
Grafico del rapporto  $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_{conf}}$  in funzione di  $g$  (2.22)-(2.23)

Dal grafico in *Figura 2.3.2* si può risalire al tipo di risonatore ottico utilizzato in base al valore del rapporto  $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_{conf}}$  in funzione del parametro  $g$ :

- $g=0 \Rightarrow R=L \Rightarrow$  *Risonatore confocale*;
- $g=1 \Rightarrow R=0 \Rightarrow$  *Risonatore a facce piane*;
- $g=-1 \Rightarrow 2R=L \Rightarrow$  *Risonatore a specchi sferici* ;

si può notare che nel primo caso il fascio ha dimensione minima, mentre negli altri due risulta divergente. Ad eccezione dei punti vicino gli estremi, tutti gli altri hanno una dimensione del fascio comparabile con quella di un risonatore confocale.

## 2.4 Cavità di Fabry-Perot



**Figura 2.4.1**  
Schema di una cavità Fabry-Perot

Un Fabry-Perot è una semplice cavità ottica composta, come mostra la *Figura 2.4.1*, da due specchi piani, quindi al limite della stabilità (come si può evincere dalla *Figura 2.3.3*).

La superficie degli specchi è semiriflettente, per questa proprietà il fascio subirà delle riflessioni multiple all'interno della cavità e saranno presenti delle perdite, anche se trascurabili.

Per via di queste riflessioni, il campo trasmesso può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
 E_t &= E_0 t^2 e^{i\phi} + E_0 t^2 r^2 e^{i3\phi} + E_0 t^2 r^4 e^{i5\phi} + \dots \\
 &= E_0 t^2 e^{i\phi} (1 + r^2 e^{i2\phi} + r^4 e^{i4\phi} + \dots) \\
 &= \frac{E_0 t^2 e^{i\phi}}{1 - r^2 e^{i2\phi}}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

dove  $\phi$  è la sfasamento che l'onda acquisisce dopo ogni riflessione e  $r$  e  $t$  rappresentano i coefficienti di riflessione e trasmissione che, per la conservazione dell'energia, soddisfano la relazione  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ .

Sapendo che l'intensità del campo è proporzionale alla quadrato del campo stesso, definiamo l'intensità trasmessa come:

$$I_t = \frac{I_0 T^2}{|1 - R e^{i2\phi}|^2} = \frac{T^2}{1 - R^2} \cdot \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \phi} \tag{2.25}$$

con  $R = |r|^2$  e  $T = |t|^2$ .

Quando  $\phi$  assumerà un valore di un multiplo di  $2\pi$  l'intensità avrà valore massimo. Sapendo che:

$$\phi = kL = \frac{2\pi}{\lambda_n}L = 2n\pi \quad (2.26)$$

possiamo scrivere:

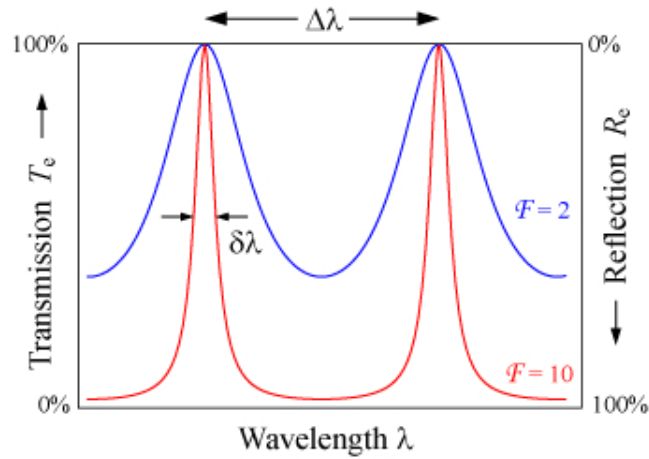
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (2.27)$$

$$\nu_n = \frac{nc}{2L} \quad (2.28)$$

dalle quali si può definire una quantità chiamata **Free Spectral Range**, che definisce la variazione di frequenza sufficiente a permettere il passaggio da una configurazione di risonanza alla successiva:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L} \quad (2.29)$$

in accordo con la (1.8).



**Figura 2.4.2**

*Grafico della trasmissione di un Fabry-Pérot. Si noti che per un coefficiente di Finesse maggiore si ha una larghezza di riga minore e quindi un processo di trasmissione minore.*

Se gli specchi non hanno lo stesso coefficiente di riflessione, la (3.28) si può scrivere come segue:

$$I_t = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2} \frac{I_0}{1 + \frac{4\sqrt{R_1 R_2}}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2} \sin^2 \phi} \quad (2.30)$$

Si può ora determinare il coefficiente di *Finesse* che rappresenta la risoluzione in frequenza di un Fabry-Perot ed è espresso come il rapporto tra il Free Spectral Range e la larghezza a metà altezza (FWHM) della distribuzione in frequenza:

$$\mathcal{F} = \frac{FSR}{FWHM} = \frac{\pi(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - (R_1 R_2)^{1/2}} \quad (2.31)$$





## CAPITOLO 3

# STABILIZZAZIONE DEL FASCIO LASER

In questo capitolo verranno introdotte e analizzate le cause delle fluttuazioni della lunghezza della cavità. Queste si presentano sotto forma di rumore sismico, dovuto alle vibrazioni provenienti dall'ambiente esterno; rumore termico, è legato alle caratteristiche del materiale ed è la principale causa delle deformazioni; rumore di fase, che riguarda lo sfasamento subito dall'onda. Verrà descritta una delle tecniche più comuni per la stabilizzazione del sistema che è la Pound-Drever-Hall[12], che utilizza un circuito di feedback per generare un segnale di errore proporzionale alla differenza di frequenza tra la frequenza del laser e quella in risonanza della cavità. Il rumore, però, è una grandezza casuale, e per poterlo analizzare deve essere definito tramite distribuzioni di probabilità che, in un'analisi statistica, si basano sulla media delle variabili aleatorie considerate. Questi segnali verranno analizzati tramite le funzioni di autocorrelazione nel dominio del tempo, e con le densità spettrali di potenza nel dominio delle frequenze.

