ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Stime Integrali su Gruppi di Tipo H e Principio Forte di Continuazione Unica

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Mirko Ruffilli

II Sessione
Anno Accademico 2014-2015

Humans are allergic to change. They love to say "We've always done it this way". I try to fight that. That's why I have a clock on my wall that runs counter-clockwise.

Grace Hopper

Introduzione

Una delle proprietà maggiormente rilevanti delle funzioni analitiche è quella che riguarda l'unicità del loro prolungamento (unique continuation). Visto che le funzioni armoniche nello spazio euclideo sono analitiche, anch'esse godono di tale proprietà. Poiché le soluzioni di più generali EDP ellittiche condividono diverse caratteristiche con le funzioni armoniche è dunque naturale studiare la proprietà di unique continuation anche in contesti più generali. In questa direzione si inquadrarono (nella prima metà del Novecento) gli studi di Carleman, che per primo fornì delle stime integrali *a priori* per l'operatore di tipo Schrödinger $\Delta + U$ in $\mathbb{R}^2$ (con Δ il laplaciano su $\mathbb{R}^2$ e U un potenziale limitato), influenzando con la sua tecnica tutta la ricerca su questo argomento.

Nel nostro elaborato saremo interessati ad un concetto più forte della unique continuation che chiameremo Principio Forte di Continuazione Unica e la cui definizione verrà fornita nel Capitolo 2. Orbene, non solo è nota in letteratura la validità di tale principio per gli operatori ellittici del secondo ordine (a coefficienti reali e regolari) in forma di divergenza, ma è anche noto che perturbando tali operatori mediante un potenziale C^∞ la proprietà resta valida anche per gli operatori ottenuti. Ci preme evidenziare che in questo contesto l'articolo di Garofalo e Lin del 1987, [6], fornisce un approccio geometrico che non fa uso di stime di tipo Carleman.

È dunque naturale chiedersi se succeda lo stesso fenomeno per operatori ellittico–degeneri. In un articolo del 1990, [5], Garofalo e Lanconelli non solo mostrano che ciò non accade in generale, ma dimostrano altresì il Principio

Forte di Continuazione Unica per opportune soluzioni dell'equazione $\Delta_{\mathbb{H}} u = Vu$ dove $\Delta_{\mathbb{H}}$ è il sub-Laplaciano canonico del gruppo di Heisenberg e V è un opportuno potenziale. Lo scopo di questa Tesi è fornire l'estensione dei risultati di tale articolo ai gruppi di Heisenberg generalizzati (o gruppi di tipo H).

Nel primo Capitolo esporremo risultati già noti in letteratura riguardo a tali gruppi: partendo dalla definizione data da Kaplan, [7], forniremo un'utile caratterizzazione dei gruppi di tipo H in termini "elementari" che ci permetterà in seguito di esplicitare la soluzione fondamentale dei relativi sub-Laplaciani canonici in funzione di una opportuna distanza d.

Nel secondo Capitolo, seguendo l'approccio del succitato articolo di Garofalo e Lanconelli, dimostreremo i seguenti risultati:

1. una formula di rappresentazione per funzioni lisce su $\mathbb{H}$ come integrali sulle d-sfere e sulle d-palle;

2. una forma forte del cosiddetto Principio di Indeterminazione per i gruppi di tipo H;

3. una formula per la variazione prima dell'integrale di Dirichlet associato a $\Delta_{\mathbb{H}} u = Vu$, dove $\Delta_{\mathbb{H}}$ è il sub-Laplaciano canonico di un gruppo di tipo H e V un opportuno potenziale.

Nel terzo Capitolo mostreremo l'esistenza di una funzione di frequenza su $\mathbb{H}$ e studieremo le sue proprietà di crescita attraverso quanto si è visto in precedenza: riusciremo infine ad ottenere il Principio Forte di Continuazione Unica per l'operatore $-\Delta_{\mathbb{H}} + V$, secondo cui l'unica soluzione di $\Delta_{\mathbb{H}} u = Vu$ dotata di zeri di ordine infinito è la funzione nulla.

Indice

Capitolo 1

I gruppi di tipo Heisenberg

In questo Capitolo affrontiamo un'introduzione ai gruppi di Heisenberg generalizzati (noti anche come gruppi di tipo H), importanti oggetti di interesse sia in geometria subriemanniana sia, per le loro applicazioni, in fisica quantistica e nello studio delle algebre di Clifford.

A tal fine, ci occuperemo *in primis* dei gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogenei, una struttura geometrica in cui la legge di gruppo è necessariamente polinomiale, provvedendo poi a fornire il legame tra questi oggetti di studio ed i gruppi di Carnot.

Forniremo in seguito esempi di gruppi di Carnot omogenei, soffermandoci su quelli di passo 2, per poi fornire generalizzazioni del gruppo di Heisenberg–Weyl: i succitati gruppi di tipo H. Concluderemo la relazione fornendo la soluzione fondamentale per particolari operatori differenziali su gruppi di tipo H.

La quasi totalità dei risultati di cui discuteremo sono dimostrati in [2] e [7], mantenendo tuttavia un approccio differente per quanto riguarda la presentazione dei risultati.

1.1 Gruppi di Lie Omogenei e loro proprietà

Definizione 1.1 (Gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo). *Sia $\circ$ una legge di gruppo su $\mathbb{R}^N$ tale per cui valgano simultaneamente le seguenti proprietà:*

(H.1) *l'applicazione $(x, y) \mapsto y^{-1} \circ x$ è $C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$;*

(H2) *esiste una N-upla di numeri reali $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ per cui si ha*

$$1 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N,$$

e, posto

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad \delta_\lambda(x_1, \dots, x_N) := (\lambda^{\sigma_1} x_1, \dots, \lambda^{\sigma_N} x_N), \tag{1.1}$$

la famiglia $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ forma un gruppo di automorfismi di $(\mathbb{R}^N, \circ)$.

Allora la terna $(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ si dice gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo.[1]

Nonostante sia evidente che la definizione di gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo dipende dalla coordinate scelte (per cui non possiamo tradurre agevolmente questa struttura in termini di varietà differenziabili), proseguiamo nello studio di tali oggetti, introducendo definizioni che chiariranno la natura della legge di composizione di un gruppo di Lie omogeneo.

Data $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ una famiglia di "dilatazioni" come in (1.1), una funzione reale a è detta δ_λ-*omogenea* di grado $m \in \mathbb{R}$ se non è identicamente nulla e se si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\lambda > 0$

$$a(\delta_\lambda(x)) = \lambda^m a(x).$$

Nel caso di un gruppo di Lie omogeneo, possiamo definire la *lunghezza omogenea* di un multi-indice $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ come

$$|\alpha|_\sigma = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma_i.$$

[1]Osserviamo che, a causa di (H.2), l'elemento neutro del gruppo è necessariamente 0.

Da questa definizione possiamo definire il grado omogeneo di una funzione polinomiale $p : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ (la somma qui sotto si intende finita)

$$p(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha, \qquad c_\alpha \neq 0,$$

come

$$\deg_\sigma(p) := \max\{|\alpha|_\sigma : c_\alpha \neq 0\}.$$

Con poca fatica, si può dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 1.2. *Supponiamo che $a \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Allora a è δ_λ-omogenea di grado $m \in \mathbb{R}$ se e solo se è una funzione polinomiale della forma*

$$a(x) = \sum_{|\alpha|_\sigma = m} a_\alpha x^\alpha$$

con almeno un a_α non nullo.

Questa proposizione, oltre ad avere un suo interesse in sé, si rivela fondamentale per dimostrare quanto segue.

Teorema 1.3 (Legge di composizione di un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo)**.** *Sia $(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo. Allora per ogni $x = (x_1, \dots, x_N)$ e per ogni $y = (y_1, \dots, y_N)$ si ha*

$$x \circ y = \Big((x \circ y)_1\,, (x \circ y)_2\,, \dots, (x \circ y)_N\Big),$$

ove

$$\begin{aligned} &(x \circ y)_1 = x_1 + y_1; \\ &(x \circ y)_j = x_j + y_j + Q_j(x, y), \qquad 2 \leq j \leq N, \end{aligned}$$

in cui, per ogni $2 \leq j \leq N$, i Q_j sono funzioni polinomiali che dipendono da $x_1, \dots, x_{j-1}, y_1, \dots, y_{j-1}$ e per cui vale

$$Q(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda^{\sigma_j} Q(x, y) \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N, \quad j = 1, \dots, N. \tag{1.2}$$

Consideriamo ora i campi vettoriali sui gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogenei. Data una N-upla di funzioni $a_1, \dots, a_N$,

$$a_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad j \in \{1, \dots, N\},$$

l'operatore differenziale lineare del primo ordine

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j \partial_{x_j} \tag{1.3}$$

si dirà campo vettoriale su $\mathbb{R}^N$ di componenti $a_1, \dots, a_N$. X si dirà liscio se le funzioni a_j sono lisce per ogni $j = 1, \dots, N$. Ci serviremo inoltre della seguente notazione: se X è il campo vettoriale in (1.3) allora

$$XI(x) := \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_N(x) \end{pmatrix}$$

sarà il vettore colonna delle componenti di X.

Ad un campo vettoriale su $\mathbb{R}^N$ possiamo associare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = XI(\gamma) \\ \gamma(0) = x_0, \end{cases}$$

ove $x_0 \in \mathbb{R}^N$ è fissato. Un campo vettoriale si dirà *completo* se il dominio massimale della soluzione di tale problema di Cauchy è $\mathbb{R}$.

Dato un gruppo di Lie omogeneo $\mathbb{G}$ e dato $\alpha \in \mathbb{G}$, denotiamo con $\tau_\alpha(x) := \alpha \circ x$ la traslazione sinistra di ampiezza α su $\mathbb{G}$. Un campo vettoriale liscio su $\mathbb{R}^N$ dice *invariante a sinistra* su $\mathbb{G}$ se

$$X(\varphi \circ \tau_\alpha) = (X\varphi) \circ \tau_\alpha,$$

per ogni α in $\mathbb{G}$ e per ogni funzione liscia $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Chiameremo algebra di Lie di $\mathbb{G}$ l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$ e la indicheremo con $\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G})$. È immediato notare che tale insieme è una sottoalgebra di Lie dell'algebra dei campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$ e si può dimostrare che la dimensione di tale sottoalgebra è N.

Una base per l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ è data dagli N campi vettoriali nella seguente proposizione: essa verrà chiamata *base Jacobiana.*

Proposizione 1.4. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo. Per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$ esiste un unico campo vettoriale Z_j, invariante a sinistra su $\mathbb{G}$, tale da verificare le seguenti condizioni equivalenti:*

- *$Z_j I(x)$ è il j-esimo vettore colonna della matrice Jacobiana della traslazione sinistra di ampiezza x valutata nell'elemento neutro;*
- *$(Z_j\varphi)(0) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0)$ per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$;*
- *per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ si ha $(Z_j\varphi)(x) = \dfrac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{y=0} \big(\varphi(x \circ y)\big)$ per ogni $x \in \mathbb{G}$;*
- *$Z_j I(0) = e_j$, ove e_j indica il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^N$;*
- *per ogni $x \in \mathbb{G}$ si ha $(Z_j\varphi)(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi(x \circ (te_j))$ per ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.*

Osservando che, dato $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$, esso induce una famiglia di automorfismi su $\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G})$ (che verranno chiamate anch'esse δ_λ-dilatazioni), siamo portati a dare una definizione di δ_λ-omogeneità anche per campi vettoriali.

Un operatore differenziale lineare non identicamente nullo X si dice δ_λ-*omogeneo* di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\lambda > 0$

$$X(\varphi(\delta_\lambda(x))) = \lambda^\alpha (X\varphi)(\delta_\lambda(x)).$$

È praticamente immediato osservare che, conservando la notazione precedente, data una funzione a liscia e omogenea di grado m, Xa è una funzione δ_λ-omogenea di grado $m - \alpha$. Grazie a questo fatto, si giunge quindi a dimostrare la seguente proposizione:

Teorema 1.5. *Sia* $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ *una famiglia di dilatazioni e sia* X *un campo vettoriale liscio non identicamente nullo come in* (1.3)*. Allora* X *è* δ_λ*-omogeneo di grado* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se e solo se ogni* a_j *è una funzione polinomiale* δ_λ*-omogenea di grado* $\sigma_j - \alpha$ *(oppure* $a_j \equiv 0$*).*

Ciò comporta che ogni campo vettoriale non nullo non può avere grado di omogeneità superiore a σ_N. Se osserviamo inoltre che il commutatore di due campi vettoriali δ_λ-omogenei è ancora un campo vettoriale δ_λ-omogeneo (il cui grado di omogeneità è la somma dei gradi di omogeneità dei campi vettoriali di partenza) e che ogni elemento della base Jacobiana è δ_λ-omogeneo di grado σ_j, si ha:

Proposizione 1.6. *Sia* $\mathbb{G}$ *gruppo di Lie su* $\mathbb{R}^N$ *omogeneo e sia* $\mathfrak{g}$ *la sua algebra di Lie. Allora* $\mathfrak{g}$ *è nilpotente.*

È inoltre di gran rilievo il fatto che i campi vettoriali invarianti a sinistra su $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ siano completi: possiamo quindi definire la *mappa esponenziale*

$$\operatorname{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}, \qquad \operatorname{Exp}(X) = \gamma(1),$$

ove $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ e γ è la soluzione del seguente problema di Cauchy associato a X:

$$\begin{cases} \dot{\gamma(t)} = XI(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = 0. \end{cases}$$

Dalla Proposizione 1.4 e dal Teorema 1.3 si deduce che i campi vettoriali della cosiddetta base Jacobiana sono del tipo

$$Z_j = \begin{cases} \partial_{x_j} + \displaystyle\sum_{i=j+1}^{N} a_i^{(j)}(x_1, \dots, x_{i-1})\, \partial_{x_i} & \text{se } j = 1, \dots, N-1, \\ \partial_{x_N} & \text{se } j = N, \end{cases}$$

ove gli $a_i^{(j)}$ sono funzioni polinomiali per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$ definite ogniqualvolta $i > j$.

La mappa esponenziale sarà dunque, nelle notazioni precedenti, della forma

$$\mathrm{Exp}\,(\xi_1 Z_1 + \dots \xi_N Z_N) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + B_2(\xi_1) \\ \vdots \\ \xi_N + B_N(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}) \end{pmatrix},$$

ove $B_2, \dots, B_N$ sono funzioni polinomiali.

Da ciò si ricava che l'inversa della mappa esponenziale (detta *mappa logaritmica*) esiste ed è anch'essa un diffeomorfismo definito globalmente avente funzioni polinomiali come componenti[2]. In particolare si vede che

$$\mathrm{Log}\,(x) = x_1 Z_1 + \big(\xi_2 + C_2(\xi_1)\big) Z_2 + \dots + \big(\xi_N + C_N(\xi_1, \dots, \xi_{N-1})\big) Z_N,$$

ove $C_2, \dots, C_N$ sono funzioni polinomiali.

Viste le proprietà di Exp e Log possiamo definire

$$\diamond : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \qquad X \diamond Y = \mathrm{Log}\,(\mathrm{Exp}\,(X) \circ \mathrm{Exp}\,(Y)). \tag{1.4}$$

Si verifica facilmente che $\diamond$ induce una struttura di gruppo di Lie omogeneo su $\mathfrak{g}$ e che tale gruppo è isomorfo a $\mathbb{G}$.

Si può dimostrare che una espressione esplicita di $\diamond$ è data dalla seguente formula "universale", nota come formula di Baker–Campbell–Hausdorff[3] (per una dimostrazione si veda [9, p. 42])

$$\begin{aligned} X \diamond Y = & \sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ & \times \sum_{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k) \neq (0,0)} \frac{(\mathrm{ad}\,X)^{i_1}(\mathrm{ad}\,Y)^{j_1} \cdots (\mathrm{ad}\,X)^{i_k}(\mathrm{ad}\,Y)^{j_k-1}(Y)}{(i_1 + j_1 + \dots + i_k + j_k) \cdot i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!} \end{aligned} \tag{1.5}$$

essendo l'espressione di destra ben definita a causa della nilpotenza di $\mathfrak{g}$ (è una somma finita).

[2] Abbiamo identificato $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^N$ grazie alla mappa $X \mapsto XI(0)$.

[3] Ci serviamo della notazione $(\mathrm{ad}\,A)B = [A, B]$. Di più se $j_k = 0$ il termine nella sommatoria sarà, per convenzione, $\cdots (\mathrm{ad}\,X)^{i_{k-1}}(\mathrm{ad}\,Y)^{j_{k-1}}(\mathrm{ad}\,X)^{i_k - 1}X$.

Per vedere come questo risultato giustifichi il nostro studio sui gruppi di Lie omogenei su $\mathbb{R}^N$, introduciamo ora la nozione di gruppo di Carnot omogeneo e di gruppo di Lie stratificato.

1.2 Gruppi di Carnot omogenei e sub-Laplaciani

Definizione 1.7 (Gruppo di Carnot omogeneo). *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *un gruppo di Lie su* $\mathbb{R}^N$ *omogeneo in cui la famiglia di dilatazioni* δ_λ *è della forma*

$$\delta_\lambda(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}) := (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \dots, \lambda^r x^{(r)}),$$

dove $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$ *e* $N_1 + \dots + N_r = N$. *Per* $i = 1, \dots, N_1$, *sia* Z_i *l'unico campo vettoriale della base Jacobiana associata a* $\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G})$. *Se vale la seguente ipotesi*

(C.1) *l'algebra di Lie generata da* $Z_1, \dots, Z_{N_1}$ *è* $\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G})$,

allora la terna $(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *si dice gruppo di Carnot omogeneo.*

Definizione 1.8 (Gruppo di Lie stratificato). *Un gruppo di Lie stratificato (o gruppo di Carnot)* $\mathbb{F}$ *è un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso tale per cui la sua algebra di Lie è stratificata, i.e. ha una decomposizione in somma diretta*

$$\mathrm{Lie}\,(\mathbb{F}) = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r \quad \textit{con} \quad \begin{cases} [V_1, V_{i-1}] = V_i & \textit{se } 2 \le i \le r, \\ [V_1, V_r] = \{0\}. \end{cases}$$

Il risultato fondamentale che motiva lo studio dei gruppi di Lie omogenei su $\mathbb{R}^N$ è il seguente teorema (per la cui dimostrazione, che non riporteremo, si fa largo uso della formula (1.5)):

Teorema 1.9. *Un gruppo di Lie è stratificato se e solo se è isomorfo ad un gruppo di Carnot omogeneo.*

Definizione 1.10. *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$ *un gruppo di Carnot omogeneo e siano* $Z_1, \dots, Z_{N_1}$ *come nella Definizione 1.7. Data una base* $Y_1, \dots, Y_{N_1}$ *di* $\mathrm{span}\{Z_1, \dots, Z_{N_1}\}$ *si dice sub-Laplaciano l'operatore differenziale del secondo ordine della forma*

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2,$$

mentre $(Y_1, \dots, Y_{N_1})$ *sarà detto* $\mathcal{L}$*-gradiente orizzontale.*

Se $Y_1 = Z_1, \dots, Y_{N_1} = Z_{N_1}$ *allora parleremo rispettivamente di sub-Laplaciano canonico e di* $\mathbb{G}$*-gradiente canonico.*

Riportiamo ora alcune proprietà dei sub-Laplaciani su un gruppo di Carnot omogeneo.

