

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

CAMPUS DI CESENA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Scienze e Tecnologie Informatiche

**DENOISING DI IMMAGINI
MEDIANTE TECNICHE BASATE
SULLA TOTAL VARIATION**

Tesi in:

METODI NUMERICI PER LA GRAFICA

Relatore:

**Chiar.ma Dott.ssa
DAMIANA LAZZARO**

Presentata da:

VIVIANA ZOPPO

Sessione II

Anno Accademico 2014-2015

A Mio Marito ...

Introduzione

L'era digitale ha permesso la realizzazione di sofisticati dispositivi per l'acquisizione dei dati tanto che in questi ultimi anni matematici applicati ed informatici abbiano costituito un corpo computazionale per l'analisi e l'interpretazione dell'informazione digitale composto di algoritmi di elaborazione e di paradigmi di implementazione. Il risultato è una prassi metodologica di forte valenza interdisciplinare, per studiare e analizzare da tutti i punti di vista fisico, formale, computazionale e ingegneristico, tecniche di acquisizione e metodi di visualizzazione.

Il trattamento delle immagini è una disciplina molto vasta che comprende l'insieme delle tecniche di analisi e modifica delle immagini digitali. Tra queste tecniche si hanno ad esempio, il *deblurring* (antifocatura), il *denoising* (eliminazione del rumore), l'*inpainting* (restaurare parti mancanti o parti corrotte), la *segmentazione* e la *ricostruzione* di superfici.

Inoltre si ha l'*enhancement* (miglioramento) che è il processo di manipolazione dell'immagine tale che il risultato sia più simile a quella originale per una specifica applicazione.

Come noto le tecniche di enhancement sono generalmente basate su procedure euristiche che manipolano l'immagine in modo da trarre vantaggio dagli aspetti psicovisivi del sistema percettivo umano. Per esempio, l'applicazione di una funzione di deblurring per la riduzione del *blurring* (sfocatura) di un'immagine è considerata una tecnica di restauro.

Lo scopo comune a queste discipline è l'estrazione di informazioni a partire dall'immagine oppure il miglioramento della qualità della stessa.

Le applicazioni possono essere utili in campo medico, artistico, tecnologico e forensi.

Tra le procedure di elaborazione, esistono metodi, che ricoprono un ruolo importante, capaci di ridurre in buona misura il rumore di lettura, presente in ogni immagine reale, a causa della registrazione attraverso apparecchiature elettroniche e digitali.

Il lavoro svolto in questa tesi è legato allo studio ed alla formulazione di metodi computazionali volti all'eliminazione del *noise* (rumore) presente nelle immagini, cioè il processo di "denoising" che è quello di ricostruire un'immagine corrotta da rumore avendo a disposizione una conoscenza a priori del fenomeno di degrado.

Il problema del denoising è formulato come un problema di minimo di un funzionale dato dalla somma di una funzione che rappresenta l'adattamento dei dati e la Variazione Totale.

I metodi di denoising di immagini saranno affrontati attraverso tecniche basate sullo *split Bregman* e la *Total Variation* (TV) pesata che è un *problema mal condizionato*, cioè un problema sensibile a piccole perturbazioni sui dati. Queste tecniche permettono di ottimizzare dal punto di vista della visualizzazione le immagini in esame.

Nel **primo capitolo** è stato descritto il processo di formazione delle immagini, evidenziando l'origine delle varie perturbazioni che possono degradarle. Particolare attenzione si è data alla differenziazione fra le varie caratteristiche del rumore. Sono state elencate le diverse tecniche di miglioramento della qualità delle immagini, come l'*image enhancement*, l'*image restoration*, l'*image compression* e l'*image analysis*.

Nel **secondo capitolo** è stato descritto il problema della ricostruzione dell'immagine a partire dalla modellizzazione matematica dell'acquisizione di un'immagine digitale. L'attenzione è stata focalizzata sul fenomeno del rumore del quale è stata fornita una descrizione statistica attraverso funzioni di densità di probabilità. Si è trattato anche le principali sorgenti e tipi di

rumore.

Nel **terzo capitolo** si è data una panoramica matematica dei modelli dell'immagine digitale. Sono stati introdotti la discussione e il confronto del modello ROF di base, con i suoi vantaggi ed i suoi svantaggi. Si è preso in considerazione i modelli di ordine superiore per superare gli svantaggi e migliorare il modello ROF. Alla fine di questo capitolo si è anche introdotto gli algoritmi utilizzando quelli di uno step precedente per il modello ROF e si è presentato la discretizzazione del modello ROF in forma *isotropica* ed *anisotropica*.

Nel **quarto capitolo** si è preso in esame alcuni metodi numerici basati sulle iterazioni di Bregman per risolvere e migliorare il modello ROF. Poi si è proposto un algoritmo veloce . Si è iniziato con l'iterazione di Bregman e si è introdotto l'algoritmo Split Bregman di Tom Goldstein e Stanley Osher, per il modello ROF.

Nel **quinto capitolo** viene utilizzata la *Weighted Total Variation* nell'ambito della strategia Split Bregman la quale esegue penalizzazioni differenti in base al valore del gradiente dell'immagine.

Nel **sesto capitolo** è stato eseguito un confronto tra i risultati del denoising ottenuti facendo uso del metodo Split Bregman con Total Variation e con Total Variation pesata.

Indice

Introduzione	i
1 Tecniche di Elaborazioni di Immagini	1
1.1 Image enhancement	2
1.1.1 Tecniche di Image enhancement	3
1.2 Image restoration	4
1.3 Image compression	6
1.4 Image analysis	7
2 Il Rumore in un'immagine	8
2.1 Principali sorgenti di rumore	9
2.2 Tipi di rumore	10
2.2.1 Rumore di luminanza e crominanza	10
2.2.2 Rumori Casuali	12
3 Image Denoising	22
3.1 Nomenclatura e Definizioni	26
3.2 Modello variazionale ottimizzato e scalatura	30
3.3 Il modello ROF e le PDE	33
3.4 Le soluzioni del modello ROF	34
3.5 Metodi di discretizzazione	36
4 Modello di Denoising basato sulla Total Variation	41
4.1 Iterazione di Bregman	41

4.2	Il metodo Split Bregman	47
4.3	Metodo Bregman Alternato	50
4.4	Algoritmo di Goldstein ed Osher	54
5	The Weighted Total Variation	58
5.1	La Strategia Split Bregman	60
6	Sperimentazioni	64
	Conclusioni	68
	Bibliografia	70

Elenco delle figure

1.1	Il rumore	2
1.2	Il miglioramento dell'immagine	2
1.3	Il restauro dell'immagine	4
1.4	Degrado e restauro immagine	5
1.5	La compressione dell'immagine	6
2.1	Rumore con luminanza e crominanza	11
2.2	Funzione di densità di probabilità	13
2.3	Rumore gaussiano con dev. std. diversa	13
2.4	PDF del rumore di Rayleigh	14
2.5	PDF del rumore di Erlang (Gamma)	15
2.6	PDF del rumore esponenziale	16
2.7	PDF del rumore uniforme	17
2.8	PDF del rumore impulsivo	18
2.9	Poisson Distribution PDF	19
2.10	Esempi rumore speckle	20
3.1	Tecnica thresholding	24
3.2	Procedura standard Wavelet Denoising	24
3.3	Sistema di coordinate	26
3.4	Confronto tra metodo Wavelet thresholding e modello ROF.	30
3.5	Immagine di forma quadrata suddivisa in pixels	36
4.1	Esempio di distanza di Bregman	42

5.1	Staircasing on signal	58
6.1	Immagine originale	66

Elenco delle tabelle

6.1	Confronto tra i valori dei diversi PSNR	66
-----	---	----

Capitolo 1

Tecniche di Elaborazioni di Immagini

Per migliorare la qualità di un'immagine, in cui sono presenti vari disturbi, si utilizzano in genere tecniche di miglioramento e "restauro" delle immagini. Il dato digitale è molto sensibile a manipolazioni, inoltre, tali tecniche sono semplici, economiche e alla portata di tutti. Importante è tenere presente che esiste una differenza tra miglioramento e manipolazione di un'immagine, e che non tutte le elaborazioni restituiscono i risultati attesi. In un sistema di imaging il *rumore* o *noise* è una componente spuria del segnale che agisce in senso negativo nei confronti della qualità delle immagini. Il rumore è il risultato di molteplici fattori che con meccanismi diversi degradano la qualità dell'immagine rendendola talvolta inutilizzabile. Il fenomeno rumore è descritto nella Figura 1.1, nella quale l'input rappresenta l'acquisizione dell'immagine con aggiunta di rumore introdotto dal sistema di acquisizione (canale + rumore) e restituisce in output l'immagine disturbata, cioè un'immagine danneggiata. Per eliminare il rumore nell'immagine esiste una tecnica chiamata *Denoising*, processo di cui si tratterà in seguito.



Figura 1.1: Il rumore

L'elaborazione delle immagini digitali rientra in quattro categorie che sono elencate di seguito.

1.1 Image enhancement

Il miglioramento delle immagini (image enhancement) è un qualunque processo destinato a migliorare l'aspetto visuale di un'immagine, come la luminosità, il contrasto, i colori, il ritaglio, la riduzione del rumore e il miglioramento dei dettagli.



Figura 1.2: Il miglioramento dell'immagine

1.1.1 Tecniche di Image enhancement

Si possono adottare diverse tecniche per migliorare la qualità dell'immagine, come la regolazione del contrasto e della luminosità, il dodging and burning (regolazione della luminosità in un'area), il bilanciamento del colore ed il cropping (ritaglio). Queste metodologie sono considerate tecniche tradizionali .

Il contrasto, i colori e la luminosità dipendono dalle caratteristiche della scena, dalle impostazioni dei dispositivi e dalla qualità dei componenti.

Le tecniche di miglioramento d'immagini non tradizionali sono: il filtraggio lineare (linear filtering), le regolazioni del contrasto non lineari (non-linear contrast adjustments), la riduzione casuale del rumore (random-noise reduction), i modelli di filtri per la riduzione del rumore (pattern noise reduction filters) e l'elaborazione del colore (color processing).

Le tecniche di linear filtering, come quelle di sharpening (nitidezza), di deblurring (antisfocatura), di edge enhancement (miglioramento dei bordi) e di deconvolution (tecnica di correzione basata su un algoritmo che consente di ricostruire su base statistica gli elementi mancanti, di togliere i fattori di disturbo e rendere possibile la creazione di un'immagine di qualità maggiore), sono usate per incrementare il contrasto di piccoli dettagli in un'immagine.

Le tecniche di regolazioni del contrasto non lineare (non-linear contrast adjustments) includono le correzioni di gamma, le trasformazioni di scala di grigio e le curves and lookup tables (curve e tabelle di ricerca). Queste tecniche sono utilizzate per regolare il contrasto in selezionati intervalli di luminosità in un'immagine.

Le tecniche di riduzione del rumore casuale (random-noise reduction) includono i filtri low pass (passa - basso), i filtri di blurring (sfocatura), il filtro mediana e quello di speckling (creare immagini a partire da macchie).

Invece i modelli di filtri per la riduzione del rumore (Pattern noise reduction filters) identificano pattern che si replicano nell'immagine e permettono agli utenti di rimuoverli selettivamente.

Il color processing include trasformazioni dello spazio dei colori, di pseudo-

coloring (pseudo colorazione, denominata anche codifica a livelli di colore) e di tonalità, ed infine la regolazione della saturazione. Queste tecniche possono modificare le caratteristiche degli oggetti in un'immagine.

1.2 Image restoration

L'immagine restoration ("restauro" delle immagini) è un qualunque processo applicato all'immagine che è stata degradata da una causa conosciuta. Le principali cause possono essere individuate con lo scopo di rimuoverne parzialmente o totalmente gli effetti adoperando tecniche di recupero della sfocatura, delle trasformazioni geometriche e del filtraggio.

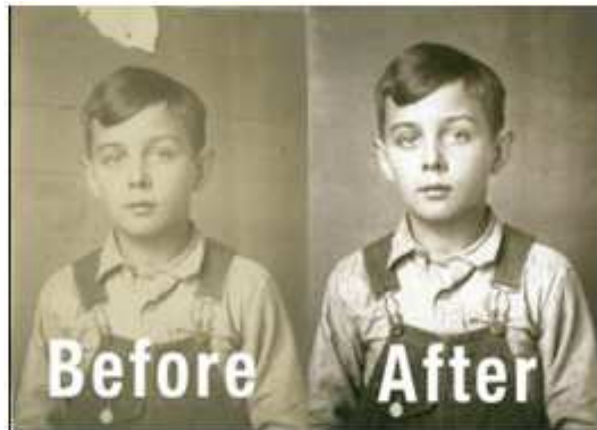


Figura 1.3: Il restauro dell'immagine

L'utilizzo di questa tecnica non è adatto a immagini con rumore. In genere, il rumore dipende dal tempo di esposizione troppo lungo o dalla qualità dei componenti adoperati. Inoltre, c'è la coscienza del fatto che l'informazione che è stata totalmente persa non può essere ricostruita. La parziale restoration spesso può offrire successo anche quando la total restoration è impossibile. Le tecniche d'immagine restoration sono le seguenti:

- *Grayscale linearization*: regolazione delle relazioni di luminosità tra gli oggetti della scena.
- *Color balancing* (bilanciamento del colore): è l'estensione della grayscale linearization a un'immagine a colori.
- *Blur removal*: è una tecnica di filtering progettata per rimuovere parzialmente o completamente la sfocatura dell'immagine dovuta a una ragione conosciuta.
- *Geometric restoration*: è la rimozione della distorsione geometrica da un'immagine. Solitamente tali distorsioni dipendono dall'ottica utilizzata.
- *Warping*: cambia la relazione spaziale tra gli oggetti in un'immagine come per esempio, rimuovere la prospettiva da una foto.

Il processo di degrado può essere modellato come una funzione di degrado H che, unitamente ad un termine di rumore additivo η , agisce sull'immagine di ingresso non corrotta $f(x, y)$ per produrre l'immagine degradata $g(x, y)$.

Data la $g(x, y)$, e conoscendo la natura della funzione di degrado H e del termine di rumore additivo η , l'obiettivo del restauro è di ottenere una stima \hat{f} (la migliore possibile) dell'immagine non degradata.

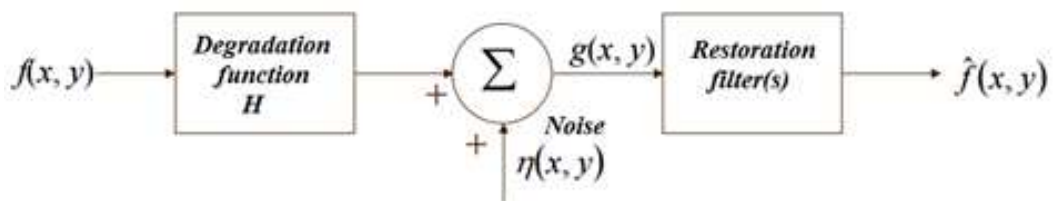


Figura 1.4: Degrado e restauro immagine

1.3 Image compression

Le immagini digitali producono grandi quantità di dati da memorizzare, quindi le tecniche di compressione delle immagini (image compression) riducono i requisiti di memoria limitando i dati da registrare.

La *compressione lossless* (senza perdita d'informazioni) riduce la dimensione del file eliminando le informazioni ridondanti. Visto che queste informazioni possono essere ricostruite all'atto della visualizzazione dell'immagine, questo tipo di compressione permette di non aver nessuna perdita d'informazioni. Quindi, non si altera il contenuto di un'immagine quando è decompressa.

La *compressione lossy* (con perdita di informazioni) raggiunge maggiore riduzione nella dimensione del file rimuovendo sia le informazioni ridondanti sia quelle irrilevanti. Poiché quelle irrilevanti non possono essere ricostruite al momento della visualizzazione di un'immagine, questo tipo di compressione provoca una certa perdita di contenuti dell'immagine e l'introduzione di artefatti. Più saranno alti i tassi di compressione maggiore sarà la perdita d'informazione.