### 3.1 Densità spettrali

L'effetto di un certo rumore  $r$  presente all'interno di un sistema può essere studiato analizzando il segnale  $x(t)$  dal quale esso proviene. Si può definire l'energia del segnale:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (3.1)$$

dove  $|X(f)|^2$  rappresenta l'energia di  $x(t)$  nell'intervallo di frequenze  $[f, f + df]$  ed è detta *densità spettrale di energia* (PSD), che risulta essere sempre maggiore

di 0. Se il segnale è reale abbiamo la parte reale della PSD che risulta pari, mentre la parte immaginaria dispari; se  $x(t)$  fosse reale e pari avremmo una PSD pari. Usando solo frequenze positive, l'energia in una banda di frequenze  $[f_1, f_2]$  è:

$$E = \int_{-f_2}^{-f_1} |X(f)|^2 df + \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df \quad (3.2)$$

nel caso in cui si abbia un segnale ad energia finita, la densità spettrale di energia si ottiene applicando la trasformata di Fourier all'autocorrelazione<sup>1</sup>:

$$|X(f)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (3.3)$$

con:

$$R_{E_x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)x(t) dt \quad (3.4)$$

Oltre all'energia, possiamo scrivere anche la potenza del segnale nell'intervallo temporale  $[-T, T]$ :

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (3.5)$$

è importante introdurre una nuova funzione  $x_T(t)$ , conosciuta come *segnale troncato*<sup>2</sup>:

$$x_T(t) = x(t) \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) = \begin{cases} x(t) & \text{se } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.6)$$

grazie alla quale si può definire la *densità spettrale di potenza* tramite il limite del rapporto della densità di energia del segnale troncato e l'ampiezza dell'intervallo considerato:

---

<sup>1</sup>Teorema di Wiener-Khinchin

<sup>2</sup>*rect* rappresenta la funzione rettangolo.

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T} \quad (3.7)$$

Analogamente a quanto detto sopra per la densità spettrale di energia valgono le medesime proprietà di parità e positività e possiamo scrivere la potenza totale e l'autocorrelazione:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) df \quad (3.8)$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt \quad (3.9)$$

e vale ancora:

$$S_x = \mathcal{F}(R_x(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (3.10)$$

Dalla (3.7) è utile definire, per via delle sue applicazioni pratiche, *densità spettrale lineare*:

$$L(f) = \sqrt{S_x(f)} \quad (3.11)$$

Tramite un'analisi dimensionale delle grandezze si può facilmente vedere come:

$$[S_x(f)] = \frac{[x]^2}{\text{Hz}} \quad , \quad [L(f)] = \frac{[x]}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (3.12)$$

Nel caso di una realizzazione sperimentale del fenomeno che si sta studiando possiamo trovare delle applicazioni pratiche di quanto detto: se, ad esempio, il segnale rappresentasse la posizione di uno specchio della cavità<sup>3</sup>, potremmo trovare l'ampiezza quadratica media  $A_{rms}$  delle fluttuazioni del rumore come:

$$A_{rms} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_x(f) df} \quad (3.13)$$

---

<sup>3</sup>I rumori presi in esami per i risonatori ottici sono per lo più inerenti le vibrazioni degli specchi e le deformazioni della struttura totale.

### 3.1.1 Rumore di fase

Per l'analisi dei rumori che interferiscono nella misura delle caratteristiche del laser, consideriamo quest'ultimo come un'onda elettromagnetica emessa da una scatola nera, per cui avremo:

$$E(t) = E_0(1 + A(t))e^{i\psi(t)} = E_0(1 + A(t)) \exp(i(2\pi\nu_0 t + \varphi(t))) \quad (3.14)$$

con  $A(t)$  che rappresenta la fluttuazione in ampiezza relativa del campo, che verrà trascurata in questa trattazione, e  $\varphi(t)$  il rumore di fase.

Considerando il legame che c'è tra  $\omega = 2\pi\nu$  e  $\omega = \partial_t \varphi$  possiamo scrivere la frequenza  $\nu(t)$  come:

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} d_t \psi = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} d_t \varphi \quad (3.15)$$

dalla quale possiamo ricavare il *rumore di frequenza*:

$$\Delta\nu(t) = \frac{d_t \varphi(t)}{2\pi} \quad (3.16)$$

Come possiamo notare, il campo del laser è descritto da variabili aleatorie le quali consentono una trattazione probabilistica del fenomeno utilizzando, invece che grandezze fisiche vere e proprie, densità di probabilità. Nel caso di un processo stazionario, richiamando la (3.7), non avremo più alcuna dipendenza dal tempo del nostro segnale  $x(t)$ , che in questo caso verrà trattato come il  $\Delta\nu$  appena descritto, e la funzione di autocorrelazione dipenderà soltanto da  $\tau$ , per cui:

$$S_\nu(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T \Delta\nu(t) e^{-i2\pi f t} dt \right|^2 \quad (3.17)$$

Lo studio di questi rumori viene effettuato tramite l'analisi della potenza poiché gli apparati sperimentali utilizzati per questo genere di misure prevedono spesso dei fotorivelatori posti all'esterno del sistema che generano una corrente proporzionale alla potenza ottica incidente e, quindi, al quadrato del campo.

Dalla densità spettrale di potenza della frequenza possiamo trovare anche quella associata al rumore di fase:

$$S_\varphi(f) = \frac{S_\nu(f)}{f^2} \quad (3.18)$$

Richiamando quanto detto nel paragrafo precedente riguardo la dimensione della grandezza, possiamo notare che avendo come segnale  $x(t)$  una frequenza risulta  $[S_\nu(f)] = \frac{\text{Hz}^2}{\text{Hz}}$  (3.12), che è, infatti, la definizione di *densità spettrale di frequenza*.

Essendo quindi la modulazione di fase una variabile casuale è utile definire la sua varianza per poter analizzare come varia il suo valore in un determinato intervallo di frequenze  $[f_1, f_2]$ :

$$\sigma_\varphi^2 = \int_{f_1}^{f_2} S_\varphi(f) df \quad (3.19)$$

### 3.1.2 Rumore termico

Considerando un corpo a temperatura  $T$  in equilibrio termico con l'ambiente circostante, si possono presentare delle fluttuazioni di posizione dovute al moto browniano che porta ad un meccanismo di dissipazione di energia interno al sistema. Questo meccanismo è spiegato dal *Teorema di fluttuazione-dissipazione*, che ci permette di introdurre il modulo di Young complesso,  $E = E_0(1 + i\psi)$  nella legge elastica di Hooke dove  $\psi$  è l'angolo che descrive il meccanismo di dissipazione interno del materiale.