Proposizione 1.11. *Sia* $\mathbb{G}$ *un gruppo di Carnot omogeneo e consideriamo un suo sub-Laplaciano* $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} Y_j^2$*, come nella Definizione 1.10. Allora:*

- $\mathcal{L}$ *è un operatore differenziale del secondo ordine in forma di divergenza con coefficienti polinomiali: si ha infatti*

  $$\mathcal{L} = \mathrm{div}\,(A(x)\nabla),$$

  dove div *denota l'operatore di divergenza in* $\mathbb{R}^N$, $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_N)^T$, A *è la matrice simmetrica* $N \times N$ *simmetrica e*

  $$A(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T, \tag{1.6}$$

  ove $\sigma(x)$ *è la matrice* $N \times N_1$ *le cui colonne sono* $Y_1(x), \dots, Y_{N_1}(x)$*;*

- $\mathcal{L}$ *è ipoellittico, invariante rispetto alle traslazioni sinistre su* $\mathbb{G}$ *e* δ_λ*-omogeneo di grado 2;*

- *La forma caratteristica di* $\mathcal{L}$ *è semidefinita positiva. Se il passo di nilpotenza di* $\mathbb{G}$ *è 1 allora* $\mathcal{L}$ *è un operatore ellittico con coefficienti costanti, mentre se è maggiore di 1 allora* $\mathcal{L}$ *non è ellittico in alcun punto di* $\mathbb{G}$*.*

Ci concentreremo ora sui gruppi di Carnot di passo 2.

Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Poniamo $\mathbb{R}^N := \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e denotiamo i punti come $z = (x, t)$, con $x \in \mathbb{R}^m$ e $t \in \mathbb{R}^n$. Data una n-upla di matrici $B^{(1)}, \ldots, B^{(n)}$ con coefficienti reali, poniamo

$$(x,t) \circ (\xi, \tau) = \left(x + \xi, t + \tau + \frac{1}{2}\langle Bx, \xi \rangle \right), \tag{1.7}$$

ove $\langle Bx, \xi \rangle$ denota la n-upla $\big(\langle B^{(1)}x, \xi \rangle, \ldots, \langle B^{(n)}x, \xi \rangle \big)$.

Si può facilmente verificare che la famiglia di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda > 0}$, ove

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad \delta_\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t),$$

munisce il gruppo $(\mathbb{R}^N, \circ)$ della struttura di gruppo di Lie omogeneo su $\mathbb{R}^N$.

Di più, se poniamo

$$B_{i,j} := \begin{pmatrix} b_{i,j}^{(1)} \\ \vdots \\ b_{i,j}^{(n)} \end{pmatrix},$$

ove, per ogni $i, j = 1, \ldots, m$ e per ogni $k = 1, \ldots, n$, $b_{i,j}^{(k)}$ è il coefficiente della matrice $B^{(k)}$ di posto (i, j), allora grazie ai risultati che abbiamo esposto in precedenza, la mappa esponenziale e la mappa logaritmica hanno la forma:

$$\operatorname{Exp}\left((\xi, \tau) \cdot Z \right) = \left(\xi, \tau + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{m} B_{i,j} \xi_i \xi_j \right), \tag{1.8}$$

$$\operatorname{Log}(x,t) = \left(x, t - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{m} B_{i,j} x_i x_j \right) \cdot Z, \tag{1.9}$$

ove $Z = (Z_1, \ldots, Z_N)$ e $Z_1, \ldots, Z_N$ sono i vettori della base Jacobiana dell'algebra di Lie del gruppo in esame.

Osserviamo esplicitamente che, in virtù dei risultati citati in precedenza, trovandoci di fronte a gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogenei di passo 2, la legge di composizione deve essere necessariamente come in (1.7).

È a questo punto naturale chiedersi quando tale gruppo omogeneo sia un gruppo di Carnot omogeneo. Orbene si ha il seguente risultato:

Teorema 1.12 (Caratterizzazione dei gruppi di Carnot omogenei di passo 2)**.** *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^{m+n}, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo rispetto alle dilatazioni*

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}, \qquad \delta_\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t).$$

e in cui la legge di composizione è del tipo

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = \left(x+\xi, t_1+\tau_1+\frac{1}{2}\langle B^{(1)}x,\xi\rangle, \dots, t_n+\tau_n+\frac{1}{2}\langle B^{(n)}x,\xi\rangle \right),$$

ove $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ sono matrici $m \times m$ a coefficienti reali. Allora $\mathbb{G}$ è un gruppo di Carnot omogeneo se e solo se le matrici

$$\frac{1}{2}\big(B^{(i)} - (B^{(i)})^T\big) \qquad i = 1, \dots, n$$

sono linearmente indipendenti.

Forniamo ora un esempio importante di gruppi di Carnot di passo 2. Sia $n := m(m-1)/2$ e siano $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Definiamo come $S^{(i,j)}$ con $i > j$ le n matrici antisimmetriche i cui coefficienti sono -1 in posizione (i,j), $+1$ in posizione (j,i) e 0 altrove. $\mathbb{R}^{m+n}$, munito della legge di gruppo definita come in (1.7) dalle n matrici descritte pocanzi, sarà detto gruppo *libero* di Carnot di passo 2 ed m generatori.

1.3 Generalizzazioni del gruppo di Heisenberg–Weyl

Prima di iniziare la descrizione dei gruppi di tipo H, richiamiamo la definizione del gruppo di Heisenberg–Weyl su $\mathbb{R}^{2n+1}$. Esso non è altro che $\mathbb{H}^n := (\mathbb{R}^{2n+1}, \circ, \delta_\lambda)$ in cui la legge di gruppo è definita come in (1.7), dove

$$B = B^{(1)} = 4 \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_k \\ -\mathbb{I}_k & 0 \end{pmatrix},$$

per cui la base Jacobiana sarà formata da $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, T$, dove

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t, \qquad Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t, \qquad j = 1, \dots, n, \qquad T = \partial_t.$$

Notiamo infine che, essendo $B^{(1)}$ antisimmetrica, grazie a (1.8) si avrà che la mappa esponenziale agisce come l'identità (una volta identificata Lie $(\mathbb{H}^n)$ con $\mathbb{R}^{2n+1}$ grazie a $X \mapsto XI(0)$). Ricordiamo infine che il Laplaciano canonico sul gruppo di Heisenberg–Weyl, $\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{j=1}^n \left(X_j^2 + Y_j^2\right)$, è noto in letteratura come Laplaciano di Kohn.

Definizione 1.13 (Algebra di tipo H, gruppo di tipo H)**.** *Un'algebra di tipo Heisenberg (o di tipo H, per brevità) è un algebra di Lie finito dimensionale che può essere munita di un prodotto interno* $\langle\ ,\ \rangle$ *tale per cui*

$$[\mathfrak{z}^\perp, \mathfrak{z}^\perp] = \mathfrak{z},$$

dove $\mathfrak{z}$ *è il centro di* $\mathfrak{g}$ *e, di più, per ogni* $z \in \mathfrak{z}$ *la mappa* $J_z : \mathfrak{z}^\perp \to \mathfrak{z}^\perp$*, definita da*

$$\langle J_z(v), w\rangle = \langle z, [v, w]\rangle \quad \forall\, w \in \mathfrak{z}^\perp, \tag{1.10}$$

è ortogonale ogniqualvolta $\langle z, z\rangle = 1$*.*

Un gruppo di Lie di tipo Heisenberg (di tipo H, brevemente) è un gruppo di Lie connesso, semplicemente connesso la cui algebra di Lie è di tipo H.

Come è naturale aspettarsi, si può mostare che il gruppo di Heisenberg–Weyl è un gruppo di tipo H.

È poi facile vedere che, mantenendo le notazioni come nella definizione precedente, valgono numerose identità, tra cui:

$$\langle J_z(v), v\rangle = 0, \tag{1.11a}$$
$$\langle J_z(v), v'\rangle = -\langle v, J_z(v')\rangle, \tag{1.11b}$$
$$|J_z(v)| = |z| \cdot |v|, \tag{1.11c}$$
$$\langle J_z(v), J_{z'}(v)\rangle = \langle z, z'\rangle \cdot |v|^2, \tag{1.11d}$$
$$[v, J_z(v)] = |v|^2 \cdot z \tag{1.11e}$$

per ogni $z, z' \in \mathfrak{z}$ e per ogni $v, v' \in \mathfrak{z}^\perp$.

Si osserva facilmente che un'algebra di tipo H è un'algebra di Lie nilpotente di passo 2; di più, un gruppo di Lie di tipo H è un gruppo di Carnot di passo 2. Notiamo infine che la proprietà di essere un'algebra di Lie (rispettivamente, un gruppo di Lie) di tipo H si conserva attraverso isomorfismi di algebre di Lie (rispettivamente, di gruppi di Lie).

Quest'ultimo fatto ci permette di passare da una definizione piuttosto astratta ad una più concreta. Introduciamo perciò la seguente definizione:

Definizione 1.14 (Prototipo di gruppo di tipo H). *Consideriamo il gruppo di Lie omogeneo*

$$\mathbb{H} = (\mathbb{R}^{m+n}, \circ, \delta_\lambda)$$

con legge di composizione come in (1.7). *Assumiamo inoltre che le matrici* $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ *abbiano le seguenti proprietà:*

1. $B^{(j)}$ *è una matrice* $m \times m$ *antisimmetrica ed ortogonale per ogni* $j \le n$*;*

2. $B^{(i)}B^{(j)} + B^{(j)}B^{(i)} = 0$ *per ogni* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *ove* $i \neq j$*.*

Se tutte queste condizioni sono soddisfatte, $\mathbb{H}$ *sarà detto prototipo di un gruppo di tipo H.*

Possiamo quindi dimostrare quanto segue:

Proposizione 1.15 (Caratterizzazione dei gruppi di tipo H). $\mathbb{G}$ *è un gruppo di tipo H se e solo se è isomorfo ad un prototipo di gruppo di tipo H, come nella Definizione 1.14.*

Dimostrazione. Proviamo anzitutto la necessità. Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di tipo H la cui algebra di Lie è $\mathfrak{g}$ e il cui centro è $\mathfrak{z}$. Siano $P_1, \dots, P_m$ e $Z_1, \dots, Z_n$, rispettivamente, basi ortonormali per $\mathfrak{z}^\perp$ e $\mathfrak{z}$. L'ipotesi $[\mathfrak{z}^\perp, \mathfrak{z}^\perp] = \mathfrak{z}$ assicura che esistono scalari $B_{i,j}^{(s)}$ tali che

$$[P_i, P_j] = \sum_{s=1}^{n} B_{i,j}^{(s)} Z_s, \qquad \forall\, i, j \in \{1, \dots, m\}. \tag{1.12}$$

Con la notazione in (1.12), definiamo le seguenti matrici quadrate

$$B^{(s)} := \left(B_{i,j}^{(s)}\right)_{i,j \le m}, \qquad s = 1 \dots, n. \tag{1.13}$$

Ricordiamo ora che il gruppo $(\mathbb{G}, \circ)$ è canonicamente isomorfo a $(\mathrm{Lie}\,(\mathbb{G}), \diamond)$. Come conseguenza, per mezzo della base data da su $\mathfrak{g}$, possiamo identificare $\mathbb{G}$ con $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{m+n}$ con la legge di gruppo (1.7) dove le matrici $B^{(j)}$ sono come in (1.13). Fissiamo $v = \sum_{i=1}^m v_i P_i$ e $z = \sum_{i=1}^n z_i Z_i$. Cerchiamo $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ tali che $J_z(v) = \sum_{i=1}^m x_i P_i$ soddisfi la condizione (1.10) della Definizone 1.13 per ogni $w = \sum_{i=1}^m w_i P_i$. Nello specifico,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m x_j w_j &= \left\langle \sum_{i=1}^m x_i P_i, \sum_{i=1}^m w_i P_i \right\rangle = \langle J_z(v), w \rangle = \langle z, [v, w] \rangle \\
&= \left\langle \sum_{r=1}^n z_r Z_r, \left[\sum_{i=1}^m v_i P_i, \sum_{i=1}^m w_i P_i \right] \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{r=1}^n z_r Z_r, \sum_{i,j=1}^m v_i w_j [P_i, P_j] \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{r=1}^n z_i Z_i, \sum_{i,j=1}^m v_i w_j \sum_{s=1}^n B_{i,j}^{(s)} Z_s \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{r,s=1}^n \sum_{i=1}^m v_i B_{i,j}^{(s)} z_r \langle Z_r, Z_s \rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^m v_i B_{i,j}^{(s)} z_s \right).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Per l'arbitrarietà di w, si ha

$$x_j = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^m v_i B_{i,j}^{(s)} z_s,$$

da cui segue

$$J_z : \mathfrak{z}^\perp \to \mathfrak{z}^\perp, \qquad \sum_{j=1}^m v_j P_j \mapsto \sum_{j=1}^m \left(\sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^m v_i B_{i,j}^{(s)} z_s \right) P_j.$$

Di conseguenza, rispetto alla base ortonormale $P_1, \dots, P_n$ di $\mathfrak{z}^\perp$, la matrice di rappresentazione dell'endomorfismo J_z è

$$\sum_{s=1}^n z_s \begin{pmatrix} B_{1,1}^{(s)} & \dots & B_{m,1}^{(s)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,m}^{(s)} & \dots & B_{m,m}^{(s)} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n z_s (B^{(s)})^T.$$

Essendo $\mathfrak{g}$ di tipo H, questa matrice è necessariamente ortogonale ogniqualvolta $\sum_{s=1}^{n}(z_s)^2 = 1$ (è infatti evidente che una matrice è ortogonale se e solo se lo è la sua trasposta). In particolare, ciò implica che ogni $B^{(s)}$ è ortogonale (per cui la proprieà (1) dell'enunciato è provata). Denotando con $\mathbb{I}_m$ la matrice identità di ordine m, abbiamo

$$-B^{(s)}B^{(s)} = \mathbb{I}_m \quad \text{per ogni } s = 1, \dots, n.$$

Di più, se $\sum_{s=1}^{n}(z_s)^2 = 1$, la matrice $\sum_{s=1}^{n} z_s B^{(s)}$ è ortogonale se e solo se

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_m &= \left(\sum_{s=1}^{n} z_s B^{(s)}\right) \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} z_s B^{(s)}\right)^T = -\sum_{r,s\le n} z_r z_s B^{(r)} B^{(s)} \\
&= -\sum_{r\le n} z_r^2 B^{(r)} B^{(r)} - \sum_{r,s\le n,\ r\ne s} z_r z_s B^{(r)} B^{(s)} \\
&= \mathbb{I}_m - \sum_{r,s\le n,\ r\ne s} z_r z_s B^{(r)} B^{(s)}.
\end{aligned}$$

Infatti, essendo le matrici $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ antisimmetriche e ortogonali, si ha

$$-\big(B^{(s)}\big)^2 = B^{(s)} \cdot \big(-B^{(s)}\big) = B^{(s)}\big(B^{(s)}\big)^T = \mathbb{I}_m. \tag{1.15}$$

Di conseguenza, ne viene

$$\sum_{r,s\le n,\ r\ne s} z_r z_s B^{(r)} B^{(s)} = 0 \qquad \forall\, z_1, \dots, z_n : \qquad \sum_{s=1}^{n} z_s^2 = 1. \tag{1.16}$$

Se in (1.16) si prende $z = (0, \dots, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{2}, \dots, 0)$, ottieniamo

$$B^{(i)}B^{(j)} + B^{(j)}B^{(i)} = 0 \qquad \text{per ogni } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ con } i \ne j.$$

In conclusione, le proprietà (1) e (2) della Definizione 1.14 sono dimostrate.

Dimostriamo ora la sufficienza. Siano $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ le matrici che godono delle proprietà (1) e (2) della Definizione 1.14. Supponiamo che $\mathbb{R}^{m+n}$ sia munito della legge di composizione (1.7). È immediato verificare che $\circ$ definisce un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ omogeneo rispetto alle dilatazioni $\delta_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda^2 t)$, nilpotente di passo 2, in cui l'inverso di (x,t) è $(-x,-t)$, a causa dell'antisimmetria di $B^{(1)},\dots,B^{(n)}$. Di più è un gruppo di Carnot: per il Teorema 1.12, dati i campi vettoriali

$$X_j = (\partial/\partial x_j) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} B_{j,i}^{(s)} x_i\right)(\partial/\partial t_s), \qquad j = 1,\dots,m, \tag{1.17}$$

si ha che

$$\text{span}\{X_1,\dots,X_m,\} = \mathfrak{g}, \tag{1.18}$$

poiché $B^{(1)},\dots,B^{(n)}$ sono linearmente indipendenti, come si desume immediatamente dal fatto che, per ogni $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i B^{(i)}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j B^{(j)}\right)^T &\overset{(1)}{=} -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\left(B^{(i)}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j B^{(i)}B^{(j)}\\
&= -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\mathbb{I}_m - \sum_{r,s\le n,\, r>s}\alpha_i\alpha_j B^{(i)}B^{(j)}\\
&\quad - \sum_{r,s\le n,\, r<s}\alpha_i\alpha_j B^{(i)}B^{(j)}\\
&\overset{(2)}{=} -\sum_{i}\alpha_i^2\mathbb{I}_m.
\end{aligned}$$

Da (1.17) e dall'antisimmetria di $B^{(1)},\dots,B^{(n)}$, otteniamo

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=1}^{n} B_{j,i}^{(s)}(\partial/\partial t_s),$$

per ogni $i,j \in \{1,\dots,m\}$. Posto $Z_s = \partial/\partial t_s$, per ogni $s = 1,\dots,n$, mostriamo che $\mathfrak{z}$, il centro di $\mathfrak{g}$, è generato da $Z_1,\dots,Z_n$. Infatti, supponendo per assurdo che esistano $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i \in \mathfrak{z}$, ne conseguirebbe

$$0 = \left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i X_i, X_j\right] = \sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i B_{j,i}^{(s)} Z_s \quad \text{per ogni } j \in \{1,\dots,m\}.$$

Poiché $Z_1,\dots,Z_n$ sono linearmente indipendenti, ciò comporta che

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i B_{j,i}^{(s)} = 0.$$

per ogni $j \leq m$ e per ogni $s \leq n$. In particolare, le colonne della matrice $B^{(1)}$ sono linearmente dipendenti, contro l'ipotesi che che $B^{(1)}$ sia invertibile. Infine, ponendo $\langle\, , \rangle$ il prodotto standard su $\mathfrak{g}$ rispetto alla base

$$X_1, \ldots, X_m, \quad Z_1, \ldots, Z_n.$$

Per quanto provato pocanzi, si ha $\mathfrak{z}^\perp = \mathrm{span}\{X_1, \ldots, X_m\}$ e

$$\left[z^\perp, z^\perp\right] = \mathrm{span}\left\{Z_1, \ldots, Z_n\right\} = \mathfrak{z}.$$

Non resta altro che studiare J_z, definita come in (1.10) (osserviamo che stiamo facendo perlopiù una verifica analoga a quanto si è visto in (1.14)). Infatti, per un fissato $z = \sum_{j=1}^n z_j Z_j$, ponendo

$$v := \sum_{i=1}^m v_i X_i, \qquad w := \sum_{i=1}^m w_i X_i,$$

risulta

$$\begin{aligned}
\langle z, [v, w]\rangle &= \left\langle \sum_{r=1}^n z_r Z_r, \left[\sum_{i=1}^m v_i X_i, \sum_{j=1}^m w_j X_j\right]\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{r=1}^n z_r Z_r, \sum_{i,j=1}^m v_i w_j [X_i, X_j]\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{r=1}^n z_r Z_r, \sum_{i,j=1}^m v_i w_j \sum_{s=1}^n B_{j,i}^{(s)} Z_s\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{r,s=1}^n \sum_{i=1}^m v_i B_{j,i}^{(s)} z_r \langle Z_r, Z_s\rangle\right) \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{r,s=1}^n \sum_{i=1}^m v_i B_{j,i}^{(s)} z_r\right).
\end{aligned}$$

Di conseguenza, secondo la definizione di $\langle\, , \rangle$, ponendo

$$J_z(v) := \sum_{j=1}^m x_j X_j$$

con

$$x_j = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m v_i B_{j,i}^{(r)} z_r,$$

si ha

$$\langle J_z(v), w\rangle = \langle z, [v,w]\rangle,$$

per ogni $w = \sum_{i=1}^m w_i X_i$. Sulla falsariga dei conti fatti in precedenza, si vede che se $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ sono matrici ortogonali che soddisfano

$$B^{(i)}B^{(j)} + B^{(j)}B^{(i)} = 0,$$

per ogni $r, s \in \{1, \dots, n\}$ con $r \neq s$, cosicché la mappa

$$\sum_{j=1}^m v_j X_j \mapsto J_z(v)$$

definisce un endomorfismo ortogonale su $\mathrm{span}\{X_1, \dots, X_m\}$ per ogni scelta di $z = \sum_{j=1}^n z_j Z_j$ tale per cui $\sum_{s=1}^n (z_s)^2 = 1$. Ciò completa la prova. $\square$

Sull'esistenza dei gruppi di tipo H al variare della dimensione dell'algebra del gruppo e del suo centro, si ha il seguente risultato:

Proposizione 1.16. *Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Allora esiste un gruppo di tipo H di dimensione $m+n$ il cui centro ha dimensione n se e solo se $n < \rho(m)$, dove ρ è la funzione di Radon–Hurwitz*[4].