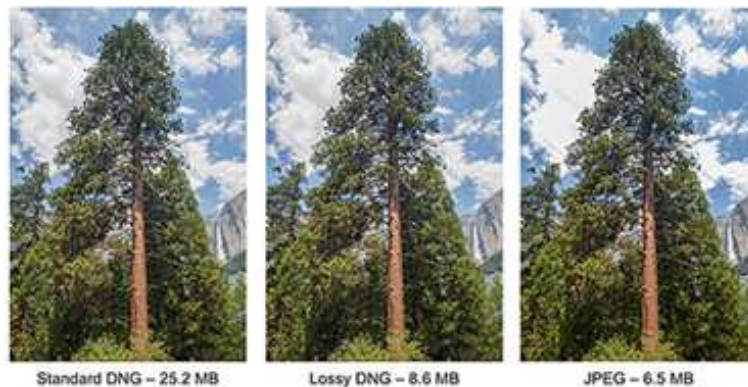


Figura 1.5: La compressione dell'immagine

1.4 Image analysis

L'analisi quantitativa delle immagini è il processo usato per estrarre dati quantitativi (misurabili) da un'immagine. L'analisi quantitativa delle immagini consente l'estrazione delle informazioni da un'immagine al di là di quelle che sono evidenti attraverso l'esame visivo. Quest'analisi richiede un'adeguata calibratura dell'immagine. Il pixel spacing (spaziatura dei pixels) deve essere conosciuto con lo scopo di estrarre accurate misure di dimensione. Gli oggetti che sono a differenti distanze dalla camera avranno differenti spaziature dei pixels. La precisione delle misurazioni estratte dipenderà dall'accuratezza della calibratura. L'uso della compressione d'immagini può degradare la precisione delle successive analisi. Inoltre, è importante considerare la distorsione delle prospettive. Talvolta anche da immagini di pessima qualità si possono ottenere informazioni utili.

Le tecniche di Quantitative Image Analysis sono:

- *Photogrammetry*(fotogrammetria): è la scienza che coinvolge metodi, tecniche, e procedure analitiche usate per compiere accurate misurazioni di distanza e/o dimensioni di oggetti dalle immagini fotografiche.
- *Photometry*(fotometria): è la misurazione di valori di luce degli oggetti in un'immagine.
- *Image authentication* (autenticazione dell'immagine): verifica che l'immagine originale non sia stata alterata.
- *Colorimetry*(colorimetria): è la determinazione del colore di un oggetto.

In questa tesi tratteremo tecniche per eliminare il rumore presente nelle immagini. I prossimi capitoli descriveranno diversi tipi di rumore, le principali fonti di rumore e le tecniche di denoising basate sulla minimizzazione della Total Variation dell'immagine rumorosa.

Capitolo 2

Il Rumore in un'immagine

La definizione della parola “*immagine*” è riproduzione o imitazione della forma di una persona o di un oggetto.

In particolare, un'immagine è un segnale digitale ottenuto dall'osservazione di un oggetto fisico tramite uno strumento di acquisizione e in generale rappresenta una versione distorta ed affetta da errore di tale oggetto.

Il rumore, in un sistema di imaging, è una componente spuria del segnale che agisce in senso negativo nei confronti della qualità delle immagini. Il rumore è il risultato di molteplici fattori che con meccanismi diversi degradano la qualità dell'immagine rendendola in certe circostanze inutilizzabile ai fini diagnostici. Una valutazione oggettiva di questa interferenza è espressa dalla misura del rapporto segnale rumore (SNR, Signal-to-Noise Ratio).

Il rapporto segnale/rumore è un numero puro o adimensionale dato dal rapporto fra due grandezze omogenee che esprime quanto il segnale sia più potente del rumore nel sistema considerato.

Il rapporto segnale/rumore è formalmente espresso dalla seguente relazione:

$$SNR = \frac{P_{segnale}}{P_{rumore}} \quad \text{con} \quad 0 \leq SNR < \infty$$

dove:

P_{segnale} è la potenza del segnale utile e P_{rumore} la potenza totale del rumore presente nel sistema.

Il rumore quantico, il rumore elettronico, il rumore di quantizzazione e il rumore indotto dai processi di elaborazione sono le componenti del rumore totale di un sistema digitale. Nel segnale digitale ottenuto si possono a grandi linee distinguere due tipi di errore.

Il primo, detto *blurring* che avviene durante il processo di realizzazione dell'immagine e corrisponde alla mancanza di nitidezza della stessa. È un processo deterministico e può essere espresso sovente tramite un modello matematico alquanto accurato.

Il secondo è dovuto alla perdita di informazioni nella fase di memorizzazione dell'immagine ed è detto *noise* (rumore). È un processo, che attualmente è all'attenzione di molti ricercatori, per il quale si possono al più fare delle ipotesi di tipo statistico.

2.1 Principali sorgenti di rumore

Il rumore è parte integrante delle prestazioni di un sensore digitale ed è un fenomeno articolato che non si può riepilogare in un numero. Sono presenti numerosi disturbi che sono generati durante le varie fasi del processo di acquisizione di un'immagine.

In generale, il rumore è condizionato da diverse cause; per esempio:

- Dall'aumento della temperatura del sensore;
- Dal livello dell'*ISO* (unità di misura della sensibilità del sensore).

Ad esempio se il livello della sensibilità del sensore è di 100 *ISO* il rumore è appena percettibile, invece con 200 *ISO* il rumore è ancora accettabile, ma con 400 *ISO* il rumore tende a diventare molto fastidioso.

- Dalla dimensioni del sensore, cioè un sensore grande è di norma meno rumoroso di uno piccolo, perché in uno spazio circoscritto sono presenti più photodetector, ognuno dei quali contribuisce alla formazione di un pixel. I pixels durante l'interpolazione del colore s'influenzano tra di loro alterando quindi maggiormente l'informazione.
- Dalla forte compressione JPEG (Joint Photographic Experts Group), perchè durante la compressione abbiamo la perdita d'informazione dell'immagine, principalmente dettagli e contorni, ma perdiamo anche alcune componenti del rumore digitale.
- Dai tempi lunghi di posa, perché tempi di posa superiori al secondo possono produrre rumore cromatico. Questo accade perché il sensore è aperto, quindi più informazioni esterne alla scena dell'immagine sono catturate. Nel caso di un'immagine digitale, il "segnale" è rappresentato dalla corretta informazione di colore dei pixels, mentre il "rumore" è costituito da pixels di colore differente da quello che avrebbero dovuto avere. Si va da un colore lievemente diverso da quelli circostanti, che è percepito come immagine "sgranata", o con effetto "sabbia", a pixels di un colore completamente diverso da quello previsto, a volte perfino in uno dei tre colori primari RGB (Red Green Blu). La principale causa di un'immagine disturbata è la mancanza di luce. Quando si scatta una foto con poca luce, la fotocamera deve amplificare il debole segnale che proviene dal sensore. Così facendo, però, aumenterà di conseguenza anche il rumore.

2.2 Tipi di rumore

2.2.1 Rumore di luminanza e crominanza

Il rumore di luminanza o *luminance noise* si riferisce a un errore d'interpretazione della fluttuazione luminosa che i pixels rappresentano con una

serie di macchie più o meno luminose. L'effetto è quasi simile a quello generato dalle vecchie pellicole analogiche, ma più ripetitivo e meno artistico.

Il rumore di cromaticità o *chroma noise* è dato da un'errata interpretazione dei colori della scena originale con conseguente presenza di macchioline che si presentano sotto forma dei tre colori primari: rosso, verde e blu. Questa tipologia di rumore è ben più grave della precedente perché più visibile e anomala.

Queste due tipologie di rumore creano dei pattern, cioè dei motivi grafici continui che permeano tutta l'immagine. Come se non bastasse, un terzo fastidiosissimo effetto, denominato *banding* (effetto tapparella), può generarsi dall'insieme dei due precedenti formando delle bande laterali molto simili al vecchio "noise" dei televisori non collegati al digitale terrestre.

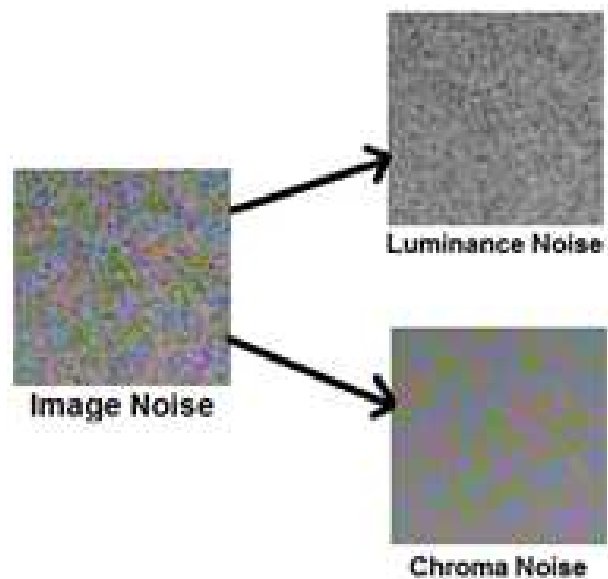


Figura 2.1: Rumore con luminanza e cromaticità

2.2.2 Rumori Casuali

In questo caso si assume che il rumore sia indipendente dalle coordinate spaziali e che non sia correlato all'immagine stessa, in altre parole si può dire che non c'è legame tra i valori dei pixels ed i valori delle componenti del rumore. Di seguito, saranno elencate le caratteristiche delle *funzioni di densità di probabilità* (PDF = Probability Density Function) delle variabili casuali associate alle seguenti tipologie di rumore:

Rumore Gaussiano

Il *rumore gaussiano* è detto rumore bianco (white noise) o normale ed è molto utilizzato nella pratica.

I modelli di rumore gaussiani vengono spesso utilizzati nei problemi test a causa della duttilità della funzione gaussiana.

La *funzione di densità di probabilità* (PDF) di una variabile casuale gaussiana Z è data dalla seguente formula:

$$P(Z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con} \quad -\infty < Z < +\infty \quad (1)$$

dove Z rappresenta l'intensità, μ è il valore medio di Z e σ è la sua deviazione standard. La deviazione standard al quadrato σ^2 è detta varianza di Z .

Il grafico di questa funzione è mostrato nella Figura 2.2. Quando Z viene descritta dall'equazione (1), si nota, nel grafico, che circa il 70% dei suoi valori ricade nell'intervallo $\{\mu - \sigma, \mu + \sigma\}$ e che circa il 95% dei suoi valori ricade nell'intervallo $\{\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma\}$.

Le principali fonti di rumore gaussiano nelle immagini digitali, come ad esempio il rumore del sensore causata da scarsa illuminazione e / o ad alta temperatura e / o il rumore del circuito elettronico (nella trasmissione), si presentano durante l'acquisizione. In elaborazione digitale il rumore gaussiano può essere ridotto utilizzando un filtro spaziale, sebbene durante la smus-

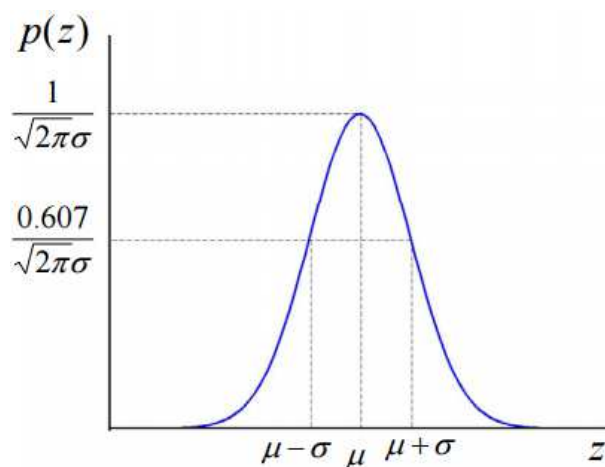


Figura 2.2: Funzione di densità di probabilità

satura dell'immagine, si ottiene un risultato indesiderabile che comporta la sfocatura dei bordi e dei dettagli dell'immagine con sottili scalature perché corrispondono anche alle alte frequenze bloccate. Tra le tecniche convenzionali di filtraggio spaziali utilizzate per la rimozione del rumore le più diffuse sono le seguenti : media (convoluzione) filtering, filtraggio mediano e smoothing (ammorbidimento, levigatura, più comunemente "pulizia") gaussiano.



Figura 2.3: Rumore gaussiano con dev. std. diversa

Rumore di Rayleigh

La *funzione di densità di probabilità* del rumore di Rayleigh è definita come segue:

$$P(Z) = \begin{cases} \frac{2}{b} \cdot (z - a) \cdot e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & \text{per } z \geq a \\ 0 & \text{per } z < a \end{cases} \quad \text{con } a > 0, b \text{ intero positivo}$$

La media è data da: $\mu = a + \sqrt{\frac{\pi b}{4}}$

La varianza è data da: $\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$

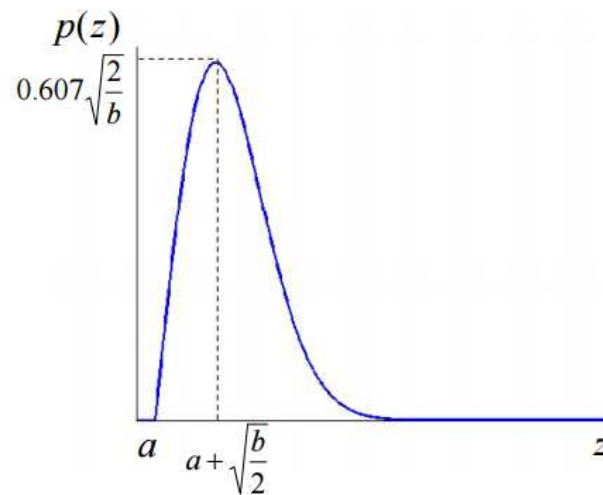


Figura 2.4: PDF del rumore di Rayleigh

Si noti nel grafico lo scostamento dall'origine e la forma inclinata verso destra, ciò rende questa densità utile per l'approssimazione di istogrammi non simmetrici e può essere utilizzata per rappresentare fenomeni di rumori tipici di alcuni sensori di range.

Rumore di Erlang (Gamma)

La *funzione di densità di probabilità* del rumore di Erlang (o gamma) è definita come segue:

$$P(Z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} \cdot e^{-az} & \text{per } z \geq 0 \\ 0 & \text{per } z < 0 \end{cases} \quad \text{con } a > 0, b \text{ intero positivo}$$

La media è data da: $\mu = \frac{b}{a}$

La varianza è data da: $\sigma^2 = \frac{b}{a^2}$

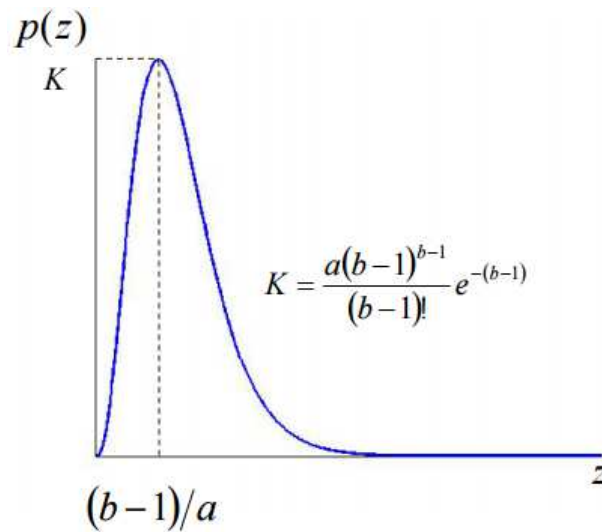


Figura 2.5: PDF del rumore di Erlang (Gamma)

Questa PDF è denominata anche densità gamma in quanto il denominatore coincide con la funzione gamma $\Gamma(b)$ per b intero. Questo tipo di densità trova applicazione nelle immagini laser.

Rumore Esponenziale

La *funzione di densità di probabilità* del *rumore esponenziale* è definita come segue:

$$P(Z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{per } z \geq 0 \\ 0 & \text{per } z < 0 \end{cases} \quad \text{con } a > 0, b \text{ intero positivo}$$

La media è data da: $\mu = \frac{1}{a}$

La varianza è data da: $\sigma^2 = \frac{1}{a^2}$

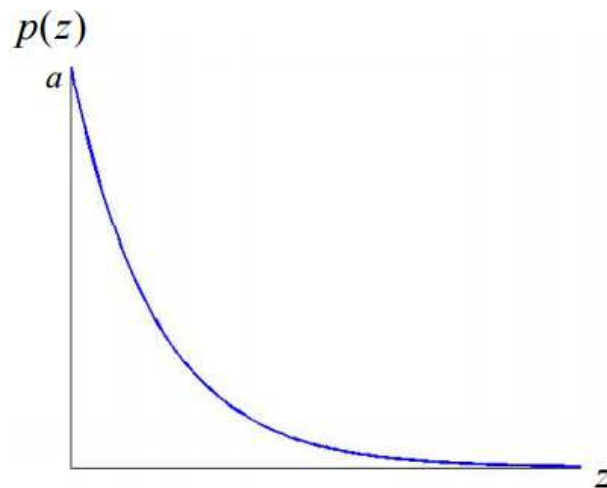


Figura 2.6: PDF del rumore esponenziale

Questa PDF è un caso particolare della densità di Erlang, per $b = 1$.
Come per la densità gamma anche la densità esponenziale trova applicazione nelle immagini laser.