Per descrivere questo fenomeno possiamo fare uso del *rumore termico Browniano*, che permette di scrivere la densità spettrale di potenza per tre diverse sorgenti indipendenti:

$$S_L^{spaziale}(f) = \frac{2k_b T L}{f 3\pi R^2 E_0} \cdot \psi_{spaziale} \quad (3.20)$$

$$S_L^{specchio}(f) = \frac{2k_b T}{f} \frac{1 - \sigma^2}{\sqrt{\pi^3} E_0 \omega_0} \psi_{specchio} \quad (3.21)$$

$$S_L^{HR}(f) = \frac{2k_b T}{f} \frac{(1 - \sigma)(1 - 2\sigma)d}{\pi E_0 \omega_0^2} \psi_{HR} \quad (3.22)$$

dove abbiamo  $R$  che è il raggio della cavità cilindrica,  $E_0$  il modulo di Young e  $\sigma$  il coefficiente di Poisson, specifici per ogni materiale,  $\omega_0$  la larghezza del fascio laser (1.12),  $d$  lo spessore degli specchi ad alta riflessione,  $L$  la lunghezza della cavità,  $k_b$  la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura. Nelle equazioni di sopra la (3.20) è riferita a delle fluttuazioni termiche longitudinali della cavità[7] con il parametro  $\psi_{spaziale} \sim 1/(6 \cdot 10^4)$ , la (3.21) al rumore termico sullo strato dello specchio[8] con  $\psi_{specchio}$  prodotta alla parte immaginaria del modulo di Young, la (3.22) al rumore termico su specchi altamente riflettenti sui quali è presente un rivestimento dielettrico per aumentare la riflettività (High-Reflection coating), [9]. Grazie alle (3.20)-(3.22) possiamo trovare la densità spettrale di potenza del rumore termico totale sommando i termini di cui sopra. Si può facilmente passare alla densità spettrale di rumore in frequenza tramite:

$$\frac{\sqrt{S_L}}{L} = \frac{\sqrt{S_f}}{f_0} \quad (3.23)$$

Nelle cavià ultra stabili, per cercare di minimizzare il rumore termico che risulta spesso essere quello con il contributo più alto, vengono utilizzati materiali con un basso  $\psi$  e coefficiente di dilatazione termica, in modo da avere una variazione di  $L$  minore.

### 3.1.3 Rumore sismico

Un importante effetto da tenere in considerazione è la deformazione elastica che può subire la cavità[10]. L'apparato sperimentale che riguarda il risonatore è composto dalla cavità appoggiata su due sostegni che la reggono; questi, come vedremo nel successivo capitolo, sono i principali artefici dello spostamento  $\Delta L$  che subiscono gli specchi che comporta quindi una variazione, seppur piccola, della lunghezza  $L$  che, come abbiamo visto nella (2.29), influisce sulla variazione di frequenza dello spettro portando, quindi, ad un allargamento della riga del laser.

Le proprietà del materiale del risonatore che servono per conoscere le reazioni di questo alle interazioni meccaniche sono le  $E$ ,  $\rho$  e  $\sigma$  dichiarate precedentemente che esprimono rispettivamente il rapporto tra tensione e deformazione, il rapporto tra la massa ed il volume ( quindi la quantità delle particelle presenti per ogni  $m^3$ ) e il grado di dilatazione che il materiale subisce, considerato lungo una sola direzione. Queste ci danno informazioni sulla sua variazione trasversale in presenza di fluttuazioni longitudinali; per la variazione di frequenza bisogna, però, considerare anche le accelerazioni longitudinali e trasversali ( quelle che prenderemo in esame), per cui avremo:

$$\frac{\Delta\nu_{long}}{\nu} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2} \frac{\rho L}{E} \Delta a_{long} \quad (3.24)$$

$$\frac{\Delta\nu_{trasv}}{\nu} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\rho \sigma L}{E} \Delta a_{trasv} \quad (3.25)$$

dove  $2L$  rappresenta la lunghezza della cavità. Considerando una cavità lunga circa  $10\text{cm}$  di un particolare tipo di vetro, ULE ( *Ultra Low Expansion* avente cioè un coefficiente di dilatazione termica estremamente basso), questo avrà un  $\Delta L/L$ (3.24) dell'ordine di  $10^{-8}$  corrispondente in frequenza a  $\sim 10\text{MHz/g}$  a  $532\text{nm}$ [10]. Il problema principale creato dal rumore sismico è che questo ha una corrispondenza lineare con la variazione di lunghezza, la quale, quindi, anche tramite piccole fluttuazioni potrebbe allargare in maniera sensibile la larghezza di riga del laser. Ultimi lavori a riguardo[27] sono riusciti a misurare frazioni di  $\sim 10\text{mHz}/\mu\text{g}$ .

## 3.2 Pound-Drever-Hall

Una tecnica di stabilizzazione che tiene conto della variazione della frequenza del laser rispetto quella della cavità è la *Pound-Drever-Hall*[11] che permette di avere un segnale dispersivo proporzionale alla variazione di cui sopra.

Uno schema di stabilizzazione PDH prevede che il laser, prima di arrivare nella cavità, passi per un modulatore elettro-ottico che ne moduli, appunto, la fase ad una frequenza  $\omega_m$  e ampiezza  $m$  fissate, perciò avremo un campo  $E(t)$ <sup>4</sup>:

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega_l t + m \sin \omega_m t)} \simeq E_0 [J_0(m) e^{i\omega_l t} + J_1(m) e^{i(\omega_l + \omega_m)t} - J_1(m) e^{i(\omega_l - \omega_m)t}] \quad (3.26)$$

in corrispondenza del picco positivo del segnale modulante l'oscillatore si porterà ad una frequenza  $\omega_l + m\omega_m$ , ed in corrispondenza del picco negativo del segnale modulante l'oscillatore si porterà ad una frequenza  $\omega_l - m\omega_m$ . Le  $J_{0,1}$  rappresentano le funzioni di Bessel del primo tipo,  $m$  la deviazioni di picco in fase. Il valore ideale di  $m$  è quello che massimizza l'equazione del *guadagno ottico* che troviamo alla fine del paragrafo, quindi che renda massimo il prodotto  $J_0(m)J_1(m)$ , che in questo caso sarebbe[26]  $\sim 1,08$ , per questioni di natura pratica, però, è difficile avere valori superiori a  $0.3 - 0.5$ .