Ciò implica, in particolare, che non esistono agebre di tipo H il cui centro abbia codimensione dispari.

Tornando momentaneamente allo studio dei gruppi di Carnot omogenei di passo 2 e mantenendo le notazioni del Teorema 1.12, notiamo che, da un calcolo diretto, il sub-Laplaciano canonico di un gruppo di Carnot omogeneo

[4]Ricordiamo che la funzione di Radon-Hurwitz di un numero naturale m, in algebra lineare, indica la dimensione massima di un sottospazio lineare delle matrici $m \times m$, per cui ogni matrice non nulla è il prodotto di una matrice ortogonale ed una matrice scalare: essa si può definire come

$$\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \rho(m) := 8p + q \quad \text{dove } m = (\text{numero dispari}) \cdot 2^{4p+q}, \quad 0 \leq q \leq 3.$$

di passo 2 è

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{G}} =&\Delta_x + \frac{1}{4}\sum_{h,k=1}^{n} \langle B^{(h)}x, B^{(k)}x\rangle \partial_{t_h t_k} \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \langle B^{(k)}x, \nabla_x\rangle \partial_{t_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{tr}\big(B^{(k)}\big)\partial_{t_k}.\end{aligned}$$

Di conseguenza, nel caso di un prototipo di un gruppo di tipo H:

$$\Delta_{\mathbb{G}} = \Delta_x + \frac{1}{4}|x|^2\Delta_t + \sum_{k=1}^{n} \langle B^{(k)}x, \nabla_x\rangle \partial_{t_k}.$$

Ci apprestiamo ora ad enunciare e a dimostrare un notevole risultato dovuto a Kaplan (si veda [7]), avviandoci verso la conclusione del nostro elaborato.

Teorema 1.17. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di tipo H come nella Definizione 1.13. Sia $X_1, \dots, X_{N_1}$ una base ortogonale di $\mathfrak{z}^{\perp}$, sia $Z_1, \dots, Z_{N_2}$ una base ortonormale di $\mathfrak{z}$ e sia $\mathcal{L}$ il sub-Laplaciano*

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N_1} X_j^2.$$

Introdotte su $\mathbb{G}$ le funzioni

$$\begin{aligned} v : \mathbb{G} \to \mathfrak{z}^{\perp}, &\qquad v(x) := \sum_{j=1}^{N_1} \langle \mathrm{Log}\,(x), X_j\rangle X_j \\ z : \mathbb{G} \to \mathfrak{z}, &\qquad z(x) := \sum_{j=1}^{N_2} \langle \mathrm{Log}\,(x), Z_j\rangle Z_j, \end{aligned}$$

allora v e z godono della seguente proprietà:

$$\forall\, x \in \mathbb{G}, \quad x = \mathrm{Exp}\,(v(x) + z(x)), \quad v(x) \in \mathfrak{z}^{\perp}, \quad z(x) \in \mathfrak{z}. \tag{1.19}$$

Di più, esiste una costante positiva c tale per cui la funzione

$$\Gamma(x) := c \cdot \Big\{ |v(x)|^4 + 16|z(x)|^2 \Big\}^{(2-Q)/4}$$

è la soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$ (con polo nell'origine).

Dimostrazione. È immediato verificare la validità dell'identità (1.19) servendosi della definizione di v e z e del fatto che $X_1, \ldots, X_{N_1}, Z_1, \ldots, Z_{N_2}$ formano una base ortonormale di $\mathfrak{z}^\perp$. Dati $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{G}$, poniamo

$$\Gamma_\varepsilon(x) = c\left\{(|v(x)|^2 + \varepsilon^2)^2 + 16|z(x)|^2\right\}^{(2-Q)/4},$$

dove c è una costante che verrà determinata in seguito. Osservando che Exp e Log funzioni analitiche[5], si ha che Γ_ε è anch'essa una funzione analitica e che Γ è analitica su $\mathbb{G} \setminus \{0\}$. Dalla definizione di mappa esponenziale, abbiamo[6]

$$\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)(x) = \sum_{j=1}^{N_1} X_j^2(\Gamma_\varepsilon)(x) = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\Big|_{t=0} \Gamma_\varepsilon(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j)).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{G}$. Per esplicitare $\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)(x)$ dobbiamo quindi calcolare le prime due derivate della funzione

$$\phi_j(t) = \big(|v(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j))|^2 + \varepsilon^2\big)^2 + 16|z(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j))|^2, \qquad j = 1, \ldots, N_1.$$

Dopo aver osservato che

$$\phi_j(0) = \big(|v(x)|^2 + \varepsilon^2\big)^2 + 16|z(x)|^2$$

non dipende da j, poniamo $\phi(0) := \phi_j(0)$. Ponendo $k := (Q-2)/4$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)(x) &= \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2\Big|_{t=0} c(\phi_j(t))^{-k} = c\sum_{j=1}^{N_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (-k\phi_j(t)^{-k-1}\phi_j'(t)) \\
&= c\,k(k+1)\sum_{j=1}^{N_1} \phi_j(0)^{-k-2}(\phi_j'(0))^2 - c\,k\sum_{j=1}^{N_1} \phi_j(0)^{-k-1}\phi_j''(0) \\
&= c\,k\,\phi(0)^{-k-2}\bigg((k+1)\sum_{j=1}^{N_1}(\phi_j'(0))^2 - \phi(0)\sum_{j=1}^{N_1}\phi_j''(0)\bigg).
\end{aligned}$$

---

[5] Identifichiamo $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R}^N$ tramite $X \mapsto XI(0)$

[6] Non è difficile mostrare infatti, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ che

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(\mathrm{Exp}\,(tX)) = X^k f(\mathrm{Exp}\,(tX)),$$

per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Fissiamo ora $j = 1, \dots, N_1$ e $t \in \mathbb{R}$. Servendoci della formula di Campbell–Baker–Hausdorff

$$\mathrm{Exp}\,(A) \circ \mathrm{Exp}\,(B) = \mathrm{Exp}\,\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right) \qquad \forall\, A, B \in \mathrm{Lie}\,(\mathbb{G}), \quad (1.20)$$

valida per il gruppo $\mathbb{G}$ di passo 2, cerchiamo espressioni più semplici per

$$v(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j)) \quad \text{e per} \quad z(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j)).$$

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Exp}\,\big(v(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j)) + z(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j))\big) \\
&\quad \overset{(1.19)}{=} x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j) \\
&\quad = \mathrm{Exp}\,(\mathrm{Log}\,(x)) \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j) \\
&\quad \overset{(1.20)}{=} \mathrm{Exp}\,\left(\mathrm{Log}\,(x) + tX_j + \frac{t}{2}[\mathrm{Log}\,(x), X_j]\right) \\
&\quad \overset{(1.19)}{=} \mathrm{Exp}\,\left(v(x) + tX_j + z(x) + \frac{t}{2}[v(x), X_j]\right).
\end{aligned}$$

Comparando il primo termine di questa catena di uguaglianze all'ultimo ed osservando che

$$v(x) + tX_j \in \mathfrak{z}^{\perp}, \qquad z(x) + \frac{t}{2}[v(x), X_j] \in \mathfrak{z},$$

da (1.19) si vede che

$$\begin{aligned}
v(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j)) &= v(x) + tX_j, \\
z(x \circ \mathrm{Exp}\,(tX_j)) &= z(x) + \frac{t}{2}[v(x), X_j].
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\phi_j(t) &= \big(|v(x) + tX_j|^2 + \varepsilon^2\big)^2 + 16|z(x) + \frac{t}{2}[v(x), X_j]|^2 \\
&= \big(|v(x)|^2 + t^2 + 2t\langle v(x), X_j\rangle + \varepsilon^2\big)^2 \\
&\quad + 16\left(|z(x)|^2 + \frac{t^2}{4}|[v(x), X_j]|^2 + t\langle z(x), [v(x), X_j]\rangle\right).
\end{aligned}$$

Ciò comporta che

$$\begin{aligned}
\phi_j'(t) &= 2\big(|v(x)|^2 + t^2 + 2t\langle v(x), X_j\rangle + \varepsilon^2\big)(2t + 2\langle v(x), X_j\rangle) \\
&\quad + 16\left(\frac{t}{2}|[v(x), X_j]|^2 + \langle z(x), [v(x), X_j]\rangle\right); \\
\phi_j''(0) &= 8\langle v(x), X_j\rangle^2 + 4(|v(x)|^2 + \varepsilon^2) + 8|[v(x), X_j]|^2; \\
\phi_j'(0) &= 4\big(|v(x)|^2 + \varepsilon^2\big)\langle v(x), X_j\rangle + 16\langle z(x), [v(x), X_j]\rangle \\
&= 4\big(|v(x)|^2 + \varepsilon^2\big)\langle v(x), X_j\rangle + 16\langle J_{z(x)}(v(x)), X_j\rangle \\
&= 4\langle(|v(x)|^2 + \varepsilon^2 \cdot v(x) + 4J_{z(x)}(v(x)), X_j\rangle.
\end{aligned}$$

In particolare, si ottiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_1}(\phi_j'(0))^2 &= 16\sum_{j=1}^{N_1}\langle(|v(x)|^2 + \varepsilon^2 \cdot v(x) + 4J_{z(x)}(v(x)), X_j\rangle^2 \\
&= 16|(|v(x)|^2 + \varepsilon^2 \cdot v(x) + 4J_{z(x)}(v(x))|^2 \\
&\overset{(1.11a)}{=} 16(|v(x)|^2 + \varepsilon^2)^2 \cdot |v(x)|^2 + 16^2|J_{z(x)}(v(x))|^2 \\
&\overset{(1.11c)}{=} 16|v(x)|^2\{(|v(x)|^2 + \varepsilon^2)^2 + 16|z(x)|^2\} \\
&= 16|v(x)|^2\phi(0); \\
\sum_{j=1}^{N_1}(\phi_j'(0))^2 &= 8\sum_{j=1}^{N_1}\langle v(x), X_j\rangle^2 + 4N_1(|v(x)|^2 + \varepsilon^2) + 8\sum_{j=1}^{N_1}|[v(x), X_j]|^2 \\
&= 8\sum_{j=1}^{N_1}|v(x)|^2 + 4N_1(|v(x)|^2 + \varepsilon^2) + 8\sum_{j=1}^{N_1}|[v(x), X_j]|^2.
\end{aligned}$$

Ora $[v(x), X_j] \in [\mathfrak{z}^\perp, \mathfrak{z}^\perp] = \mathfrak{z}$ e quindi si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_1}|[v(x), X_j]|^2 &= \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N_2}\langle Z_i, [v(x), X_j]\rangle^2 = \sum_{j=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{N_2}\langle J_{Z_i}(v(x)), X_j\rangle^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{N_1}\langle J_{Z_i}(v(x)), X_j\rangle^2 \overset{(1.11c)}{=} \sum_{i=1}^{N_2}|Z_i|^2|v(x)|^2 = N_2|v(x)|^2.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N_1}\phi_j''(0) &= 8|v(x)|^2 + 4N_1(|v(x)|^2 + \varepsilon^2) + 8N_2|v(x)|^2 \\
&= 16(k+1)|v(x)|^2 + 4N_1\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)(x) &= c\,k\,\phi(0)^{-k-2}\big(16(k+1)|v(x)|^2\phi(0) \\ &\qquad - 16(k+1)|v(x)|^2\phi(0) - 4N_1\varepsilon^2\phi(0)\big) \\ &= -4N_1\,c\,k\,\varepsilon^2\phi(0)^{-k-1} \\ &= -4N_1\,c\,k\,\varepsilon^2\big((|v(x)|^2+\varepsilon^2)^2 + 16|z(x)|\big)^{(-2-Q)/4}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

Per $\varepsilon = 0$ abbiamo chiaramente

$$\mathcal{L}\,\Gamma(x) = 0 \qquad \forall\, x \neq 0.$$

Di più, dal fatto che $\Gamma = c\,d^{2-Q}$ si desume immediatamente che

$$\Gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{G}).$$

Per provare l'asserto, non resta che dimostrare che $\mathcal{L}\,\Gamma = \mathrm{Dir}_0$ (Dir_0 indica la misura di Dirac nell'origine) nel senso delle distribuzioni. Osservando anzitutto che v e z sono δ_λ-omogenee rispettivamente di grado 1 e 2, si ottiene

$$\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon)(\delta_\varepsilon(x)) = \varepsilon^{-Q}\mathcal{L}(\Gamma_1)(x). \tag{1.22}$$

Osserviamo dunque che

$$\mathcal{L}(\Gamma_1)(x) = -c(Q-2)N_1\Big(\big(|v(x)|^2+1\big)^2 + 16|z(x)|\Big)^{(-2-Q)/4}$$

è una funzione C^∞ su $\mathbb{G}$ la cui norma è limitata, in un intorno dell'infinito, da una funzione δ_λ-omogenea di grado $-2-Q$. Quindi $\mathcal{L}(\Gamma_1)(x)$ è sommabile su $\mathbb{G}$ e possiamo scegliere $c > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{G}} \mathcal{L}(\Gamma_1)(x)\mathrm{d}x = -1. \tag{1.23}$$

Fissiamo ora $f \in C_0^\infty(\mathbb{G})$. Vogliamo provare che

$$\int_{\mathbb{G}} \Gamma(x)\mathcal{L}f(x)\mathrm{d}x = -f(0). \tag{1.24}$$

Dal teorema di convergenza dominata, poiché $|\Gamma_\varepsilon| \leq \Gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}$, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{G}} \Gamma_\varepsilon(x)\mathcal{L}f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{G}} \Gamma(x)\mathcal{L}f(x)\mathrm{d}x.$$

D'altro canto, poiché $\Gamma_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{G})$, f ha supporto compatto ed inoltre $\mathcal{L}$ è autoaggiunto, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{G}} \Gamma_\varepsilon(x)\mathcal{L}f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{G}} f(x)\mathcal{L}\,\Gamma_\varepsilon(x)\mathrm{d}x \\ &\quad\text{(da (1.22) tramite il cambiamento di variabile } x = \delta_\varepsilon(z)) \\ &= \int_{\mathbb{G}} f(\delta_\varepsilon z)\mathcal{L}\,\Gamma_1(z)\mathrm{d}z \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{G}} f(0)\mathcal{L}\,\Gamma_1(z)\mathrm{d}z \overset{(1.23)}{=} -f(0).\end{aligned}$$

Ciò prova (1.24) e dunque l'asserto. □

Ci preme sottolineare che, durante la dimostrazione del precedente teorema, ci si imbatte in un risultato di interesse indipendente: si è visto infatti in (1.21) che la funzione

$$x \mapsto \left\{(|v(x)|^2 + \varepsilon^2)^2 + 16|z(x)|^2\right\}^{(2-Q)/4}$$

è, a meno di una costante moltiplicativa, una soluzione della equazione differenziare semilineare

$$-\mathcal{L}u = u^{(Q+2)/(Q-2)}.$$

Concludiamo infine l'elaborato con la seguente proposizione:

Proposizione 1.18. *Nelle notazioni del teorema precedente, dato $\mathbb{G}$ un prototipo di gruppo di tipo H, si ha che la soluzione fondamentale Γ del sub-Laplaciano canonico $\Delta_{\mathbb{G}}$ è data da*

$$\Gamma(x) := c \cdot \left(|x|^4 + 16|t|^2\right)^{(2-Q)/4} \tag{1.25}$$

dove c è una opportuna costante positiva.

Dimostrazione. Siano $X_1, \dots, X_m$ definiti come in (1.17), in modo tale che $\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{j=1}^m X_j^2$, e siano $Z_i = \partial_{t_i}$, $i = 1, \dots, n$. Allora, come si è visto nella dimostrazione della Proposizione 1.15, $\{X_1, \dots, X_m, Z_1, \dots, Z_n\}$ è una base ortonormale di $\mathfrak{g}$ come nelle ipotesi del Teorema 1.17, grazie al quale, per provare l'asserto, resta solo da vedere che

$$|v(x,t)| = |x|, \qquad |z(x,t)| = |x|. \tag{1.26}$$

A tal fine, necessitiamo di conoscere la mappa esponeziale $\mathrm{Exp} : \mathrm{Lie}\,\mathbb{G} \to \mathbb{G}$. Fissato $(a,b) \in \mathbb{R}^{m+n}$, si ha

$$\mathrm{Exp}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j X_j + \sum_{i=1}^{n} b_i Z_i\right) = \gamma(1),$$

dove γ è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \gamma'(s) = \sum_{j=1}^{m} a_j X_j I(\gamma(s)) + \sum_{i=1}^{n} b_i Z_i I(\gamma(s)), \\ \gamma(0) = 0. \end{cases}$$

Ponendo $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ otteniamo

$$\begin{cases} x_j'(s) = a_j, \\ t_i'(s) = b_i + \frac{1}{2}\langle B^{(i)} x(s), a\rangle \\ x(0) = 0, \qquad t(0) = 0, \end{cases}$$

ove $j = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$. Dunque $x_j(s) = s\, a_j$ per ogni $j = 1, \dots, m$ e

$$t_i'(s) = b_i + \frac{s}{2}\langle B^{(i)} x(s), a\rangle = b_i \qquad \text{per ogni } i = 1, \dots, n,$$

a causa dell'antisimmetria di $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$. Di conseguenza $t_i(s) = s\, b_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e otteniamo

$$\mathrm{Exp}\left(\sum_{j=1}^{m} a_j X_j + \sum_{i=1}^{n} b_i Z_i\right) = \gamma(1) = (x(1), t(1)) = (a, b).$$

Ne consegue che

$$\mathrm{Log} : \mathbb{G} \to \mathrm{Lie}\,\mathbb{G}, \qquad (x,t) \mapsto \sum_{j=1}^{m} x_j X_j + \sum_{i=1}^{n} t_i Z_i,$$

e quindi valgono

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{m} x_j X_j, \qquad z(x,t) = \sum_{i=1}^{n} t_i Z_i.$$

Ciò implica (1.26) e dunque si è provato l'asserto.

$\square$

Capitolo 2

Disuguaglianza di Hardy e Principio di Indeterminazione

Per tutto il presente Capitolo, $\mathbb{H}$ sarà un gruppo di tipo H su $\mathbb{R}^N$ come nella Definizione 1.14 e $\Delta_{\mathbb{H}}$ il sub-Laplaciano canonico associato a tale gruppo. L'obiettivo dei prossimi Capitoli è dimostrare il Principio Forte di Continuazione Unica delle soluzioni dell'equazione di "tipo Schrödinger"

$$-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0, \tag{2.1}$$

dove il "potenziale" V gode di opportune proprietà che verranno specificate nella prossima sezione.

Seguendo l'approccio di Garofalo e Lanconelli, [5], sarà nostro obiettivo mostrare una formula di rappresentazione per funzioni lisce su $\mathbb{H}$ come integrali sulle sfere e sulle palle di tipo H: questo risultato, di interesse indipendente, ci porterà ad ottenere una formulazione forte del Principio di Indeterminazione di Heisenberg relativo ad $\mathbb{H}$.

