

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**SUPERFICI TOPOLOGICHE
COMPATTE E
CURVE ALGEBRICHE**

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

**Relatore:
Chiar.mo Prof.
ALESSANDRO
GIMIGLIANO**

**Presentata da:
ANDREA RENDINA**

**II Sessione
Anno Accademico 2014/2015**

Introduzione

In topologia il problema di classificazione delle varietà è un argomento che ha visto impegnati numerosi matematici negli ultimi due secoli. Il problema della classificazione consiste nel trovare un algoritmo capace di stabilire, in un numero finito di passi, se due varietà topologiche sono o meno omeomorfe. Se da una parte sono già stati raggiunti risultati importanti in questo campo, dall'altra vi sono problemi tutt'ora aperti. In particolare, per le varietà reali connesse, compatte e prive di bordo, in dimensione 1 la loro classificazione è banale, in quanto ogni varietà con tali proprietà è omeomorfa alla circonferenza.

Per quanto riguarda la classificazione delle superfici (2-varietà) reali, compatte e prive di bordo, il problema ha visto impegnati molti matematici nel corso dei due secoli scorsi, come ad esempio Möbius, Klein, Riemann, Seifert e Jordan. Si è giunti quindi ad una soluzione del problema e la formulazione del teorema di classificazione si deve a Von Dick (1888). La classificazione delle 2-varietà non compatte è stata invece formulata inizialmente da Kerékjártó (1923) e sistemata poi da Richards (1963).

La classificazione delle 3-varietà reali rimane ad oggi un problema irrisolto. Infine, nel 1958 Markov dimostrò che non può esistere un algoritmo finito che classifichi le varietà reali di dimensione maggiore o uguale a 4.

In questa tesi affronteremo lo studio delle superfici reali, compatte e prive di bordo partendo dai concetti di triangolazione e sviluppo piano di una superficie. Daremo quindi una dimostrazione del teorema di classificazione

attraverso l'utilizzo della tecnica del "taglia e incolla". Un importante risvolto di tale teorema è evidente in geometria algebrica. Mostriamo, illustrando alcuni esempi, che ogni curva algebrica proiettiva complessa non singolare e irriducibile è topologicamente equivalente a una superficie orientabile, e quindi classificabile.

In particolare, nel primo capitolo daremo alcune definizioni necessarie per affrontare i capitoli successivi. Dopo aver definito il concetto di superficie topologica e illustrato alcune sue proprietà, daremo la nozione di triangolazione e di sviluppo piano per una superficie compatta. Definiremo infine alcuni modelli standard di superficie compatta quali il piano proiettivo, il toro e la sfera e mostriamo i rispettivi sviluppi piani.

Nel secondo capitolo enuncieremo e dimostreremo il teorema di classificazione. La tecnica utilizzata per questa dimostrazione si deve a Dehn e Heegard (1907) e presenta una struttura esplicitamente algoritmica, svolta in passi successivi.

Nel terzo e ultimo capitolo, dopo aver dato alcune definizioni preliminari, proveremo che ogni curva algebrica non singolare è topologicamente equivalente a una superficie compatta orientabile. Illustreremo infine la Formula del Genere che, data una curva algebrica non singolare ne stabilisce il genere a partire dal grado del polinomio omogeneo che la rappresenta.

Indice

Introduzione	i
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Superfici: definizione ed esempi	1
1.2 Superfici orientabili e non orientabili	2
1.3 Triangolazione e poligoni regolari	4
2 Classificazione delle superfici compatte	7
2.1 L'operazione di "taglia e incolla"	7
2.2 Sviluppo piano di una superficie	10
2.3 Somma connessa di superfici	16
2.4 Il teorema di classificazione delle superfici compatte	19
3 Curve algebriche	25
3.1 Definizioni ed esempi	25
3.2 Topologia delle curve algebriche	28
3.3 La formula del genere	34
Bibliografia	37

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo raccogliamo alcune definizioni e teoremi che ci serviranno nei capitoli successivi.

1.1 Superfici: definizione ed esempi

In questa sezione presentiamo la nozione di superficie topologica, superficie compatta, con bordo, di equivalenza tra superfici e di genere di una superficie.

Definizione 1.1. Una *superficie (topologica)* S è uno spazio topologico, connesso e di Hausdorff tale che ogni suo punto ammette un intorno aperto omeomorfo al disco aperto del piano: $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Definizione 1.2. Uno spazio topologico X si dice compatto se, dato un ricoprimento di aperti di X , esiste sempre un sottoricoprimento finito.

Gli esempi piú noti di superficie compatta sono:

- a) la 2-sfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$;
- b) il toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$;
- c) il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Definizione 1.3. Una superficie S si dice *con bordo* se ogni punto ammette un intorno omeomorfo al disco D^2 oppure al semipiano $\{(x, y) | x \geq 0\}$ di \mathbb{R}^2 . I punti del secondo tipo formano il *bordo* della superficie S .

Esempi di superficie con bordo sono:

- a) il disco chiuso $\overline{D^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- b) il cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 1\}$

Definizione 1.4. Data una superficie S , si definisce *genere* della superficie S il numero più grande di curve semplici chiuse contenute in S che non la sconnettono.

Definizione 1.5. Due superfici S e P si dicono *equivalenti* se esiste un omeomorfismo

$$f : S \longrightarrow P$$

D'ora in avanti utilizzeremo il simbolo \cong per indicare un omeomorfismo.

1.2 Superfici orientabili e non orientabili

In questa sezione presentiamo la definizione di superficie *orientabile* e *non orientabile*.

Definizione 1.6. Sia $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ il quadrato chiuso del piano e se ne identifichino i lati come a sinistra in Figura 1.1. La superficie ottenuta si chiama *nastro di Möbius* ed è omeomorfa alla superficie mostrata a destra in Figura 1.1.

Definizione 1.7. Una superficie S si dice *orientabile* se non contiene alcun nastro di Möbius e *non orientabile* se contiene un nastro di Möbius.

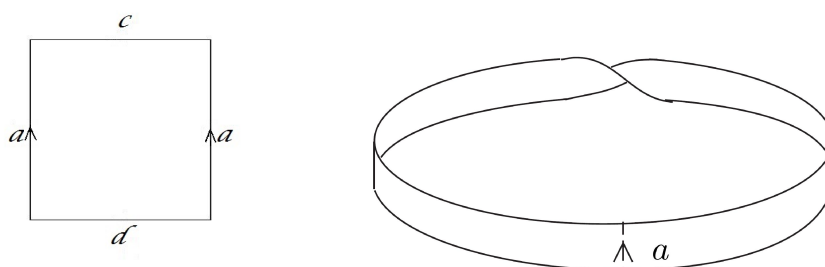


Figura 1.1: il nastro di Möbius

Definizione 1.8.

Sia Q quozientato mediante la relazione di equivalenza mostrata in Figura 1.2, allora la superficie ottenuta si chiama *bottiglia di Klein* e sarà indicata da ora in poi con \mathbb{K} .

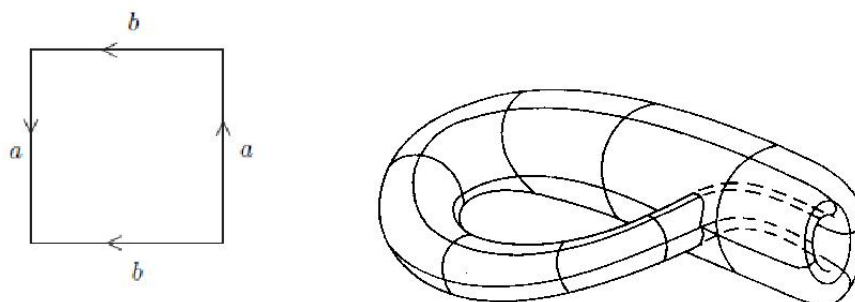


Figura 1.2: bottiglia di Klein

Esempi di superficie non orientabile sono:

- a) il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$;
- b) la bottiglia di Klein \mathbb{K} .