Richiamando il coefficiente di riflessione della cavità già citato nel capitolo precedente possiamo scrivere:

---

<sup>4</sup>Si è utilizzata una delle proprietà delle funzioni di Bessel che consente di scrivere  $J_{-1}(m) = -J_1(m)$ .

$$R(\omega) = \sqrt{R} \frac{1 - \exp -i(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c}{1 - R^2 \exp -i(\omega - \omega_c)/\Delta\omega_c} \quad (3.27)$$

con  $\Delta\omega_c = (\frac{1-R_1R_2}{2\sqrt{R_1R_2}})$  larghezza di banda della distribuzione di frequenza (FWHM) e  $R$  la riflettività degli specchi.

Essendo però il segnale che viene misurato dai fotorivelatori proporzionale alla potenza, risulta utile trovare un'espressione per il quadrato del campo:

$$\begin{aligned} I \propto |E(t)|^2 = & |E_0|^2 J_0^2 |R(\omega_l)|^2 + |E_0|^2 J_1^2 |R(\omega_l + \omega_m)|^2 + |E_0|^2 J_1^2 |R(\omega_l - \omega_m)|^2 \\ & + 2|E_0|^2 J_0 J_1 [Re[\chi(\omega_l, \omega_m)] \cos \omega_m t - Im[\chi(\omega_l, \omega_m)] \sin \omega_m t] \\ & + (\text{termini in } 2\omega_m) \end{aligned} \quad (3.28)$$

dove  $\chi(\omega_l, \omega_m)$  è definita come:

$$\chi(\omega_l, \omega_m) = R(\omega_l)R^*(\omega_l + \omega_m) - R^*(\omega_l)R(\omega_l - \omega_m) \quad (3.29)$$

La frequenza di modulazione più consona all'analisi del segnale d'errore è solitamente molto maggiore rispetto la  $\Delta\omega_c$  in modo che questa possa essere (quasi) totalmente riflessa quando l'onda incontra lo specchio, che comporta perciò un coefficiente di riflessione pari ad 1, perciò:

$$\chi(\omega_l, \omega_m) \simeq -2i Im R(\omega_l) \quad (3.30)$$

risulta essere puramente immaginario. In questo caso il termine con il coseno presente nella (3.28) può essere trascurato, il segnale di errore diventa così:

$$\epsilon = -2|E_0|^2 J_0(m) J_1(m) Im \chi(\omega_l, \omega_m) \quad (3.31)$$

per un detuning quasi nullo, cioè  $\omega_l \simeq \omega_c$  si ha un  $\epsilon = k(\omega_l - \omega_c)$ , quindi un segnale di errore lineare la cui pendenza è:

$$k \propto \frac{2\pi J_0(m) J_1(m)}{\Delta\omega_c} \quad (3.32)$$

che è anche chiamato *guadagno ottico*.



### 3.2.1 Shot-noise

Durante l'acquisizione del segnale da parte del fotodiodo bisogna tenere presente un ulteriore errore, che questa volta non riguarda fluttuazioni della cavità o del laser, ma è di natura prettamente elettronica. Lo shot-noise è infatti una conseguenza della distribuzione in probabilità dell'evento che si palesa quando questa segue un andamento poissoniano. Come si è già detto, in regime di risonanza abbiamo la scomparsa della frequenza portante, il segnale del fotodiodo rileva in questo modo soltanto l'andamento oscillante della  $\omega_m$ . Il segnale generato dal rivelatore può essere approssimato a quello di un segnale in corrente, in termini di potenza si ha  $P_{riflessione} = 2P_{sideband}$ . Così facendo la densità spettrale si può scrivere come[11]:

$$S_s(I) = \sqrt{2 \frac{hc}{\lambda} (2P_s)} \quad (3.33)$$

essendo proporzionale al quadrato della potenza delle banda laterale risulta avere una densità di potenza uniforme, in un grafico potenza vs. frequenza avrebbe, cioè, un valore costante. Tramite la (3.31) si può ottenere lo spettro del rumore di frequenza apparente:

$$S_s(f) = \frac{\sqrt{hc^3}}{8} \frac{1}{\mathcal{F}L \sqrt{\lambda \left(\frac{4P}{m^2}\right)}} \quad (3.34)$$

Per fare una stima di questo valore consideriamo una cavità lunga 10 cm con una *Finesse*  $\sim 10^4$ , un'onda avente  $\lambda \sim 0.5\mu\text{m}$  e una potenza totale incidente  $P=10\mu\text{W}$ , si ottiene un valore di  $S_s(f)= 1.06\text{mHz}$ , che confrontato con il valore della cavità di ULE calcolato precedentemente risulta trascurabile[18][19]. Il rumore di shot segna il limite di stabilizzazione alla misura poiché è un errore che non dipende dalla frequenza.



## CAPITOLO 4

# METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

Il metodo degli elementi finiti è un metodo numerico che permette l'approssimazione di sistemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) con uno di equazioni algebriche, discretizzando il continuo di partenza. La discretizzazione dell'insieme può utilizzare celle elementari di varie forme, triangolari o quadrangolari per un insieme di due dimensioni, a esaedro o tetraedo se si considerano le tre dimensioni; l'insieme delle celle elementari è chiamato *maglia*, i punti delle celle elementari sono detti *nodi*.