2.1 Alcuni risultati estesi ai gruppi di tipo H

Abbiamo già mostrato nel Capitolo 1 il fatto che, a meno di un cambiamento di variabile lineare possiamo ricondurci ad un prototipo di gruppo di tipo H, in cui sappiamo che la base Jacobiana

$$Z_1, \dots, Z_m, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_n}$$

è formata dai campi vettoriali i cui coefficienti sono i vettori colonna di

$$\mathcal{J}_{\tau_{(x,t)}}(0,0) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0_{m\times n} \\ \frac{1}{2}B(x) & \mathbb{I}_n \end{pmatrix},$$

dove $B(x)$ è la matrice $n \times m$ della forma

$$B(x) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m b_{1,j}^{(1)} x_j & \dots & \sum_{j=1}^m b_{m,j}^{(1)} x_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m b_{1,j}^{(n)} x_j & \dots & \sum_{j=1}^m b_{m,j}^{(n)} x_j \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

con $b_{i,j}^{(k)}$ opportune costanti definite dalla legge di gruppo di $\mathbb{H}$ (per ogni $i, j \in \{1, \dots, m\}$ e $k = 1, \dots, n$). Con queste notazioni si ha

$$Z_i = \partial_{x_i} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m b_{i,j}^{(k)} x_j \right) \partial_{t_k}, \qquad (i = 1, \dots, m). \tag{2.3}$$

Si ha dunque che il sub-Laplaciano canonico $\Delta_{\mathbb{H}} = \sum_{i=1}^m Z_i^2$ è un operatore in forma di divergenza

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \operatorname{div}(A(x)\nabla), \tag{2.4}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \frac{1}{2}B(x)^T \\ \frac{1}{2}B(x) & \frac{1}{4}B(x)B(x)^T \end{pmatrix},$$

e $B(x)$ è come in (2.2). Mostriamo ora che $B(x)B(x)^T = |x|^2\mathbb{I}_n$, infatti

$$\begin{aligned} (B(x)B(x)^T)_{i,k} &= \sum_{t=1}^m \left(\left(\sum_{j=1}^m b_{t,j}^{(i)} x_j \right) \left(\sum_{l=1}^m b_{l,j}^{(k)} x_l \right) \right) \\ &= \sum_{j,l=1}^m \left(\sum_{t=1}^m b_{t,j}^{(i)} b_{t,l}^{(k)} \right) x_j x_l \\ &= -\sum_{j,l=1}^m \left(\sum_{t=1}^m b_{j,t}^{(i)} b_{t,l}^{(k)} \right) x_j x_l \\ &= -\sum_{j,l=1}^m \left(B^{(i)} B^{(k)} \right)_{j,l} x_j x_l \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ora se $i \neq k$, $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, a causa dell'antisimmetria di $B^{(i)}B^{(k)}$, si ha $(B(x)B(x)^T)_{i,k} = 0$, se invece $i = 1, \ldots, n$ si ha, grazie a (1.15), $(B(x)B(x)^T)_{i,i} = |x|^2$. Riassumendo, la matrice $A(x)$ in (2.4) è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \frac{1}{2}B(x)^T \\ \frac{1}{2}B(x) & \frac{|x|^2}{4}\mathbb{I}_n \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

con $B(x)$ come in (2.2).

Abbiamo inoltre visto che, nella ricerca della soluzione fondamentale Γ per il Laplaciano canonico di gruppi prototipo di tipo H, svolge un ruolo essenziale la funzione distanza

$$d(x,t) = \Big(|x|^4 + 16|t|^2\Big)^{\frac{1}{4}}. \tag{2.7}$$

Infatti, chiamiamo $Q = 2m + n$ la dimensione omogenea di $\mathbb{H}$ e consideriamo gli insiemi

$$\Omega_r = \{(x,t) \in \mathbb{H} \,|\, d(x,t) < r\}, \qquad \partial\Omega_r = \{(x,t) \in \mathbb{H} \,|\, d(x,t) = r\}, \tag{2.8}$$

che verranno chiamati rispettivamente *palla* e *sfera di tipo H* (oppure d-palla e d-sfera) di centro l'origine e raggio r. Definiamo inoltre, visto il rilievo che avrà in seguito, la funzione

$$\psi(x,t) := |\nabla_{\mathbb{H}} d(x,t)|^2 \qquad \text{su } \mathbb{H} \smallsetminus \{(0,0)\}, \tag{2.9}$$

dove $\nabla_{\mathbb{H}}$ è il gradiente canonico, ossia $\nabla_{\mathbb{H}} u = (Z_1 u, \ldots, Z_m u)$. Si osserva facilmente, dalla definizione di $A(x)$, che in generale vale

$$\langle \nabla_{\mathbb{H}} u, \nabla_{\mathbb{H}} v \rangle = \langle A\, \nabla u, \nabla v \rangle, \tag{2.10}$$

per ogni $u, v \in C^1(\mathbb{H})$. Inoltre, sul gruppo $\mathbb{H}$ si ha

$$|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 = |\nabla_x u|^2 + \frac{1}{4}|x|^2 |\nabla_t u|^2 + \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\sum_{i,j=1}^{m} \partial_{x_j} u\, b_{j,i}^{(k)} x_i \Bigg) \partial_{t_k} u. \tag{2.11}$$

Ricordiamo che il Laplaciano canonico di gruppo prototipo di tipo H è della forma

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \Delta_x + \frac{1}{4}|x|^2 \Delta_t + \sum_{k=1}^{n} T^{(k)} \partial_{t_k}, \tag{2.12}$$

dove $T^{(k)}$ denota il campo vettoriale

$$T^{(k)} = \langle B^{(k)}x, \nabla_x \rangle. \tag{2.13}$$

Nel seguente teorema si introduce una ipotesi sul potenziale V che ci garantisce la validità di una stima integrale per le soluzioni di

$$-\Delta_{\mathbb{H}} u + V u = 0, \tag{2.14}$$

su una d-palla Ω_{R_0} (sotto ulteriori ipotesi di crescita di u).

Nel resto del capitolo considereremo $R_0 > 0$. Dato che non ci concentreremo su questioni di regolarità delle soluzioni di (2.14), in prima istanza consideriamo solo *soluzioni classiche*,[1] ossia di classe $u \in C^2(\Omega_{R_0})$.

Teorema 2.1 (**Stima Integrale Doubling**). *Sia $R_0 > 0$ e sia u una soluzione (classica) di* (2.14) *in Ω_{R_0} che verifica le ipotesi*

$$u,\ Z_j u,\ T^{(i)}u,\ \Delta_{\mathbb{H}} u \in L^2(\Omega_{R_0}) \tag{2.15}$$

per ogni $j = 1, \dots, m$ e per ogni $i = 1, \dots, n$. Supponiamo che esista una costante $C_1 > 0$ e una funzione monotona crescente $f : (0, R_0) \to \mathbb{R}^+$ con

$$\int_0^{R_0} \frac{f(r)}{r}\, \mathrm{d}r < \infty, \tag{2.16}$$

e che valga l'ipotesi sul potenziale V seguente:

$$|V(x,t)| \le C_1 \frac{f(d(x,t))}{d(x,t)^2} \cdot \psi(x,t) \quad \text{per q.o. } (x,t) \in \Omega_{R_0}. \tag{2.17}$$

Supponiamo infine che u verifichi quanto segue: esiste una costante $C_2 > 0$ e una funzione monotona crescente $g : (0, R_0) \to \mathbb{R}^+$ con

$$\int_0^{R_0} \frac{g(r)}{r}\, \mathrm{d}r < \infty, \tag{2.18}$$

[1] La regolarità potrebbe essere abbassata supponendo *in senso debole*

$$u \in C(\Omega_{R_0}),$$
$$u,\ Z_j u,\ T^{(i)}u,\ \Delta_{\mathbb{H}} u \in L^2(\Omega_{R_0}) \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m \text{ e per ogni } i = 1, \dots, n.$$

tali che, per quasi ogni $(x,t) \in \Omega_{R_0}$,

$$|\langle t, Tu(x,t)\rangle| \leq C_2\, g(d(x,t)) \cdot |x|^2 \cdot |u(x,t)|, \tag{2.19}$$

dove T *è l'operatore (differenziale a valori in* $\mathbb{R}^n$*) definito da*

$$T = (T^{(1)}, \ldots, T^{(n)}), \tag{2.20}$$

e $T^{(1)}, \ldots, T^{(n)}$ *sono i campi vettoriali in* (2.13).

Sotto queste ipotesi esistono delle costanti $r_0 > 0$ *e* $\chi(u) > 0$ *(dipendenti anche da* $Q, C_1, C_2, f(r_0), g(r_0)$*) tali che, per ogni* $r \in (0, r_0/2)$ *per cui valga che* $u \not\equiv 0$ *in* Ω_r*, allora si ha*

$$\int_{\Omega_{2r}} u^2\psi \; \mathrm{d}H_N \leq \chi(u) \int_{\Omega_r} u^2\psi \; \mathrm{d}H_N. \tag{2.21}$$

Con la seguente definizione (Definizione 2.2), si potrà facilmente ottenere un corollario (Teorema 2.3) del teorema precedente:

Definizione 2.2. *Sia* u *tale che* $\psi^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\Omega_{R_0})$*. Diciamo che* u *si annulla con ordine infinito nell'origine se per* $r \to 0^+$

$$\int_{\Omega_r} u^2\psi \; \mathrm{d}H_N = \mathcal{O}(r^n) \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Più precisamente, con ciò intendiamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$*, esiste una costante* $C_n > 0$ *e un* $r_n > 0$ *tali che*

$$\int_{\Omega_r} u^2\psi \; \mathrm{d}H_N \leq C_n\, r^n \qquad \forall\, r \in (0, r_n). \tag{2.22}$$

Si ha allora il seguente:

Teorema 2.3 (Principio Forte di Continuazione Unica). *Nelle ipotesi su* V *e* u *del Teorema 2.1, se* u *si annulla con ordine infinito nell'origine, allora deve essere* $u \equiv 0$ *in* Ω_{r_0}*, dove* r_0 *è come nel Teorema 2.1.*

2.2 Formule di valor medio ed una disuguaglianza di tipo Hardy

Cominciamo stabilendo delle formule di rappresentazione per funzioni (lisce) su $\mathbb{H}$, che generalizzano le classiche formule di media di Gauss-Green.

Teorema 2.4 (Formule di media per il gruppo $\mathbb{H}$)**.** *Sia Γ la soluzione fondamentale di $\Delta_{\mathbb{H}}$ e sia $r > 0$. Supponiamo poi che v sia di classe C^2 su un aperto contenente $\overline{\Omega_r}$.*

Allora si ha la formula di media di superficie (relativa a Ω_r)

$$\begin{aligned}\frac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}} \int_{\partial\Omega_r} v(x,t) \frac{\psi(x,t)}{|\nabla d(x,t)|} \,\mathrm{d}H_{N-1} &= v(0,0) \\ &+ \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}} v(x,t) \left(\Gamma(x,t) - \frac{\beta_d}{r^{Q-2}} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.23}$$

ove

$$\beta_d := \left((Q-2) \int_{\partial\Omega_1} \frac{\psi}{|\nabla d|} \,\mathrm{d}H_{N-1} \right)^{-1}.$$

Inoltre, si ha la formula di media di volume (relativa alla d-palla Ω_r)

$$\begin{aligned}\frac{Q(Q-2)\beta_d}{r^{Q}} \int_{\Omega_r} v(x,t)\psi(x,t) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t &= v(0,0) \\ + \frac{Q}{r^Q} \int_0^r \rho^{Q-1} \bigg\{ \int_{\Omega_\rho} \Delta_{\mathbb{H}} v(x,t) &\left(\Gamma(x,t) - \frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \bigg\} \,\mathrm{d}\rho.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Da ciò segue che, quando v è $\Delta_{\mathbb{H}}$-armonica, si ha

$$v(0,0) = \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_1} v(x,t) \frac{\psi(x,t)}{|\nabla d(x,t)|} \,\mathrm{d}H_{N-1}}{\displaystyle\int_{\partial\Omega_1} \frac{\psi(x,t)}{|\nabla d(x,t)|} \,\mathrm{d}H_{N-1}}.$$

Forniamo ora un noto risultato, di cui faremo ampio uso nel capitolo:

Proposizione 2.5 (Formula di Coarea di Federer)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in \mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}s \left(\int_{\{g=s\}} \frac{f(x)}{|\nabla g(x)|} \,\mathrm{d}H_{N-1} \right). \tag{2.25}$$

Per una dimostrazione si veda, ad esempio, [4].

Dimostrazione (del Teorema 2.4). Proviamo una versione (che si rivelerà) equivalente di (2.23): dimostreremo che

$$\begin{aligned}\frac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_r} v(x,t)\frac{\psi(x,t)}{|\nabla d(x,t)|}\,\mathrm{d}H_{N-1} &= v(0,0)\\ &\quad+\beta_d\int_{\Omega_r}\Delta_{\mathbb{H}}v(x,t)\big(d(x,t)^{2-Q}-r^{2-Q}\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{2.26}$$

In seguito, quando avremo dimostrato che la funzione $(x,t)\mapsto\beta_d d(x,t)^{2-Q}$ è la soluzione fondamentale di $\Delta_{\mathbb{H}}$, da (2.26) seguirà naturalmente (2.23).

Ricordiamo che $\Delta_{\mathbb{H}}$ è un operatore in forma di divergenza (si veda (2.4))

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \mathrm{div}\,(A(x)\nabla).\tag{2.27}$$

Se $D\subset\mathbb{H}$ è un aperto limitato (e regolare nel senso usuale del teorema della divergenza), per ogni scelta di $u,v\in C^\infty(\overline{D})$ si ha (grazie appunto al teorema della divergenza)

$$\int_D(u\Delta_{\mathbb{H}}v - v\Delta_{\mathbb{H}}u)\,\mathrm{d}H_N = \int_{\partial D}(u\langle A\nabla v,\vec{n}_D\rangle - v\langle A\nabla u,\vec{n}_D\rangle)\,\mathrm{d}H_{N-1},\tag{2.28}$$

dove abbiamo denotato con $\vec{n}_D$ il vettore *normale esterno* a ∂D. Ponendo $u\equiv 1$ in (2.28) otteniamo

$$\int_D\Delta_{\mathbb{H}}v\,\mathrm{d}H_N = \int_{\partial D}\langle A\nabla v,\vec{n}_D\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}.\tag{2.29}$$

Fissiamo ora ε tale che $0<\varepsilon<r$ e consideriamo l'aperto limitato con bordo liscio $D:=\Omega_r\setminus\overline{\Omega_\varepsilon}$. Applicando (2.28) alle funzioni v ed $u=d^{2-Q}$ (ricordando che, come mostrato nel capitolo precedente, d^{2-Q} è $\Delta_{\mathbb{H}}$-armonica fuori dall'origine) si ottiene, poiché d è costante sulle d-sfere,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_r\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon} d^{2-Q}\Delta_{\mathbb{H}}v\,\mathrm{d}H_N\\ &\quad=\frac{1}{r^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_r}\langle A\nabla v,\vec{n}_D\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}+\frac{1}{\varepsilon^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\langle A\nabla v,\vec{n}_D\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}+\\ &\quad\quad-\int_{\partial\Omega_r}v\langle A\nabla(d^{2-Q}),\vec{n}_D\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}-\int_{\partial\Omega_\varepsilon}v\langle A\nabla(d^{2-Q}),\vec{n}_D\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}.\end{aligned}$$

Sapendo che $\vec{n}_D = \dfrac{\nabla d}{|\nabla d|} = \vec{n}_{\Omega_r}$ su $\partial\Omega_r$, mentre $\vec{n}_D = -\dfrac{\nabla d}{|\nabla d|} = -\vec{n}_{\Omega_\varepsilon}$ su $\partial\Omega_\varepsilon$, tramite (2.29) si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon} d^{2-Q}\Delta_{\mathbb{H}} v \,\mathrm{d}H_N = {}& \frac{1}{r^{Q-2}}\int_{\Omega_r}\Delta_{\mathbb{H}} v\,\mathrm{d}H_N \\ & - \frac{1}{\varepsilon^{Q-2}}\int_{\Omega_\varepsilon}\Delta_{\mathbb{H}} v\,\mathrm{d}H_N \\ & - \int_{\partial\Omega_r} v\frac{\langle A\nabla(d^{2-Q}),\nabla d\rangle}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} \\ & + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\frac{\langle A\nabla(d^{2-Q}),\nabla d\rangle}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1}.\end{aligned}$$

Ora, un calcolo diretto mostra che

$$\nabla(d^{2-Q}) = -(Q-2)d^{1-Q}\nabla d.$$

Per il quarto addendo si ha dunque

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\frac{\langle A\nabla(d^{2-Q}),\nabla d\rangle}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} &\overset{(2.10)}{=} -\frac{(Q-2)}{\varepsilon^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\frac{|\nabla_{\mathbb{H}} d|^2}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} \\ &\overset{(2.9)}{=} -\frac{(Q-2)}{\varepsilon^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\frac{\psi}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1}.\end{aligned}$$

Possiamo analogamente dedurre, per il terzo addendo, che

$$-\int_{\partial\Omega_r} v\frac{\langle A\nabla(d^{2-Q}),\nabla d\rangle}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} = \frac{(Q-2)}{r^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_r} v\frac{\psi}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1}.$$

Dalle osservazioni precedenti si ha

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon} d^{2-Q}\Delta_{\mathbb{H}} v \,\mathrm{d}H_N = {}& \frac{1}{r^{Q-2}}\int_{\Omega_r}\Delta_{\mathbb{H}} v\,\mathrm{d}H_N \\ & - \frac{1}{\varepsilon^{Q-2}}\int_{\Omega_\varepsilon}\Delta_{\mathbb{H}} v\,\mathrm{d}H_N \\ & + \frac{(Q-2)}{r^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_r} v\frac{\psi}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} \\ & - \frac{(Q-2)}{\varepsilon^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v\frac{\psi}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Il secondo addendo tende a 0 per $\varepsilon \to 0^+$: questo si vede facilmente usando il fatto che la misura di Lebesgue di Ω_ε è uguale a ε^Q moltiplicato per una costante dimensionale.

Vogliamo ora stimare il quarto addendo di (2.30). Non è restrittivo supporre $\varepsilon < 1$. Osservando che ogni d-palla è un aperto stellato rispetto all'origine, si ha

$$|v(x,t) - v(0,0)| \le |(x,t)| \sup_{(x,t)\in\Omega_1} |\nabla v(x,t)| \le d(x,t) \sup_{(x,t)\in\Omega_1} |\nabla v(x,t)|,$$

dove nella prima disuguaglianza ci siamo serviti del teorema del valor medio, mentre nella seconda abbiamo osservato che nella d-palla unitaria la norma euclidea è maggiorata dalla distanza d. Da quanto abbiamo osservato segue immediatamente che, per $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v \frac{\psi}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1} = (v(0,0) + o_{\varepsilon\to 0}(1)) \bigg(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\psi}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1} \bigg).$$

Notiamo quindi che, ponendo $v = 1$ in (2.30), il termine

$$\frac{(Q-2)}{\varepsilon^{Q-1}} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\psi}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1}$$

è indipendente da ε, ed è dunque una costante (è lecito quindi scegliere $\varepsilon = 1$ in tale termine). Posto dunque

$$\beta_d := \left((Q-2) \int_{\partial\Omega_1} \frac{\psi}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1} \right)^{-1}, \tag{2.31}$$

per il quarto addendo al membro destro di (2.30) si ha, per $\varepsilon \to 0$,

$$-\frac{(Q-2)}{\varepsilon^{Q-1}} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} v \frac{\psi}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1} = (v(0,0) + o_{\varepsilon\to 0}(1)) \big(-\beta_d \big)^{-1}.$$

Osservando da (1.24) che $\Gamma \in L^1(\Omega_r)$, con un passaggio al limite in (2.30) per $\varepsilon \to 0^+$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} d^{2-Q} \Delta_{\mathbb{H}} v \, \mathrm{d}H_N = & \int_{\Omega_r} r^{2-Q} \Delta_{\mathbb{H}} v \, \mathrm{d}H_N \\ & + \frac{(Q-2)}{r^{Q-1}} \int_{\partial\Omega_r} v \frac{\psi}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1} - \beta_d^{-1}\, v(0,0). \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per β_d segue (2.26).