Esempi di superficie orientabile sono:

- a) il toro \mathbb{T} ;
- b) la sfera S^2 .

Osservazione 1. Il genere di una superficie compatta orientabile corrisponde esattamente al numero di “manici”, o di “buchi”, della superficie.

1.3 Triangolazione e poligoni regolari

Definiamo in questa sezione cosa si intende per triangolazione di una superficie compatta.

Definizione 1.9. Sia S una superficie compatta. Sia T un sottoinsieme chiuso di S , T' un triangolo chiuso del piano e

$$\phi : T' \longrightarrow T$$

un omeomorfismo. Allora la terna ordinata (T, T', ϕ) è detta *triangolo* della superficie compatta S .

Definizione 1.10. Sia $\{(T_1, T'_1, \phi_1), \dots, (T_n, T'_n, \phi_n)\}$ un insieme finito di triangoli di una superficie compatta S tale che:

- 1) $\bigcup_{i=1}^n T_i = S$;
- 2) $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ $T_i \cap T_j$ è vuota, oppure è tale che $\phi_i^{-1}(T_i \cup T_j)$ e $\phi_j^{-1}(T_i \cup T_j)$ sono due vertici, oppure due interi e unici lati.

Allora $\{T_1, \dots, T_n\}$ si dice una *triangolazione* di S .

Definizione 1.11. Se S ammette una triangolazione, allora S si dice *triangolabile*.

Definizione 1.12. Sia P un poligono regolare chiuso, avente un numero pari di lati, quozientato rispetto ad una relazione di equivalenza che identifica opportunamente i lati del poligono a coppie. Sia S una superficie compatta. Se $S \cong P$ allora P è detto *sviluppo piano* della superficie S .

Nel capitolo successivo identificheremo le superfici compatte con spazi quoziente di poligoni regolari chiusi attraverso opportune identificazioni dei lati tra loro a coppie.

Definiamo un rapido metodo per identificare i poligoni quozientati in questo modo.

Definizione 1.13. Sia P un poligono regolare chiuso e con un numero di lati pari identificati tra loro a coppie; si scelga uno dei vertici e si percorrano i lati in senso antiorario a partire da quel vertice, scrivendo di seguito le lettere corrispondenti a formare una parola. Ad ogni lettera si assegna l'esponente -1 se il verso di percorrenza del lato corrispondente è quello orario, se il verso è invece antiorario si assegna l'esponente $+1$. Normalmente l'esponente $+1$ viene omissivo.

Esempio 1.1. Il quadrato in Figura 1.3 è identificato con la parola $aba^{-1}b^{-1}$. Dimostreremo nel capitolo successivo che il quadrato con questa identificazione dei lati è omeomorfo al toro \mathbb{T} .

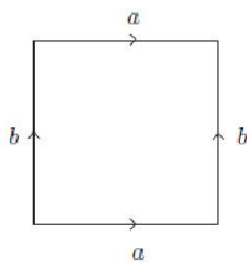


Figura 1.3: quoziente del quadrato omeomorfo al toro

Capitolo 2

Classificazione delle superfici compatte

2.1 L'operazione di "taglia e incolla"

Nella prima sezione di questo capitolo vediamo alcuni teoremi che saranno lo strumento necessario per lo studio delle superfici.

Lemma 2.1.1 (del "taglia e incolla" [1]).

Si consideri nel piano un poligono chiuso e convesso P .

Siano P_1 e P_2 due poligoni chiusi e convessi tali che $P_1 \cup P_2 = P$ e $P_1 \cap P_2 = d$, dove d è una corda di P .

Rispettivamente, si applichino a P_1 e P_2 due movimenti rigidi del piano s_1 e s_2 tali che $s_1(P_1) = Q_1$ e $s_2(P_2) = Q_2$ siano tra loro disgiunti, come mostrato in Figura 2.1.1. Sia $Q = Q_1 \cup Q_2$ e sia \sim la relazione definita su Q tale che:

$$x \sim y \quad \text{se} \quad x = y;$$

oppure

$$x \in s_1(d), y \in s_2(d), s_1^{-1}(x) = s_2^{-1}(y);$$

oppure

$$x \in s_2(d), y \in s_1(d), s_2^{-1}(x) = s_1^{-1}(y).$$

Allora il poligono chiuso P dotato della topologia indotta da \mathbb{R}^2 è omeomorfo a Q/\sim dotato della topologia quoziente.

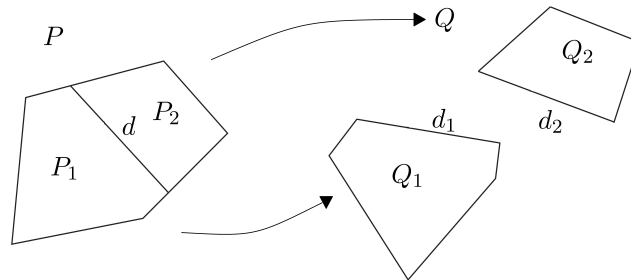


Figura 2.1: operazione del “taglia e incolla”

Lemma 2.1.2.

Sia T un triangolo del piano e siano l , m e n i suoi lati. Sia $\varphi : l \rightarrow l$ un omeomorfismo che fissa gli estremi di l . Allora esiste un omeomorfismo $\phi : T \rightarrow T$ tale che $\phi|_l = \varphi$ e $\phi|_m = \phi|_n = id$

Dimostrazione. A meno di isomorfismi lineari, si può supporre che T sia rettangolo isoscele con i cateti l ed s di lunghezza unitaria piazzati, rispettivamente, lungo l'asse y e l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale come in Figura 2.1. Sia $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ un omeomorfismo tale $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$, allora possiamo riscrivere l'omeomorfismo ϕ come:

$$(0, y) \mapsto (0, \varphi(y)) \quad (0 \leq y \leq 1)$$

Sia Φ l'applicazione tale che

$$\Phi = \begin{cases} (x, (1-x)\varphi(\frac{y}{x-1})) & 0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x \\ (1, 0) & \text{per } x = 1 \text{ e } y = 0 \end{cases}$$

Allora è facile verificare che $\Phi : T \rightarrow T$ è un omeomorfismo e soddisfa la tesi. \square

Vediamo il risultato principale di questa sezione.

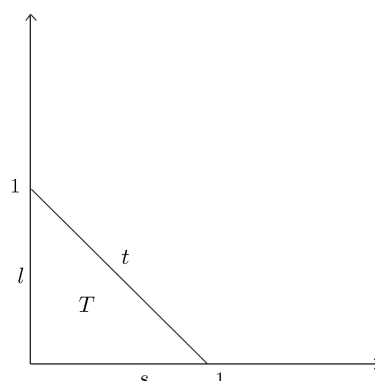


Figura 2.2: triangolo isoscele

Proposizione 2.1.3 (del "taglia e incolla non lineare").

Sia R un poligono convesso chiuso del piano e sia T un triangolo esterno ad esso. Siano d_1 un lato di R e d_2 un lato di T . Se $\phi : d_1 \rightarrow d_2$ è un omeomorfismo e \sim la relazione:

$$\forall x \in d_1, \forall y \in d_2, x \sim y \iff y = \phi(x)$$

Allora $(R \cup T) / \sim$ è omeomorfo allo spazio ottenuto facendo coincidere con un movimento rigido sul triangolo T i lati d_1 e d_2 in modo che il terzo vertice del triangolo T sia esterno a R .

Dimostrazione.

È facile verificare che \sim sia una relazione di equivalenza.

A meno di un'omotetia possiamo supporre d_1 e d_2 della stessa lunghezza.

Sia r un movimento rigido del piano che porta T in T' tale che il lato $r(d_2)$ coincida con il lato d_1 di R e che il terzo vertice di T' sia esterno a R .