Rumore uniforme

La *funzione di densità di probabilità* del *rumore uniforme* è definita come segue:

$$P(Z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La media è data da: $\mu = \frac{(a+b)}{2}$

La varianza è data da: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

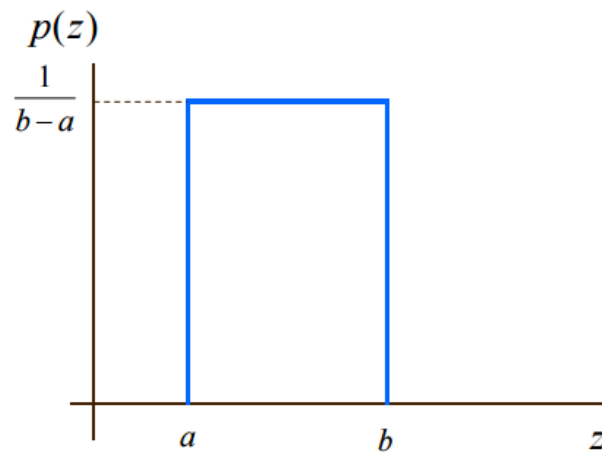


Figura 2.7: PDF del rumore uniforme

In generale, i filtri di media aritmetica ed in particolare quella geometrica si adattano meglio a trattare il rumore casuale uniforme.

Rumore impulsivo o Sale & Pepe

La *funzione di densità di probabilità* del rumore impulsivo bipolare Z è definita come segue:

$$P(Z) = \begin{cases} P_a & \text{per } z = a \\ P_b & \text{per } z = b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Se $b > a$, il livello dell'intensità b apparirà come un punto chiaro nell'immagine, al contrario, il livello dell'intensità a apparirà come un punto scuro.

Se P_a o P_b sono nulli, il rumore impulsivo viene detto unipolare.

Se nessuno dei due valori di probabilità è nullo e sono approssimativamente uguali, i valori del rumore a impulsi somiglieranno a granuli "sale e pepe" distribuiti casualmente nell'immagine.

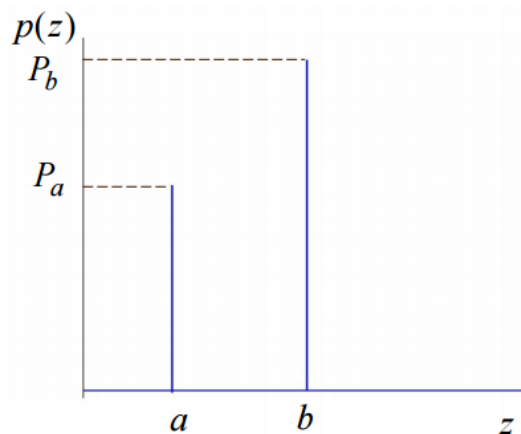


Figura 2.8: PDF del rumore impulsivo

Ed è per questo motivo che il rumore a impulsi bipolare è anche detto "sale e pepe" ed è generalmente digitalizzato con i valori estremi (bianco o nero) di un'immagine.

Rumore di Poisson

Il *rumore di Poisson* è descritto dalla seguente distribuzione di probabilità discreta:

$$\left\{ P(\kappa; \lambda) = \frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{\kappa!} \right.$$

dove la variabile casuale $K = 0, 1, 2, 3, \dots$ rappresenta il numero di eventi che avvengono in un dato intervallo e dove λ è un valore reale positivo che rappresenta il valore atteso.

La media è data da: $\mu = \lambda$

La varianza è data da: $\sigma^2 = \lambda$

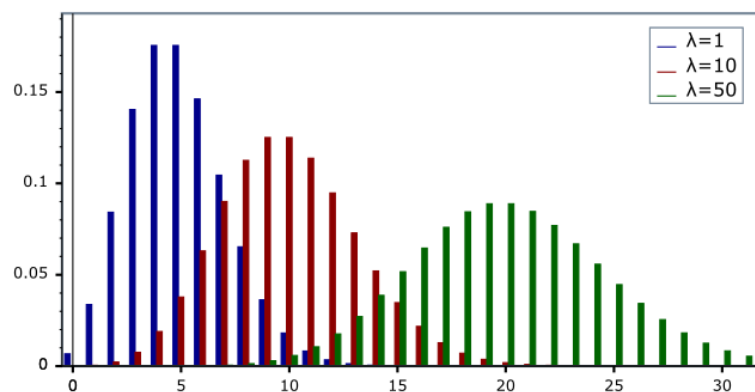


Figura 2.9: Poisson Distribution PDF

Rumore Speckle

Il rumore speckle è un fenomeno che compare quando su di una superficie diffusiva illuminata da una radiazione dotata di grande lunghezza di coerenza appare coperta da un insieme di “macchioline” chiare e scure, gli “speckles”, distribuite casualmente nello spazio e le cui dimensioni dipendono dalla risoluzione del sistema ottico.

La stessa condizione avviene se la luce si propaga attraverso un mezzo caratterizzato da variazioni casuali dell'indice di rifrazione.

La formazione degli speckles è legata ad un fenomeno di interferenza la cui descrizione richiede un approccio statistico.

Il *rumore speckle* è un rumore moltiplicativo di Rayleigh, che degrada le immagini ad ultrasuoni, violandone strutture fini e riducendone il rapporto segnale / rumore (SNR).

Dato un segnale osservato Z che risulta dalla moltiplicazione di un segnale con componente m , e una componente di rumore n , si ha:

$$Z = m * n$$

La distribuzione di Rayleigh è data da:

$$F(Z) = \begin{cases} \frac{Z}{\sigma^2} \exp \frac{-Z^2}{2\sigma^2} & \text{per } Z > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Figura 2.10: Esempi rumore speckle

Rumori Periodici

Un tipo particolare di rumore è quello *periodico* che deriva solitamente da interferenze elettriche o elettromeccaniche presenti durante l'acquisizione. Questo tipo di rumore viene ridotto in modo efficace utilizzando il filtraggio nel dominio della frequenza. La trasformata di Fourier (o integrale di Fourier) di una sinusoide pura è una coppia di impulsi coniugati localizzati alle frequenze coniugate dell'onda del seno, quindi se l'ampiezza dell'onda sinusoidale nel dominio spaziale è abbastanza pronunciata nello spettro dell'immagine troviamo una coppia di impulsi per ciascuna onda presente nell'immagine. In parole povere il rumore periodico si presenta come picchi concentrati di energia nel dominio di Fourier, nelle posizioni corrispondenti alle frequenze dell'interferenza periodica.

Esistono tre modi per stimare i parametri del rumore periodico:

- ispezionando lo spettro di Fourier dell'immagine, analizzando i picchi visivamente;
- agendo sulle periodicità delle componenti del rumore direttamente dall'immagine;
- eseguendo l'analisi automatica quando i picchi di rumore sono molto pronunciati o quando si conosce a priori la posizione delle componenti in frequenza dell'interferenza.

Capitolo 3

Image Denoising

Le immagini digitali catturate da fotocamere digitali o dispositivi medici sono generalmente contaminate da rumore. Il *denoising*, cioè la riduzione o l'eliminazione del rumore in un'immagine degradata, è un passo importante prima di ulteriori elaborazioni. In realtà, il rumore è determinato dagli strumenti di misura, dalla trasmissione dei dati o di quantizzazione.

Anche se il modello di rumore è fortemente dipendente dal contesto, la maggior parte dei modelli assumono il rumore gaussiano additivo, cioè l'immagine rumorosa è formulata come segue:

$$f = u + \epsilon \quad (3.1)$$

dove u è l'immagine senza rumore, ϵ è il rumore bianco gaussiano con deviazione standard σ , ed f è l'immagine rumorosa osservata che deve essere elaborata. La maggior parte dei metodi di denoising esistenti ipotizzano che il livello di rumore σ sia conosciuto.

Ci sono due approcci di base per il denoising dell'immagine, metodi nel dominio spaziale e nel dominio della trasformata (come trasformazioni lineari in grado di separare le basse e le alte frequenze dell'immagine, come wavelet, curvelet o contourlet).

La differenza principale tra queste due categorie è che il metodo nel dominio della trasformata decompone l'immagine da una base scelta prima di ulteriori trasformazioni mentre il metodo nel dominio spaziale elabora e mo-

difica direttamente i valori dei pixels dell'immagine osservati perché avviene attraverso una suddivisione dell'immagine in blocchi, solitamente di forma quadrata, alcuni di essi sono scelti in modo pseudocasuale e la modifica avviene aggiungendo o sottraendo un determinato numero ai valori di alcuni pixels contenuti nei blocchi selezionati.

I metodi nel dominio della trasformata si sono sviluppati rapidamente, dato che la tecnica del thresholding di Donoho [1], che è stata introdotta nel 1995 è meno rigida.

Il rumore è considerato componente ad alta frequenza nel dominio della trasformata sia FFT (Fast Fourier Transform) e DWT (Discrete Wavelet transform) e quindi il thresholding o il troncamento elimina il rumore.

La procedura standard di Wavelet Denoising si articola in tre passi:

- *Decomposizione*: si sceglie la Wavelet ed il livello di decomposizione, calcolando i coefficienti di approssimazione e dettaglio (DWT = Discrete Wavelet Transform);
- *Thresholding*: per ogni livello si esegue una procedura di thresholding, che può essere *hard* o *soft* per i coefficienti dei dettagli.

Il metodo *soft-thresholding* sceglie un valore di threshold e imposta a 0 gli elementi il cui valore assoluto è più piccolo di quello di threshold.

Il metodo *hard-thresholding* si limita ad annullare gli elementi il cui modulo è minore del valore di threshold.

Quest'ultimo è un metodo più semplice, ma crea delle discontinuità.

In generale è preferibile il metodo *soft*.

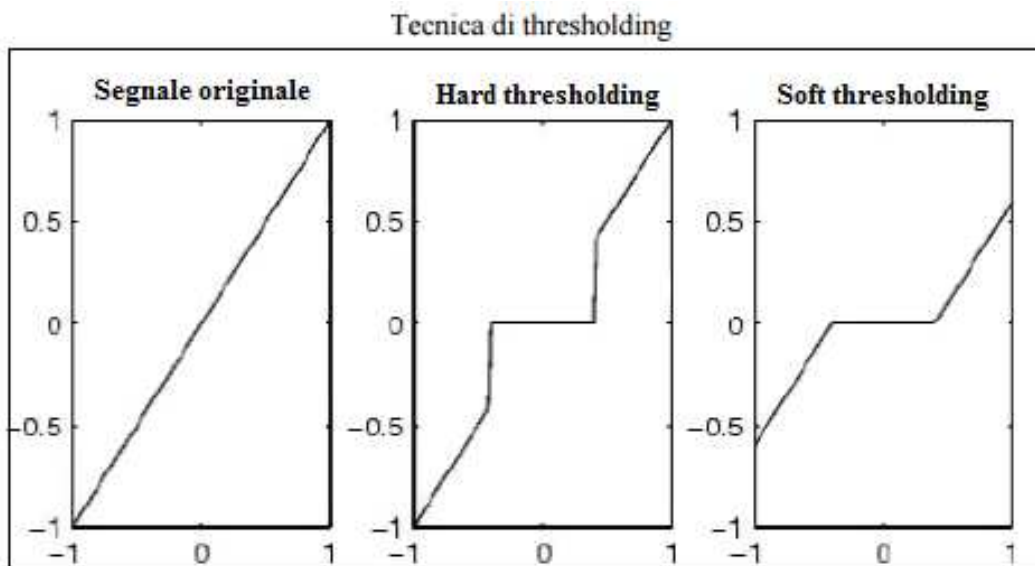


Figura 3.1: Tecnica thresholding

- *Ricostruzione*: si ricostruisce il segnale usando i coefficienti di approssimazione originali e quelli dei dettagli modificati (IDWT = Inverse Discrete Wavelet Transform).



Figura 3.2: Procedura standard Wavelet Denoising

Il vantaggio dei metodi che lavorano nel dominio della trasformata è che le immagini hanno spesso rappresentazioni sparse nel dominio stesso che permette così di affrontare il dominio della trasformata in modo molto efficiente. Tuttavia, il thresholding deteriora anche la trama dell'immagine, che è anche contenuta nella componente di alta frequenza. Inoltre, nel dominio della trasformata le caratteristiche geometriche dell'immagine vengono spesso perse.

Poiché la qualità visiva di un'immagine dipende in maniera rilevante dalle caratteristiche geometriche, in particolare dai bordi degli oggetti ed dagli spigoli; criterio fondamentale per giudicare la performance di un modello di denoising è la sua capacità di mantenere gli spigoli.

Alcuni metodi che lavorano nel dominio delle frequenze non conservano i bordi degli oggetti in un'immagine. Di solito causano bordi spezzati, frastagliati o offuscati così che rendono l'aspetto della riduzione del rumore dell'immagine meno soddisfacente.

Per poter ovviare a questo problema, sono stati costruiti alcuni modelli thresholding [2] adattivi e modelli statistici nel dominio della trasformata per ottimizzare dal punto di vista della visualizzazione le immagini in esame. Si è riscontrato che questi modelli volti alla riduzione del rumore presente nelle immagini hanno dato un buono risultato nel generare immagini di alta qualità.

Peraltro, i metodi nel dominio spaziale si concentrano sull'immagine stessa. Tra tutte le tecniche di denoising presenti in letteratura, negli ultimi vent'anni, hanno riscosso notevole successo i metodi basati sull'utilizzo di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE = Partial Differential Equations) perché sono veramente efficienti.

Questi metodi sfruttano le tecniche di analisi numerica esistenti per risolvere le equazioni differenziali alle derivate parziali, come l'approssimazione e l'ottimizzazione che hanno in questi ultimi anni attirato una sempre più grande attenzione.

Il rinomato modello ROF (Rudin, Osher e Fatemi) [3] proposto nel 1992, era estremamente semplice e restituiva un buon risultato, ma era difficile da risolvere. I risultati principali si baseranno sul modello ROF e sui risultati che i loro discendenti hanno elaborato.

3.1 Nomenclatura e Definizioni

Visto che si tratterà l'elaborazione delle immagini in contesti sia continui che discreti, è necessario chiarire la nomenclatura per evitare ambiguità. Per ora, si definirà la nomenclatura e il modello matematico del denoising per il caso continuo; il caso discreto sarà affrontato successivamente. Descrivere un'immagine come una funzione continua nell'analisi teorica è conveniente. Nella maggior parte dei casi, un'immagine, un quadro o una foto digitale, hanno la forma rettangolare. Per semplicità, si assumerà che un'immagine sia di forma quadrata, ma tutte le conclusioni e gli algoritmi potranno essere naturalmente estesi e adattarsi alla forma rettangolare generale. Quindi si imporrà che la lunghezza di ciascun lato di un'immagine di forma quadrata sia di 1 unità.

Si sceglierà l'angolo in basso a sinistra del quadrato come origine e si costruirà un sistema di coordinate nel seguente modo: Per semplificare ulteriormente

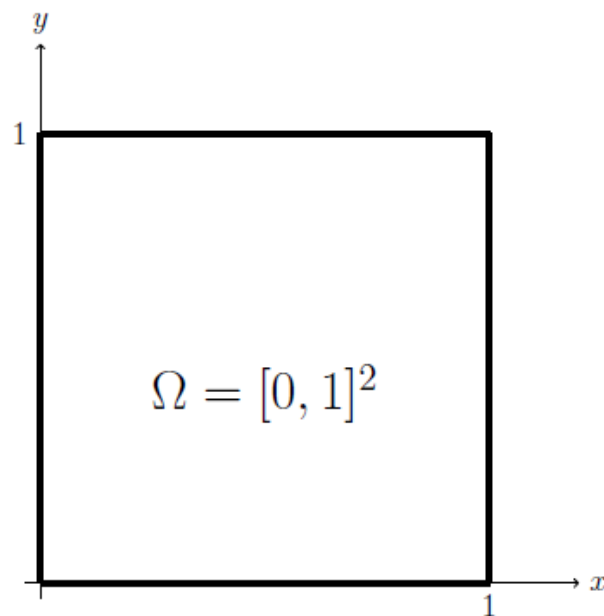


Figura 3.3: Sistema di coordinate

il modello matematico si considereranno solo immagini in scala di grigi.

E quindi per evitare di perdersi in vari canali di colore, si supporrà che il colore in qualsiasi punto di un'immagine sarà caratterizzato semplicemente da un numero reale che rappresenterà l'oscurità di quel punto in un intervallo da 0 a 255, dove il numero 0 rappresenta il nero e il numero 255 rappresenta il bianco.