Dimostriamo ora che $\beta_d d^{2-Q}$ uguaglia Γ. Si consideri ora una funzione $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{H})$ tale che $\varphi(0,0) \neq 0$ e tale che $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega_r$. Da (2.26) otteniamo

$$\varphi(0,0) = -\beta_d \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}\varphi \left(d^{2-Q} - r^{2-Q}\right) \mathrm{d}H_N.$$

Dato che da (2.29), ponendo $v = \varphi$, si ha

$$\int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}\varphi \; \mathrm{d}H_N = 0,$$

deduciamo che

$$-\varphi(0,0) = \beta_d \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}\varphi \; d^{2-Q} \; \mathrm{d}H_N.$$

Essendo $\varphi(0,0) \neq 0$, β_d coincide con la costante c nella Proposizione 1.18.

Abbiamo dunque dimostrato che, per ogni $\rho > 0$, vale

$$\begin{aligned}(Q-2)\beta_d \int_{\partial\Omega_\rho} v \frac{\psi}{|\nabla d|} \, \mathrm{d}H_{N-1} =& \rho^{Q-1} v(0,0) \\ &+ \rho^{Q-1} \int_{\Omega_\rho} \Delta_{\mathbb{H}} v \left(\Gamma - \frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\right) \mathrm{d}H_N.\end{aligned}$$

Integrando in ρ tra 0 ed r e servendosi della Formula di Coarea (2.25) al membro sinistro, possiamo concludere che vale la formula di media di volume, come volevasi dimostrare. □

Vogliamo ora dimostrare, grazie alle formule di media precedenti, la seguente forma forte del Principio di Indeterminazione di Heisenberg per i gruppi di tipo H:

Teorema 2.6. *Per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{H} \setminus \{(0,0)\})$ e per ogni $r > 0$ vale*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} \frac{u^2}{d^2}\psi \; \mathrm{d}H_N \leq \left(\frac{2}{Q-2}\right)^2 \Bigg\{ &\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \; \mathrm{d}H_N \\ &+ \left(\frac{Q-2}{2}\right)\frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r} u^2 \psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Osserviamo che dal teorema precedente si ottiene:[2]

[2]Basta fissare u come nell'asserto, prendere $r \gg 1$ tale che $\operatorname{supp} u \subset \Omega_r$ ed usare (2.32).

Corollario 2.7 (Disuguaglianza di tipo Hardy)**.** *Se* $u \in C_0^\infty(\mathbb{H} \setminus \{(0,0)\})$, *allora si ha*

$$\int_{\mathbb{H}} \frac{u^2}{d^2}\psi \ \mathrm{d}H_N \leq \left(\frac{2}{Q-2}\right)^2 \int_{\mathbb{H}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \ \mathrm{d}H_N. \tag{2.33}$$

Da quest'ultimo risultato si ha inoltre il seguente notevole corollario:

Corollario 2.8 (Principio di Indeterminazione)**.** *Se* $u \in C_0^\infty(\mathbb{H} \setminus \{(0,0)\})$, *allora vale*

$$\left(\int_{\mathbb{H}} d^2u^2\psi \ \mathrm{d}H_N\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{H}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \ \mathrm{d}H_N\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{Q-2}{2}\right) \int_{\mathbb{H}} u^2\psi \ \mathrm{d}H_N. \tag{2.34}$$

Dimostrazione. Sia u come nell'asserto. Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}} u^2\psi \ \mathrm{d}H_N &\leq \left(\int_{\mathbb{H}} d^2u^2\psi \ \mathrm{d}H_N\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{H}} d^2u^2\psi \ \mathrm{d}H_N\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(2.33)}{\leq} \left(\frac{2}{Q-2}\right)\left(\int_{\mathbb{H}} d^2u^2\psi \ \mathrm{d}H_N\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{H}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \ \mathrm{d}H_N\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ciò chiaramente dimostra quanto si voleva. □

Dimostrazione (del Teorema 2.6). Dalla Formula di Coarea, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} \frac{u^2}{d^2}\psi \ \mathrm{d}H_N &= \int_0^r \left(\int_{\partial\Omega_\rho} \frac{u^2\psi}{d^2|\nabla d|} \mathrm{d}H_{N-1}\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\left(\int_{\partial\Omega_\rho} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

(integrando per parti rispetto a ρ su $[\varepsilon, r]$ con $\varepsilon > 0$ per cui si ha $\operatorname{supp} u \subsetneq (\varepsilon, \infty)$...)

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\ &\quad + \int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\int_{\partial\Omega_\rho} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)\mathrm{d}\rho =: (\star).\end{aligned}$$

Applicando nel secondo membro di ($\star$) la formula di rappresentazione di superficie (2.23) alla funzione $v = u^2$ si ottiene

$$\int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\biggl(\int_{\partial\Omega_\rho} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\biggr)\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^r \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Biggl(\frac{\rho^{Q-1}}{(Q-2)\beta_d}\biggl\{u(0,0)^2 +$$

$$+ \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\biggl(\Gamma - \frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\biggr)\,\mathrm{d}H_N\biggr\}\Biggr)\,\mathrm{d}\rho$$

(derivando il prodotto e, sul primo addendo, usando ancora (2.23))

$$= (Q-1)\int_0^r \frac{1}{\rho^2}\int_{\partial\Omega_\rho} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} +$$

$$+ \frac{1}{(Q-2)\beta_d}\int_0^r \rho^{Q-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\biggl\{\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\biggl(\Gamma - \frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\biggr)\,\mathrm{d}H_N\biggr\}\,\mathrm{d}\rho$$

$$\overset{(2.25)}{=} (Q-1)\int_{\Omega_\rho}\frac{u^2}{\rho^2}\psi\,\mathrm{d}H_N +$$

$$+ \frac{1}{(Q-2)\beta_d}\int_0^r \rho^{Q-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\biggl\{\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\biggl(\Gamma - \frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\biggr)\,\mathrm{d}H_N\biggr\}\,\mathrm{d}\rho.$$

Osserviamo che dalla Formula di Coarea e dal fatto che la soluzione fondamentale Γ uguaglia $\dfrac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}$ su $\partial\Omega_\rho$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\biggl\{\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\,\Gamma\,\mathrm{d}H_N\biggr\} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\biggl\{\int_0^\rho \mathrm{d}s\int_{\partial\Omega_s}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\,\Gamma\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\biggr\}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\biggl\{\int_0^\rho \mathrm{d}s\frac{\beta_d}{s^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_s}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\biggr\} \qquad (2.35)\\ &= \frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}.\end{aligned}$$

Ragionando analogamente si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big\{\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\,\mathrm{d}H_N\Big\} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big\{\frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\,\mathrm{d}H_N\Big\}\\
&\text{(per la regola di Leibnitz e per la Formula di Coarea)}\\
&= \frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-1}}\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\,\mathrm{d}H_N\\
&\quad+\frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big\{\int_0^\rho \mathrm{d}s\int_{\partial\Omega_s}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\Big\}\\
&= \frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-1}}\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\,\mathrm{d}H_N+\frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}.
\end{aligned}\tag{2.36}$$

Da quanto si è osservato in precedenza, si desume che

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\rho}\Big\{\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\Big(\Gamma-\frac{\beta_d}{\rho^{Q-2}}\Big)\,\mathrm{d}H_N\Big\}\\
&\qquad= \frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-1}}\int_{\Omega_\rho}\Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\,\mathrm{d}H_N\\
&\qquad= \frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-1}}\int_{\partial\Omega_\rho}\Big\langle A\nabla(u^2),\frac{\nabla d}{|\nabla d|}\Big\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}\\
&\qquad= \frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_\rho}\frac{1}{d}\Big\langle A(2u\nabla u),\frac{\nabla d}{|\nabla d|}\Big\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}\\
&\qquad= \frac{(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_\rho}\Big\langle A(2u\nabla u),\frac{\nabla d}{d|\nabla d|}\Big\rangle\,\mathrm{d}H_{N-1}\\
&\qquad= \frac{2(Q-2)\beta_d}{\rho^{Q-2}}\int_{\partial\Omega_\rho}\frac{\langle A\nabla u,\nabla d\rangle}{d|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1},
\end{aligned}$$

Riassumendo, per la quantità $(\star)$ abbiamo ottenuto l'uguaglianza:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\,\mathrm{d}H_N &= -\frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r}u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}+(Q-1)\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\,\mathrm{d}H_N\\
&\quad+2\int_0^r\int_{\partial\Omega_\rho}\frac{u\langle A\nabla u,\nabla d\rangle}{d|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1}\,\mathrm{d}\rho\\
&\overset{(2.25)}{=} -\frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r}u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}+(Q-1)\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\,\mathrm{d}H_N\\
&\quad+2\int_{\Omega_r}\frac{u\langle A\nabla u,\nabla d\rangle}{d}\,\mathrm{d}H_{N-1}\,\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$

Riordinando i termini e servendosi di (2.10), si ha

$$
\begin{aligned}
(Q-2)\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\ \mathrm{d}H_N = \frac{1}{r}&\int_{\partial\Omega_r} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\\
&-2\int_{\Omega_r}\frac{u}{d}\langle\nabla_{\mathbb{H}}u,\nabla_{\mathbb{H}}d\rangle\ \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}
$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene

$$
\begin{aligned}
(Q-2)\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\ \mathrm{d}H_N &\le \frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\\
&\quad + 2\Big(\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}|\nabla_{\mathbb{H}}d|^2\ \mathrm{d}H_N\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\ \mathrm{d}H_N\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\\
&\quad + \varepsilon\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}|\nabla_{\mathbb{H}}d|^2\ \mathrm{d}H_N + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\ \mathrm{d}H_N\\
&\overset{(2.9)}{=} \frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\\
&\quad + \varepsilon\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\ \mathrm{d}H_N + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\ \mathrm{d}H_N,
\end{aligned}
$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Scegliendo $\varepsilon = \dfrac{Q-2}{2}$, si ha

$$
\frac{Q-2}{2}\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\ \mathrm{d}H_N \le \frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r} u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} + \frac{2}{Q-2}\int_{\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\ \mathrm{d}H_N.
$$

Moltiplicando ambo i membri per $\dfrac{2}{Q-2}$ si desume (2.32). Da ciò segue l'asserto. □

Corollario 2.9. *Per ogni $u \in C^\infty(\mathbb{H})$ e per ogni $r > 0$ vale*

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\ \mathrm{d}H_N \le \Big(\frac{2}{Q-2}\Big)^2\Big\{&\int_{\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\ \mathrm{d}H_N\\
&+\Big(\frac{Q-2}{2}\Big)\frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r}u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Dimostrazione. Chiaramente basterà dimostrare l'asserto per funzioni $u \in C_0^\infty(\mathbb{H})$. Sia $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞, monotona crescente tale per cui

$\chi(t) = 0$ per $t < \frac{1}{2}$ e $\chi(t) = 1$ per $t > 1$. Consideriamo le la famiglia di funzioni

$$\chi_N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \chi(Nd(z)),$$

al variare di N in $\mathbb{N}$. Per ogni N abbiamo, grazie al Teorema 2.6

$$\int_{\Omega_r} \frac{(u\chi_N)^2}{d^2}\psi \,\mathrm{d}H_N \leq \left(\frac{2}{Q-2}\right)^2 \left\{ \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}}(u\chi_N)|^2 \,\mathrm{d}H_N \right.$$
$$\left. + \left(\frac{Q-2}{2}\right)\frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r} (u\chi_N)^2 \,\psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \right\}.$$

Essendo $\chi_N \leq 1$ i termini $\displaystyle\int_{\Omega_r} \frac{(u\chi_N)^2}{d^2}\psi \,\mathrm{d}H_N$ e $\displaystyle\int_{\partial\Omega_r} (u\chi_N)^2 \,\psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}$ maggiorati rispettivamente da $\displaystyle\int_{\Omega_r} \frac{u^2}{d^2}\psi \,\mathrm{d}H_N$ e $\displaystyle\int_{\partial\Omega_r} u^2 \,\psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}$, per cui possiamo applicare, per N che tende a infinito, il Teorema della Convergenza Dominata. Si ha ora

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}}(u\chi_N)|^2 \,\mathrm{d}H_N &= \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{\frac{1}{N}}} |\nabla_{\mathbb{H}}(u\chi_N)|^2 \,\mathrm{d}H_N + \int_{\Omega_{\frac{1}{N}}} |\nabla_{\mathbb{H}}(u\chi_N)|^2 \,\mathrm{d}H_N \\
&= \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{\frac{1}{N}}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \,\mathrm{d}H_N + \int_{\Omega_{\frac{1}{N}}} |\nabla_{\mathbb{H}}(u\chi_N)|^2 \,\mathrm{d}H_N \\
&\leq \int_{\Omega_r \setminus \Omega_{\frac{1}{N}}} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \,\mathrm{d}H_N + N \max_{\overline{\Omega_1}} |\nabla_{\mathbb{H}}(u\chi)|^2 \int_{\Omega_{\frac{1}{N}}} \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

Dal fatto che

$$+N \int_{\Omega_{\frac{1}{N}}} \mathrm{d}H_N = N \left(\frac{1}{N}\right)^Q \int_{\Omega_1} \mathrm{d}H_N$$

e poiché $Q > 1$ è evidente come la disuguaglianza cercata valga anche per funzioni $u \in C_0^\infty$, come volevasi dimostrare. □

Capitolo 3

Funzioni di frequenza sui gruppi di tipo H

Nel presente Capitolo, ereditiamo le notazioni introdotte nel Capitolo 2. Sempre seguendo l'approcio di Garofalo e Lanconelli, [5], sarà nostro obiettivo mostrare una formula per la variazione prima dell'integrale di Dirichlet associato all'equazione

$$-\Delta_{\mathbb{H}} u + V u = 0, \tag{3.1}$$

descritta nel Capitolo precedente (ricordiamo che le variazioni prime giocano un ruolo di rilievo nel Calcolo delle Variazioni e nella Teoria Geometrica della Misura).

Introdurremo in seguito una funzione di frequenza su $\mathbb{H}$: uno studio sulle sue proprietà di crescita attraverso i risultati ottenuti in precedenza ci permetterà di dimostrare il principio di continuazione-unica delle soluzioni di (3.1).

3.1 Formula di variazione prima sub-ellittica

In questa sezione daremo una formula per la variazione prima dell'integrale di Dirichlet associato ad una qualunque funzione u: tale risultato ci permetterà di dimostrare le tanto agognate stime integrali per le soluzioni dell'equazione (3.1).

Prima di enunciare il risultato principale di questa sezione necessitiamo di alcuni risultati preliminari. Un calcolo diretto mostra che

$$\nabla d(x,t) = \frac{1}{d(x,t)^3}\begin{pmatrix} x|x|^2 \\ 8t \end{pmatrix}.$$

Inoltre, si ha, per $A(x)$ è come in (2.4),

$$\begin{aligned} A(x)\nabla d(x,t) &\overset{(2.6)}{=} \frac{1}{d(x,t)^3}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & \frac{1}{2}B(x)^T \\ \frac{1}{2}B(x) & \frac{|x|^2}{4}\mathbb{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x|x|^2 \\ 8t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d(x,t)^3}\begin{pmatrix} x|x|^2 + 4B(x)^T t \\ \frac{1}{2}B(x)x|x|^2 + 2t|x|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Osserviamo poi che $B(x)x = 0$, infatti

$$\begin{aligned} \sum_{j,t=1}^{m} b_{t,j}^{(i)} x_j x_t &= \sum_{j,t\le m,\, j>t} b_{t,j}^{(i)} x_j x_t + \sum_{j,t\le m,\, j<t} b_{t,j}^{(i)} x_j x_t \\ &= \sum_{j,t\le m,\, j>t} b_{t,j}^{(i)} x_j x_t + \sum_{j,t\le m,\, j<t} (-b_{j,t}^{(i)}) x_j x_t \\ &= \sum_{j,t\le m,\, j>t} b_{t,j}^{(i)} x_j x_t + \sum_{j',t'\le m,\, j'>t'} (-b_{t',j'}^{(i)}) x_{j'} x_{t'} = 0, \end{aligned}$$

per $i = 1,\dots,n$. Si può inoltre osservare che

$$B(x)^T = \Big(T^{(1)}I(x),\dots,T^{(n)}I(x)\Big).$$

Di conseguenza, ponendo $TI(x) = \Big(T^{(1)}I(x),\dots,T^{(n)}I(x)\Big)$, (3.2) diventa

$$A(x)\nabla d(x,t) = \frac{1}{d(x,t)}\left\{\frac{|x|^2}{d(x,t)^2}\begin{pmatrix} x \\ 2t \end{pmatrix} + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k}{d(x,t)^2}T^{(k)}I(x)\right\}. \tag{3.3}$$

Poniamo dunque

$$X = \sum_{j=1}^{m} x_j\partial_{x_j} + 2\sum_{j=1}^{n} t_j\partial_{t_j}, \tag{3.4}$$

$$\varphi(x,t) = \frac{t}{d(x,t)^2}, \tag{3.5}$$

Dai calcoli precedenti, possiamo osservare inoltre che

$$Xd = \langle XI, \nabla d \rangle = d \quad \text{in} \quad \mathbb{H} \smallsetminus \{(0,0)\}. \tag{3.6}$$

Vale inoltre, per l'ortogonalità e l'antisimmetria di $B^{(k)}$, la seguente notevole identità

$$T^{(k)} d = \langle B^{(k)} x, x|x|^2 \rangle \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{H} \smallsetminus \{(0,0)\}, \tag{3.7}$$

cioè ogni campo vettoriale $T^{(k)}$ definito come in (2.13) è tangente alla d-sfera $\partial\Omega_r$ (per ogni $r > 0$). Quanto osservato permette di dire che per il gruppo $\mathbb{H}$ si ha

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &\overset{(2.9)}{=} |\nabla_{\mathbb{H}} d(x,t)|^2 \overset{(2.10)}{=} \langle A(x) \nabla d(x,t), \nabla d(x,t) \rangle \\ &\overset{(3.3)}{=} \frac{1}{d(x,t)} \left\langle \frac{|x|^2}{d(x,t)^2} \begin{pmatrix} x \\ 2t \end{pmatrix} + 4 \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{d(x,t)^2} T^{(k)} I(x), \nabla d(x,t) \right\rangle \\ &= (\text{per (3.6) e (3.7)}) = \frac{1}{d(x,t)} \frac{|x|^2}{d(x,t)^2} d(x,t) = \frac{|x|^2}{d(x,t)^2}. \end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene la formula esplicita

$$\psi(x,t) = \frac{|x|^2}{d(x,t)^2} \quad \text{in} \quad \mathbb{H} \smallsetminus \{(0,0)\}. \tag{3.8}$$

Si osservi che ψ è minore o uguale a 1 ove definita.

Infine, con una notazione più compatta, possiamo scrivere (3.3) come

$$A \nabla d = \frac{1}{d} (\psi XI + 4 \langle \varphi, TI \rangle). \tag{3.9}$$

Enunciamo ora il risultato principale di questa sezione:

Teorema 3.1 (**Variazione Prima dell'Integrale di Dirichlet**). *Siano* T*,* X *e* φ *definiti, rispettivamente, in* (2.20)*,* (3.4) *e* (3.5)*. Sia* $u \in C^2(\mathbb{H}, \mathbb{R})$*.*

Allora, per ogni $r > 0$, abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\,\mathrm{d}H_N = \int_{\partial\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q-2}{r}\int_{\Omega_r}|\nabla_{\mathbb{H}}u|^2\;\mathrm{d}H_N \\ &\quad+\frac{2}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\;\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\ &\qquad+\frac{8}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}Xu\,\langle Tu,\varphi\rangle\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\ &\qquad\quad-\frac{2}{r}\int_{\Omega_r}Xu\,\Delta_{\mathbb{H}}u\;\mathrm{d}H_N. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Osserviamo che, come nel caso del gruppo di Heisenberg, il terzo termine al membro destro di (3.10) potrebbe non essere nullo.