Definiamo la funzione $\chi = r^{-1} \circ \phi^{-1}$, allora $\chi : d_2 \rightarrow d_2$ è un omeomorfismo che possiamo supporre a estremi fissi. Quindi, per il Lemma 2.1.2 esiste un omeomorfismo $\psi : T \rightarrow T$ tale che $\psi|_{d_2} = \chi$. Allora il poligono R e il triangolo $\psi(T)$ soddisfano le ipotesi del Lemma 2.1.1 e si ha la tesi. \square

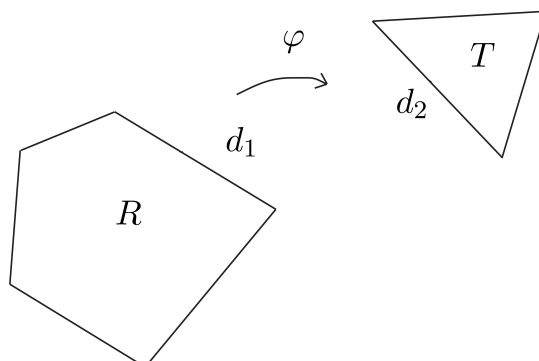


Figura 2.3: operazione del “taglia e incolla non lineare”

2.2 Sviluppo piano di una superficie

Abbiamo definito nel primo capitolo cosa si intende per sviluppo piano di una superficie. In questa sezione proveremo che ogni superficie compatta ne ammette uno. Per arrivare a questo risultato enunciamo un importante teorema dimostrato da Radó nel 1925. Per la dimostrazione vedere [2].

Teorema 2.2.1 (Teorema di Radó).

Ogni superficie compatta è triangolabile.

Enunciamo inoltre un utile risultato di topologia.

Teorema 2.2.2 (Compact-Hausdorff Theorem, vedi [3]).

Sia X uno spazio topologico compatto e sia Y uno spazio topologico di Hausdorff. Se

$$f : X \longrightarrow Y$$

è un'applicazione biunivoca e continua allora f è un omeomorfismo.

Grazie al teorema di Radó possiamo dimostrare il risultato principale di questa sezione:

Teorema 2.2.3.

Ogni superficie compatta ammette uno sviluppo piano.

Dimostrazione.

Sia S una superficie compatta. Per il teorema di Radò, S ammette una triangolazione $\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$. Siano $\{T'_1, \dots, T'_n\}$ e $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, rispettivamente, i triangoli del piano e gli omeomorfismi associati alla triangolazione τ tali che $\phi_i(T'_i) = T_i$ per $i = 1, \dots, n$. Si può supporre, a meno di traslazioni opportune, che i triangoli del piano $\{T'_1, \dots, T'_n\}$ siano a due a due disgiunti.

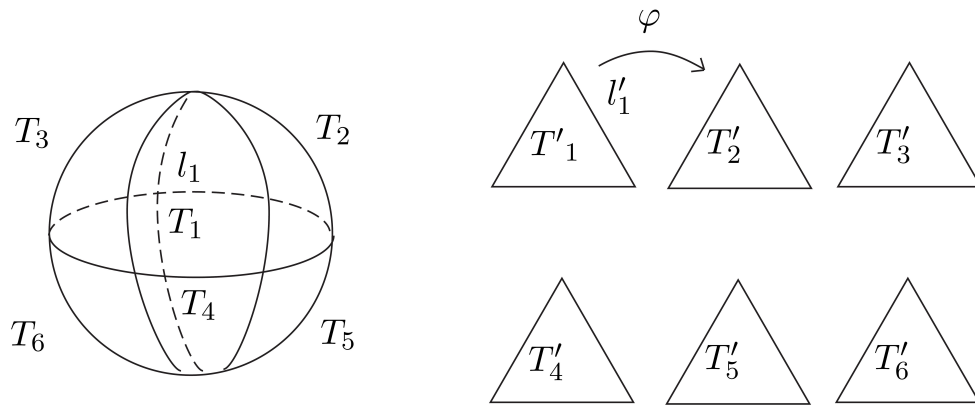


Figura 2.4: prima fase della dimostrazione

Si consideri T'_1 , sia l'_1 uno dei suoi lati e sia $l_1 = \phi_1(l'_1)$ il corrispondente lato di T_1 . Il lato l_1 è comune ad un altro triangolo della triangolazione τ . Sia dunque $T_2 \in \tau$ il triangolo tale che $T_1 \cap T_2 = l_1$ e sia $\varphi = (\phi_2^{-1} \circ \phi_1)|_{l'_1}$ il naturale omeomorfismo tra il lato l'_1 di T'_1 e il lato $\phi_2^{-1}(l_1)$ di T'_2 . Si consideri $T'_1 \cup T'_2$ e lo si quotienti mediante la relazione di equivalenza indotta dall'omeomorfismo φ , ottenendo lo spazio quoziente M . Per la Proposizione 2.1.3 M è omeomorfo ad un quadrilatero P' chiuso del piano. Sia

$$\psi : T'_1 \cup T'_2 \longrightarrow T_1 \cup T_2$$

l'applicazione definita come

$$\psi = \begin{cases} \phi_1 \text{ su } T'_1 \\ \phi_2 \text{ su } T'_2 \end{cases}$$

allora ψ è un'applicazione continua che passa al quoziente M e definisce in modo naturale un'applicazione continua dal quadrilatero P' al quadrilatero $T_1 \cup T_2$ della superficie S .

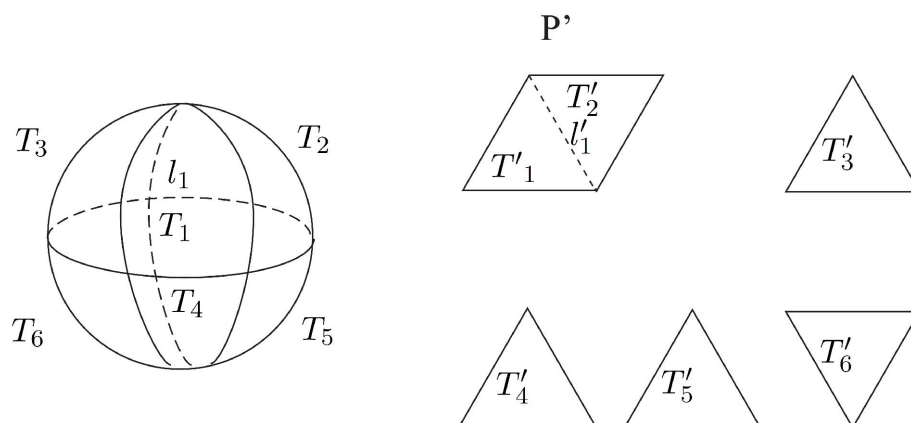


Figura 2.5: seconda fase della dimostrazione

Si ripeta il procedimento sopra esposto prendendo al posto di T'_1 il quadrilatero P' e considerando i restanti triangoli $\{T'_3, \dots, T'_n\}$ della triangolazione. Dopo $n - 1$ passi si ottengono un poligono chiuso R' del piano ed una applicazione $\Psi : R' \rightarrow S$ continua e suriettiva che ristretta alla parte interna R' è un omeomorfismo sull'immagine, e tale che la sua restrizione su un qualunque lato di R' è un omeomorfismo su un lato di un triangolo della triangolazione τ di S . Siccome S è una superficie, l'immagine attraverso ψ di un lato di R' è esattamente immagine di due lati distinti di R' . Pertanto R' ha un numero pari di lati e identificandoli opportunamente nel modo indotto da Ψ si ottiene uno spazio quoziente R'' e un'applicazione $\Psi' : R'' \rightarrow S$ continua e biunivoca.

Poichè R'' è compatto e S è di Hausdorff, per il Compact-Hausdorff Theorem 2.2.2, Ψ' è un omeomorfismo. \square

Esempio 2.1 (Il toro \mathbb{T}).

Si consideri il quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ del piano con la topologia indotta da \mathbb{R}^2 . Si consideri la relazione di equivalenza \sim definita su Q che ne identifica i lati a due a due come mostrato in Figura 1.3.

Sia π la proiezione canonica sul quoziente da Q a Q/\sim . Poichè Q è compatto e connesso, allora anche Q/\sim è compatto e connesso.