Quindi, l'immagine sarà caratterizzata come la funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Poiché un'immagine è 2D (bidimensionale), qui non si considererà l'ordine superiore dello spazio \mathbb{R}^n con $n > 2$.

L'immagine in questa tesi avrà sempre la notazione u e si è designato con $f = u + \epsilon$ l'immagine rumorosa o detta anche immagine osservata, sia nel caso continuo che discreto ϵ è il rumore che vogliamo rimuovere. Nel caso continuo, di solito si sceglie u ; $f \in L_2(\Omega)$.

Di seguito si elencano alcune notazioni necessarie per i calcoli da effettuare e di cui alcune di esse verranno spiegate più avanti in dettaglio.

- $\Omega = [0, 1]^2$ è il dominio.
- $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono la norma L_1 e L_2 rispettivamente in $L_1(\Omega)$ e $L_2(\Omega)$.
- $W^{k,p}$ è lo spazio di Sobolev, in questo spazio la norma è definita così :

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

per $k = p = 1$, si ha $W^{1,1}$ ed è lo spazio delle funzioni assolutamente continue su $(0,1)$.

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è l'immagine osservata corrotta da rumore.
- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è l'immagine ripulita dal rumore o il risultato elaborato.
- $\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è il rumore che generalmente è considerato il rumore bianco gaussiano.
- $\sigma > 0$ è la deviazione standard del rumore ϵ .

- $|\cdot|$ è il valore assoluto di un numero reale o la norma Euclidea in \mathbb{R}^2 ,
cioè

$$\begin{cases} |a| \text{ valore assoluto di } a \in \mathbb{R} \\ |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- ∇ è l'operatore differenziale vettoriale (gradiente) : $\nabla u = (u_x, u_y)$;
 ∇ si legge *nabla*.

- *div* o $(\nabla \cdot)$ è l'operatore divergenza.

$$\text{div}(F) = \nabla \cdot F = \text{div}(F_1, F_2) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \text{ per } F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Grazie a tutte le notazioni sopraccitate si è ora, in grado di introdurre la *variazione totale* di una funzione in generale:

la variazione totale definisce una norma, ed è la somma delle variazioni in ogni singolo intervallino di monotonia.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ una partizione di $[a, b]$.

$T_a^b(f) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ partizione di $[a, b]$,

si chiama variazione totale di f in $[a, b]$.

Dunque osserviamo che:

$$T_a^b(F) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |F(t_i) - F(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\}$$

$$T_a^b(F) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt \right| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\}$$

$$T_a^b(F) \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)| dt : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ partizione di } [a, b] \right\}$$

$$T_a^b(F) = \int_a^b |f(t)| dt$$

Ora si è in grado di introdurre la *variazione totale* della funzione u :

$$TV(u) := \int_{\Omega} |\nabla u| = \int_{\Omega} |u_x + u_y| = \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad (3.2)$$

definita come segue in forma più generale in quanto u non richiede di essere differenziabile.

$$TV(u) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \text{ div}(w) : w = (w_1, w_2) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2), |w| \leq 1 \right\} \quad (3.3)$$

Il problema del denoising si può così esprimere : data l'immagine osservata $f = u + \epsilon$, si vuole cercare la funzione u^* che risolve il seguente problema:

$$u^* = \arg \min_u \int_{\Omega} |\nabla u| \quad \text{tale che } \|u - f\|^2 = \sigma^2 \quad (3.4)$$

il problema di minimizzazione il quale si chiama *modello ROF*. Per far sì che sia ben definito, si suppone che $TV(u) < \infty$, cioè che u sia nello *spazio delle funzioni a variazione limitata* definito come segue :

$$BV(\Omega) := \{u \in L_1(\Omega) \mid TV(u) < \infty\}.$$

È noto che $BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach con norma $\|u\|_{BV} = TV(u) + \|u\|_1$. Si può anche dimostrare che $W^{1,1}(\Omega) \subseteq BV(\Omega) \subseteq L_1(\Omega)$ e che le definizioni (3.2) e (3.3) sono equivalenti quando $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Quindi, si userà $W^{1,1}(\Omega)$ per approssimare $BV(\Omega)$.

Il problema (3.4) diventa :

$$u^* = \arg \min_{u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L_2(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u| \quad \text{tale che } \|u - f\|^2 = \sigma^2 \quad (3.5)$$

Di seguito si assumerà $u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$.

Per un approfondimento sulla variazione totale e lo spazio BV (*BV viene dal termine inglese "bounded variation"*), vi rimandiamo a [4], [5].

Il problema (3.5) in formulazione non vincolata diventa:

$$u^* = \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\} \quad (3.6)$$

dove $\mu > 0$ è un parametro di penalizzazione adeguatamente scelto . L'approccio penalizzato è una tecnica che consente di analizzare e di risolvere in modo analitico o numerico problemi di ottimizzazione con vincoli ed è lo standard nell'insieme dei problemi inversi (chiamati anche mal condizionati). Poiché il termine $\int_{\Omega} |\nabla u|$ rappresenta la variazione totale di u , i modelli che coinvolgono questo termine sono modelli basati sulla minimizzazione della variazione totale (TV).

3.2 Modello variazionale ottimizzato e scalatura

Il modello ROF ha alcune proprietà favorevoli rispetto ai modelli deterministici di denoising esistenti. Sotto si mostra un esempio che mette a confronto i risultati di denoising tra i metodi wavelet thresholding e il modello ROF.

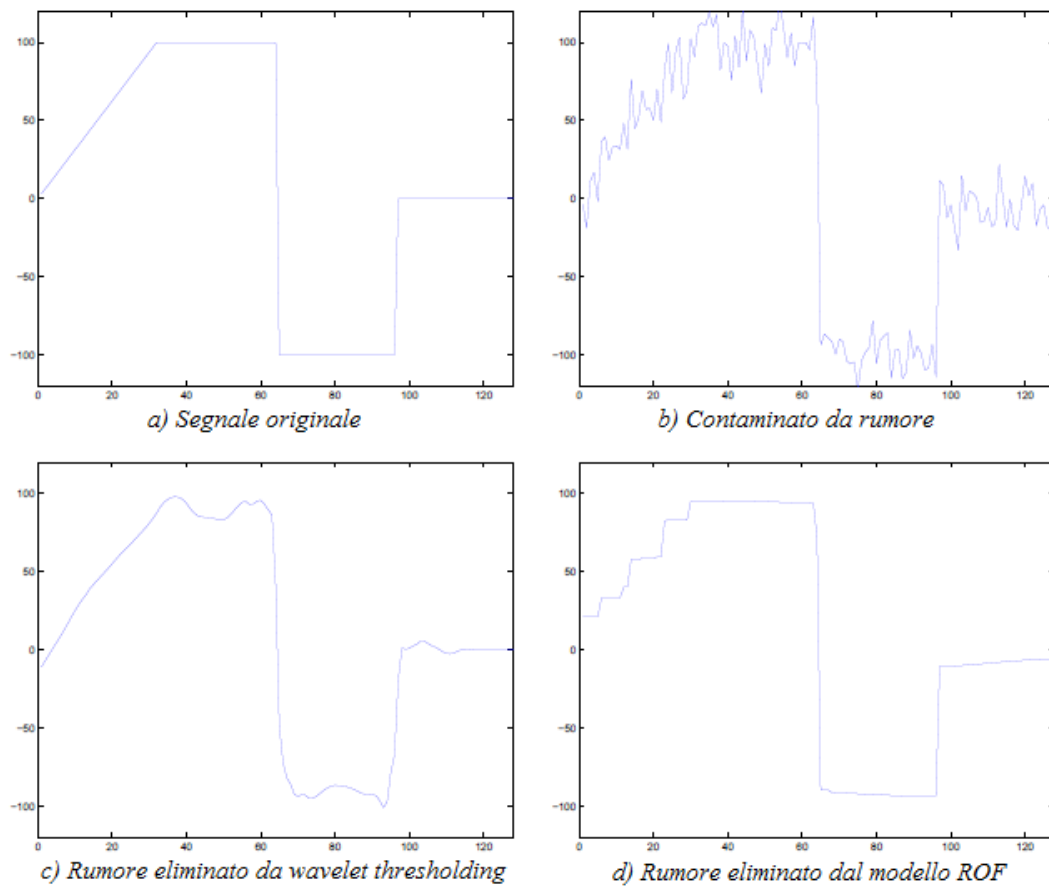


Figura 3.4: Confronto tra metodo Wavelet thresholding e modello ROF.

È chiaro che il modello ROF conserva le discontinuità, o i salti, mentre le wavelet causano l'effetto Gibbs [6], che si presenta quando viene ricostruito un segnale dalla serie di Fourier troncata, e produce artefatti. Tuttavia, il

modello ROF non funziona sempre come dovrebbe.

In presenza di rumore con σ elevato, il modello ROF spesso interpreta un certo rumore come salti o bordi e produce bordi falsi. È chiaramente visibile nella figura 3.4 (d), il risultato con zone costanti a tratti. Questo fenomeno è noto come “staircase artifact” e viene analizzato in [7], [8].

Nel caso bidimensionale, il modello ROF produce immagini che presentano blocchi indesiderati. A dispetto di questa lacuna, il modello ROF rimane comunque uno dei modelli di maggiore interesse e successo di denoising deterministici ed è ancora un ambito di ricerca molto popolare.

Per migliorare la qualità visiva, sono stati proposti diversi metodi per definire un compromesso tra levigatezza e nitidezza modificando il termine TV.

Furono Blomgren, Mulet, Chan and Wong [9] che, nel 1997, proposero il modello modificato:

$$u^* = \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^{Q(|\nabla u|)} + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\} \quad (3.7)$$

dove $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ decresce monotonicamente da $Q(0) = 2$ $Q(\infty) = 1$, che è più convesso quando il gradiente è piccolo e si comporta come il modello standard ROF vicino alla discontinuità. In questo modo gli obiettivi di riduzione dell’effetto a scaletta e la conservazione dei bordi vengono raggiunti contemporaneamente.

Un approccio migliore è stato proposto da Lysaker, Lundervold e Tai [10], [11], e consiste nel sostituire il termine TV con un differenziale di ordine superiore. Il loro modello è il seguente ed è noto come il modello LLT (iniziali dei tre ideatori),

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} |\nabla^2 u| + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\} \\ &= \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} \sqrt{|u_{xx}|^2 + |u_{xy}|^2 + |u_{yx}|^2 + |u_{yy}|^2} + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Gli ideatori del modello LLT hanno inoltre proposto la *versione anisotropica* (proprietà per la quale un determinato materiale ha caratteristiche che dipendono dalla direzione lungo la quale vengono considerate).

$$u^* = \arg \min_u \left\{ \int_{\Omega} (|u_{xx}| + |u_{yy}|) + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\} \quad (3.9)$$

È noto che le PDE (equazioni differenziali alle derivate parziali) di ordine superiore possono recuperare superfici più regolari.

Questo modello si comporta meglio rispetto al modello ROF nelle regioni lisce di un'immagine. Chang, Tai and Xing [12] hanno adottato quest'idea ed hanno proposto la seguente formulazione del problema:

$$u^* = \arg \min_u \left\{ (1 - g) \int_{\Omega} |\nabla^2 u| + g \int_{\Omega} |\nabla u| + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\} \quad (3.10)$$

dove g è una funzione peso adeguatamente scelta. Essi hanno dimostrato che questo modello funziona bene sia sui bordi che sulle regioni lisce. Tuttavia, gli algoritmi numerici esistenti per risolvere tali modelli si basano sull'algoritmo di discesa del gradiente (gradient-descent), metodi ed equazioni di Eulero-Lagrange che purtroppo sono metodi inefficienti e dispendiosi.

Si consideri il modello ROF

$$u^* = \arg \min_u \int_{\Omega} |\nabla u| + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2$$

che può essere scritto come segue:

$$u^* = \arg \min_u \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} |\nabla u| + \frac{1}{2} \|u - f\|_2^2$$

Con l'aggiunta di un ulteriore termine, abbiamo il modello seguente:

$$u^* = \arg \min_u \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} |\nabla u| + \frac{1}{2} \int_{u \in \Omega} |\nabla^2 u| + \frac{1}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (3.11)$$

dove $|\nabla^2 u| = \sqrt{u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2}$, seguendo la notazione che si trova in [11].

Si segnala che l'equazione (3.12) non è il modello LLT originale, dato che questo non contiene il primo termine.

3.3 Il modello ROF e le PDE

Negli ultimi decenni, le tecniche di denoising basate sulle equazioni differenziali alle derivate parziali sono diventate un'area di ricerca attiva.

Questo perché gli approcci PDE assumono dei vantaggi dai processi efficaci della teoria PDE e producono un calcolo stabile e preciso.

Perona e Malik hanno proposto, nel 1990, un modello di PDE basato sulla diffusione anisotropica [13] per l'elaborazione delle immagini, il quale potrebbe essere considerato come interpretazione del modello ROF dal punto di vista della diffusione.

Il modello è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (c(|\nabla u|) \nabla u), & (x, y) \text{ in } \Omega, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.12)$$

dove ∇ è l'operatore gradiente, $\nabla \cdot$ l'operatore divergenza, $c(\lambda)$ è una funzione decrescente con $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} c(\lambda) = 0$, $\partial\Omega$ è la frontiera di Ω ed \vec{n} è la direzione normale di $\partial\Omega$.

Siano la normale e il vettore unitario tangente degli insiemi di livello di u ,

$$\begin{cases} \tau = \left(\frac{u_x}{|\nabla u|}, \frac{u_y}{|\nabla u|} \right) = \frac{\nabla}{|\nabla u|} \\ \gamma = \left(-\frac{u_y}{|\nabla u|}, \frac{u_x}{|\nabla u|} \right) \end{cases}$$

allora l'equazione (3.13) si può formulare come segue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [c(\lambda) + \lambda c'(\lambda)] \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + c(\lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2} \quad \text{dove } \lambda = |\nabla u|$$

È facile vedere che la funzione $c(\lambda)$ si può scegliere in modo tale che $c(\lambda) + \lambda c'(\lambda)$ sia piccolo o negativo, quindi rendendo u meno diffuso o al contrario diffonderlo ortogonalmente al bordo. Quindi i bordi non soffrono dell'effetto sfocatura. Mentre il tempo t si sviluppa, u si approssima all'immagine pulita con i bordi preservati, o addirittura più nitidi.

Ora ci si concentra sul caso speciale quando $c'(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Il modello (3.13) diventa come segue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad (3.13)$$

che è il metodo di discesa più ripida (3.16) per risolvere il modello ROF(3.6).

3.4 Le soluzioni del modello ROF

Nonostante la sua forma semplice, la soluzione dei problemi di minimizzazione subisce importanti disturbi di non-linearità e di non derivabilità introdotti dal termine Total Variation $\int_{\Omega} |\nabla u|$.

Per molto tempo, il modo tradizionale per aver una soluzione è stato quello di risolvere l'equazione di Eulero-Lagrange di un'approssimazione derivabile del problema (3.6).

$$u^* = \arg \min_u \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2} + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2. \quad \text{per } \beta > 0. \quad (3.14)$$

Gli ideatori del modello ROF, nel loro articolo [3], hanno introdotto una dipendenza dal tempo fittizio e hanno risolto la seguente equazione omogenea con condizioni al contorno di Neumann, con il criterio d'arresto $\|u - f\| \leq \sigma$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}} \right) \quad (3.15)$$

oppure con $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u(u - f) + \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}} \right) \quad (3.16)$$

Mentre l'implementazione numerica è semplice, la non linearità ed il mal condizionamento del problema rendono la convergenza molto lenta. Invece sono stati fatti numerose prove dopo essere stato proposto il modello. Vogel e Oman [14] proposero un metodo di iterazione in virgola fissa con diffusione ritardata. Per ogni costante $K = 1, 2, \dots$, il modello risolve le seguenti equazioni iterativamente:

$$\mu(u^{k+1} - f) - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u^{k+1}}{\sqrt{|\nabla u^k|^2 + \beta^2}} \right) \quad (3.17)$$

l'intero calcolo è stato reso più efficiente grazie al fatto che ogni equazione lineare è stata risolta più facilmente.

3.5 Metodi di discretizzazione

Quando si considerano i modelli di discretizzazione, tutte le restrizioni su u , come la variazione limitata e la differenziabilità, diventano irrilevanti. Questo vantaggio sarà utile e sarà ben sfruttato, perciò la maggior parte dell'analisi e della prova sarà basata sul caso discreto.