Dimostrazione. Per semplicità di notazione, porremo $\xi_i = x_i$ per $i = 1,\dots,m$ e $\xi_{i+m} = t_i$ per $i = 1,\dots,n$. Indicheremo con X_i l'i-esima funzione componente del campo vettoriale X e con $a_{i,j}$ l'elemento di posto (i,j) dela matrice $A(x)$, definita in (2.4). Denoteremo inoltre con $(A\nabla u)_i$ l'i-esima componente del vettore $A\nabla u$.

Un calcolo diretto mostra che, per $A(x)$ come in (2.4), si ha:

$$(\partial_{x_k}a_{i,j}(x))_{i,j\le N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b^{(1)}_{1,k} & \cdots & b^{(n)}_{m,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b^{(1)}_{m,k} & \cdots & b^{(n)}_{m,k} \\ b^{(1)}_{1,k} & \cdots & b^{(1)}_{m,k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & x_k\mathbb{I}_n & \\ b^{(n)}_{1,k} & \cdots & b^{(n)}_{m,k} & & & \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

per $k = 1,\dots,m$.

Osserviamo che la prima uguaglianza di (3.10) segue facilmente dalla Formula di Coarea. Dunque nel resto della dimostrazione ci occupiamo di provare la seconda uguaglianza in (3.10).

Si hanno le seguenti uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} &\overset{(3.6)}{=} \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \frac{Xd}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1} \\
&= \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \frac{\langle XI, \nabla d\rangle}{|\nabla d|}\, \mathrm{d}H_{N-1} = \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r} \Big\langle |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2\, XI, \frac{\nabla d}{|\nabla d|} \Big\rangle\, \mathrm{d}H_{N-1} \\
&\text{(per il teorema della divergenza)} \\
&= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} \operatorname{div}\left(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 XI\right)\, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 (\operatorname{div} XI)\, \mathrm{d}H_N + \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} \Big\langle XI, \nabla(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2) \Big\rangle\, \mathrm{d}H_N =: (\star).
\end{aligned}
$$

Giacché $\operatorname{div} XI = Q$, segue

$$
\begin{aligned}
(\star) &= \frac{Q}{r} \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2\, \mathrm{d}H_N + \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2)\, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{Q}{r} \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2\, \mathrm{d}H_N + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} \Big(a_{j,k}\, \partial_{\xi_k} u\, \partial_{\xi_j} u \Big)\, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{Q}{r} \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2\, \mathrm{d}H_N + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} (a_{jk} \partial_{\xi_k} u) \partial_{\xi_j} u\, \mathrm{d}H_N \\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} (\partial_{\xi_j} u) \cdot (a_{jk} \partial_{\xi_k} u)\, \mathrm{d}H_N = (2\star).
\end{aligned}
$$

Utilizzando il Teorma di Schwarz (qui $\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}u = \partial_{\xi_j}\partial_{\xi_i}u$) segue

$$
\begin{aligned}
(2\star) = & \frac{Q}{r}\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}}u|^2 \, \mathrm{d}H_N + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} X_i\partial_{\xi_i}(a_{jk}\partial_{\xi_k}u)\partial_{\xi_j}u \, \mathrm{d}H_N \\
& + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} X_i\partial_{\xi_j}(\partial_{\xi_i}u)\cdot(a_{jk}\partial_{\xi_k}u) \, \mathrm{d}H_N \\
= & \frac{Q}{r}\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}}u|^2 \, \mathrm{d}H_N + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} X_i\partial_{\xi_i}(a_{jk}\partial_{\xi_k}u)\partial_{\xi_j}u \, \mathrm{d}H_N \\
& + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} X_i\partial_{\xi_j}\Big(\partial_{\xi_i}u \, a_{jk}\partial_{\xi_k}u\Big) \, \mathrm{d}H_N \\
& - \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} (\partial_{\xi_i}u)\, X_i\partial_{\xi_j}(a_{jk}\partial_{\xi_k}u) \, \mathrm{d}H_N \\
= & \frac{Q}{r}\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}}u|^2 \, \mathrm{d}H_N + \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} X_i\partial_{\xi_i}(a_{jk}\partial_{\xi_k}u)\partial_{\xi_j}u \, \mathrm{d}H_N \\
& + \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} X_i\partial_{\xi_j}((A\nabla u)_j\partial_{\xi_i}u) \, \mathrm{d}H_N \\
& - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{r}\int_{\Omega_r} X_i\partial_{\xi_i}u \; \partial_{\xi_j}(A\nabla u)_j \, \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}
$$

Denotiamo momentaneamente l'ultimo membro di queste catene di uguaglianze con

$$
(2\star) = \frac{Q}{r}\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}}u|^2 \, \mathrm{d}H_N + \mathrm{I} + \mathrm{II} - \mathrm{III}.
$$

Integrando per parti su II, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_j}((A\nabla u)_j \partial_{\xi_i} u) \, \mathrm{d}H_N \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} u (A\nabla u)_j \cdot n_j \, \mathrm{d}H_{N-1} \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} (\partial_{\xi_j} X_i) \, (A\nabla u)_j \partial_{\xi_i} u \, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r} (Xu) \langle A\nabla u \, , \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}H_{N-1} - \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} (\partial_{\xi_j} X_i) \, (A\nabla u)_j \partial_{\xi_i} u \, \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

In modo analogo, per I (utilizzando momentaneamente la nota convenzione di sommatoria su indici ripetuti) si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} =& \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} (a_{j,k} \partial_{\xi_k} u) \partial_{\xi_j} u \, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_k \xi_i} u \, a_{j,k} \partial_{\xi_j} u \, \mathrm{d}H_N + \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_k \xi_i} u (A\nabla u)_k \, \mathrm{d}H_N + \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_k} ((A\nabla u)_k \partial_{\xi_i} u) \, \mathrm{d}H_N - \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} u \partial_{\xi_k} (A\nabla u)_k \, \mathrm{d}H_N \\
&\quad + \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \, \mathrm{d}H_N \\
&\text{(per il teorema della divergenza sul primo addendo)} \\
&= \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} u (A\nabla u)_k \cdot n_k \, \mathrm{d}H_{N-1} - \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} (\partial_{\xi_k} X_i)(A\nabla u)_k \partial_{\xi_i} u \, \mathrm{d}H_N \\
&\quad - \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} u \partial_{\xi_k} (A\nabla u)_k \, \mathrm{d}H_N + \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \, \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

Concentrandoci sul secondo sottraendo di cui sopra (che non è altro che III), si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^{N} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} & X_i \partial_{\xi_i} u \partial_{\xi_k} (A\nabla u)_k \, \mathrm{d}H_N \\ &= \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X u \,\mathrm{div}\,(A\nabla u) \, \mathrm{d}H_N \\ &\overset{(2.4)}{=} \frac{1}{r} \int_{\Omega_r} X u \, \Delta_{\mathbb{H}} u \, \mathrm{d}H_N.\end{aligned}$$

Riassumendo quanto si è trovato finora, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} &= \frac{Q}{r} \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \, \mathrm{d}H_N \\ &- \frac{2}{r} \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega_r} \partial_{\xi_j} X_i (A\nabla u)_j \partial_{\xi_i} u \, \mathrm{d}H_N \\ &+ \frac{1}{r} \sum_{i,j,k=1}^{N} \int_{\Omega_r} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \, \mathrm{d}H_N \\ &+ \frac{2}{r} \int_{\partial\Omega_r} X u \, \langle A\nabla u \, , \, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}H_{N-1} \\ &- \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} X u \, \Delta_{\mathbb{H}} u \, \mathrm{d}H_N.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Servendosi del fatto che

$$\partial_{\xi_j} X_i = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 1 \le i = j \le m \\ 2 & \text{se} \quad m+1 \le i = j \le N \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e che inoltre vale

$$A(x)\nabla u(x,t) = \begin{pmatrix} \nabla_x u(x,t) + \frac{1}{2} B(x)^T \nabla_t u(x,t) \\ \frac{1}{2} B(x) \nabla_x u(x,t) + \frac{1}{4} |x|^2 \nabla_t u(x,t) \end{pmatrix},$$

ove $A(x)$ è la matrice in (2.4), si ottiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{\xi_j} X_i (A\nabla u)_j \partial_{\xi_i} u &= \sum_{i=1}^{m} (A\nabla u)_i \partial_{\xi_i} u \\
&\quad + 2 \sum_{i=m+1}^{N} (A\nabla u)_i \partial_{\xi_i} u \\
&= \sum_{i=1}^{N} (A\nabla u)_i \partial_{\xi_i} u + \sum_{i=m+1}^{N} (A\nabla u)_i \partial_{\xi_i} u \\
&= |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + \sum_{i=m+1}^{N} (A\nabla u)_i \partial_{\xi_i} u \qquad (3.13) \\
&= |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \langle B^{(k)}(x), \nabla_x u \rangle\, \partial_{t_k} u \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^2}{4} (\partial_{t_k} u)^2 \\
&= |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} T^{(k)} u\, \partial_{t_k} u + \frac{|x|^2}{4} |\nabla_t u|^2.
\end{aligned}
$$

Non resta che calcolare il terzo addendo al membro destro di (3.12): si ha

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^{N} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u &= (\text{poiché } \partial_{\xi_i} a_{j,k} = 0 \text{ se } i > m) \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j,k=1,\dots,N,\, j\neq k} \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1,\dots,N} \partial_{\xi_i} a_{j,j} (\partial_{\xi_j} u)^2 =: \mathrm{IV} + \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

Conoscendo la struttura della matrice $A(x)$, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IV} &= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j,k=1,\dots,N,\, j\neq k} \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \\
&= (\text{per la simmetria di } A(x)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} x_i \, 2 \sum_{j,k=1,\dots,N,\, j>k} \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u \\
&= (\text{poiché, per } j>k, \text{ vale } \partial_{\xi_i} a_{j,k} = 0 \text{ se } j \leq m \text{ o se } k \geq m) \\
&\overset{(3.11)}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i \, 2 \sum_{j,k=1,\dots,N,\, j>k,m} \frac{1}{2} b_{k,i}^{(j-m)} \partial_{\xi_j} u \partial_{\xi_k} u \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j,k=1,\dots,N,\, j>k,m} \partial_{\xi_k} u b_{k,i}^{(j-m)} x_i \partial_{\xi_j} u \\
&= \sum_{p=1}^{n} T^{(p)} u \, \partial_{t_p}.
\end{aligned}
$$

Per quanto concerne V, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1,\dots,N} \partial_{\xi_i} a_{j,j} (\partial_{\xi_j} u)^2 \\
&\overset{(3.11)}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{\xi_i^2}{2} \sum_{j=m+1,\dots,N} (\partial_{\xi_j} u)^2 = \frac{|x|^2}{2} |\nabla_t u|^2.
\end{aligned}
$$

Riassumendo, possiamo dire che

$$
\sum_{i,j,k=1}^{N} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_j} u \partial_{\xi_k} u = \sum_{p=1}^{n} T^{(p)} u \, \partial_{t_p} + \frac{|x|^2}{2} |\nabla_t u|^2. \tag{3.14}
$$

Grazie a (3.13) e a (3.14), si è quindi ottenuta la relazione

$$
-2 \sum_{i,j=1}^{N} X_i (A\nabla u)_j \partial_{\xi_i} u + \sum_{i,j,k=1}^{N} X_i \partial_{\xi_i} a_{j,k} \partial_{\xi_k} u \partial_{\xi_j} u = -2 |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2.
$$

Di conseguenza, (3.12) diventa

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} &= \frac{Q-2}{r} \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \, \mathrm{d}H_N \\
&+ \frac{2}{r} \int_{\partial\Omega_r} Xu \, \langle A\nabla u, \vec{n} \rangle \, \mathrm{d}H_{N-1} - \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} Xu \, \Delta_{\mathbb{H}} u \, \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}
$$

Per la simmetria di $A(x)$, si ha infine

$$\langle A\nabla u, \vec{n}\rangle = \frac{\langle \nabla u, A\nabla d\rangle}{|\nabla d|} \overset{(3.9)}{=} \frac{1}{d}\frac{(Xu)\psi + 4\langle Tu, \varphi\rangle}{|\nabla d|}.$$

Da questa ossevazione si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} &= \frac{Q-2}{r}\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \,\mathrm{d}H_N \\
&\quad + \frac{2}{r}\int_{\partial\Omega_r} (Xu)\frac{1}{r}\frac{(Xu)\psi + 4\langle Tu, \varphi\rangle}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} \\
&\quad - \frac{2}{r}\int_{\Omega_r} Xu\ \Delta_{\mathbb{H}} u \,\mathrm{d}H_N \\
&= \frac{Q-2}{r}\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \,\mathrm{d}H_N \\
&\quad + \frac{2}{r^2}\int_{\partial\Omega_r} (Xu)^2\,\psi\ \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&\quad + \frac{8}{r^2}\int_{\partial\Omega_r} Xu\,\langle Tu, \varphi\rangle\ \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&\quad - \frac{2}{r}\int_{\Omega_r} Xu\Delta_{\mathbb{H}} u \,\mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare. □

3.2 Funzioni di Frequenza

In questa sezione spianiamo la strada per la prova dei Teoremi 2.1 e 2.3 (che saranno dimostrati nella sezione seguente). Nel resto del capitolo considereremo $R_0 > 0$. Da ora in poi supporremo che V sia continua su $\mathbb{H}\setminus\{0\}$ e che esistano una costante $C_1 > 0$ e una funzione monotona crescente $f : (0, R_0) \to \mathbb{R}^+$ con

$$\int_0^{R_0} \frac{f(r)}{r}\,\mathrm{d}r < \infty, \tag{3.15}$$

per cui vale

$$|V(x,t)| \le C_1 \frac{f(d(x,t))}{d(x,t)^2}\cdot \psi(x,t) \quad \text{per q.o. } (x,t) \in \Omega_{R_0}. \tag{3.16}$$

Supporremo infine che u verifichi quanto segue: esiste una costante $C_2 > 0$ e una funzione monotona crescente $g : (0, R_0) \to \mathbb{R}^+$ con

$$\int_0^{R_0} \frac{g(r)}{r}\, \mathrm{d}r < \infty, \tag{3.17}$$

tali che, per quasi ogni $(x, t) \in \Omega_{R_0}$,

$$|\langle t, Tu(x,t)\rangle| \leq C_2\, g(d(x,t)) \cdot |x|^2 \cdot |u(x,t)|, \tag{3.18}$$

dove T è l'operatore (differenziale a valori in $\mathbb{R}^n$) definito nel Capitolo 2.

Per dimostrare quanto ci siamo prefissati, introduciamo ora le seguenti definizioni:

Definizione 3.2. *Sia Ω_{R_0} una d-palla centrata nell'origine e sia u soluzione (classica) di $-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0$ in Ω_{R_0}.*

Si chiamerà altezza *di u in Ω_r (con $0 < r < R_0$) la funzione*

$$H : (0, R_0) \to \mathbb{R}, \qquad H(r) = \int_{\partial\Omega_r} u^2 \psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}. \tag{3.19}$$

Chiameremo inoltre integrale di Dirichlet *ed* energia totale *di u in Ω_r rispettivamente i valori delle funzioni D e I così definite:*

$$\begin{aligned} D &: (0, R_0) \to \mathbb{R}, \qquad D(r) = \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 \,\mathrm{d}H_N, \\ I &: (0, R_0) \to \mathbb{R}, \qquad I(r) = \int_{\Omega_r} (|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + Vu^2) \,\mathrm{d}H_N. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Enunciamo ora un lemma la cui dimostrazione è banale e non la riportiamo:

Lemma 3.3. *Sia $v \in C(\Omega_{R_0} \setminus \{0\})$. Allora la funzione*

$$F : (0, R_0) \to \mathbb{R}, \qquad F(r) = \int_{\partial\Omega_r} v \,\mathrm{d}H_{N-1} \tag{3.21}$$

è continua su $(0, R_0)$.

Grazie a tale risultato si ha che $r \mapsto H(r)$ è integrabile su ogni compatto di $(0, R_0)$ (in quanto continua); inoltre si può mostrare facilmente che $r \mapsto I(r)$ è di classe C^1 su $(0, R_0)$ in quanto ha derivata continua: per la Formula di Coarea, infatti, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} I(\rho) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left\{ \int_0^\rho \mathrm{d}s \int_{\partial\Omega_s} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + Vu^2}{|\nabla d|} \, \mathrm{d}H_{N-1} \right\} =$$

(per il Lemma 3.3 e per il Teorema Fondamentale del Calcolo)

$$= \int_{\partial\Omega_\rho} \frac{|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + Vu^2}{|\nabla d|} \, \mathrm{d}H_{N-1}.$$

Notiamo al membro destro una funzione continua rispetto a r (sempre per il Lemma 3.3).

Osserviamo ora che per $u \in C^2(O)$ vale

$$\Delta_{\mathbb{H}}(u^2) = 2u\Delta_{\mathbb{H}}(u) + 2|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2. \tag{3.22}$$

Infatti da un calcolo diretto si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2) = \Delta_{\mathbb{H}}(u \cdot u) &= \sum_{j=1}^m X_j^2 (u \cdot u) = 2 \sum_{j=1}^m X_j (u \, X_j u) \\ &= 2 \sum_{j=1}^m ((X_j u)^2 + u \, X_j^2 u) = 2|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + 2u\Delta_{\mathbb{H}} u. \end{aligned}$$

Ne segue che se u risolve $-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0$ (e quindi $\Delta_{\mathbb{H}} u = Vu$), allora

$$\Delta_{\mathbb{H}}(u^2) = 2|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + 2u\Delta_{\mathbb{H}} u = 2(|\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 + V\, u^2).$$

Ne segue che

$$-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0 \quad \Longrightarrow \quad I(r) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2) \, \mathrm{d}H_N. \tag{3.23}$$

Enunciamo ora un risultato che permette di sottolineare il legame tra le funzioni H ed I e che sarà particolarmente utile in seguito:

Lemma 3.4. *Sia u una soluzione di $-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0$ in Ω_{R_0}. Allora vale*

$$H'(r) = \frac{Q-1}{r} H(r) + 2I(r), \tag{3.24}$$

per ogni $r \in (0, R_0)$.