Per dimostrare che Q/\sim è uno spazio di Hausdorff è sufficiente provare che $F = \{(p, q) \in Q \times Q : \pi(p) = \pi(q)\}$ è chiuso in $Q \times Q$.

Si considerino i seguenti insiemi:

$$C_1 = \{((x, y), (x, y)) \in Q \times Q \mid (x, y) \in Q\};$$

$$C_2 = \{((0, y), (1, y)) \in Q \times Q \mid y \in [0, 1]\};$$

$$C_3 = \{((1, y), (0, y)) \in Q \times Q \mid y \in [0, 1]\};$$

$$C_4 = \{((x, 0), (x, 1)) \in Q \times Q \mid x \in [0, 1]\};$$

$$C_5 = \{((x, 1), (x, 0)) \in Q \times Q \mid x \in [0, 1]\};$$

$$C_6 = \{((0, 0), (1, 1)), ((1, 1), (0, 0)), ((0, 1), (1, 0)), ((1, 0), (0, 1))\}.$$

Si ha che $F = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$ e che C_1 è chiuso perchè Q è di Hausdorff e C_1 è la diagonale del prodotto di Q con se stesso. C_6 è chiuso perchè unione finita di punti in uno spazio di Hausdorff (il prodotto di spazi di Hausdorff è ancora uno spazio di Hausdorff). Infine, è possibile definire delle funzioni continue da \mathbb{R} a $Q \times Q$ tali che C_2, C_3, C_4 e C_5 siano immagini del compatto $[0, 1]$ e, essendo sottoinsiemi di uno spazio di Hausdorff, risultano compatti e di Hausdorff, quindi chiusi. Perciò $F = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$ è un chiuso.

Allora Q/\sim è uno spazio compatto, connesso e di Hausdorff.

Sia p un punto della parte interna di Q e si prenda $D = D(p, \epsilon)$ un disco di centro p e raggio ϵ tale che non intersechi il bordo di Q ; allora $\pi|_D$ è un omeomorfismo e quindi p ammette un intorno omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^2 . Se invece p è un punto che sta sul bordo di Q è sufficiente applicare la Proposizione 2.1.3 per ricondurci al caso precedente in cui p è interno al quadrato Q .

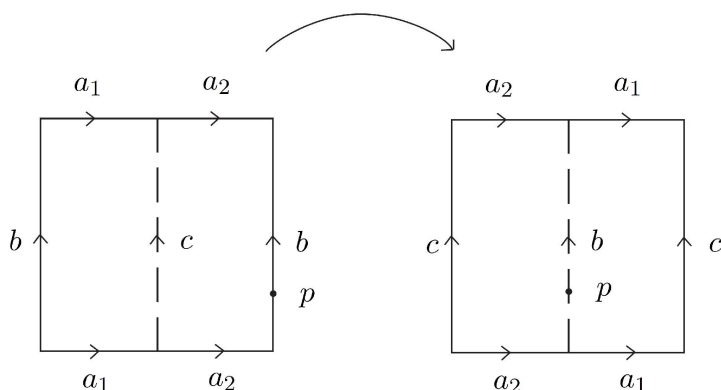


Figura 2.6: caso di un punto che appartiene a uno dei lati, ma non è un vertice

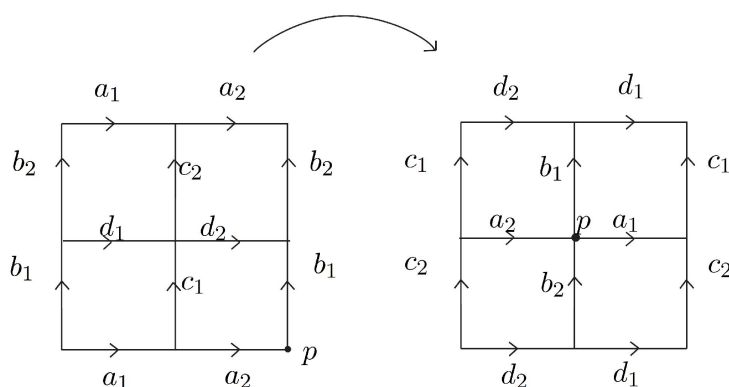


Figura 2.7: caso di un punto che è un vertice

È quindi dimostrato che lo sviluppo piano di un toro \mathbb{T} è Q/\sim .

Esempio 2.2 (La 2-sfera S^2).

Sia Q/\sim lo spazio quoziente ottenuto mediante la relazione di equivalenza \sim che identifica i lati del quadrato a due a due, come mostrato in Figura 2.8. Allora Q/\sim è omeomorfo alla sfera S^2 dello spazio. Si può anche dimostrare che S^2 è omeomorfa al quoziente del disco unitario D^2 con l'identificazione mostrata in figura 2.9.

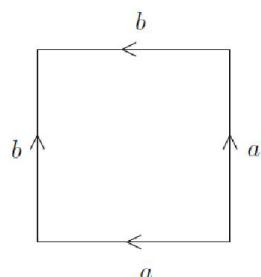


Figura 2.8: sviluppo piano della sfera

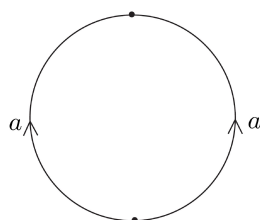


Figura 2.9: quoziente del disco omeomorfo alla sfera

Esempio 2.3 (Il piano proiettivo).

Se si identificano i lati di Q come in Figura 2.10 otteniamo lo sviluppo piano di un piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Si può anche dimostrare che il piano proiettivo è omeomorfo al quoziente del disco unitario D^2 con l'identificazione mostrata in figura 2.11.

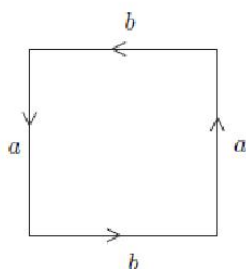


Figura 2.10: sviluppo piano del piano proiettivo

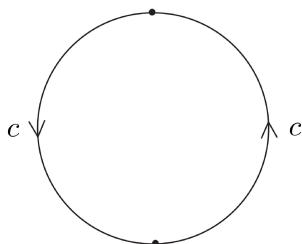


Figura 2.11: quoziente del disco omeomorfo al piano proiettivo

Con la caratterizzazione che è stata data nel primo capitolo gli spazi appena visti si identificano nel seguente modo:

\mathbb{T}	$aba^{-1}b^{-1}$
S^2	$abb^{-1}a^{-1}$ oppure aa^{-1}
\mathbb{K}	$aba^{-1}b$
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$	$abab$ oppure aa

2.3 Somma connessa di superfici

In questa sezione vedremo cosa si intende per somma connessa di superfici. Essa, insieme ai risultati visti sinora, ci permetterà di vedere alcuni interessanti esempi di “chirurgia topologica” e di classificare le superfici compatte.

Definizione 2.1. Siano S_1 e S_2 due superfici compatte e disgiunte, e siano $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ due dischi chiusi. Sia S'_i il complemento dell'interno di D_i in S_i per $i = 1, 2$. Si scelga un omeomorfismo h dal bordo circolare di D_1 al bordo circolare di D_2 . Allora lo spazio quoziente $S'_1 \cup S'_2$ ottenuto identificando i punti x e $h(x)$ per ogni punto appartenente a D_1 è ancora una superficie e viene chiamato *somma connessa* di S_1 e S_2 .

D'ora in avanti utilizzeremo il simbolo $\#$ per indicare la somma connessa di superfici.

Osservazione 2. Risulta chiaro dalla definizione che non c'è distinzione tra $S_1 \# S_2$ e $S_2 \# S_1$, cioè la somma connessa è commutativa. Inoltre, non è difficile verificare che le superfici $(S_1 \# S_2) \# S_3$ e $S_1 \# (S_2 \# S_3)$ sono omeomorfe. Se S^2 è la 2-sfera, allora è facile verificare che per ogni superficie S_1 si avrà che $S_1 \# S^2 \cong S_1$, ossia che S^2 è l'elemento neutro della somma connessa. Si giunge alla conclusione che l'insieme delle classi di omeomorfismo di superfici compatte è un monoide commutativo unitario.