Si utilizzeranno ancora le notazioni u ed f per indicare l'immagine nel caso discreto. Poiché il contesto mostrerà se è continua o discreta è probabile che non si verifichino ambiguità.

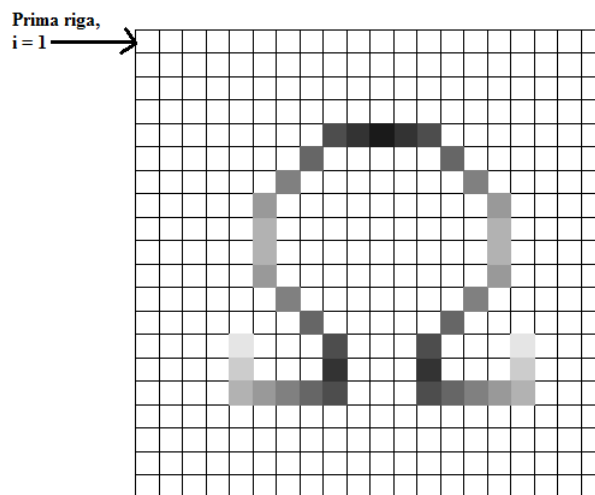


Figura 3.5: Immagine di forma quadrata suddivisa in pixels

Un'immagine di forma quadrata è discretizzata su una griglia $n \times n$, dove ogni cella è chiamata *pixel* che viene riempito con un colore. Si ricorda che si considerano solo le immagini in scala di grigio e che il colore è determinato in modo univoco da un numero reale. Di conseguenza, un'immagine viene modellata come una funzione a valori reali nel dominio discreto

$$u : \{1, 2, 3, \dots, n\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R},$$

oppure una matrice $n \times n$ di valori reali:

$$u \in \mathbb{R}^{\{1,2,3,\dots,n\} \times \{1,2,3,\dots,n\}}$$

Si userà la notazione $u_{i,j}$ per rappresentare il valore di u alla i -esima riga e alla j -esima colonna.

La norma l_p e il prodotto interno sono definiti come nel caso ordinario:

- $\|u\|_p := \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |u_{i,j}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$
- $\|u\|_\infty := \max_{1 \leq i,j \leq n} |u_{i,j}|$
- $\langle u, v \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} u_{i,j} v_{i,j}$

dobbiamo anche discretizzare la *Variazione Totale* $TV(u) = \int_\Omega |\nabla u|$.

Il gradiente $\nabla u = (u_x, u_y)$ è approssimato dagli operatori differenziali ∇_x e ∇_y , che sono definiti come segue:

$$(\nabla_x u)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \\ u_{i,j} - u_{i-1,j} & \text{se } i > 1 \end{cases}$$

ed

$$(\nabla_y u)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 1 \\ u_{i,j} - u_{i,j-1} & \text{se } j > 1 \end{cases}$$

È chiaro che $\nabla_x u$ e $\nabla_y u$ sono gli operatori differenziali discretizzati corrispondenti a u_x e u_y .

Con queste annotazioni, il gradiente di u è $(\nabla_x u, \nabla_y u)$.

Notando $|(\nabla_x u, \nabla_y u)| = \sqrt{(\nabla_x u)_{i,j}^2 + (\nabla_y u)_{i,j}^2}$,

la variazione totale $TV(u) = \int_\Omega |\nabla u|$ può essere discretizzata come segue

$$\begin{aligned} TV(u) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \sqrt{(\nabla_x u)_{i,j}^2 + (\nabla_y u)_{i,j}^2} \\ &= \left\| \sqrt{(\nabla_x u)^2 + (\nabla_y u)^2} \right\|_1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

chiamata variazione totale discreta isotropica.

Si ha un'altra discretizzazione della funzione TV .

Se si pone $|(a, b)| = |a| + |b|$ invece di $\sqrt{a^2 + b^2}$, si ha che la seguente è

$$\begin{aligned} TV_a(u) &= \sum_{1 \leq i, j \leq} |(\nabla_x u)_{i, j}| + |(\nabla_y u)_{i, j}| \\ &= \|\nabla_x u\|_1 + \|\nabla_y u\|_1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

e prende il nome di variazione totale discreta anisotropica.

Si analizzeranno i modelli di ordine superiore (3.12).

Siano Δ_x e Δ_y gli operatori differenziali definiti da:

$$(\Delta_x u)_{i, j} = \begin{cases} u_{1, j} - u_{2, j} & \text{se } i = 1 \\ 2u_{i, j} - u_{i-1, j} - u_{i+1, j} & \text{se } 1 < i < n \\ u_{n, j} - u_{n-1, j} & \text{se } i = n \end{cases}$$

ed

$$(\Delta_y u)_{i, j} = \begin{cases} u_{i, 1} - u_{i, 2} & \text{se } j = 1 \\ 2u_{i, j} - u_{i, j-1} - u_{i, j+1} & \text{se } 1 < j < n \\ u_{i, n} - u_{i, n-1} & \text{se } j = n \end{cases}$$

Quindi è veramente facile notare che esse siano approssimazioni discrete di u_{xx} e u_{yy} .

Per rendere il problema più facilmente descritto nel linguaggio di algebra delle matrici, si consideri la vettorizzazione dell'immagine u , $n \times n$ con un vettore colonna di dimensioni n^2 quindi:

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{n^2})$$

Ora si scrivono gli operatori differenziali $\nabla_x, \nabla_y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in $\nabla_x, \nabla_y : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ definiti da:

$$(\nabla_x u)_i := \begin{cases} 0 & \text{se } i \leq n \\ u_i - u_{i-n} & \text{se } i > n \end{cases} \quad (3.20)$$

$$(\nabla_y u)_i := \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \bmod n \\ u_i - u_{i-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.21)$$

Con queste notazioni il modello ROF (3.7) in forma isotropica si scrive come

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \left\| \sqrt{(\nabla_x u)^2 + (\nabla_y u)^2} \right\|_1 + \frac{u}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (3.22)$$

mentre il modello anisotropico è il seguente:

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \|\nabla_x u\|_1 + \|\nabla_y u\|_1 + \frac{u}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (3.23)$$

Si è osservato che sia il modello isotropico che quello anisotropico hanno soluzioni molto simili.

E quindi si è rilevato che il modello anisotropico è molto più semplice sia da codificare che da risolvere.

Analogamente si hanno le seguenti :

$$(\Delta_x u)_i := \begin{cases} u_i - u_{i+n} & \text{se } i \leq n \\ u_i - u_{i-n} & \text{se } i > n^2 - n \\ 2u_i - u_{i-n} - u_{i+n} & \text{se } n < i \leq n^2 - n \end{cases} \quad (3.24)$$

$$(\Delta_y u)_i := \begin{cases} u_i - u_{i+1} & \text{se } j = 1 \bmod n \\ u_i - u_{i-1} & \text{se } j = 0 \bmod n \\ 2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.25)$$

È evidente che $\Delta_x = \nabla_x^T \nabla_x$ e $\Delta_y = \nabla_y^T \nabla_y$.

Si è sempre ipotizzato che u ed f siano vettori monodimensionali e che si usino i seguenti operatori differenziali, $\nabla_x, \nabla_y; \Delta_x, \Delta_y$.

È per questa ragione che si userà la discretizzazione anisotropica che permette di evitare una modellazione ed una computazione complessa e che consente di acquisire velocemente un calcolo computazionale.

Perciò, il modello discretizzato è

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \frac{1}{\mu} (\|\nabla_x u\|_1 + \|\nabla_y u\|_1) + \frac{1}{\nu} (\|\nabla_x u\|_1 + \|\nabla_y u\|_1) + \frac{1}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (3.26)$$

con $\mu, \nu > 0$

Nel prossimo capitolo si analizzeranno alcuni algoritmi veloci per la soluzione del problema del denoising mediante la minimizzazione della Total Variation (TV).

Capitolo 4

Modello di Denoising basato sulla Total Variation

In questo capitolo, si farà un'indagine completa delle soluzioni del modello ROF. È interessante sapere che alcuni problemi attuali dell'imaging difficili da risolvere, hanno una soluzione elegante con alcuni metodi sviluppati ed ottimizzati dagli ideatori nel 1960 e nel 1970. Recentemente la soluzione del modello ROF è stata potenziata dall'idea di risolvere il problema (1.6) direttamente, invece di risolvere l'equazione di Eulero-Lagrange. Emergono diversi schemi veloci di iterazione che sono più efficienti e più precisi degli approcci classici. Ma molti di questi provengono da vecchi e incospicui testi come in [15], scritto da Bregman nel 1967.

Si inizierà con l'introduzione dell'iterazione di Bregman. Successivamente si analizzerà il metodo Split Bregman di Goldstein e Osher.

4.1 Iterazione di Bregman

L'iterazione Bregman è stata la prima ad essere introdotta nella scienza delle immagini in [16] da Osher e al. del 2005. Essa si basa sulla distanza Bregman che è stata definita in [15] come misura della distanza fra il valore di due vettori rispetto ad una certa funzione. Questi concetti sono importanti

per comprendere l'algoritmo oggetto di studio, i quali verranno esaminati in dettaglio. Innanzitutto si introdurrà il concetto del *subgradiente*. Consideriamo uno spazio vettoriale \mathbb{R}^n . Sia E una funzione continua e convessa su \mathbb{R}^n . Il subgradiente di E al punto u_0 è il vettore $p \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$E(u) - E(u_0) \geq \langle p, u - u_0 \rangle, \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Il *subdifferenziale* $\partial E(u_0)$ è l'insieme dei subgradienti di E in u_0 . È naturalmente chiaro che p è il gradiente di E se E è differenziabile in u_0 .

Di conseguenza, si userà anche $\partial E(u_0)$ per indicare il gradiente.

Quindi la *distanza Bregman* associata ad E tra u e u_0 è la seguente:

$$D_E^p(u, u_0) = E(u) - E(u_0) - \langle p, u - u_0 \rangle.$$

dove p è il subgradiente di E in u_0 . Se E non è differenziabile in u_0 , ci può essere una scelta multipla di p .

Nella figura sottostante si mostra un esempio della distanza di Bregman.

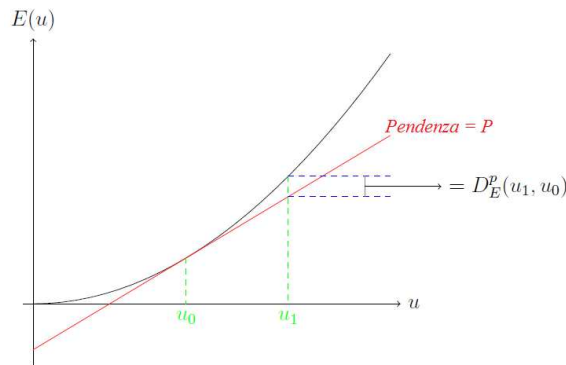


Figura 4.1: Esempio di distanza di Bregman

È chiaro che $D_E^p(u, u_0) \geq 0$ fintantoché E sia convessa. Per di più, se v si trova sul segmento di linea che collega u e u_0 , allora $D_E^p(u, u_0) \geq D_E^p(v, u_0)$. Perciò, la distanza Bregman è una misura della distanza fra u e u_0 . D'altra parte, è evidente che, in generale, la distanza Bregman non sia simmetrica:

$D_E^p(u, v) \neq D_E^q(v, u)$ dove $p \in \partial E(v)$ e $q \in \partial E(u)$.

A partire da qui si è in grado di presentare l'iterazione Bregman.

Si suppone che E sia una funzione convessa e che H sia una funzione tale che $\min_u H(u) = 0$.

Allora si vuole risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min_u E(u) \quad \text{tale che } H(u) = 0 \quad (4.1)$$

La soluzione più comune consiste nel risolvere il relativo problema non vincolato:

$$\min_u E(u) + \lambda H(u) \quad (4.2)$$

Quando $\lambda \rightarrow \infty$, si ha che il problema (4.2) restituisce la stessa soluzione del problema (4.1). Al crescere di λ , il problema generale diventa un problema mal posto ed è più difficile da risolvere.

L'*iterazione Bregman* è stata proposta per sciogliere il dilemma di risolvere un problema ben posto e λ crescente e così ottenere una soluzione precisa. Nel documento [15], Bregman ha dato alcuni suggerimenti come quello di fissare un λ , e così il problema si può risolvere effettuando il seguente schema di iterazione:

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \arg \min_u D_E^p(u, u^k) + \lambda H(u) \\ &= \arg \min_u E(u) - E(u^k) - \langle p^k, u - u^k \rangle + \lambda H(u) \\ &= \arg \min_u E(u) - \langle p^k, u - u^k \rangle + \lambda H(u) \end{aligned}$$

dove $p \in \partial E(u^k)$. Bregman ha anche dato la formula esplicita per il calcolo di p^k :

$$p^{k+1} = p^k - \partial H(u^{k+1})$$

dove ∂H è il gradiente di H . Dal momento che H è differenziabile, l'iterazione è ben definita. Si riscrive lo schema seguente per convenienza:

$$\begin{cases} u^{k+1} &= \arg \min_u D_E^p(u, u^k) + \lambda H(u) \\ p^{k+1} &= p^k - \partial H(u^{k+1}) \end{cases} \quad (4.3)$$

Bregman ha affermato che in alcune condizioni, questa iterazione convergerà alla soluzione del problema (4.1). In questo modo, non bisogna aumentare λ evitando così i problemi creati da valori grandi di λ .

Nel documento [16] l'iterazione Bregman è stata applicata al denoising nell'immagine. Però, questo potente strumento non è stato utilizzato per accelerare il calcolo. In quest'articolo si sostiene che l'Iterazione Bregman migliora la qualità delle immagini.

Confrontando il modello ROF nel (3.7) :

$$u^* = \arg \min_u TV(u) + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2.$$

con il problema (4.2). Visto che l'effetto dell'iterazione Bregman è equivalente a far tendere $\lambda \rightarrow \infty$, si ha che λ è stato scelto più piccolo di $\mu/2$, proseguendo, dopo alcune iterazioni lo schema dell'iterazione Bregman genererà qualche soluzione vicino ad u^* .

Di seguito se ne riproducono i dettagli: Sia $E(u) = TV(u)$ convessa, e sia $H(u) = \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2$. Dunque è facile ottenere che $\partial H(u) = \lambda(u - f)$.

Si ha che : $p^{k+1} = p^k - \partial H(u^{k+1}) \Rightarrow p^{k+1} = p^k - \lambda(u^{k+1} - f) \Rightarrow p^{k+1} = p^k + \lambda(f - u^{k+1})$.

L'iterazione Bregman diventa:

$$\begin{cases} u^{k+1} &= \arg \min_u D_E^p(u, u^k) + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \\ p^{k+1} &= p^k + \lambda(f - u^{k+1}) \end{cases}$$

Naturalmente questa iterazione apparentemente complessa può essere semplificata. Sia $b^k = \frac{1}{\lambda} p^k \Rightarrow p^k = \lambda b^k$.

Quindi la prima equazione può essere semplificata come segue:

$$\begin{aligned}
u^{k+1} &= \arg \min_u D_E^p(u, u^k) + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \\
&= \arg \min_u E(u) - E(u^k) - \langle p^k, u - u^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 \\
&= \arg \min_u E(u) - \lambda \langle b^k, u - u^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \langle u - f, u - f \rangle \\
&= \arg \min_u E(u) - \lambda \langle b^k, u - f \rangle + \frac{\lambda}{2} \langle u - f, u - f \rangle \tag{4.4} \\
&= \arg \min_u E(u) + \lambda \langle b^k, b^k \rangle - \lambda \langle b^k, u - f \rangle + \frac{\lambda}{2} \langle u - f, u - f \rangle \\
&= \arg \min_u E(u) + \frac{\lambda}{2} \langle u - f - b^k, u - f - b^k \rangle \\
&= \arg \min_u E(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - f - b^k\|_2^2
\end{aligned}$$

Essendo $E(u) = TV(u)$ si ha allora :

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u TV(u) + \frac{\lambda}{2} \|u - f - v^k\|_2^2 \\ b^{k+1} = b^k + f - u^{k+1} \end{cases}$$

Prima di tutto si segnala che l'equazione coincide con il modello ROF tranne che per v^k e λ . L'obiettivo di questo schema è, come hanno sostenuto, la qualità visiva diversa che restituisce un modello ROF a passo unico.

Nel loro articolo [16], è stata studiata la convergenza ed anche il seguente teorema :

Teorema 4.1. *Per un vettore iniziale $p^0 \in \mathbb{R}$, siano u^{k+1} and p^{k+1} calcolati come la formula (2.3). Poi $p^k \in \partial E(u^k)$ e $H(u^{k+1}) \leq H(u^k)$ per $k = 1, 2, \dots$. Inoltre, se $\min_{u \in \mathbb{R}} H(u) = 0$,*

allora si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(u^k) = 0.$$

Nel documento [17], la convergenza dell'iterazione Bregman è stata discussa ulteriormente.