Dimostrazione. Sia $u \in C^2(\Omega_{R_0})$ come nell'enunciato. Grazie al Teorema 2.4, vale

$$H(r) = \frac{r^{Q-1}}{(Q-2)\beta_d}\left\{u(0)^2 + \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\left(\Gamma - \frac{\beta_d}{r^{Q-2}}\right)\,\mathrm{d}H_N\right\}. \tag{3.25}$$

Derivando rispetto a r e servendosi nuovamente di (3.25), otteniamo

$$\begin{aligned} H'(r) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(\frac{r^{Q-1}}{(Q-2)\beta_d}\left\{u(0)^2 + \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\left(\Gamma - \frac{\beta_d}{r^{Q-2}}\right)\,\mathrm{d}H_N\right\}\right) \\ &= \frac{Q-1}{r}H(r) + \frac{r^{Q-1}}{(Q-2)\beta_d}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\left(\Gamma - \frac{\beta_d}{r^{Q-2}}\right)\mathrm{d}H_N. \end{aligned}$$

Ricordando (2.35) e (2.36) si ottiene

$$H'(r) = \frac{Q-1}{r}H(r) + \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2)\,\mathrm{d}H_N.$$

Ora, tenendo presente (3.23), si ottiene l'asserto. □

Mostreremo ora un'espressione alternativa di I, che ci sarà utile. A tal fine necessiteremo della seguente osservazione (in cui supporremo $v \in C^1(\mathbb{H})$ e k fissato in $\{1, \dots, n\}$):

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(3.7)}{=} \int_{\partial\Omega_r} v\frac{T^{(k)}d}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} \\ &= \int_{\partial\Omega_r} v\frac{\langle T^{(k)}I, \nabla d\rangle}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}H_{N-1} = \int_{\partial\Omega_r}\left\langle v\,T^{(k)}I, \frac{\nabla d}{|\nabla d|}\right\rangle \mathrm{d}H_{N-1} \\ &\text{(per il teorema della divergenza)} \\ &= \int_{\Omega_r} \operatorname{div}(v\,T^{(k)}I)\,\mathrm{d}H_N \\ &= \int_{\Omega_r} v\,(\operatorname{div} T^{(k)}I)\,\mathrm{d}H_N + \int_{\Omega_r}\left\langle T^{(k)}I, \nabla v\right\rangle \mathrm{d}H_N \\ &= \int_{\Omega_r} v\,(\operatorname{div} T^{(k)}I)\,\mathrm{d}H_N + \int_{\Omega_r} T^{(k)}v\,\mathrm{d}H_N. \end{aligned}$$

Si ha, inoltre, $\operatorname{div} T^{(k)}I = 0$ per $k = 1, \dots, n$, infatti vale

$$\operatorname{div} T^{(k)}I = \sum_{i=1}^{m} \partial_{x_i} \sum_{j=1}^{m} b_{i,j}^{(k)} x_j = \sum_{i=1}^{m} b_{i,i}^{(k)} = 0.$$

Di conseguenza, per ogni $k = 1, \dots, n$ e per ogni $v \in C^1(\mathbb{H})$ vale

$$\int_{\Omega_r} T^{(k)} v \, \mathrm{d}H_N = 0.$$

Per la Formula di Coarea si ha dunque

$$\int_{\partial\Omega_r} T^{(k)} v \, \frac{\mathrm{d}H_N}{|\nabla d|} = 0.$$

Se $v(x,t) = s(x,t) t_k$, poichè $T^{(k)} t_k = 0$, non è difficile vedere che si ha

$$\int_{\partial\Omega_r} t_k \, T^{(k)} s(x,t) \, \frac{\mathrm{d}H_N}{|\nabla d|} = 0,$$

e dunque, sommando in $k = 1, \dots, n$, ed essendo d costante su Ω_r, vale

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial\Omega_r} T^{(k)} s \;\; t_k \, \frac{\mathrm{d}H_N}{|\nabla d|} \\ &\overset{(3.5)}{=} \int_{\partial\Omega_r} \Big\langle Ts, \varphi \Big\rangle \, \frac{\mathrm{d}H_N}{|\nabla d|}. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$0 = \int_{\partial\Omega_r} \Big\langle Ts, \varphi \Big\rangle \, \frac{\mathrm{d}H_N}{|\nabla d|} \qquad \text{per ogni } s \in C^1(\mathbb{H}). \tag{3.26}$$

Forniamo un'espressione alternativa di $I(r)$. Si ha:

$$\begin{aligned} I(r) &\overset{(3.23)}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \Delta_{\mathbb{H}}(u^2) \, \mathrm{d}H_N \overset{(2.4)}{=} \frac{1}{2} \int_{\Omega_r} \mathrm{div}\,(A \nabla(u^2)) \, \mathrm{d}H_N \\ &\quad \text{(per il teorema della divergenza)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_r} \big\langle A\nabla(u^2), \vec{n} \big\rangle \, \mathrm{d}H_{N-1} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_r} \frac{\langle A\nabla(u^2), \nabla d \rangle}{|\nabla d|} \, \mathrm{d}H_{N-1} \\ &\quad \text{(per la simmetria della matrice } A\text{)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_r} \frac{\langle \nabla(u^2), A\nabla d \rangle}{|\nabla d|} \, \mathrm{d}H_{N-1} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_r} \langle \nabla(u^2), A\nabla d \rangle \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\ &\overset{(3.9)}{=} \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_r} \frac{X(u^2)\,\psi + 4\langle T(u^2), \varphi \rangle}{r} \, \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\ &= \frac{1}{2r} \int_{\partial\Omega_r} X(u^2)\,\psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} + \frac{2}{r} \int_{\partial\Omega_r} \langle T(u^2), \varphi \rangle \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}. \end{aligned}$$

Come conseguena di (3.26), si ha dunque

$$I(r) = \frac{1}{2r}\int_{\partial\Omega_r} X(u^2)\,\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} = \frac{1}{r}\int_{\partial\Omega_r} u\,\psi\,Xu\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}. \tag{3.27}$$

Lemma 3.5 (di Alternativa)**.** *Sia u una soluzione di $-\Delta_H u + Vu = 0$ su Ω_{R_0}. Esiste r_0, positivo, che dipende solo da Q, C_1 e f, in modo tale che vale una e solo una delle seguenti condizioni:*

- *$u \equiv 0$ in Ω_{r_0};*

- *$H(r) \neq 0$ per ogni $r \in (0, r_0)$.*

Dimostrazione. Sia u soluzione di $-\Delta_H u + Vu = 0$ non identicamente nulla in un intorno dell'origine. Supponiamo, per assurdo, che valga il seguente fatto: esiste una successione $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ monotona decrescente e tendente a zero, tale per cui $H(r_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Vogliamo dimostrare che questo porta ad un assurdo (dimostreremo infatti che questo implica l'annullarsi di u in un intorno dell'origine, contro l'ipotesi fatta su u).

Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\begin{aligned}
|I(r_k)| &\overset{(3.27)}{=} \left| \frac{1}{r_k}\int_{\partial\Omega_{r_k}} u\,\psi\,Xu\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \right| \\
&\leq \frac{1}{r_k}\left(\int_{\partial\Omega_{r_k}} (Xu)^2\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial\Omega_{r_k}} u^2\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{r_k}\left(\int_{\partial\Omega_{r_k}} (Xu)^2\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}}(H(r_k))^{\frac{1}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

Ne segue $I(r_k) = 0$. Di conseguenza, si ottiene

$$\begin{aligned}
D(r_k) = I(r_k) - \int_{\Omega_{r_k}} V\,u^2\;\mathrm{d}H_N &= -\int_{\Omega_{r_k}} V\,u^2\;\mathrm{d}H_N \\
&\leq \int_{\Omega_{r_k}} |Vu^2|\;\mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

Otteniamo inoltre

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{r_k}} |Vu^2| \, \mathrm{d}H_N &\overset{(3.16)}{\leq} Cf(r_k) \int_{\Omega_{r_k}} \frac{u^2}{d^2} \psi \, \mathrm{d}H_N \\
&\text{(per il Corollario 2.9)} \\
&\leq C_1 \, f(r_k) \left(\frac{2}{Q-2} \right)^2 \left\{ D(r_k) + \frac{Q-2}{2} \frac{H(r_k)}{r_k} \right\}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Poiché $H(r_k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$
D(r_k) = C_1 \left(\frac{2}{Q-2} \right)^2 f(r_k) \, D(r_k)
$$

Ne segue

$$
D(r_k) \leq C_1 \left(\frac{2}{Q-2} \right)^2 f(r_k) \, D(r_k), \qquad \forall \, k \in \mathbb{N}.
$$

Poiché dalle ipotesi su f sappiamo che[1] $\lim_{r \to 0^+} f(r) = 0$, otteniamo un assurdo dalla stima precedente a meno che $D(r_k) = 0$ definitivamente in k. Se peró fosse $D(r_k) = 0$ definitivamente in k, si avrebbe (almeno su una d-palla centrata nell'origine) $\nabla_{\mathbb{H}} u \equiv 0$ e dunque u è costante su un opportuno intorno di 0. Poiché deve essere $H(r_k) = 0$, necessariamente si ha $u = 0$ su tale intorno. Abbiamo dunque ottenuto un assurdo. $\square$

In virtù del lemma appena dimostrato possiamo ora introdurre una importante definizione:

Definizione 3.6. *Sia u una soluzione di $-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0$ in Ω_{R_0} e sia r_0 come nel Lemma 3.5. Supponiamo inoltre che u non sia identicamente nulla in Ω_{r_0}. La quantità (ben posta in forza del lemma citato)*

$$
N(r) := \frac{rI(r)}{H(r)}, \qquad r \in (0, r_0) \tag{3.29}
$$

è detta frequenza di u in Ω_r.

[1]Poichè f è monotona esiste $\lim_{x \to 0^+} f(x) =: m$. Se tale limite fosse positivo si avrebbe

$$
\int \frac{f(r)}{r} \mathrm{d}r \geq \int \frac{m}{r} \mathrm{d}r
$$

e poiché il secondo integrale diverge, anche il primo avrebbe lo stesso comportamento, contro l'ipotesi su f.

Da quanto sappiamo e dal Lemma 3.5 si avrà, da un semplice calcolo diretto:

Lemma 3.7. *La funzione $r \mapsto N(r)$ è una funzione di classe C^1 sull'intervallo $(0, r_0)$ e si ha*

$$N'(r) = \frac{I(r)}{H(r)} + \frac{rI'(r)}{H(r)} - \frac{rI(r)H'(r)}{H(r)^2}$$

Possiamo ora introdurre l'insieme

$$\Lambda_{r_0} = \left\{ r \in (0, r_0) \,\middle|\, N(r) > 1 \right\}.$$

Osserviamo che dalla definizione di Λ_{r_0} si ha

$$\frac{H(r)}{r} < I(r) \qquad \forall\, r \in \Lambda_{r_0}. \tag{3.30}$$

In particolare $I(r)$ è non nulla su Λ_{r_0}. Da questa osservazione e dal Lemma 3.5 si ha

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{I'(r)}{I(r)} + \frac{1}{r} - \frac{H'(r)}{H(r)} \qquad \forall\, r \in \Lambda_{r_0}.$$

Dal Lemma 3.4 possiamo dunque concludere che

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{I'(r)}{I(r)} - \frac{Q-2}{r} - 2\frac{I(r)}{H(r)} \qquad \forall\, r \in \Lambda_{r_0}. \tag{3.31}$$

Iniziamo ora a dimostrare alcuni lemmi propedeutici a fornire la stima principale di questa sezione:

Lemma 3.8. *Per ogni $r \in \Lambda_{r_0}$ vale*

$$\begin{aligned}
\frac{I'(r)}{I(r)} &= \frac{Q-2}{r} + \\
&+ \frac{1}{I(r)} \cdot \left\{ \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu)^2 \psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} + \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu)\langle Tu, \varphi \rangle \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \right. \\
&\left. + \int_{\partial\Omega_r} Vu^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - \frac{Q-2}{r} \int_{\Omega_r} Vu^2 \, \mathrm{d}H_N - \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} (Xu)Vu \, \mathrm{d}H_N \right\}.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia u una soluzione di $-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0$. Osserviamo che dal Teorema 3.1 abbiamo la seguente espressione di $D'(r)$:

$$\begin{aligned}
D'(r) &= \frac{Q-2}{r} D(r) + \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu)^2 \, \psi \, \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&\quad + \frac{8}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} Xu \, \langle Tu, \varphi \rangle \, \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} Xu \, \Delta_{\mathbb{H}} u \ \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{Q-2}{r} D(r) + \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu)^2 \, \psi \, \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&\quad + \frac{8}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} Xu \, \langle Tu, \varphi \rangle \, \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} Xu \, Vu \ \mathrm{d}H_{N-1}.
\end{aligned}$$

Aggiungendo ad ambo i membri il termine $\displaystyle\int_{\partial\Omega_r} Vu^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
D'(r) + \int_{\partial\Omega_r} Vu^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} =& \frac{Q-2}{r} D(r) + \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu)^2 \psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&+ \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu) \langle Tu, \varphi \rangle \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&+ \int_{\partial\Omega_r} Vu^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} (Xu) Vu \ \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

Inoltre, dalla Formula di Coarea si vede immediatamente che

$$I'(r) = D'(r) + \int_{\partial\Omega_r} Vu^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}.$$

Banalmente, si ha

$$D(r) = I(r) - \int_{\Omega_r} Vu^2 \ \mathrm{d}H_N.$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned}
I'(r) =& \frac{Q-2}{r} I(r) + \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu)^2 \psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&+ \frac{2}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} (Xu) \langle Tu, \varphi \rangle \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&+ \int_{\partial\Omega_r} Vu^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - \frac{Q-2}{r} \int_{\Omega_r} Vu^2 \ \mathrm{d}H_N - \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} (Xu) Vu \ \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

Dividendo per $I(r)$ (ciò è lecito perché $r \in \Lambda_{r_0}$) otteniamo l'asserto. $\square$

Dal lemma precedente e da (3.31) si ottiene immediatamente il seguente risultato:

Lemma 3.9. *Per ogni $r \in \Lambda_{r_0}$ vale*

$$\begin{aligned}
\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{2}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} \\
+ \frac{8}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)\langle Tu,\varphi\rangle\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} + \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}Vu^2\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} \\
- \frac{Q-2}{r}\frac{\displaystyle\int_{\Omega_r}Vu^2\,\mathrm{d}H_N}{I(r)} - \frac{2}{r}\frac{\displaystyle\int_{\Omega_r}(Xu)Vu\,\mathrm{d}H_N}{I(r)}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Abbiamo infine un ulteriore lemma che risulterà molto utile:

Lemma 3.10. *Esiste una costante $K = K(Q, C_1, f(r_0)) > 0$ tale che*

$$D(r) \leq KI(r) \qquad \textit{per ogni } r \in \Lambda_{r_0}. \tag{3.33}$$

Dimostrazione. Sia $r \in \Lambda_{r_0}$. Allora vale

$$\begin{aligned}
D(r) = I - \int_{\Omega_r} V\,u^2\,\mathrm{d}H_N &\overset{(3.16)}{\leq} I(r) + \int_{\Omega_r} C_1\frac{f(d)}{d^2}\psi\,u^2\,\mathrm{d}H_N \\
&\text{(per la monotonia di } f) \\
&\leq I(r) + C_1 f(r)\int_{\Omega_r}\frac{u^2}{d^2}\psi\,\mathrm{d}H_N \\
&\text{(per il Corollario 2.9)} \\
&\leq I(r) + \left(\frac{2}{Q-2}\right)^2 C_1 f(r)\left\{\frac{Q-2}{2}\cdot\frac{H(r)}{r} + D(r)\right\} \\
&\overset{(3.30)}{\leq} \left\{1 + \left(\frac{2}{Q-2}\right)C_1 f(r)\right\}I(r) + \left(\frac{2}{Q-2}\right)^2 C_1 f(r) D(r).
\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza trovata pocanzi, ponendo $A_Q = \dfrac{2}{Q-2}$, si ha, per la monotonia di f,

$$\begin{aligned}
D(r) &\leq (1 + A_Q C_1 f(r))I(r) + A_Q^2 C_1 f(r) D(r) \\
&\leq (1 + A_Q C_1 f(r_0))I(r) + A_Q^2 C_1 f(r_0) D(r),
\end{aligned}$$

da cui

$$(1 - A_Q^2 C_1 f(r_0)) \cdot D(r) \le (1 + A_Q C_1 f(r_0)) I(r).$$

A meno di restringere r_0, possiamo supporre che valga

$$A_Q^2\, C_1\, f(r_0) < 1.$$

Abbiamo dunque ottenuto l'asserto con $K := \dfrac{1 + A_Q C_1 f(r_0)}{1 - A_Q^2 C_1 f(r_0)}$. □

3.3 Principio Forte di Continuazione Unica

Siamo ora pronti a dimostrare il risultato principale che ci permetterà di dimostrare i teoremi di *unique continuation* per il nostro operatore. Lo strumento fondamentale è dato dal seguente:

Teorema 3.11. *Supponiamo che u sia una soluzione di $-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0$ e che u e V soddisfino le ipotesi del Teorema 2.1 per qualche C_1, C_2, f e g. Allora esiste una costante $M = M(Q, C_1, C_2, f(r_0), g(r_0)) > 0$ tale che per quasi ogni $r \in \Lambda_{r_0}$ abbiamo*

$$\frac{N'(r)}{N(r)} \ge -M\left(\frac{f(r) + g(r)}{r}\right). \tag{3.34}$$

Dimostrazione. Il punto di partenza è l'identità stabilita nel Lemma 3.9. Inizieremo provando che gli ultimi tre addendi (diciamo I, II, III) del secondo membro di (3.32) sono maggiorati, in valore assoluto, da $L\dfrac{f(r)}{r}$, ove L è una costante opportuna. Consideriamo $r \in \Lambda_{r_0}$. Da un calcolo diretto si ha

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Omega_r} V u^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \right| &\le \int_{\partial\Omega_r} |V| u^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&\overset{(3.16)}{\le} \int_{\partial\Omega_r} \frac{C_1 f(d)\psi}{d^2} u^2 \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&\le \frac{C_1 f(r)}{r^2} \int_{\partial\Omega_r} u^2\, \psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \\
&= \frac{C_1 f(r)}{r} \cdot \frac{H(r)}{r} \overset{(3.30)}{<} \frac{C_1 f(r)}{r} I(r).
\end{aligned}$$

Ne segue

$$|\mathrm{I}| \le M_1 \frac{f(r)}{r}, \qquad \text{con } M_1 = C_1.$$

Poniamo, come già fatto in precedenza, $A_Q = \dfrac{2}{Q-2}$. Analogamente a quanto già visto nella stima contenuta in (3.28) a pagina 59, si ha

$$\begin{aligned}
\left| \frac{Q-2}{r} \int_{\Omega_r} V u^2 \, \mathrm{d}H_N \right| &\le \frac{Q-2}{r} C_1 \, f(r) A_Q^2 \left\{ D(r) + A_Q^{-1} \frac{H(r)}{r} \right\} \\
&\quad \text{(per (3.30) ed (3.33))} \\
&\le (Q-2) \frac{f(r)}{r} A_Q^2 C_1 (K + A_Q^{-1}) I(r).
\end{aligned}$$

Ne segue

$$|\mathrm{II}| \le M_2 \frac{f(r)}{r}, \qquad \text{con } M_2 = (Q-2) A_Q^2 C_1 (K + A_Q^{-1}).$$

Vogliamo ora ottenere una stima di III. Da un calcolo diretto si ha

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} XuVu \, \mathrm{d}H_N \right| &\le \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} |XuVu| \, \mathrm{d}H_N \\
&\overset{(3.16)}{\le} \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} |Xu| \frac{C_1 f(d) \psi}{d^2} \, |u| \, \mathrm{d}H_N \\
&\le \frac{2C_1 f(r)}{r} \int_{\Omega_r} |Xu| \frac{|u|\psi}{d^2} \, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{2C_1 f(r)}{r} \int_{\Omega_r} \left| \frac{1}{d} \psi X u \right| \frac{|u|}{d} \, \mathrm{d}H_N \\
&\overset{(3.9)}{=} \frac{2C_1 f(r)}{r} \int_{\Omega_r} \left| \langle A \nabla d, \nabla u \rangle - \frac{4 \langle \varphi, Tu \rangle}{d} \right| \cdot \frac{|u|}{d} \, \mathrm{d}H_N \\
&\le \frac{2C_1 f(r)}{r} \int_{\Omega_r} |\langle A \nabla d, \nabla u \rangle| \frac{|u|}{d} \, \mathrm{d}H_N \\
&\quad + \frac{8C_1 f(r)}{r} \int_{\Omega_r} \frac{|\langle \varphi, Tu \rangle \, u|}{d^2} \, \mathrm{d}H_N.
\end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r} |\langle A\nabla d, \nabla u\rangle| \frac{|u|}{d}\, \mathrm{d}H_N &\overset{(2.10)}{=} \int_{\Omega_r} |\langle \nabla_{\mathbb{H}} d, \nabla_{\mathbb{H}} u\rangle| \frac{|u|}{d}\, \mathrm{d}H_N \\
&\le \int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} d|\, |\nabla_{\mathbb{H}} u| \frac{|u|}{d}\, \mathrm{d}H_N \\
&\quad \text{(per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)} \\
&\le \left(\int_{\Omega_r} \frac{u^2}{d^2} |\nabla_{\mathbb{H}} d|^2\, \mathrm{d}H_N \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2\, \mathrm{d}H_N \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(2.9)}{=} \left(\int_{\Omega_r} \frac{u^2}{d^2} \psi\, \mathrm{d}H_N \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_r} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2\, \mathrm{d}H_N \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(2.37)}{\le} A_Q \left[A_Q^{-1} \frac{H(r)}{r} + D(r) \right]^{\frac{1}{2}} D(r)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \text{(servendoci di (3.30) e (3.33))} \\
&\le A_Q \big((A_Q^{-1} + K) K \big)^{\frac{1}{2}} I(r).
\end{aligned}$$

Si osserva inoltre che (utilizzando ancora (2.37), (3.30) e (3.33))

$$\int_{\Omega_r} \frac{|\langle \varphi, Tu\rangle\, u|}{d^2}\, \mathrm{d}H_N \overset{(3.18)}{\le} C_2\, g(r_0) \int_{\Omega_r} \frac{u^2}{d^2} \psi\, \mathrm{d}H_N \le C_2\, g(r_0)\, A_Q^2 (A_Q^{-1} + K) I(r).$$

Riassumendo quanto appena trovato, abbiamo

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{r} \int_{\Omega_r} XuVu\, \mathrm{d}H_N \right| \le{}& \frac{2C_1 f(r)}{r} A_Q \big((A_Q^{-1} + K) K \big)^{\frac{1}{2}} I(r) \\
&+ \frac{8C_1 f(r)}{r} C_2\, g(r_0)\, A_Q^2 (A_Q^{-1} + K) I(r).
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$|\mathrm{III}| \le M_3 \frac{f(r)}{r},$$

dove $M_3 = 2C_1 A_Q \big((A_Q^{-1} + K) K \big)^{\frac{1}{2}} + 8C_1 C_2\, g(r_0)\, A_Q^2 (A_Q^{-1} + K)$.