È interessante, e sarà utile in quel che segue, sviluppare alcuni esempi fondamentali.

Esempio 2.4. Si considerino due piani proiettivi ottenuti come quoziente di due dischi unitari del piano disgiunti mediante le identificazioni dei lati c_1c_1 e c_2c_2 . La successione degli omeomorfismi mostrati in Figura 2.12 dimostra che la somma connessa di due piani proiettivi è omeomorfa alla superficie ottenuta da un quadrato chiuso del piano identificando i lati secondo la parola $c_1c_1c_2c_2$. Ripetendo lo stesso procedimento si dimostra che la somma connessa di tre piani proiettivi è omeomorfa allo spazio quoziente di un esagono con i lati identificati secondo la parola $c_1c_1c_2c_2c_3c_3$ e si prova per induzione che la somma connessa di n piani proiettivi è omeomorfa allo spazio quoziente di un poligono di $2n$ lati identificati secondo la parola $c_1c_1 \dots c_n c_n$.

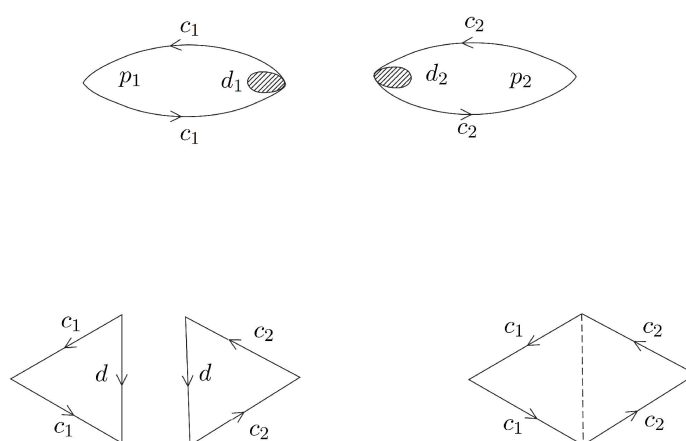


Figura 2.12: somma connessa di due piani proiettivi

Esempio 2.5. Si considerino un toro \mathbb{T}_1 , ottenuto come quoziente di un quadrato chiuso del piano mediante l'identificazione dei lati $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$, ed un toro \mathbb{T}_2 , disgiunto dal precedente, ottenuto come quoziente di un quadrato chiuso del piano mediante l'identificazione dei lati $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ e si realizzi la somma connessa $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{T}_2$. Mediante le operazioni di “taglia e incolla” mostrate in Figura 2.13 si prova che $\mathbb{T}_1 \# \mathbb{T}_2$ è omeomorfa alla superficie ottenuta da un ottagono regolare chiuso del piano mediante l'identificazione dei lati $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.

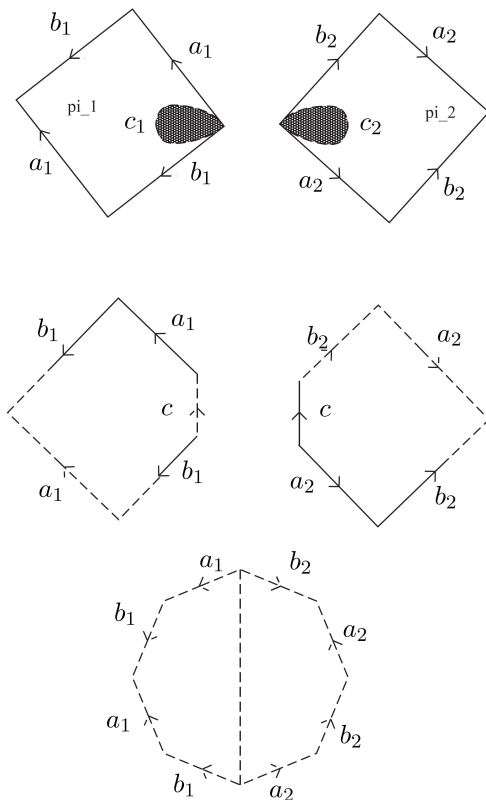


Figura 2.13: somma connessa di due tori

Ripetendo lo stesso procedimento si dimostra che la somma connessa di tre tori è omeomorfa allo spazio quoziente di un poligono di dodici lati identificati secondo la parola $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1}$ e si può dimostrare per induzione che la somma connessa di n tori è omeomorfa allo

spazio quoziente di un poligono con $4n$ lati identificati mediante la parola $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.

Enunciamo inoltre un risultato che descrive la somma connessa tra un toro e un piano proiettivo.

Lemma 2.3.1 ([4]).

$$\mathbb{T} \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

2.4 Il teorema di classificazione delle superfici compatte

A conclusione di questo capitolo, raccogliendo i frutti della teoria e dei risultati esposti, enunciamo e dimostriamo un teorema che classifica le superfici compatte a meno di omeomorfismi. La dimostrazione di questo teorema si basa sull'uso dell'operazione di "taglia e incolla" e ha una struttura manifestamente algoritmica, infatti sarà esposta in passi successivi. Prima di enunciarlo introduciamo qualche semplice notazione che ci aiuterà a svolgere più agevolmente la dimostrazione.

Notazione 1. Sia P un poligono regolare chiuso avente un numero pari di lati identificati a coppie. Come è stato stabilito nel primo capitolo, il poligono è individuato tramite una parola avente un numero finito di lettere, ognuna delle quali appare esattamente due volte. Se a due lati del poligono è stata assegnata la stessa lettera, ma con esponenti diversi, si dice che formano una *coppia del primo tipo*, se invece hanno entrambi esponente $+1$ o -1 si dice che formano una *coppia del secondo tipo*.

Teorema 2.4.1 (Teorema di classificazione delle superfici compatte).

Ogni superficie compatta è omeomorfa ad una sfera, ad una somma connessa di tori o ad una somma connessa di piani proiettivi.

Dimostrazione.

Sia S una superficie compatta. Per il Teorema 2.2.3 S ammette uno sviluppo piano, ossia è omeomorfa a un poligono regolare chiuso P i cui lati sono tra loro identificati a coppie nel modo descritto da una parola W .

Primo passo: *verifica del numero di lettere della parola.*

Se W ha una sola lettera ripetuta due volte, per esempio a , allora essa individua una coppia di lati adiacenti del primo tipo aa^{-1} che corrisponde ad una sfera, oppure una coppia di lati adiacenti del secondo tipo aa , che corrisponde ad un piano proiettivo e la dimostrazione si conclude.

Se invece W presenta almeno due lettere diverse ripetute si va al passo successivo.

Secondo passo: *eliminazione delle coppie di lati adiacenti del primo tipo.*

Se nel poligono P non ci sono coppie di lati adiacenti del primo tipo si va al passo successivo.

Altrimenti, scelta una coppia di lati adiacenti del primo tipo, individuata per esempio dalla lettera a , si applica l'omomorfismo descritto in Figura 2.14, passando dalla parola W ad una nuova parola con una lettera in meno. Cioè si è ridotto di due il numero di lati del poligono P .

Si torna poi al passo iniziale.

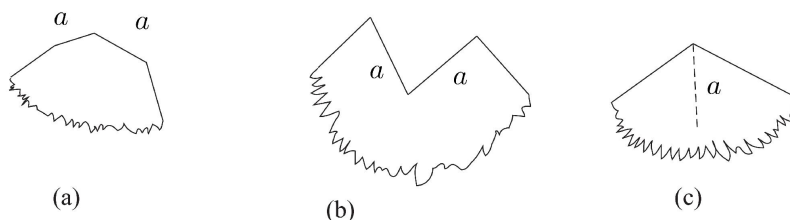


Figura 2.14: come eliminare una coppia di lati adiacenti del primo tipo

Terzo passo: *Identificazione dei vertici.*

Se tutti i vertici sono tra loro equivalenti tramite le identificazioni dei lati, si va al passo successivo. Supponiamo dunque che ci siano due classi di equivalenza di vertici distinte, si trovano allora due vertici consecutivi del poligono, C e D , che non sono nella stessa classe di equivalenza.