Ora, si consideri il problema di minimizzazione seguente:

$$\min_u E(u) \quad \text{tale che } Au = b \quad (4.5)$$

dove $u, b \in \mathbb{R}$ ed A è una matrice $n \times n$. L'iterazione Bregman per questo problema è

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u \left\{ D_E^{p^k}(u, u^k) + \frac{\lambda}{2} \|Au - b\|_2^2 \right\} \\ p^{k+1} = p^k - \lambda A^T(Au^{k+1} - b). \end{cases} \quad (4.6)$$

Se si usa la stessa tecnica del problema (4.4), questo schema può essere semplificato come segue:

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u \left\{ E(u) + \frac{\lambda}{2} \|Au - b^k\|_2^2 \right\} \\ b^{k+1} = b^k + b - Au^{k+1}. \end{cases} \quad (4.7)$$

con $p^k = \lambda A^T(b^k - b)$. Si propone il seguente teorema di base per la convergenza del problema (4.7).

Teorema 4.2. *Supponiamo che il problema (4.5) abbia un'unica soluzione \tilde{u} per $k = 0, 1, 2, \dots$, siano u^{k+1}, b^{k+1} dati nel (4.7).*

Si ha che $\lim_{k \rightarrow \infty} u^k = \tilde{u}$ purché soddisfi le seguenti tre condizioni:

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} (u^{k+1} - u^k) = 0$,
2. $(u^k)_{k=0,1,2,\dots}$ è una successione limitata in \mathbb{R}^n ,
3. $(b^k)_{k=1,2,\dots}$ è una successione limitata in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione.

Essendo $(u^k)_k, (b^k)_k$ successioni limitate, hanno sotto-sequenze convergenti. Quindi, si può trovare $(k_j)_{j=1,2,\dots} \subset \mathbb{Z}^+$ tale che il $\lim_{j \rightarrow \infty} u^{k_j} = u^*$ ed il

$\lim_{j \rightarrow \infty} p^{k_j} = p^*$ esistano.

Con la prima condizione si ha che il $\lim_{j \rightarrow \infty} u^{k_{j+1}} = u^*$ dal teorema 4.1, il $\lim_{j \rightarrow \infty} \|Au^{k_j} - b\|_2^2 = 0$. Quindi, $Au^* = b$. Segue dal problema (4.6) che

$$\begin{aligned} E(u^{k_{j+1}}) - \langle p^{k_j}, u^{k_{j+1}} - u^{k_j} \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Au^{k_{j+1}} - b\|_2^2 \\ \leq E(u) - \langle p^{k_j}, u - u^{k_j} \rangle + \frac{\lambda}{2} \|Au - b\|_2^2 \quad \text{per ogni } u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nella diseguaglianza sopra si sceglie $u = u^*$ e si tiene $j \rightarrow \infty$, così si ottiene

$$E(u^*) \leq E(\tilde{u}) - \langle p^*, \tilde{u} - u^* \rangle.$$

Si può stimare $\langle p^*, \tilde{u} - u^* \rangle$ come segue. Dato che $p^k = \lambda A^T(b^k - b)$, p^{k_j} si trova nel range di A^T , per ogni $j = 1, 2, \dots$. Quindi, p^* si trova anche lui nel range di A^T , cioè $p^* = A^T w$ per alcuni $w \in \mathbb{R}$. Dunque,

$$\langle p^*, \tilde{u} - u^* \rangle = \langle A^T w, \tilde{u} - u^* \rangle = \langle w, A(\tilde{u} - u^*) \rangle = 0.$$

Di conseguenza, si ha che $E(u^*) \leq E(\tilde{u})$. Dunque combinando $E(u^*) \leq E(\tilde{u})$ e $Au^* = b$ si ha $u^* = \tilde{u}$.

Dal momento che $\lim_{j \rightarrow \infty} u^{k_j} = u^*$ per ogni sotto-sequenza convergenti $(u^{k_j})_j$, si conclude che $(u^k)_{k=1,2,\dots}$ converge a \tilde{u} .

4.2 Il metodo Split Bregman

Nel 2008, Goldstein e Osher hanno trasformato e rivoluzionato gli algoritmi veloci per risolvere il modello ROF. Nel documento [18], è stata proposta una tecnica di splitting, essa parte dall'ipotesi che l'immagine sia omogenea; se ciò non è verificato l'immagine viene suddivisa in altre sotto-immagini, generalmente quattro, per creare un cosiddetto quad-tree. Tale procedura viene ripetuta ricorsivamente fino a che restano esclusivamente regioni omogenee.

Questa tecnica ha riscosso un grande successo nel risolvere i problemi “L1” regolarizzati come il denoising basato sulla variazione totale e il compressed sensing. È stata eseguita una combinazione con la tecnica di splitting chiamata iterazione Bregman che è diventata l’iterazione *Split Bregman*, la quale nei anni successivi suscitò sempre più interesse.

Prima di introdurre lo Split Bregman, si ricorda il problema del modello ROF(3.7)

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \min_u \int_{\Omega} |\nabla u| + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \\ &= \arg \min_u \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2} + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \quad \text{isotropico} \\ &= \arg \min_u \int_{\Omega} (|u_x| + |u_y|) + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \quad \text{anisotropico} \end{aligned}$$

Per semplicità, si considera un caso unidimensionale. Si assume $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

Il modello 1-D (1-Dimensionale) ROF è

$$u^* = \arg \min_{u \in \Omega} \left\{ \|u_x\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\}, \quad (4.8)$$

e la sua forma discretizzata è

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ \|\nabla u\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \right\}, \quad (4.9)$$

dove $\nabla : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è l’operatore di differenza che è definito come segue

$$(\nabla u)_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \\ u_i - u_{i-1} & \text{se } i > 1 \end{cases}$$

Si noti che questa è una versione unidimensionale di ∇_x e ∇_y e può essere riscritta come una matrice

$$\nabla = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La difficoltà di risolvere il modello ROF è come trattare con il differenziale ∇_u ed il differenziale della norma ℓ_1 $\|\cdot\|_1$ contemporaneamente. La tecnica di splitting risolve questo dilemma sapientemente, dividendo le due difficoltà. Sia $v = \nabla_u$, allora il problema diventa

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \|v\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \quad \text{tale che } v = \nabla_u. \quad (4.10)$$

Si ricorda che l'iterazione Bregman è stata progettata per risolvere i problemi della forma seguente

$$\min_u E(u), \quad \text{tale che } H(u) = 0$$

L'iterazione Bregman può essere applicata facilmente a questo problema confrontandolo con il (4.10). Uno dei vantaggi dell'iterazione Bregman è che non bisogna eseguire la differenziabilità di E , quindi si sfrutta questa proprietà facendo l'iterazione Bregman rispetto a v anziché a u . Si è fissato temporaneamente u , e si ottiene $E(v) = \|v\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2$ e $H(u) = \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_u\|_2^2$. Quindi si ottiene la seguente iterazione:

$$\begin{cases} v^{k+1} = \arg \min_v D_E^p(v, v^k) + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_u\|_2^2 \\ p^{k+1} = p^k - \lambda(v - \nabla_u) \end{cases} \quad (4.11)$$

Questa iterazione può essere semplificata con la stessa tecnica utilizzata nel problema (4.4), e diventa come segue

$$\begin{cases} v^{k+1} = \arg \min_v \|v\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_u - b^k\|_2^2 \\ b^{k+1} = b^k + \nabla_u - v^{k+1} \end{cases} \quad (4.12)$$

Si tiene in considerazione u , nella prima equazione, si risolve il problema di minimizzazione sia rispetto ad u che a v . Da qui il sistema dell'iterazione diventa

$$\begin{cases} (u^{k+1}, v^{k+1}) = \arg \min_{u,v} \|v\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_u - b^k\|_2^2 \\ b^{k+1} = b^k + \nabla_u^{k+1} - v^{k+1}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Questo sistema è chiamato *iterazione Split Bregman*.

Se il problema (4.8) ha una soluzione, questa iterazione convergerà alla soluzione del problema (4.10). Quindi u^k convergerà alla soluzione del problema (4.8). Lo studio della convergenza dello schema dell'iterazione suddetta si trova nel documento [19].

4.3 Metodo Bregman Alternato

L'iterazione Split Bregman in (4.13), non è ancora un algoritmo veloce. La soluzione della prima equazione del problema (4.13) è essenziale per l'efficienza del metodo Split Bregman. Invece di risolvere (u^{k+1}, v^{k+1}) contemporaneamente, si può dividere il problema

$$(u^{k+1}, v^{k+1}) = \arg \min_{u,v} \|v\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_u - b^k\|_2^2$$

in due sotto-problemi

$$\begin{cases} \tilde{u} = \arg \min_u \|v^k\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v^k - \nabla_u - b^k\|_2^2 \\ \tilde{v} = \arg \min_v \|v\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u^k - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_u^k - b^k\|_2^2 \end{cases} \quad (4.14)$$

che si risolveranno separatamente.

Questi sotto-problemi possono essere semplificati come segue

$$\begin{cases} \tilde{u} = \arg \min_u \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v^k - \nabla_u - b^k\|_2^2 \\ \tilde{v} = \arg \min_v \|v\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_u^k - b^k\|_2^2 \end{cases} \quad (4.15)$$

È evidente che in generale, si ha che $(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq (u^{k+1}, v^{k+1})$. Di conseguenza, per ottenere una migliore approssimazione, è necessario iterare più volte il problema (4.15) durante l'aggiornamento, sia di u che di v ad ogni iterazione. Nel calcolo effettivo, si ha $\tilde{u}^0 = u^k$ e $\tilde{v}^0 = v^k$, poi si utilizza il seguente algoritmo dell'iterazione per approssimare la prima equazione del problema (4.13) come segue:

Algorithm 1 Algoritmo dell'Iterazione

- 1: $\tilde{u}^0 = u^k$ e $\tilde{v}^0 = v^k$
 - 2: Scegliere un numero adeguato di iterazioni M
 - 3: **for** $m = 1$ to M **do**
 - 4: $\tilde{u}^m = \arg \min_u \|\tilde{v}^{m-1}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|\tilde{v}^{m-1} - \nabla_u - b^k\|_2^2$
 - 5: $\tilde{v}^m = \arg \min_v \|v\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\tilde{u}^m - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla_{\tilde{u}^m} - b^k\|_2^2$
 - 6: **end for**
 - 7: $u^{k+1} = \tilde{u}^M$ e $v^{k+1} = \tilde{v}^M$
-

Dal momento che le soluzioni dei problemi di elaborazione delle immagini sono arrotondati ai numeri interi, non è necessario effettuare l'approssimazione. Goldstein e Osher nel loro articolo [18] hanno sottolineato che è sufficiente eseguire una sola iterazione, cioè $(\tilde{u}^1, \tilde{v}^1)$ è una buona approssimazione di (u^{k+1}, v^{k+1}) .

Prendendo $M = 1$ e inserendo questo schema di minimizzazione alternato in (4.13), si avrà come risultato lo schema seguente:

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg \min_u \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v^k - \nabla u - b^k\|_2^2 \\ v^{k+1} = \arg \min_v \|v\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla u^{k+1} - b^k\|_2^2 \\ b^{k+1} = b^k + \nabla u^{k+1} - v^{k+1}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Per risolvere il problema (4.16), bisogna risolvere due problemi di minimizzazione ad ogni iterazione.

Poiché il primo *sotto-problema* del problema (4.16) contiene solo $\|\cdot\|_2^2$, esso è differenziabile ed ha per condizione di ottimalità.

$$\begin{aligned} \mu(u - f) + \lambda \nabla^T (\nabla u + b^k - v^k) &= 0 \\ \Rightarrow (\mu I + \lambda \nabla^T \nabla) u &= \mu f + \lambda \nabla^T (v^k - b^k) \\ \Rightarrow u^{k+1} &= (\mu I + \lambda \nabla^T \nabla)^{-1} [\mu f + \lambda \nabla^T (v^k - b^k)]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Il secondo *sotto-problema* del problema (4.16) ha la seguente forma:

$$v = \arg \min_{v \in \mathbb{R}^n} \|v\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|v - b\|_2^2$$

per ogni $b \in \mathbb{R}^n$. Si considera il caso semplice quando $n = 1$ e si supponga che $a \in \mathbb{R}$ e che $\lambda > 0$. È dunque facile verificare che il seguente problema:

$$x = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} |x| + \frac{\lambda}{2} (x - a)^2.$$

ha come soluzione

$$x = \mathit{shrink}(a, \frac{1}{\lambda}) := \begin{cases} -(a - \frac{1}{\lambda}), & \text{se } a < -\frac{1}{\lambda} \\ 0, & \text{se } -\frac{1}{\lambda} \leq a \leq \frac{1}{\lambda} \\ a - \frac{1}{\lambda}, & \text{se } a > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

che è equivalente alla tecnica soft-thresholding.

Lo shrinkage (detto anche thresholding) è una semplice tecnica spesso usata per il denoising di segnali e immagini. È stata introdotta da Donoho, nel 1994 [20] in una duplice forma: operatori di soft e hard thresholding. I primi hanno attirato maggiormente l'attenzione della comunità scientifica, grazie alla loro efficienza.

Ora si considera $v \in \mathbb{R}^n$. Indicando con v_i l'elemento i -esimo del vettore v , si ha:

$$\begin{aligned} & \min_{v \in \mathbb{R}^n} \|v\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|v - b\|_2^2 \\ &= \min_{v \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n v_i + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n (v_i - b_i)^2 \\ &= \min_{v \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \left[v_i + \frac{\lambda}{2} (v_i - b_i)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \min_{v_i \in \mathbb{R}} \left[v_i + \frac{\lambda}{2} (v_i - b_i)^2 \right] \end{aligned}$$

Quindi il problema di minimizzazione è separabile. Pertanto, per ridurre al minimo $v = \min_{v \in \mathbb{R}^n} \|v\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|v - b\|_2^2$, si estende la funzione *shrink* in \mathbb{R}^n , e si ha la seguente soluzione

$$v = \mathit{shrink}\left(b, \frac{1}{\lambda}\right)$$

cioè

$$v_i = \mathit{shrink}\left(b_i, \frac{1}{\lambda}\right).$$

Applicando la precedente discussione per il secondo sotto-problema del problema (4.16), si ha la seguente soluzione esplicita

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= \mathit{arg} \min_{v \in \mathbb{R}^n} \|v\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|v - \nabla u^{k+1} - b^k\|_2^2 \\ &= \mathit{shrink}\left(\nabla u^{k+1} + b^k, \frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sulla base di quanto detto sopra, si ha il *metodo 1-D Split Bregman alternato*

Algorithm 2 Metodo 1-D Split Bregman Alternato

- 1: $u^0 \leftarrow f, v^0 \leftarrow 0$, e $b^0 \leftarrow 0$
 - 2: **while** $\|v - \nabla u\|_2 < \text{una certa tolleranza}$ **do**
 - 3: $u^{k+1} = (\mu I + \lambda \nabla^T \nabla)^{-1} [\mu f + \lambda \nabla^T (v^k - b^k)]$
 - 4: $v^{k+1} = \text{shrink}(\nabla u^{k+1} + b^k, \frac{1}{\lambda})$
 - 5: $b^{k+1} = b^k + \nabla u^{k+1} - v^{k+1}$
 - 6: **end while**
-

Il nome di Metodo Split Bregman Alternato è stato proposto in [3].

Se si definisce $\text{cut}(u, \frac{1}{\lambda}) = u - \text{shrink}(u, \frac{1}{\lambda})$, riformulato come l'ultimo passo può essere riscritto come

$$b^{k+1} = \text{cut}(b^k + \nabla u^{k+1}, \frac{1}{\lambda}).$$

Questo metodo permette di proseguire per la realizzazione di un algoritmo veloce ed efficiente.

4.4 Algoritmo di Goldstein ed Osher

Riprendendo l'Algorithm (2), si nota che bisogna ancora risolvere un sistema lineare per ottenere u^{k+1} e quindi, in teoria, nessun algoritmo esplicito può essere derivato.

Tuttavia, il sistema lineare $u^{k+1} = (\mu I + \lambda \nabla^T \nabla)^{-1} [\mu f + \lambda \nabla^T (v^k - b^k)]$ è ben posto e non è necessario risolverlo. Infatti, Goldstein e Osher nel documento [18] hanno osservato che u^{k+1} ottenuto con il metodo di Gauss-Seidel con una sola iterazione è sufficientemente preciso per la convergenza dell'intero algoritmo.