Le soluzioni sono calcolate su queste forme geometriche tramite l'ausilio di alcune particolari funzioni, *funzioni di forma*, che descrivono gli spostamenti dei punti interni in base alla traiettoria che seguono i nodi. Le funzioni di forma sono dei polinomi avente il grado uguale al numero di nodi della cella, i quali rappresentano, ognuno, un elemento del polinomio, motivo per cui un maggior numero di nodi equivale ad una maggiore precisione dell'approssimazione. Durante la fase di calcolo si stabilisce una combinazione lineare delle funzioni da analizzare tenendo presente i vincoli, quindi l'impossibilità di muoversi di alcuni nodi, i punti di applicazione e la direzione delle forze conosciute e, come vedremo in seguito, alcune proprietà intrinseche del materiale.

### 4.1 Analisi agli elementi finiti

L'analisi agli elementi finiti altro non è che l'applicazione a livello informatico della tecnica del metodo degli elementi finiti, tramite la quale si riesce a risolvere con un calcolatore il sistema di equazioni lineari ottenuto. I passi che compongono i processi di analisi dei dati sono i seguenti:

**Geometria:** Come primo passo bisogna creare il modello dell'oggetto da analizzare rispettando quelle che sono le grandezze e le caratteristiche reali;

**Mesh:** Suddividere in celle elementari l'oggetto in esame utilizzando uno degli appositi algoritmi, ricordando che più le dimensioni delle celle sono piccole più la simulazione sarà precisa, un processo con un numero di elementi della mesh maggiore richiede un aumento delle prestazioni del calcolatore;

**Parametri:** Prima di passare alla fase di calcolo è necessario introdurre i parametri necessari, proprietà del materiale, vincoli, forze applicate etc.;

**Post-processing :** L'ultima fase è quella del *post-processing*, nel quale vengono forniti i dati richiesti in maniera testuale ma anche per mezzo di figure di deformazione o mappe scalari grazie alle quali si possono osservare le zone maggiormente deformate.

Questo tipo di software è utile nello studio di problemi strutturali o di analisi di sistemi meccanicamente interagenti, facilitandone notevolmente la progettazione.

## 4.2 Salome-Meca

Salome-Meca<sup>1</sup> è un software libero di simulazione numerica, sviluppato da Open Cascade S.A.S.[20], che comprende al suo interno il modulo di pre-processing e modellizzazione Salome e il risolutore di post-processing Code\_Aster<sup>2</sup>[16]. Aster è la colonna portante di Salome-Meca, il suo sviluppo è iniziato alla fine degli '90 da parte dell' "Électricité de France", agenzia di energia francese, per poi essere distribuito sotto licenza GNU durante i primi anni 2000. Permette di risolvere problemi inerenti l'ottica, la meccanica, la termodinamica e altri ambiti delle scienze applicate. È dotato di un'interfaccia grafica e una testuale in Python; Aster consente di inserire i comandi sia tramite il modulo Efficas, GUI nella quale sono presenti tutte le funzioni o "procedure" per gestire la risoluzione del problema, sia tramite la scrittura di un file di testo nel quale la precedente operazione viene fatta manualmente.

Questo software open-source è stato utilizzato per simulare il comportamento della cavità posta orizzontalmente su due sostegni e soggetta alle fluttuazioni meccaniche dovute al rumore sismico, per calcolare gli spostamenti dello specchio in funzione delle diverse posizioni del supporto, da questi è stata estrapolata la funzione che

---

<sup>1</sup>Salome-Meca può essere trovato pre-installato in un distribuzione Linux, CAELinux, dedita all'analisi computazionale.

<sup>2</sup>Disponibile insieme a Salome-Meca all'indirizzo <http://web-code-aster.org/V2/spip.php?rubrique21>

ne descrive l'andamento dalla quale è stato possibile avere il valore di  $x$ , corrispondente alla posizione del sostegno, per il quale la funzione, cioè il  $dx$ , si annulla. Gli spostamenti dello specchio del risonatore sono stati calcolati con il seguente procedimento:

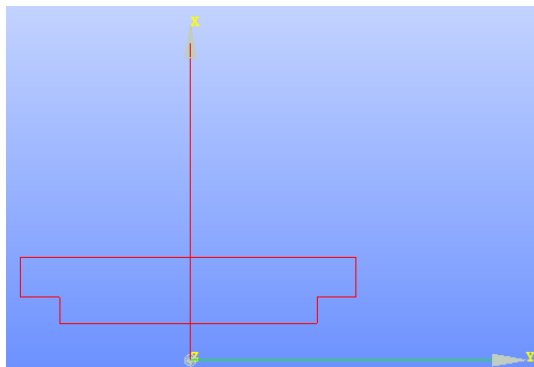
**Geometry:** Per la creazione della struttura sono state prese, tramite l'utilizzo di un calibro, le misure della cavità (Tabella 4.2.1). Successivamente è stata realizzata, con il modulo *Geometry*, (Figura 4.2.1), lo schema in due dimensioni dell'oggetto, che è stata poi fatta ruotare di  $360^\circ$  per ottenere la figura tridimensionale, con conseguente taglio di una porzione di volume cilindrica lungo l'asse  $z$  per rispettare la struttura reale<sup>3</sup> (Figura 4.2.2).

Lunghezza cavità (mm)	49
Distanza tra gli specchi (mm)	38
Spessore incavi specchi (mm)	5.7
Diametro foro ventilazione (mm)	6.2
Diametro cavità (mm)	30

**Tabella 4.2.1**

*Valori misurati tramite il calibro.*

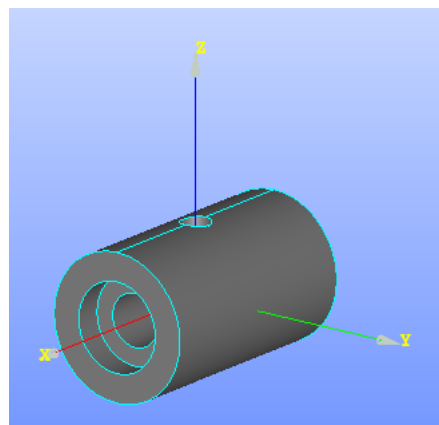
*Tutte le misure presentando un errore dovuto alla sensibilità dello strumento di  $0.05 \cdot 10^{-3}m$*



**Figura 4.2.1**

*Struttura della sketch adottata.*

*Si noti come, per questioni di simmetria, si sia posto il centro della cavità in  $(0,0,0)$*