Si noti che, non essendoci piú coppie del primo tipo e poich  C e D non sono equivalenti, i lati a e b di figura 2.15 non possono essere tra loro identificati. Si operi allora con un omeomorfismo di taglia e incolla descritto in figura 2.15, passando ad un nuovo poligono con un vertice in meno nella classe di equivalenza di D e uno in piú nella classe di equivalenza di C . Si ripete il procedimento finch  tutti i vertici sono nella stessa classe di equivalenza.

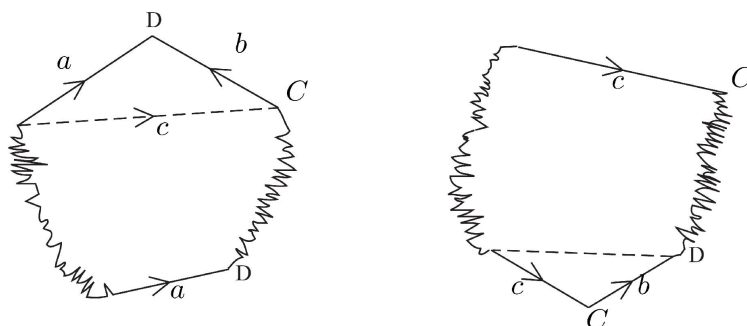


Figura 2.15: come eliminare un rappresentante della classe di D

Quarto passo: *Si rendono adiacenti le eventuali coppie del secondo tipo.*

Se non ci sono coppie del secondo tipo o se tutte le coppie del secondo tipo sono adiacenti, si va al passo successivo. Se invece nel poligono appare una coppia del secondo tipo di lati non adiacenti si opera con un omeomorfismo come in Figura 2.16. Si ripete poi il quarto passo finch  non vi siano piú coppie di lati del secondo tipo non adiacenti.



Figura 2.16: come rendere adiacenti due lati di una coppia del secondo tipo.

Quinto passo:

Si rendono consecutive le coppie di lati "intrecciate" del primo tipo.

Se non ci sono coppie del primo tipo allora ci sono solo coppie di lati adiacenti del secondo tipo, dunque il quoziente del poligono è identificato mediante una parola del tipo $aabb\dots nn$, quindi risulta omeomorfo alla somma connessa di n piani proiettivi e la dimostrazione si conclude. Supponiamo invece, che nel poligono P ci sia una coppia di lati del primo tipo, individuata per esempio dalla lettera a ; cioè che la parola W sia del tipo $aNa^{-1}S$, dove le lettere maiuscole indicano un'intera sequenza di lettere. Si dimostra allora che esiste necessariamente un'altra coppia di lati del primo tipo, individuata per esempio dalla lettera b , tale che la parola associata al poligono P sia in realtà della forma $aVbZa^{-1}Ub^{-1}T$. Infatti, se per assurdo, i lati etichettati con a non fossero separati da una coppia del primo con essi "intrecciata", allora P sarebbe come in Figura 2.17. Poiché le coppie del secondo tipo

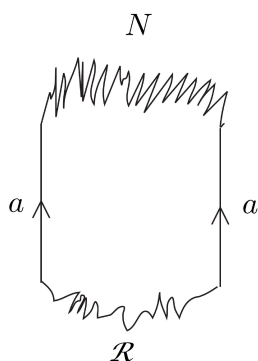


Figura 2.17: lati di una coppia del primo tipo non adiacenti

sono tutte adiacenti allora ogni lato in N è identificato con un lato in N e ogni lato in M con un lato in M . Pertanto non ci sono lati in N che sono identificati con lati in M e dunque i vertici del lato a starebbero in due classi di equivalenza distinte, ma questo è assurdo perché in contraddizione con il fatto che, essendo stato superato il terzo passo della dimostrazione, tutti i vertici sono tra loro equivalenti.

A questo punto si opera con gli omeomorfismi descritti in Figura 2.18: questi omeomorfismi non mutano l'adiacenza di nessuna delle coppie del secondo tipo, ma trasformano il poligono in modo che i quattro lati appartenenti alle due coppie del primo tipo "intrecciate" vengano a trovarsi in sequenza consecutiva, cioè la nuova parola W associata a P è sarà del tipo $cdc^{-1}d^{-1}K$.

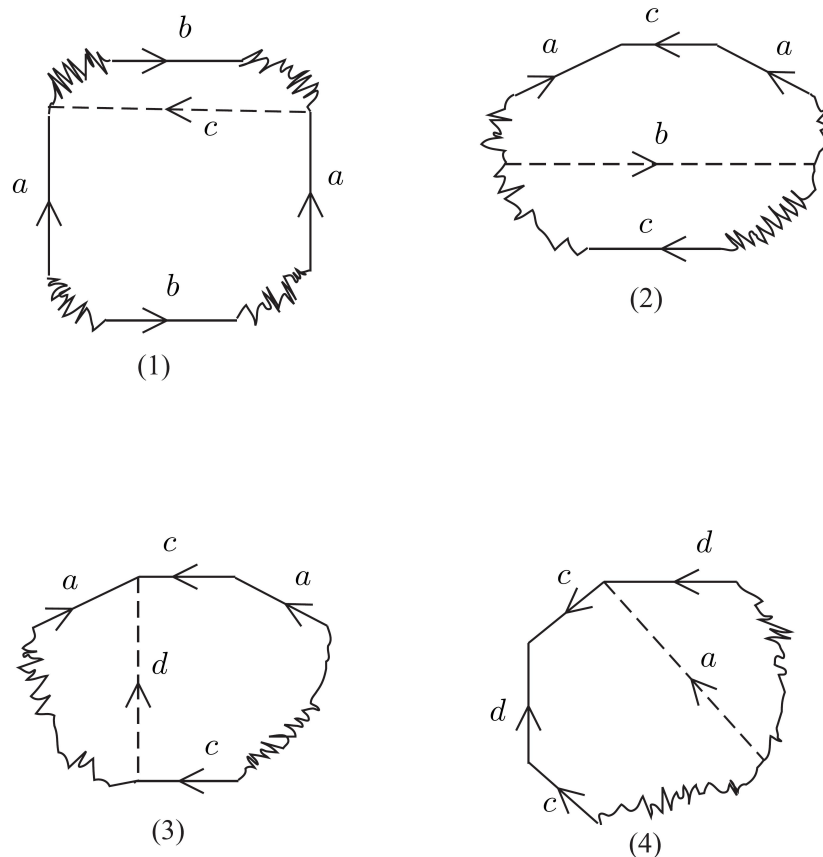


Figura 2.18: come rendere consecutive due coppie del primo tipo "intrecciate"

Si ripeta il quinto passo finchè tutte le coppie del primo tipo non si trovano raggruppate a due a due, tra loro “intrecciate”, in sequenze di quattro lati consecutivi.

Al termine del quinto passo la superficie S risulta essere, per opportuni $n, m \in \mathbb{N}, n \geq 0, m > 0$, omeomorfa alla somma connessa di n piani proiettivi ed m tori.

Per il Lemma 2.3.1 S è omeomorfa, se $n = 0$, alla somma connessa di m tori; se invece $n > 0$, alla somma connessa di $n + 2m$ piani proiettivi. \square

Corollario 2.4.2. *Siano S e P due superfici orientabili, allora*

$$S \cong P \iff S \text{ e } P \text{ hanno stesso genere.}$$

Capitolo 3

Curve algebriche

3.1 Definizioni ed esempi

In questa sezione presentiamo la definizione di curva algebrica. Definiamo inoltre i concetti di supporto, grado e singolarità di una curva algebrica nel piano proiettivo complesso.