Si ricorda che il modello ROF anisotropico nel caso 2D (3.24) è il seguente:

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \|\nabla_x u\|_1 + \|\nabla_y u\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2.$$

il modello sopracitato contiene i due termini $\nabla_x u$ e $\nabla_y u$. In questo caso la formula di Splitting si esprime come:

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \|v_x\|_1 + \|v_y\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2. \quad (4.19)$$

tale che $v_x = \nabla_x u$ e $v_y = \nabla_y u$.

Seguendo lo stesso procedimento che è stato eseguito per il caso uni-dimensionale (1-D) il modello Split Bregman alternato, per il caso bi-dimensionale (2-D) viene così schematizzato

Algorithm 3 Metodo Split Bregman Alternato per il modello ROF Anisotropico

- 1: $u^0 \leftarrow f, v_x^0 \leftarrow 0, v_y^0 \leftarrow 0, b_x^0 \leftarrow 0$ e $b_y^0 \leftarrow 0$
 - 2: **while** $\|v_x - \nabla_x u\|_2 + \|v_y - \nabla_y u\|_2 <$ una certa tolleranza **do**
 - 3: $u^{k+1} = (\mu I + \lambda \nabla_x^T \nabla_x + \lambda \nabla_y^T \nabla_y)^{-1} [\mu f + \lambda \nabla_x^T (v_x^k - b_x^k) + \lambda \nabla_y^T (v_y^k - b_y^k)]$
 - 4: $v_x^{k+1} = \mathit{shrink}(\nabla_x u^{k+1} + b_x^k, \frac{1}{\lambda})$
 - 5: $v_y^{k+1} = \mathit{shrink}(\nabla_y u^{k+1} + b_y^k, \frac{1}{\lambda})$
 - 6: $b_x^{k+1} = b_x^k + \nabla_x u^{k+1} - v_x^{k+1}$
 - 7: $b_y^{k+1} = b_y^k + \nabla_y u^{k+1} - v_y^{k+1}$
 - 8: **end while**
-

La soluzione u^{k+1} ottenuta tramite il metodo di Gauss-Seidel può essere riscritta come $u_{i,j}^{k+1} = G_{i,j}^k$ dove

$$G_{i,j}^k = \frac{\lambda}{\mu + 4\lambda} (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k + v_{x,i-1,j}^k - v_{x,i,j}^k + v_{x,i,j-1}^k - v_{y,i,j}^k - b_{x,i-1,j}^k + b_{x,i,j}^k - b_{y,i,j-1}^k + b_{y,i,j}^k) + \frac{\lambda}{\mu + 4\lambda} f_{i,j}$$

e quindi l'algoritmo può essere così riscritto

Algorithm 4 Algoritmo GO per il modello ROF Anisotropico

- 1: $u^0 \leftarrow f, v_x^0 \leftarrow 0, v_y^0 \leftarrow 0, b_x^0 \leftarrow 0$ e $b_y^0 \leftarrow 0$
 - 2: **while** $\|v_x - \nabla_x u\|_2 + \|v_y - \nabla_y u\|_2 < \text{una certa tolleranza}$ **do**
 - 3: $u^{k+1} = G^k$
 - 4: $v_x^{k+1} = \mathit{shrink}(\nabla_x u^{k+1} + b_x^k, \frac{1}{\lambda})$
 - 5: $v_y^{k+1} = \mathit{shrink}(\nabla_y u^{k+1} + b_y^k, \frac{1}{\lambda})$
 - 6: $b_x^{k+1} = b_x^k + \nabla_x u^{k+1} - v_x^{k+1}$
 - 7: $b_y^{k+1} = b_y^k + \nabla_y u^{k+1} - v_y^{k+1}$
 - 8: **end while**
-

Per il modello ROF isotropico discreto (3.23)

$$\begin{aligned} u^* &= \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \left\| \sqrt{(\nabla_x u)^2 + (\nabla_y u)^2} \right\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \\ &= \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sqrt{(\nabla_x u)_{i,j}^2 + (\nabla_y u)_{i,j}^2} + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2. \end{aligned}$$

la formula Split Bregman diventa:

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{n^2}} \left\| \sqrt{v_x + v_y} \right\|_1 + \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 \quad (4.20)$$

tale che $v_x = \nabla_x u$ e $v_y = \nabla_y u$.

È facile notare che v_x e v_y non si separano. Il problema di minimizzazione diventa il seguente:

$$(v_x^{k+1}, v_y^{k+1}) = \arg \min_{v_x, v_y} \left\| \sqrt{v_x + v_y} \right\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|v_x - \nabla_x u - b_x\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|v_y - \nabla_y u - b_y\|_2^2.$$

e non è separabile come nel caso anisotropico.

Questo problema si risolve usando una formula generalizzata del shrinkage proposta nel documento [22]

$$v_x^{k+1} = \mathit{shrink}(s^k, \frac{1}{\lambda}) \frac{\nabla_x u + b_x^k}{s^k}$$
$$v_y^{k+1} = \mathit{shrink}(s^k, \frac{1}{\lambda}) \frac{\nabla_y u + b_y^k}{s^k}$$

dove

$$s^k = \sqrt{(\nabla_x u + b_x^k)^2 + (\nabla_y u + b_y^k)^2}.$$

Nonostante questa differenza, u^{k+1} , b_x^{k+1} e b_y^{k+1} sono risolti con lo stesso procedimento del modello anisotropico.

Capitolo 5

The Weighted Total Variation

Come abbiamo visto, la tecnica di Denoising basata sulla Total Variation (TVD) lavora bene con segnali costanti a tratti, ma per quanto riguarda i segnali regolari a tratti, produce effetti “staircase artifacts”, i quali danno come risultato un grafico a gradini così chiamati anche effetti a scalinata o gradinata. La parola “staircasing” intuitivamente significa due cose: in primo luogo l’esistenza di regioni costanti, ma anche l’esistenza di discontinuità. Questo effetto a gradinata significa che le discontinuità possono essere meno determinanti per la visione umana che per l’esistenza di zone costanti. Questi tre grafici , esemplificano l’effetto “staircase artifact”, che sono stati simulati da Caselles e al. nel documento [23]

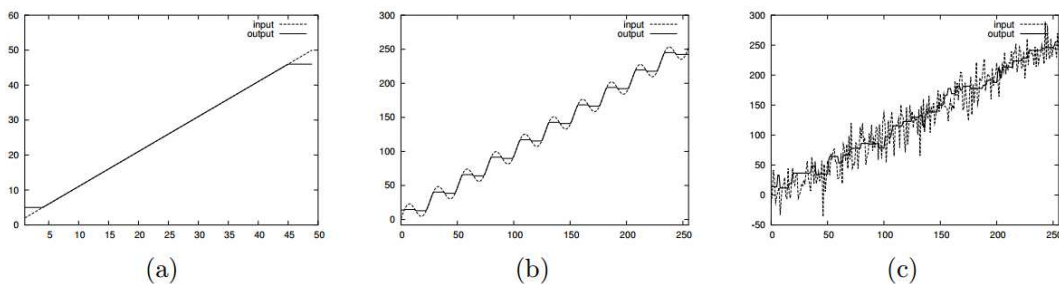


Figura 5.1: Staircasing on signal

Nella Figura 5.1, si ha (a) Segnale non disturbato (curva tratteggiata), de-

noised da minimizzazione TV(curva continua): a parte i contorni, il segnale denoised è fedele al dato. (b) Qui il segnale è modulato da una sinusoide (tratteggiata) la versione denoised è (continua): le singolarità verificano la derivata massima del dato. Non vi è effetto staircasing, ma discontinuità. (c) Lo stesso segnale ma disturbato (tratteggiato) e la sua versione denoised (continua): si verificano numerose discontinuità con creazioni di zone costanti.

Diverse generalizzazioni di TVD sono state sviluppate per affrontare questi effetti indesiderati. Esiste un metodo per superare quest'inconveniente. Questo metodo consiste nel penalizzare in maniera differente i valori del gradiente TV. In particolare, è necessario penalizzare poco i valori più alti della TV che sono tipici del contorno dell'immagine e penalizzare maggiormente i valori più bassi che sono tipici del rumore.

In questo modo le tecniche di denoising produrranno immagini in cui sono mantenute i contorni. Questa è l'idea della *Weighted Total Variation*(Total Variation Pesata), la quale esegue penalizzazioni differenti in base al valore del gradiente dell'immagine.

Il problema di denoising può essere realizzato risolvendo il problema :

$$u^* = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + TV_w^A(u) \right\} \quad (5.1)$$

dove compare il termine di TV pesata, $TV_w^A(u)$ definita dalla somma delle sommatorie delle variazioni sulle righe e delle sommatorie delle variazioni sulle colonne:

$$TV_w^A(u) = \sum_i \sum_j |\nabla_x^w u_{i,j}| + \sum_i \sum_j |\nabla_y^w u_{i,j}| \quad (5.2)$$

dove:

$$\begin{aligned} \nabla_x^w u_{1,j} &= 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, N \\ \nabla_x^w u_{i,j} &= \alpha_{i,j}(u_{i,j} - u_{i-1,j}) \quad \text{per } i = 2, \dots, N \text{ e } j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.3)$$

e dove :

$$\begin{aligned} \nabla_y^w u_{i,1} &= 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, N \\ \nabla_y^w u_{i,j} &= \beta_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j-1}) \quad \text{per } i = 1, \dots, N \text{ e } j = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove $\alpha_{i,j} > 0$ e $\beta_{i,j} > 0$ pesano la differenza di primo ordine lungo le direzioni rispettivamente orizzontali e verticali.

5.1 La Strategia Split Bregman

Facendo uso di una *splitting variable strategy*, il problema (5.1) può essere formulato come:

$$\arg \min_{u \in \mathbb{R}^{N \times N}} \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \|D_x\|_1 + \|D_y\|_1 \text{ tale che } D_x = \nabla_x^w u; D_y = \nabla_y^w u \quad (5.5)$$

La formulazione Lagrangiana del problema (5.5) è la seguente:

$$\arg \min_{u, D_x, D_y \in \mathbb{R}^{N \times N}} \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 + \|D_x\|_1 + \|D_y\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|D_x - \nabla_x^w u\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|D_y - \nabla_y^w u\|_2^2 \quad (5.6)$$

Sia $H(u) = \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2$, definiamo

$$E(u, D_x, D_y) = H(u) + \|D_x\|_1 + \|D_y\|_1, \quad (5.7)$$

il problema (5.6) si può riscrivere come

$$\arg \min_{u, D_x, D_y \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ E(u, D_x, D_y) + \frac{\lambda}{2} \|D_x - \nabla_x^w u\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|D_y - \nabla_y^w u\|_2^2 \right\} \quad (5.8)$$

Consideriamo la distanza Bregman associata al funzionale convesso $E(u, D_x, D_y)$ ad u^k, D_x^k, D_y^k

$$\begin{aligned} D_E^p(u, D_x, D_y, u^k, D_x^k, D_y^k) &= E(u, D_x, D_y) - E(u^k, D_x^k, D_y^k) - \langle p_u, u - u^k \rangle \\ &\quad - \langle p_{D_x}, D_x - D_x^k \rangle - \langle p_{D_y}, D_y - D_y^k \rangle \end{aligned} \quad (5.9)$$

dove p_u è il sub-gradiente di E rispetto ad u ed è definito u^k , p_{D_x} è il sub-gradiente di E rispetto ad D_x ed è definito D_x^k , p_{D_y} è il sub-gradiente di E rispetto ad D_y ed è definito D_y^k .

Al fine di risolvere il problema (5.8), si applicheranno le iterazioni Bregman minimizzando iterativamente:

$$(u^{k+1}, D_x^{k+1}, D_y^{k+1}) = \arg \min_{u, D_x, D_y \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left[D_E^p(u, D_x, D_y, u^k, D_x^k, D_y^k) + \frac{\lambda}{2} \|D_x - \nabla_x^w u\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|D_y - \nabla_y^w u\|_2^2 \right] \quad (5.10)$$

cioè

$$(u^{k+1}, D_x^{k+1}, D_y^{k+1}) = \arg \min_{u, D_x, D_y \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left[E(u, D_x, D_y) - \langle p_u^k, u - u^k \rangle - \langle p_{D_x}^k, D_x - D_x^k \rangle - \langle p_{D_y}^k, D_y - D_y^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|D_x - \nabla_x^w u\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|D_y - \nabla_y^w u\|_2^2 \right] \quad (5.11)$$

$$p_u^{k+1} = p_u^k - \nabla H(u^{k+1}) \in \nabla H(u^{k+1}) \quad (5.12)$$

$$p_{D_x}^{k+1} = p_{D_x}^k - \lambda(D_x^{k+1} - \nabla_x^w u^{k+1}) \in \partial(\|D_x^{k+1}\|_1) \quad (5.13)$$

$$p_{D_y}^{k+1} = p_{D_y}^k - \lambda(D_y^{k+1} - \nabla_y^w u^{k+1}) \in \partial(\|D_y^{k+1}\|_1) \quad (5.14)$$

con queste notazioni si può ora effettuare un'efficiente minimizzazione del problema (5.11), minimizzandolo iterativamente rispetto ad u, D_x, D_y scomponendolo. I tre passi che si debbono eseguire sono:

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ \frac{\mu}{2} \|u - f\|_2^2 - \langle p_u^k, u - u^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|D_x^k - \nabla_x^w u\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|D_y^k - \nabla_y^w u\|_2^2 \right\} \quad (5.15)$$

$$D_x^{k+1} = \arg \min_{D_x \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ \|D_x\|_1 - \langle p_{D_x}^k, D_x - D_x^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|D_x - \nabla_x^w u^{k+1}\|_2^2 \right\} \quad (5.16)$$

$$D_y^{k+1} = \arg \min_{D_y \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ \|D_y\|_1 - \langle p_{D_y}^k, D_y - D_y^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|D_y - \nabla_y^w u^{k+1}\|_2^2 \right\} \quad (5.17)$$

dal documento [24], si deduce che le iterazioni complicate (5.15), (5.16), (5.17), (5.12), (5.13), (5.14) sono equivalenti alle seguenti iterazioni semplificate:

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ H(u) + \frac{\lambda}{2} \|D_x^k - \nabla_x^w u - e_x^k\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|D_y^k - \nabla_y^w u - e_y^k\|_2^2 \right\} \quad (5.18)$$

$$D_x^{k+1} = \arg \min_{D_x \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ \|D_x\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|D_x - \nabla_x^w u^{k+1} - e_x^k\|_2^2 \right\} \quad (5.19)$$

$$D_y^{k+1} = \arg \min_{D_y \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ \|D_y\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|D_y - \nabla_y^w u^{k+1} - e_y^k\|_2^2 \right\} \quad (5.20)$$

dove, ad ogni iterato k , si ha che e_x^k, e_y^k vengono aggiornati nel modo seguente:

$$e_x^{k+1} = e_x^k + \nabla_x^w u^{k+1} - D_x^{k+1} \quad (5.21)$$

$$e_y^{k+1} = e_y^k + \nabla_y^w u^{k+1} - D_y^{k+1} \quad (5.22)$$

L'operazione di *shrinkage* è stata introdotta ed analizzata in una serie di lavori di Donoho e Johnstone in [25].

Inizialmente si ha $D_x^0 = D_y^0 = e_x^0 = e_y^0 = 0$.