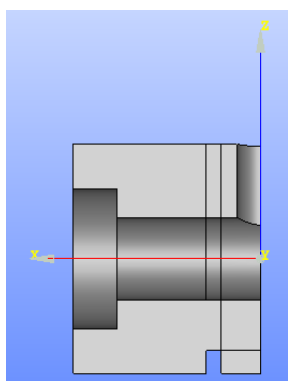


**Figura 4.2.2**

*Figura 3D con il foro di ventilazione e gli incavi per alloggiare gli specchi*

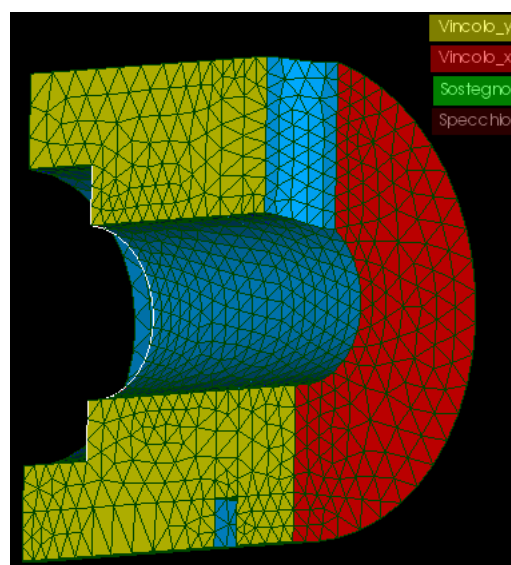
<sup>3</sup>Il foro serve per permettere all'aria di uscire quando il risonatore viene messo sotto vuoto.

Il modello preso in esame risulta simmetrico in  $(x, y), (-x, y)$  e  $(x, y), (x, -y)$ , perciò è stato tagliato con i piani  $x = 0$  e  $y = 0$ , così che si avesse il quarto nel piano  $(x, -y)$ . Questo procedimento è stato seguito per rendere il calcolo più leggero dovendo analizzare un quarto dei nodi totali. Dalla geometria finale sono stati selezionati cinque gruppi, quattro per le facce e uno per i punti, richiamati durante il mesh (Figura 4.2.4) e la compilazione del modulo Aster per impostare le facce vincolate e i punti sui quali calcolare lo spostamento. Infine è stata eliminata un piccolo volume per creare la base d'appoggio del supporto (Figura 4.2.3).



**Figura 4.2.3**

*Sono state effettuate più prove con sostegni in posizioni differenti*



**Figura 4.2.4**

*Struttura del mesh con in evidenza le facce vincolate sulle x, rosse, e sulle y, gialle.*

**Mesh:** Dopo aver creato la base geometrica si è discretizzato il volume tramite l'algoritmo "Netgen 3D", generatore automatico di tetraedi, impostando un'accuratezza "Very fine" con dimensioni massime e minime dell'ordine di 1 e 0.5 mm rispettivamente. Tramite questi parametri il mesh ha generato circa 10000 nodi. Adottando una suddivisione meno fine, con un altro tipo di accuratezza e dimensioni, si è notato che il numero di elementi diminuisce notevolmente, limitando la precisione dell'analisi[15][21];

**Aster:** All'interno del modulo Aster è stata effettuata un'analisi di elasticità lineare, processo che tenta di mettere in correlazione le tensioni alle deformazioni che queste provocano. Si è dovuto modificare il file testuale .comm inserendo: modulo di Young, densità e rapporto di Poisson dell'Invar, materiale con il

quale è costituita la cavità; caratteristiche delle facce da vincolare, precisando  $dz = 0$  per il sostegno,  $dx = 0$  e  $dy = 0$  per le facce mostrate nella (Figura 4.2.4) per via della simmetria. Avendo inserito anche la densità del materiale, il software calcola da solo quella che è la massa dell'oggetto applicando un campo di accelerazione ad ogni cella precedentemente creata. Vengono inoltre fornite informazioni sulla scrittura dei dati, imponendo un risultato testuale, dati che sono riportati nelle tabelle in seguito, e uno grafico, che ci permette di osservare le mappe scalare delle deformazioni meccaniche.

### 4.3 Analisi dati

Come si è detto il materiale che compone il risonatore è l'Invar. È una lega di nichel e ferro avente un coefficiente di dilatazione termica compreso tra  $(0.5-2) \cdot 10^{-6} K^{-1}$ , un ordine di grandezza in meno rispetto quello dell'acciaio e dell'alluminio. Ha un modulo di Young  $E \sim 140 \text{ GPa}$ , densità  $\rho = 8.1 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$  e rapporto di Poisson  $\sim 0.29$ .

La lunghezza della cavità è  $(49.00 \pm 0.05) \text{ mm}$ , avendone preso un quarto centrato in  $(0, 0, 0)$  il punto medio è posto nell'origine, mentre l'estremo in  $24.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , lo specchio si trova in  $x = 18.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

Nel considerare le forze agenti, è stato preso un campo gravitazionali unitario, così da avere un  $\frac{\Delta L}{L}$  già calibrato per la conversione nel dominio delle frequenze.