Grazie al Lemma 3.9 e alle stime precedenti possiamo dire che, per ogni $r \in \Lambda_{r_0}$, vale

$$\begin{aligned}
\frac{N'(r)}{N(r)} ={}& \frac{2}{r^2} \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r} (Xu)^2 \psi \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} \\
&+ \frac{8}{r^2} \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r} (Xu) \langle \varphi, Tu\rangle \frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} + \mathcal{O}\left(\frac{f(r)}{r} \right),
\end{aligned} \tag{3.35}$$

dove $\mathcal{O}\left(\frac{f(r)}{r}\right)$ è una funzione il cui valore assoluto è limitato da $M'\frac{f(r)}{r}$, con $M' = M_1 + M_2 + M_3$. Di conseguenza vale

$$\begin{aligned}\frac{N'(r)}{N(r)} \geq \frac{2}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} \\ + \frac{8}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)\langle\varphi, Tu\rangle\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - M'\frac{f(r)}{r}\end{aligned} \tag{3.36}$$

Passiamo a considerare il terzo addendo del secondo membro di (3.36). Da un calcolo diretto si ha

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Omega_r}(Xu)\langle\varphi, Tu\rangle\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right| &\leq \left(\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times\left(\int_{\partial\Omega_r}\frac{|\langle\varphi, Tu\rangle|^2}{\psi}\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(3.18)}{\leq} \left(\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times C_2\, g(r)\left(\int_{\partial\Omega_r}u^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_2 g(r)\left(H(r)\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Poniamo ora

$$H(r)\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} =: (\star).$$

Distinguiamo ora due casi:

(a) $(\star) \leq 2(rI(r))^2$;

(b) $(\star) > 2(rI(r))^2$.

Nel caso in cui si verifichi (a) possiamo dedurre da quanto appena visto che

$$\left|\int_{\partial\Omega_r}(Xu)\langle\varphi, Tu\rangle\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right| \leq \sqrt{2}\, C_2\, g(r)\, r\, I(r),$$

e che quindi

$$\frac{N'(r)}{N(r)} = \frac{2}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} + \mathcal{O}\bigg(\frac{f(r)+g(r)}{r}\bigg) \tag{3.37}$$

dove

$$\bigg|\mathcal{O}\bigg(\frac{f(r)+g(r)}{r}\bigg)\bigg| \leq M_4\bigg(\frac{f(r)+g(r)}{r}\bigg),$$

con $M_4 = M_4(Q, C_1, C_2, f(r_0), g(r_0)) > 0$. Notiamo che la somma dei primi due addendi del secondo membro di (3.37) può essere riscritta come

$$2\frac{H(r)\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - (r\,I(r))^2}{r^2\,I(r)\,H(r)}.$$

Per dimostrare il teorema nel caso (a), essendo $H(r) > 0$ e $I(r) > 0$ su $\Lambda(r_0)$, basterà dunque provare che il numeratore dell'ultima espressione è ≥ 0, ossia

$$(rI(r))^2 \leq H(r)\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} \quad \text{per ogni } r \in (0, r_0).$$

Ciò è evidente in virtù della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, infatti

$$\begin{aligned}
|rI(r)| &\stackrel{(3.27)}{=} \bigg|\int_{\partial\Omega_r} u\,\psi\,Xu\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\bigg| \\
&\leq \bigg(\int_{\partial\Omega_r} u^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\bigg)^{\frac{1}{2}}\bigg(\int_{\partial\Omega_r}\psi\,(Xu)^2\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= (H(r))^{\frac{1}{2}}\bigg(\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\bigg)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Supponiamo ora di trovarci nel caso (b). Da quanto già ottenuto in precedenza e da un calcolo diretto si ha

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}(Xu)\langle Tu,\varphi\rangle\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\right| &\leq \frac{1}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}|Xu|\cdot|\langle Tu,\varphi\rangle|\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\\
&\leq \frac{C_2 g(r)}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}|Xu|\cdot|u|\,\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\\
&\text{(per la disuguaglianza in } \mathbb{R}\ |A|\cdot|B|\leq (A^2+B^2)/2)\\
&\leq \frac{C_2 g(r)}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}\frac{(Xu)^2\psi}{2}\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}+\frac{C_2\,g(r)}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}\frac{u^2\psi}{2}\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\\
&\leq \frac{C_2 g(r)}{2r^2}\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}+\frac{C_2\,g(r)}{2r}\frac{H(r)}{r}\\
&\overset{(3.30)}{<} \frac{C_2\,g(r)}{2r^2}\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}+\frac{C_2\,g(r)}{2r}I(r).
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\frac{1}{r^2}\int_{\partial\Omega_r}(Xu)\langle Tu,\varphi\rangle\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} > -\frac{C_2\,g(r)}{2r^2}\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}-\frac{C_2\,g(r)}{2r}I(r).$$

A patto di restringere, se necessario, l'intervallo $(0,r_0)$ possiamo supporre che per r_0 valga

$$2-4\,C_2\,g(r_0)>1. \tag{3.38}$$

Sostituendo quanto ottenuto in (3.36) si ottiene

$$
\begin{aligned}
\frac{N'(r)}{N(r)} &\overset{(3.36)}{\geq} \frac{2}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} \\
&\quad + \frac{8}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)\langle\varphi, Tu\rangle\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - M'\frac{f(r)}{r} \\
&\geq \frac{2}{r^2}\frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\psi\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)} - 2\frac{I(r)}{H(r)} - M'\frac{f(r)}{r} \\
&\quad + \frac{8}{I(r)}\Bigg(- \frac{C_2\, g(r)}{2r^2}\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - \frac{C_2\, g(r)}{2r}I(r)\Bigg) \\
&= \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)}\cdot\left(\frac{2}{r^2} - \frac{4C_2 g(r)}{r^2}\right) + \\
&\quad - 2\frac{I(r)}{H(r)} - M'\frac{f(r)}{r} - \frac{4C_2 g(r)}{r} \\
&\quad \text{(per la monotonia di } g) \\
&\geq \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)}\cdot\left(\frac{2 - 4C_2 g(r_0)}{r^2}\right) + \\
&\quad - 2\frac{I(r)}{H(r)} - M'\frac{f(r)}{r} - \frac{4C_2 g(r)}{r} \\
&\overset{(3.38)}{>} \frac{\displaystyle\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}}{I(r)}\cdot\frac{1}{r^2} - 2\frac{I(r)}{H(r)} - M'\frac{f(r)}{r} - \frac{4C_2 g(r)}{r} \\
&= \frac{\displaystyle H(r)\int_{\partial\Omega_r}(Xu)^2\,\psi\,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|} - 2(rI(2))^2}{r^2 I(r)H(r)} - M'\frac{f(r)}{r} - \frac{4C_2 g(r)}{r} \\
&\overset{(b)}{>} -M'\frac{f(r)}{r} - \frac{4C_2 g(r)}{r} \geq M_5\Bigg(\frac{f(r)+g(r)}{r}\Bigg),
\end{aligned}
$$

per una costante positiva $M_5 = M_5(Q, C_1, C_2, f(r_0), g(r_0)) > 0$. Abbiamo quindi dimostrato l'asserto anche nel caso (b). $\square$

Possiamo ora dimostrare i Teoremi 2.1 e 2.3.

Dimostrazione (del Teorema 2.1). Osserviamo anzitutto che da (3.24) si ricava (dopo semplici calcoli)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\log\frac{H(t)}{t^{Q-1}}\right\} = 2\frac{N(t)}{t}, \quad \text{per ogni } t \in (0, r_0).$$

Integriamo ora tra r e $2r$ dove $2r < r_0$. Al primo membro si ottiene

$$\left[\log\frac{H(t)}{t^{Q-1}}\right]_{t=r}^{t=2r} = \log\frac{H(2r)}{(2r)^{Q-1}} - \log\frac{H(r)}{r^{Q-1}} = \log\frac{H(2r)}{2^{Q-1}H(r)}.$$

Di conseguenza, per ogni $r \in \left(0, \frac{r_0}{2}\right)$ si ha

$$\log\frac{H(2r)}{2^{Q-1}H(r)} = 2\int_r^{2r} N(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{3.39}$$

È nostra intenzione mostrare che $N(t)$ è una funzione superiormente limitata su $(0, r_0)$. Poniamo quindi $\Gamma_{r_0} := \Lambda_{r_0} \cap \{t \in (0, r_0) \,|\, N(t) > N(r_0)\}$. Ovviamente $\Gamma_{r_0} \subseteq \Lambda_{r_0}$ e dalla definizione di Λ_{r_0} si ha subito

$$\Gamma_{r_0} = \left\{t \in (0, r_0) \,\middle|\, N(t) > \max\{1, N(r_0)\}\right\}.$$

Chiaramente se $r \in (0, r_0) \smallsetminus \Gamma_{r_0}$, allora $N(r) \leq \max\{1, N(r_0)\}$ (e avremmo provato la citata limitatezza). Supponiamo dunque $r \in \Gamma_{r_0}$. Osserviamo che, per la continuità di N, Γ_{r_0} è un aperto di $\mathbb{R}$, dunque della forma

$$\Gamma_{r_0} = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j), \qquad a_j, b_j \notin \Gamma_{r_0}.$$

Da un calcolo diretto si osserva che, per ogni j e per ogni $r \in (a_j, b_j)$, vale

$$\log\frac{N(b_j)}{N(r)} = \int_r^{b_j}\frac{N'(t)}{N(t)}\,\mathrm{d}t \overset{(3.34)}{\geq} -M\int_0^{r_0}\big(f(t) + g(t)\big)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

da cui segue

$$\log\frac{N(r)}{N(b_j)} \leq M\int_0^{r_0}\big(f(t) + g(t)\big)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

La monotonia della funzione esponenziale comporta

$$\frac{N(r)}{N(b_j)} \leq \exp\left\{M\int_0^{r_0}\big(f(t) + g(t)\big)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\} \qquad \forall\, r \in (a_j, b_j).$$

Da questa disuguaglianza, osservando che, per la continuità di N, per ogni b_j della decomposizione precedente vale $N(b_j) = \max\{1, N(r_0)\} > 0$, possiamo dedurre che

$$N(r) \leq \exp\left\{M \int_0^{r_0} \big(f(t) + g(t)\big)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\} \max\{1, N(r_0)\}$$

per ogni $r \in \Gamma_{r_0}$ e che quindi N è superiormente limitata su $(0, r_0)$. Riassumendo, abbiamo ottenuto (per $0 < r < r_0/2$)

$$\log \frac{H(2r)}{2^{Q-1}H(r)} \stackrel{(3.39)}{=} 2\int_r^{2r} N(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq 2 \sup_{(0,r_0)} N \int_r^{2r} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2 \sup_{(0,r_0)} N \log 2.$$

Da ciò segue

$$H(2r) \leq 2^{Q-1} \exp\left\{2 \sup_{(0,r_0)} N \log 2\right\} H(r) \quad \text{per ogni } r \in \left(0, \frac{r_0}{2}\right).$$

Ponendo $\chi = \chi(u) := 2^{Q-1} \exp\left\{2 \sup_{(0,r_0)} N \log 2\right\}$ e integrando rispetto ad r la precedente disuguaglianza, otteniamo (per $0 < r' < r_0/2$)

$$\int_0^{r'} \int_{\partial\Omega_{2r}} u^2\psi \,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}r \leq \chi \int_0^{r'} \int_{\partial\Omega_r} u^2\psi \,\frac{\mathrm{d}H_{N-1}}{|\nabla d|}\,\mathrm{d}r.$$

Servendosi quindi della Formula di Coarea, si ha

$$\int_{\Omega_{2r'}} u^2\psi \;\mathrm{d}H_N \leq \chi \int_{\Omega_{r'}} u^2\psi \;\mathrm{d}H_N \quad \text{per ogni } r' \in \left(0, \frac{r_0}{2}\right).$$

Si è dunque dimostrato l'asserto. □

Dimostrazione (del Teorema 2.3). Sia u una soluzione di $-\Delta_{\mathbb{H}} u + Vu = 0$ che si annulla con ordine infinito nell'origine, sia r_0 come nel Teorema 2.1 e sia $r := r_0/2$. Si può mostrare, induttivamente, che dopo k iterazioni di (2.21) si ha

$$\int_{\Omega_r} u^2\psi \;\mathrm{d}H_N \leq \chi^k \int_{\Omega_{r/2^k}} u^2\psi \;\mathrm{d}H_N.$$

Osserviamo ora che vale

$$|\Omega_\rho| = \alpha_Q\, \rho^Q, \quad \text{per ogni } \rho \in \mathbb{R},$$

ove $|\Omega_\rho|$ indica la misura di Lebesgue della ρ-palla e α_Q è una costante dimensionale opportuna. Scegliamo ora $\beta = \beta(u)$ tale per cui $\chi = 2^{\beta Q}$. Un calcolo diretto mostra che

$$\chi^k |\Omega_{r/2^k}|^\beta = \alpha_Q^\beta r^{\beta Q} \left(\frac{\chi}{2^{\beta Q}} \right)^k = \alpha_Q^\beta r^{\beta Q} = |\Omega_r|^\beta.$$

Ora, indicando con $[\beta Q]$ la parte intera di βQ, si osserva facilmente che vale quanto segue: per tutti i k sufficientemente grandi (dipendentemente da u)[2]

$$\begin{aligned}
\chi^k \int_{\Omega_{r/2^k}} u^2 \psi \, \mathrm{d}H_N &= \frac{\chi^k |\Omega_{r/2^k}|^\beta}{|\Omega_{r/2^k}|^\beta} \int_{\Omega_{r/2^k}} u^2 \psi \, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{|\Omega_r|^\beta}{|\Omega_{r/2^k}|^\beta} \int_{\Omega_{r/2^k}} u^2 \psi \, \mathrm{d}H_N \\
&= \frac{|\Omega_r|^\beta}{\alpha_Q^\beta \left(\frac{r}{2^k} \right)^{\beta Q}} \int_{\Omega_{r/2^k}} u^2 \psi \, \mathrm{d}H_N \\
&\quad \text{(poiché } u \text{ si annulla con ordine infinito nell'origine)} \\
&\overset{(2.22)}{\leq} \frac{|\Omega_r|^\beta}{\alpha_Q^\beta \left(\frac{r}{2^k} \right)^{\beta Q}} C_{[\beta Q]+2} \left(\frac{r}{2^k} \right)^{[\beta Q]+2} \\
&\quad \text{(poiché } [\beta Q] - \beta Q \geq -1) \\
&\leq \frac{C_{[\beta Q]+2} |\Omega_r|^\beta}{\alpha_Q^\beta} \frac{r}{2^k}.
\end{aligned}$$

Riassumendo, si è visto che vale (per $k \gg 1$)

$$0 \leq \int_{\Omega_r} u^2 \psi \, \mathrm{d}H_N \leq \frac{C_{[\beta Q]+2} |\Omega_r|^\beta}{\alpha_Q^\beta} \frac{r}{2^k}.$$

Per $k \to \infty$ il membro destro dell'ultima disuguaglianza tende a zero. Concludiamo dunque che deve essere $u \equiv 0$ in $\Omega_{r_0} \setminus \{(x,t) \, : \, |x| \neq 0\}$ e dunque, per la continuità di u, $u \equiv 0$ su tutto Ω_{r_0}. $\square$

[2]Con le notazioni in (2.22), basta scegliere $k \gg 1$ in modo che $r/2^k < r_{[\beta Q]+2}$.

Conclusioni

Nel presente elaborato si è affrontato lo studio del Principio Forte di Continuazione Unica per opportune soluzioni dell'equazione $\Delta_{\mathbb{H}} u = Vu$ dove $\Delta_{\mathbb{H}}$ è il sub-Laplaciano canonico di un gruppo di tipo H e V è un opportuno potenziale. Fondamentali sono stati sia l'utilizzo delle formule di media, sia lo studio di un Principio di Indeterminazione per i gruppi di tipo H.

Abbiamo inoltre fornito il nostro contributo nel trovare una formula per la variazione prima dell'integrale di Dirichlet associato a $\Delta_{\mathbb{H}} u = Vu$. Tutto ciò è stato necessario per studiare le proprietà di crescita di funzioni di frequenza su $\mathbb{H}$, utili a dimostrare le agognate stime integrali che implicano in modo piuttosto immediato la unique continuation, principale oggetto del nostro studio.

Seguendo lo stesso spirito con cui è nato questo lavoro, è attualmente oggetto di ricerca l'estensione al caso di tutti i gruppi di Carnot.[3]

[3]Comunicazione personale di A. Bonfiglioli e S. Biagi.

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. Bonfiglioli per la sua pazienza, per il tempo che mi ha dedicato e per aver reso la creazione di questa Tesi un'esperienza vivace ed illuminante.

Ringrazio i miei genitori, per avermi sempre dato il loro sostegno e la loro fiducia in quanto facevo.

Ringrazio di cuore infine amici e parenti, che specie in questo periodo mi hanno fatto sentire la loro presenza.

Bibliografia

[1] H. Bahouri: Non prolongement unique des solutions d'opérateurs "somme de carrés", *Annales de l'Institut Fourier*, **36**, 137–155, (1986).

[2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag: Berlin, 2007.

[3] J. Bony: Principe du maximum et inégalité de Harnack pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *Annales de l'Institut Fourier*, **19**, 277–304, (1969).

[4] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer, New York (1969).

[5] N. Garofalo, E. Lanconelli: Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation *Annales de l'Institut Fourier*, **40**, 313–356, (1990).

[6] N. Garofalo, F. H. Lin, Unique continuation for elliptic operators: A geometric-variational approach, *Comm. Pure Appl. Math.*, **40**, 347-366, (1987).

[7] A. Kaplan: Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**, 147-153 (1980).

[8] J. L. Kazdan: Unique continuation in geometry, *Comm. Pure Appl. Math.* **41**, 667-681,(1988).

[9] M. Ruffilli: *Dimostrazione e applicazioni del Teorema di Campbell, Baker e Hausdorff*, Alma Mater Studiorum – Università di Bologna, Tesi di Laurea, 2012/2013.