I problemi (5.19) e (5.20) possono essere risolti efficacemente con *Soft Shrinkage*, cioè

$$D_x^{k+1} = \text{Soft}_{\frac{1}{\lambda}}(\nabla_x^w u^{k+1} + e_x^k) \quad (5.23)$$

$$D_y^{k+1} = \text{Soft}_{\frac{1}{\lambda}}(\nabla_y^w u^{k+1} + e_y^k) \quad (5.24)$$

dove l'operatore *Soft* applica punto per punto, come segue:

$$\text{Soft}_{\frac{1}{\lambda}}(z) = \text{sign}(z) \max \left\{ |z| - \frac{1}{\lambda}, 0 \right\} \quad (5.25)$$

Sostituendo nell'equazione (5.21) la relativa della (5.23), segue che:

$$e_x^{k+1} = e_x^k + \nabla_x^w u^{k+1} - \text{Soft}_{\frac{1}{\lambda}}(\nabla_x^w u^{k+1} + e_x^k) \quad (5.26)$$

Definiamo ora l'operatore *Cut* come nel documento [26]:

$$\text{cut}_{\frac{1}{\lambda}}(z) = z - \text{Soft}_{\frac{1}{\lambda}}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & z > \frac{1}{\lambda} \\ z & -\frac{1}{\lambda} \leq z \leq \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} & z < -\frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (5.27)$$

La relazione (5.26) può ora essere riscritta come segue:

$$e_x^{k+1} = \text{cut}_{\frac{1}{\lambda}}(\nabla_x^w u^{k+1} + e_x^k) \quad (5.28)$$

Analogamente, si può riscrivere la relazione (5.22) come segue:

$$e_y^{k+1} = \text{cut}_{\frac{1}{\lambda}}(\nabla_y^w u^{k+1} + e_y^k) \quad (5.29)$$

Imponendo le condizioni di ottimalità, la soluzione del problema (5.18) è ottenuta come soluzione del seguente sistema lineare

$$(\mu I - \lambda \nabla^w) u^{k+1} = \mu f + \lambda (\nabla_x^w)^T (D_x^k - e_x^k) + \lambda (\nabla_y^w)^T (D_y^k - e_y^k) \quad (5.30)$$

dove $\nabla^w = -(\nabla_x^w)^T \nabla_x^w - (\nabla_y^w)^T \nabla_y^w$ è l'operatore ponderato discreto di Laplace. Per $1 < i, j < N$,

$$\begin{aligned} \nabla^w u_{i,j} = & -(\alpha_{i,j}^2 + \alpha_{i,j+1}^2 + \beta_{i,j}^2 + \beta_{i,j+1}^2) u_{i,j} \\ & + \alpha_{i+1,j}^2 u_{i+1,j} + \alpha_{i,j}^2 u_{i-1,j} + \beta_{i,j+1}^2 u_{i,j+1} + \beta_{i,j}^2 u_{i,j-1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Quando $i \in \{1, n\}$ o $j \in \{1, n\}$, le formule simili sono valide per $\nabla^w u_{i,j}$.

Si noti che è necessario risolvere un'equazione parziale differenziabile in ogni k iterazione. Ciò corrisponde a risolvere un sistema lineare sparso a dominanza diagonale stretta che ci porta alla scelta naturale del metodo di Gauss-Seidel per la sua soluzione.

Capitolo 6

Sperimentazioni

In questo capitolo saranno confrontati i risultati del denoising ottenuti facendo uso del metodo *Split Bregman* con *Total Variation* e con quelli ottenuti da questo stesso metodo quando al posto della *Total Variation* si considera la *Total Variation pesata*.

È stata considerata l'immagine *forbild* alla quale è stato aggiunto rumore gaussiano caratterizzata da valori di deviazione standard $\sigma = 10$ (basso), $\sigma = 20$ (medio), $\sigma = 30$ (severo).

Per valutare in modo obiettivo la qualità dell'immagine si è utilizzato il *PSNR*.

Il **PSNR** (**P**eak **S**ignal-to-**N**oise **R**atio) è una misura adottata per valutare la qualità di un'immagine compressa rispetto all'originale. Questo indice di qualità delle immagini è definito come il rapporto tra la massima potenza di un segnale e la potenza di rumore che può invalidare la fedeltà della sua rappresentazione compressa.

Poiché molti segnali hanno una gamma dinamica molto ampia, il *PSNR* è solitamente espresso in termini di scala logaritmica di decibel (dB).

Di solito vengono utilizzate due misure distinte di qualità dell'immagine:

- L'errore quadratico medio (**MSE** = Mean Square Error), parametro che serve a stimare l'errore medio quadratico tra due immagini; più

tale indice è basso minore è la differenza tra le immagini.

- Il *PSNR* non è una misura ideale ma si usa comunemente per stimare la qualità di un'immagine. Maggiore è il valore *PSNR* maggiore sarà la “somiglianza” con l'immagine originale.

Sia $g(x, y)$ l'immagine risultante di un processo di trasformazione (compressione, trasmissione) a partire da un'immagine originale $f(x, y)$ priva di difetti, possiamo definire l'errore *MSE*:

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N [g(x, y) - f(x, y)]^2 \quad (6.1)$$

L'unico problema di questa misura è che dipende fortemente dalla variazione di scala dell'intensità dell'immagine. Un errore quadratico medio di 100 per un'immagine a 8 bit (con i pixel che variano tra 0 e 255) risulterebbe in un'immagine qualitativamente scarsa. Invece con lo stesso errore quadratico medio un'immagine a 10 bit (con i pixel che variano tra 0 e 1023) avrebbe una qualità migliore.

Il *PSNR* evita questo problema scalando l'errore *MSE* sull'intervallo di variabilità dell'immagine come segue:

$$\begin{aligned} PSNR &= -10 \log_{10} \frac{MSE}{S^2} \\ PSNR &= 20 \log_{10} \frac{S}{\sqrt{MSE}} \\ PSNR &= 10 \log_{10} \frac{S^2}{MSE} \end{aligned} \quad (6.2)$$

con S il massimo valore di intensità luminosa presente nell'immagine.

Il *PSNR*, di solito, è utile per confrontare tecniche di restoration per la stessa immagine.

La sperimentazione è stata eseguita su di un'immagine a partire dalla seguente immagine.

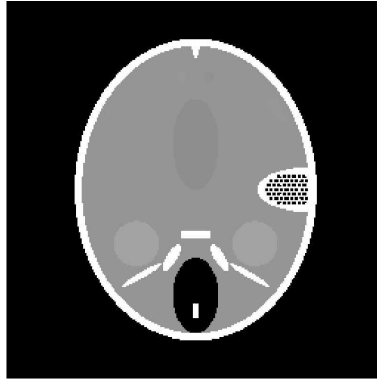


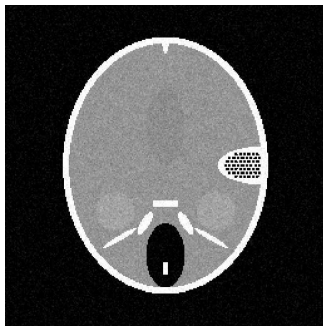
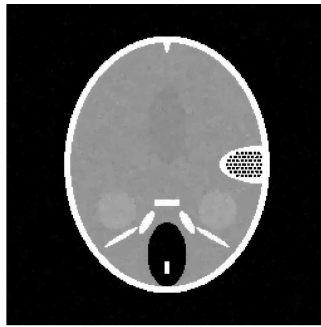
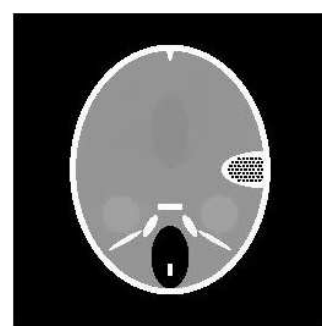
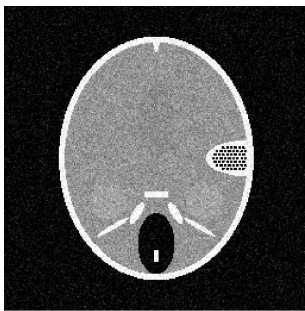
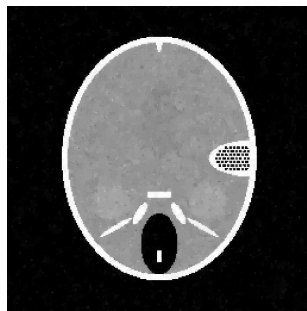
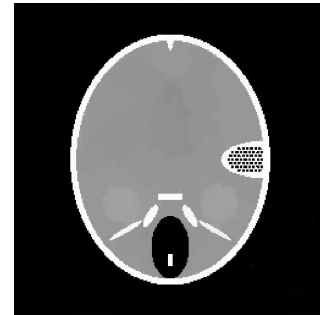
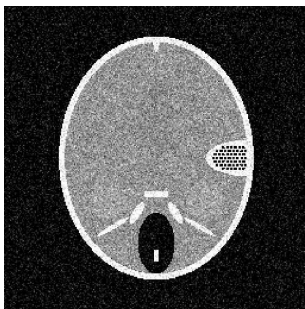
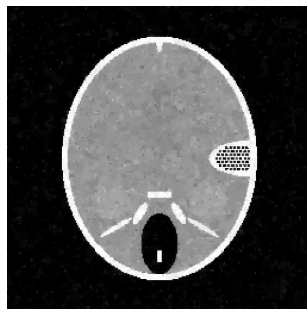
Figura 6.1: Immagine originale

Nella tabella seguente sono riportati i risultati del confronto tra i due metodi al variare della deviazione standard del rumore gaussiano di cui è affetta l'immagini di partenza.

Come si può notare sia dalla tabella che dalle immagini in figura , la tecnica di Split Bregman con Total Variation Weighted migliora notevolmente i risultati ottenuti con la stessa tecnica che fa uso della Total Variation.

Sigma	PSNR Iniziale	PSNR TV	PSNR TVW
10	28.10	39.04	47.69
20	22.08	33.52	41.52
30	18.56	30.15	35.34

Tabella 6.1: Confronto tra i valori dei diversi PSNR

a) $\sigma = 10$ b) $\sigma = 10$, metodo
Split Bregman TVc) $\sigma = 10$, metodo
Split Bregman TVWa) $\sigma = 20$ b) $\sigma = 20$, metodo
Split Bregman TVc) $\sigma = 20$, metodo
Split Bregman TVWa) $\sigma = 30$ b) $\sigma = 30$, metodo
Split Bregman TVc) $\sigma = 30$, metodo
Split Bregman TVW

Conclusioni

In ognuna delle diverse categorie di problemi presentati, si sono raggiunti negli ultimi anni successi strepitosi. Per avanzare anche solo di un piccolo passo è stato fondamentale il duro lavoro di interi gruppi di ricerca sparsi nel mondo di cui fa parte anche la mia relattrice Dott.ssa Damiana Lazzaro, che sviluppando modelli matematici sempre più complessi e algoritmi numerici efficienti in grado di gestire il sempre maggior numero di dati provenienti da apparecchi molto sofisticati, sono riusciti a produrre risultati matematici come quelli studiati nei casi particolari di denoising di immagini mediante tecniche basate sulla total variation.

Il problema del denoising che ha lo scopo di rimuovere il rumore nelle immagini, è tra i più noti e trattati nel campo dei metodi matematici di analisi delle immagini.

Lo scopo di questo lavoro è stato quello di dimostrare come le tecniche basate sulla total variation in particolare quella basata sulla “weighted Total Variation” sono uno strumento molto potente per l’elaborazione di immagini digitali e sono utilizzate con successo per la soluzione di problemi di denoising. In tale ambito sono stati proposti nuovi algoritmi che pesano diversamente i coefficienti wavelet a seconda che siano relativi a dettagli importanti dell’immagine, o che invece siano solo relativi alla perturbazione.

Più in particolare, è stato considerato un approccio in cui l’immagine ripulita è ottenuta minimizzando un funzionale che è la somma di un termine di fedeltà ai dati e un termine che impone un vincolo di regolarità sulla soluzione. È stato proposto l’uso di nuove funzioni potenziali che permettono, durante

il processo di denoising, di preservare e ricostruire importanti caratteristiche dell'immagine come, ad esempio, contorni e regioni regolari. Questi metodi sono stati applicati al denoising di immagini reali, ottenendo ottimi risultati. Per ottenere un'alta qualità dell'immagine è stato messo a punto un algoritmo altamente efficiente che affronta il problema di minimo con una tecnica di penalizzazione e sfrutta il metodo di splitting per la soluzione dei problemi di minimo.

Bibliografia

- [1] D. L. Donoho, De-noising by soft-thresholding, *IEEE Transactions on Information Theory* 41 (1995) 613-627.
- [2] C. K. Chui, J. Z. Wang, Wavelet-based minimal-energy approach to image restoration, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 23 (2007) 114-130.
- [3] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D* 60 (1992) 259-268.
- [4] G. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [5] T. F. Chan, J. Shen, *Image Processing and Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.
- [6] H. T. Shim and H. Volkmer, On the Gibbs phenomenon for wavelet expansions, *J. of Approx. Theory* 84 (1996), 74-95.
- [7] M. Nikolova, Weakly constrained minimization: application to the estimation of images and signals involving constant regions, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 21 (2004) 155-175.
- [8] W. Ring, Structural properties of solutions to total variation regularization problems, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 34 (2000) 799-810.

-
- [9] P. Blomgren, T. F. Chan, P. Mulet, C. K. Wong, Total variation image restoration: numerical methods and extensions, in: Proceedings of the 1997 International Conference on Image Processing (ICIP'97), vol. 3, IEEE Computer Society, 1997, p. 384.
- [10] M. Lysaker, A. Lundervold, X. C. Tai, Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time, *IEEE Transactions on Image Processing* 12 (2003) 1579-1590.
- [11] M. Lysaker, X. C. Tai, Iterative image restoration combining total variation minimization and a second-order functional, *International Journal of Computer Vision* 66 (2006) 5-18.
- [12] Q. Chang, X. C. Tai, L. Xing, A compound algorithm of denoising using second-Order and fourth-Order partial differential equations, *Numerical Mathematics: A Journal of Chinese Universities English Series* 2.
- [13] P. Perona, J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12 (1990) 629-639.
- [14] C. R. Vogel, M. E. Oman, Iterative methods for total variation denoising, *SIAM Journal on Scientific Computing* 17 (1996) 227-238.
- [15] L. M. Bregman, A relaxation method of finding a common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 7 (1967) 200-217.
- [16] S. Osher, M. Burger, D. Goldfarb, J. Xu, W. Yin, An iterative regularization method for total variation-based image restoration, *Multiscale Modeling and Simulation* 4 (2005) 460 - 489.

-
- [17] R. Q. Jia, H. Q. Zhao, W. Zhao, Convergence analysis of the Bregman method for the variational model of image denoising, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 27 (2009) 367-379.
- [18] T. Goldstein, S. Osher, The Split Bregman method for L1-regularized problems, *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2 (2009) 323-343.
- [19] R. Q. Jia, H. Q. Zhao, W. Zhao, Convergence analysis of the Bregman method for the variational model of image denoising, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 27 (2009) 367-379.
- [20] D. Donoho e I. Johnstone, Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, *Biometrika*, 81, 1994:425-455
- [21] L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D* 60 (1992) 259-268.
- [22] Y. Wang, W. Yin, Y. Zhang, A fast algorithm for image deblurring with total variation regularization, Rice University CAAM Technical Report TR07-10.
- [23] Caselles, V., Chambolle, A., and Novaga, M. (2007). The discontinuity set of solutions of the TV denoising problem and some extensions. *Multiscale Model. Simul.*, 6 (3) : 879-894.
- [24] S. Osher, M. Burger, D. Goldfarb, J. Xu, and W. Yin, An iterative regularization method for total variation-based image restoration, *Multiscale Model. Simul* 2005; 4, pp. 460-489.
- [25] D.L. Donoho and M. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 90 (432) : 1200 - 1224, Dicembre 1995.
- [26] R.Q Jia, H. Zhao, A fast algorithm for the total variation model of image denoising *Adv Comput Math* 2010; 33:231 - 241.

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto La mia diligente relatrice, *prof.ssa Damiana Lazzaro*, dapprima per avermi consigliato un tema così interessante e ambizioso, nonché per la schiettezza, le opportunità datami e l'entusiasmo dimostratami.

La ringrazio per avermi dato la possibilità di confrontarmi con nuovi e stimolanti argomenti come quelli trattati in questa tesi.

La ringrazio per la disponibilità e la cortesia avute nei miei confronti, particolarmente preziose sono risultate le sue indicazioni, con le quali sono stata costantemente guidata nell'elaborazione di questa tesi.

Vorrei che questi ringraziamenti siano un punto di arrivo da una parte, ma anche un punto di inizio nonostante la mia veneranda età, perché credo che non si finisca mai di crescere e spero di poter raggiungere nuovi traguardi.

Grazie ai *professori* che durante la mia carriera universitaria mi hanno realmente insegnato qualcosa, e non mi riferisco a semplici nozioni imparate a memoria; grazie a chi mi ha incoraggiata a inseguire i miei sogni, e grazie anche a chi ha tentato di ostacolarmi in vario modo, perché mi ha resa ancor più determinata.

Un grazie particolare a *Floriana* e *Franca* che quando arrivavo il mattino in facoltà mi hanno sempre accolta con un sorriso e mi hanno incoraggiata a non mollare.

Ho dedicato questa tesi a mio *marito* e mio *figlio*, perché sono contenta di poter dare loro questa gioia odierna, perché io ci provo di continuo, non sempre riuscendovi purtroppo, ad essere la moglie e la madre perfetta che

loro si meritano.

Ringrazio poi tutte le persone che non ho nominato esplicitamente, ma che hanno avuto un ruolo importante nella mia vita, perché i ricordi di tutti voi sono impressi in maniera indelebile nel mio cuore.