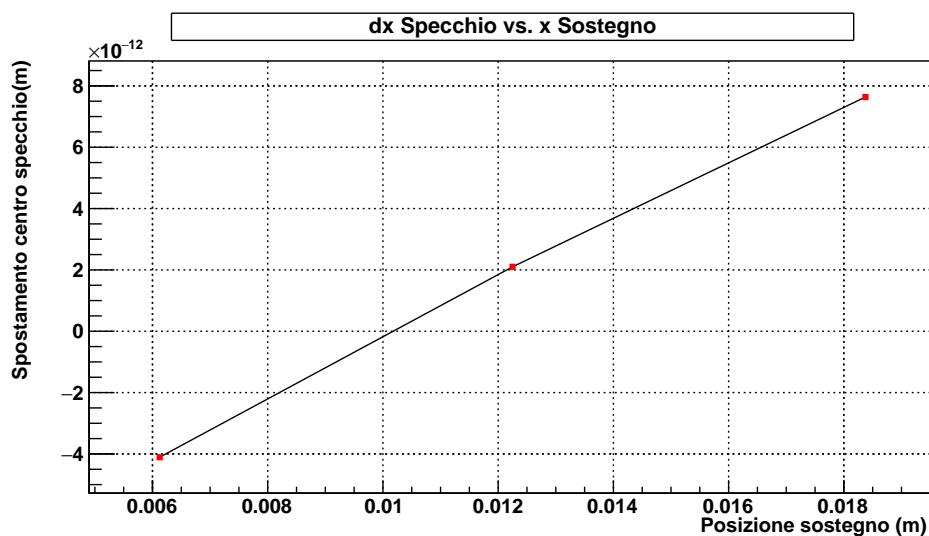
Nella tabella che segue vengono riportati gli spostamenti  $dx$  degli estremi e del centro nel piano  $y = 0$  dello specchio, considerato abbastanza piccolo da poter studiare solo lo spostamento dei due punti vicini al centro, e la posizione del sostegno avente uno spessore di 2 mm:

Sostegno (m)	Punto Superiore (m)	Punto Inferiore (m)	Centro dello specchio (m)
$23.5 \cdot 10^{-3}$	$9.44 \cdot 10^{-12}$	$-9.27 \cdot 10^{-12}$	$8.71 \cdot 10^{-14}$
$18.375 \cdot 10^{-3}$	$2.08 \cdot 10^{-11}$	$-5.53 \cdot 10^{-12}$	$7.64 \cdot 10^{-12}$
$12.25 \cdot 10^{-3}$	$4.73 \cdot 10^{-12}$	$-5.27 \cdot 10^{-13}$	$2.10 \cdot 10^{-12}$
$6.125 \cdot 10^{-3}$	$-1.15 \cdot 10^{-11}$	$3.31 \cdot 10^{-12}$	$-4.11 \cdot 10^{-12}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$-1.68 \cdot 10^{-11}$	$4.51 \cdot 10^{-12}$	$6.14 \cdot 10^{-12}$

**Tabella 4.3.1**

*Valori ottenuti tramite la simulazione*

il centro dello specchio si è calcolato facendo una media dello spostamento del punto superiore e di quello inferiore. Tramite i dati raccolti è stato possibile eseguire un grafico di  $dx$  in funzione della posizione del supporto ( nel quale sono stati considerati soltanto i valori allineati) per ottenere un'equazione dalla quale poter ricavare il punto che consente allo specchio un minor movimento:



$$f(x) = (9.58 \pm 0.32)10^{-10}x - (9.86 \pm 0.42)10^{-12} \quad (4.1)$$

secondo la quale una  $f(x)$ , quindi un  $dx$ , nulla si ha per un sostegno posizionato in  $x = 10.29 \cdot 10^{-3}m$ , in prossimità della metà del quarto di cavità. Si riportano i dati ottenuti con questa configurazione:

Sostegno (m)	$10.29 \cdot 10^{-3}$
Punto Superiore (m)	$-1.91 \cdot 10^{-12}$
Punto Inferiore (m)	$9.56 \cdot 10^{-13}$
Centro dello specchio (m)	$4.73 \cdot 10^{-13}$

Dalla tabella si evince come, in realtà, questa non sia la posizione ottimale. Con i dati ottenuti si può dire che la prova con il sostegno posto all'estremo della cavità risulta la migliore per minimizzare le fluttuazioni.

La grandezza che si vuole però trovare, è lo shift in frequenza del laser ottenibile dall'equazione (3.25), nella quale consideriamo una frequenza nel visibile di circa  $4 \cdot 10^{14}Hz$ :

Sostegno (m)	$\Delta\nu(kHz)$
$23.5 \cdot 10^{-3}$	1.4
$18.375 \cdot 10^{-3}$	124.7
$12.25 \cdot 10^{-3}$	100.5
$6.125 \cdot 10^{-3}$	67
$1 \cdot 10^{-3}$	34.3

**Tabella 4.3.2**

*Shift in frequenza per un'accelerazione di  $1m/s^2$*



Richiamando la (3.25) si può trovare un dato teorico per l'allargamento di riga. Utilizzando i dati inseriti all'inizio del paragrafo, considerando una cavità lunga come la nostra, si ha, con un'accelerazione gravitazionale unitaria:

$$\frac{\Delta L}{L} = 8.22 \cdot 10^{-12} \quad (4.2)$$

e con una frequenza di  $4 \cdot 10^{14}$ Hz si ottiene un:

$$\Delta \nu = 3.28 \cdot 10^3 Hz \quad (4.3)$$

I valori riportati in tabella non sono però gli effettivi shift di frequenza del laser, in quanto questi sono soggetti anche alle vibrazioni del pavimento che si assestano intorno i  $10^{-4} - 10^{-3} m/s^2 \sqrt{Hz}$ . Per avere un'idea dell'effetto del rumore sismico in un laboratorio, alcuni ricercatori, tramite un sismometro posto su un banco da laboratorio, hanno misurato la densità spettrale di accelerazione (ASD)<sup>4</sup> per un edificio situato in una zona urbana, è stato inoltre possibile avere dei dati riguardo le fluttuazioni di un tavolo ottico. tile per l'analisi di vibrazioni casuali che, nel caso di quelle sismiche, sono molto aleatorie e dipendenti da fattori atmosferici, climatici e sociali. Il valore quadratico medio dell'accelerazione, che viene indicato con  $G_{rms}$  è definito con la radice quadrata della superficie sottesa alla ASD nel dominio delle frequenze. Ottenuto questo valore si possono utilizzare diversi metodi di integrazione che permettono di ottenere la densità spettrale di frequenza[22][23].

---

<sup>4</sup>[ASD]= $g^2 \cdot Hz^{-1}$



## CONCLUSIONI

I valori ottenuti tramite la simulazione numerica con Salome-Meca hanno permesso di ottenere delle misure circa la posizione ideale nella quale dovrebbe trovarsi il supporto della cavità per minimizzare le fluttuazioni meccaniche che portano a uno shift in frequenza del laser, come si evince dai dati riportati nella Tabella 4.3.2.. La prova eseguita con il valore che avrebbe dovuto portare alla configurazione più stabile non ha avuto totalmente successo, in quanto lo spostamento dello specchio è risultato essere minore di quattro prove su cinque, soltanto la prima configurazione, con il supporto posto ad una distanza dall'origine di  $23.5\text{ mm}$ , nota una variazione di posizione minore di un ordine di grandezza.