Definizione 3.1. Sia \mathbb{C}^2 il piano complesso. Si definisce una *curva algebrica (complessa)* come una classe di equivalenza di polinomi modulo proporzionalità, ossia un elemento dello spazio quoziente $\mathbb{C}[x, y]/\mathbb{C}^*$, dove \mathbb{C}^* è l'azione moltiplicativa del gruppo.

Se $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ è un rappresentante di tale classe, diremo che $f(x, y) = 0$ è un'equazione della curva e l'insieme

$$\text{Supp}(C) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$$

si dice *supporto* della curva.

Definizione 3.2. Sia $C = [f]$ una curva algebrica, allora si definisce *grado* di C ($\text{deg}(C)$) come il grado del polinomio f .

Esempio 3.1.

$$xy = 0, \quad xy^2 = 0, \quad x^2y = 0$$

sono equazioni di curve algebriche diverse che hanno stesso supporto.

Osservazione 3. Dall'esempio appena visto risulta chiaro che non basta conoscere il supporto della curva, neanche se ne è noto il grado, per determinarla.

Definizione 3.3. Sia f l'equazione di una curva algebrica C . Allora si dice che C è irriducibile se f è irriducibile.

Se invece f è riducibile: $f = f_1 f_2 \dots f_r$ con $\deg(f_i) = d_i > 0$ e $C_i = f_i$, allora scriviamo

$$C = \bigcup_{i=1}^r C_i \quad \text{e} \quad \text{Supp}(C) = \bigcup_{i=1}^r \text{Supp}(C_i)$$

Definiamo le curve algebriche nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Definizione 3.4. Poiché gli elementi di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sono definiti a meno di proporzionalità è sufficiente considerare solo i polinomi omogenei, ossia i polinomi con tutti i termini dello stesso grado. Infatti se $p \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$, dove $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ è l'anello dei polinomi omogenei di grado d a coefficienti in \mathbb{C} nelle incognite x_0, x_1, x_2 , allora p individua una curva algebrica (proiettiva) C .

D'ora in avanti considereremo le curve algebriche solo nel piano proiettivo complesso.

Osservazione 4. Data una curva algebrica C individuata da un polinomio omogeneo p è impossibile visualizzare l'intera curva.

Contrariamente però, è possibile visualizzare la curva, deomogeneizzando il polinomio p , nelle carte affini $\{x_0 \neq 0\}, \{x_1 \neq 0\}, \{x_2 \neq 0\}$.

Esempio 3.2. Sia $p = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$, allora p in ogni carta affine risulta una circonferenza complessa: $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ e i suoi punti all'infinito sono individuati dal sistema

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

ossia $(0, i, 1)$ e $(0, i, -1)$

Definizione 3.5. Sia C una curva algebrica individuata dal polinomio omogeneo $F(x_0, x_1, x_2)$. Si consideri allora il polinomio nella carta affine $\{x_0 = 1\}$, che denotiamo $f(x, y)$, e sia $P = (a, b) \in C$. Allora diciamo che P è un punto *semplice* per C se $(f_x|_P, f_y|_P) \neq (0, 0)$.

Se invece $(f_x|_P, f_y|_P) = (0, 0)$ allora P si dice un *punto singolare*, o *singolarità*, per C .

Più precisamente se $P \in C$ è un punto singolare e in P si annullano tutte le derivate parziali sino all'ordine $r - 1$, P si dice un *punto r -uplo*, o di *molteplicità r* .

Definizione 3.6. Se una curva algebrica ha singolarità allora si dice che la curva è *singolare*.

Esempio 3.3. Si considerino le curve algebriche

$$x^3 - y^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^3 - x^2 + y^2 = 0.$$

In entrambi i casi caso è facile verificare che $P = (0, 0)$ è un punto doppio.

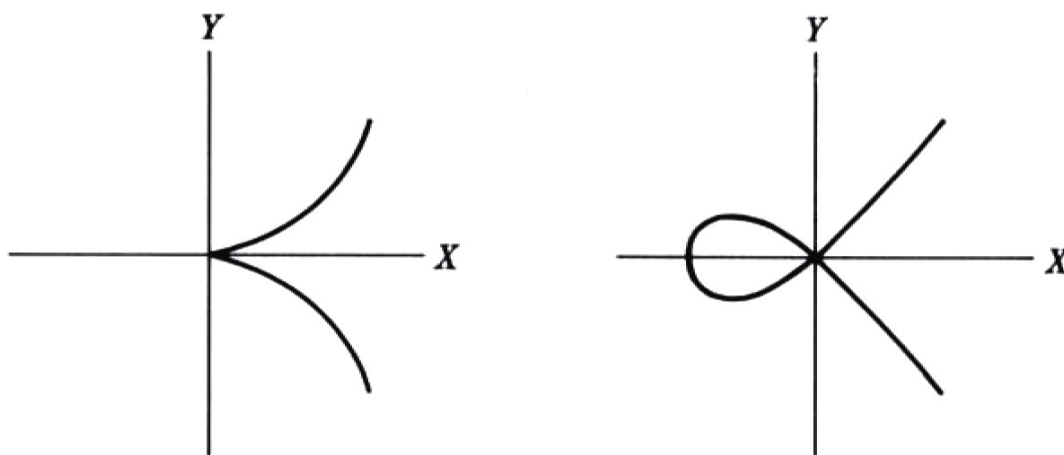


Figura 3.1: esempi di singolarità

3.2 Topologia delle curve algebriche

In questa sezione, partendo da esempi significativi, vedremo che ogni curva algebrica non singolare è topologicamente equivalente a una superficie compatta orientabile, ossia a una sfera o a una somma connessa di tori.

Esempio 3.4. Sia C la curva del piano proiettivo complesso individuata da $p = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$. Se visualizziamo C nella carta affine $\{x_2 \neq 0\}$ vediamo la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$. Sia $X = X_1 + iX_2$ e $Y = Y_1 + iY_2$. Allora abbiamo $(X_1 + iX_2)^2 + (Y_1 + iY_2)^2 = 1$. Svolgendo i quadrati e uguagliando parte reale e parte immaginaria, si hanno le equazioni

$$X_1^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 1, \quad X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0. \quad (1)$$

Supponiamo che X_2 abbia il ruolo del tempo e che si inizi con $X_2 = 0$, allora

$$X_1^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 1, \quad Y_1Y_2 = 0. \quad (2)$$

La prima equazione definisce un iperboloide a una falda e la seconda equazione l'unione del piano X_1Y_1 con il piano X_1Y_2 . Il luogo geometrico delle equazioni in (2) è mostrato in figura 3.2.

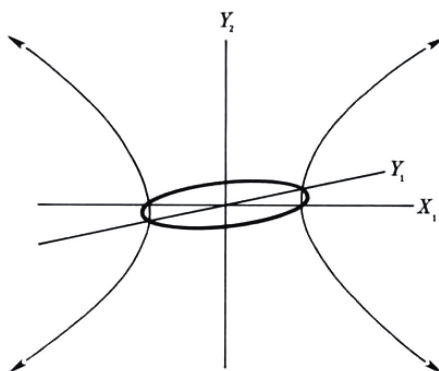


Figura 3.2:

Esso è l'unione della circonferenza reale $X_1 + X_2 = 1$ (quando $Y_2 = 0$) e dell'iperbole $X_1^2 - Y_2^2 = 1$ (quando $Y_1 = 0$). L'iperbole ha inoltre due punti

all'infinito che chiamiamo P_∞ e P'_∞ .

Il completamento proiettivo reale dell'iperbole è una circonferenza. Quindi l'intera curva, quando $X_2 = 0$, è topologicamente, l'unione di due circonferenze che si toccano in due punti distinti, come descritto in Figura 3.3.