Considerando il valore dello shift di frequenza teorica,  $\Delta\nu = 3.28\text{kHz}$  e quello ottenuto sistemando il sostegno nella posizione  $23.5\text{ mm}$ ,  $\Delta\nu = 1.4\text{kHz}$  si può notare come quest'ultimo sia minore del valore teorizzato tramite le equazioni riportate nel Capitolo 3.

Sarebbe interessante poter avere una stima dell'attendibilità dei risultati tramite una verifica sperimentale, considerando anche le altre sorgenti di rumore descritte durante il corso della tesi.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Fox R.W., Jiang Y.Y., Lemke N.D., Ludlow A.D., Ma L.-S., Oates C.W., Sherman J.A., *Making optical atomic clocks more stable with  $10^{-16}$  level laser stabilization*, Nature Photonics 5, 158 (2011);
- [2] Bishof M., Bloom B.J., Bromley S.L., Campbell S.L., Nicholson T.L., Williams J.R., Ye J., Zhang W., Zhang X., *An optical lattice clock with accuracy and stability at the  $10^{-18}$  level*, Nature 506 71 (6 Febbraio 2014);
- [3] Accadia T., Acernese F., Alshourbagy M., Amico P., Antonucci F., Aoudia S., Arnaud N, Arnault C., Arun K.G., Astone P., *Virgo: a laser interferometer to detect gravitational waves*, Journal of Instrumentation (2012);
- [4] Argence B., Bize S., Le Goff R., Lemonde P., Lévêque T., Prevost E., Santarelli G., *Prototype of an ultra-stable optical cavity for space applications*, Optics Express 20 25409 (2012);
- [5] Abgrall M., Bize S., Chupin B., De Sarlo L., Guéna J., Laurent Ph., Le Coq Y., Le Targat R., Lodewyck J., Lours M., Rosenbusch P., Rovera D., *Atomic fountains and optical clocks at SYRTE: status and perspectives*, Comptes Rendus Physique 16, 461 (2015);
- [6] Bergquist J.C., Delaney M.J., Diddams S.A., Donley E.A., Fortier T.M., Heavner T.P., Hollberg L., Jefferts S.R., Kim K., Itano W.M., Levi F., W. H. Oskay, Parker T.E., *Single-Atom Optical Clock with High Accuracy*, Phys. Rev. Lett. Bold, 020801 (2006);
- [7] Liu Y.T., Thorne K., *Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses*, Phys. Rev. D, 62, 122002 (2000);

- [8] Harry G.M., *Study of the thermal noise caused by inhomogeneously distributed loss*, *Class. Quantum Grav.*, 19, 897 (2002);
- [9] Camp J., Kemery A., Numata K., *Thermal-Noise Limit in the Frequency Stabilization of Lasers with Rigid Cavities* *Phys. Rev. Lett.* 93, 250602 (2004);
- [10] Chen L., Hall J.L., Li T., Yang T., Te J., Zang E., *Vibration-induced elastic deformation of Fabry-Perot cavities*, *Phys. Rev. A* 74, 053801, (2006);
- [11] Black E.D., *An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization*, *American Journal of Physics* 69 79 (2000);
- [12] Rubiola E., *The Pound-Dreve-Hall Frequency Control*, Conferenza a Denver, USA, (12-16 Aprile 2015);
- [13] Aubry J-P., *Beginning with Code\_Aster. A practical introduction to finite element method using Code\_Aster Gmsh and Salome*, Framabook (2013);
- [14] Strang G., Fix G., *An Analysis of the finite element method*, SIAM (2008);
- [15] Bindu R.S., More S.T., *Effect of Mesh Size on Finite Element Analysis of Plane Structure*, *International Journal of Engineering Science and Innovative Technolog* (2015);
- [16] Thakore D.A., *Finite Element Analysis using Open source Software*, Moonish Enterprises Pty Ltd (2013);
- [17] Zucchini R., *Quantum Mechanics*, Università degli Studi di Bologna, Corso di laurea in Fisica - Bologna, (2015);
- [18] Tarallo M.G., *Development of a Strontium optical lattice clock*, Ph.D Thesis, Università degli studi di Pisa, Pisa (2009);
- [19] Bergquist J.C., Cruz F.C., Itano W.M., Young B.C., *Visible Lasers with Subhertz Linewidths*, *Phys. Rev. Lett.* 82, 3799 (1999);
- [20] <http://www.opencascade.com/>;
- [21] Shah C., *Mesh Discretization Error and Criteria for Accuracy of Finite Element Solutions*, <http://www.ansys.com/staticassets/ANSYS/staticassets/resourcelibrary/confpaper/2002-Int-ANSYS-Conf-9.PDF>, (2002);
- [22] Irvine T., *Integration of a Power Spectral Density Function* , [http://www.vibrationdata.com/Course\\_Units/UNIT15.pdf](http://www.vibrationdata.com/Course_Units/UNIT15.pdf), Shock and vibration response spectra course, Unit 15, ;

- [23] Irvine T., *Power spectral density units:  $G^2/\text{Hz}$* , <http://www.vibrationdata.com/tutorials2/psd.pdf>, Revision B;
- [24] Fox A.G., Li T., *Resonant modes in a maser interferometer*, Bell System Technical Journal (1961);
- [25] Aravanis C.T. *Hermite polynomials in Quantum Harmonic Oscillator*, Undergraduate Mathematics Exchange 7 1 (2010);
- [26] Watson G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University (1966);
- [27] Gill P., Oxborrow M., Webster S.A., *Vibration insensitive optical cavity*, Phys. Rev. A 75, 011801, (2007);
- [28] Perepelitsa D.V., *Johnson Noise and Shot Noise*, <http://web.mit.edu/dvp/Public/noise-paper.pdf>, MIT -Dipartimento di fisica (2006);
- [29] Svelto O., *Principles of lasers*, Plenum Press, New York (1989).