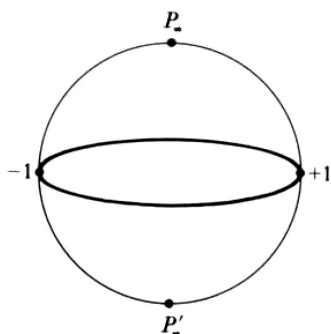


Figura 3.3:

Adesso si supponga che X_2 cambi di poco, per esempio $X_2 = \epsilon > 0$. Allora si ha

$$X_1^2 + Y_1^2 - Y_2^2 = 1 + \epsilon^2, \quad \epsilon X_1 + Y_1 Y_2 = 0.$$

La prima è ancora un iperboloide a una falda, la seconda, per ϵ piccolo, “assomiglia” all'unione dei due piani dell'equazione (2). L'intersezione di queste due superfici è descritta in Figura 3.4. La circonferenza e l'iperbole che erano in Figura 3.2 sono in questo caso disgiunte.

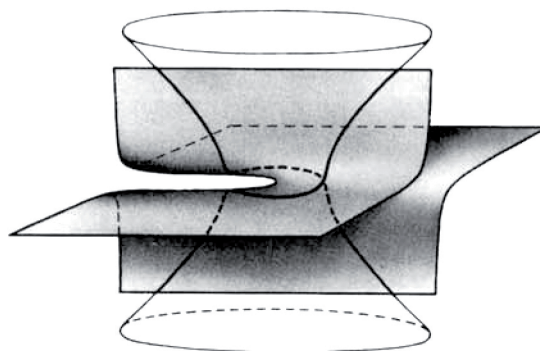


Figura 3.4:

Si potrebbero però disegnare in Figura 3.3, e rifarlo per ogni $X_2 > 0$ costante, sino a riempire due quarti della sfera come in Figura 3.5. Per X_2 negativo, invece, si riempiono i rimanenti due quarti della sfera.

È così dimostrato che la circonferenza del piano proiettivo complesso è topologicamente equivalente ad una sfera.

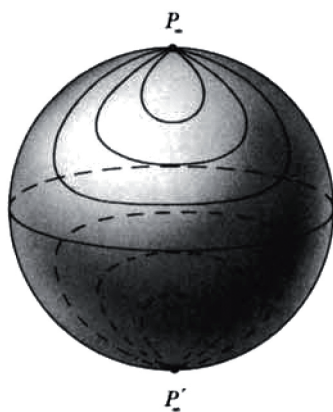


Figura 3.5:

Esempio 3.5. Sia $f = Y^2 - X^2(X - 1)$ l'equazione di una curva algebrica C . Siano $X = X_1 + iX_2$ e $Y = Y_1 + iY_2$, svolgendo i calcoli e separando parte reale e parte immaginaria si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} Y_1^2 - Y_2^2 &= X_1^3 - 3X_1X_2^2 - 1, \\ 2Y_1Y_2 &= 3X_1^2X_2 - X_2^3 - X_2. \end{aligned}$$

E quando $X_2 = 0$

$$Y_1^2 - Y_2^2 = X_1^3 - X_1, \quad Y_1Y_2 = 0.$$

Se $Y_2 = 0$ abbiamo la curva $Y_1^2 = X_1^3 - X_1$ nel piano X_1Y_1 e se $Y_1 = 0$ la curva $Y_2^2 = X_1 - X_1^3$ nel piano X_1Y_2 , ottenendo la curva mostrata in Figura 3.6.

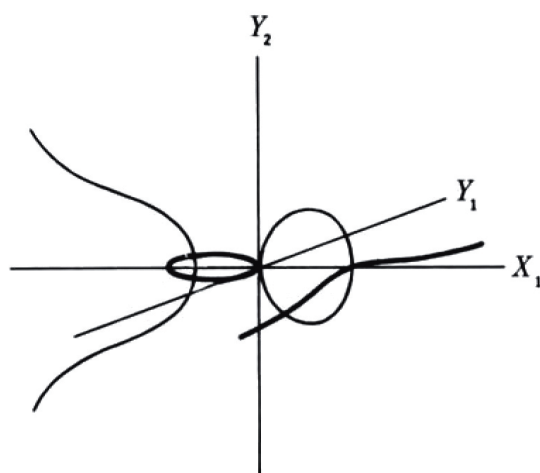


Figura 3.6:

Si noti che ognuna delle due curve avrebbe due punti all'infinito distinti in quanto i "bracci" di esse tendono alle direzioni dell'asse Y_2 e Y_1 , ma in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, si aggiunge un punto all'infinito per ogni spazio complesso di dimensione 1 e il piano Y_1Y_2 è lo spazio $Y = 0$ di dimensione 1. Quindi le due curve si incontrano in punto all'infinito P_∞ .

Topologicamente la curva totale ottenuta quando $X_2 = 0$ è descritta in Figura 3.7.

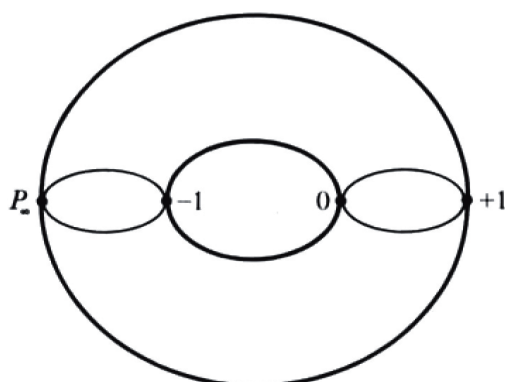


Figura 3.7:

Facendo variare X_2 e applicando lo stesso procedimento dell'esempio precedente si dimostra che la curva f del piano proiettivo complesso è topologicamente equivalente a un toro.

Vediamo un esempio di curva algebrica irriducibile con singolarità.

Esempio 3.6. Sia $Y^2 - (X^2(X+1)) = 0$ e siano $X = X_1 + iX_2$ e $Y = Y_1 + iY_2$. Svolgendo i calcoli e separando parte reale e parte immaginaria si ha che

$$\begin{aligned} Y_1^2 - Y_2^2 &= X_1^3 - 3X_1X_2^2 + 1, \\ 2Y_1Y_2 &= 3X_1^2X_2 - X_2^3 + X_2. \end{aligned}$$

E quando $X_2 = 0$

$$Y_1^2 - Y_2^2 = X_1^3 + X_1, \quad Y_1Y_2 = 0.$$

L'intera curva è descritta in Figura 3.8 e si nota che incontra un punto all'infinito P_∞ .

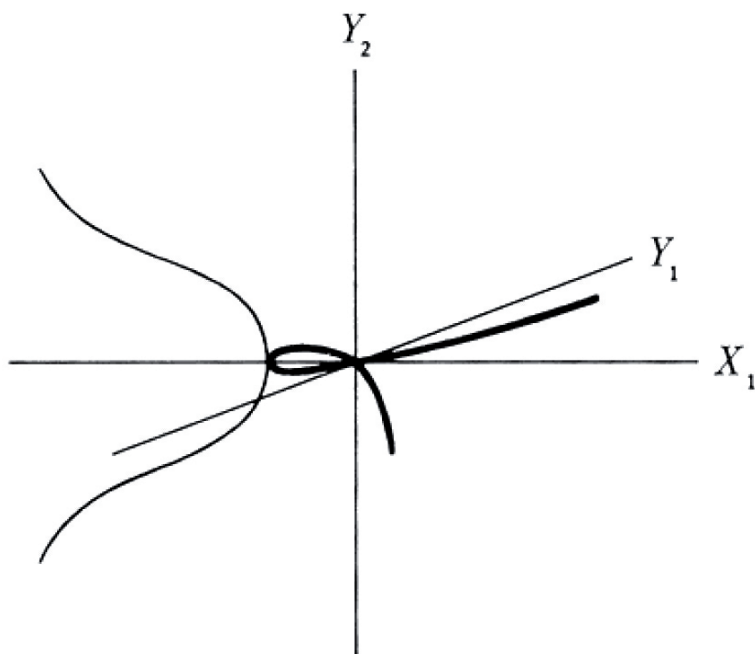


Figura 3.8:

La curva ottenuta, insieme alle altre che si ottengono per X_2 costante, vanno

a riempire la Figura 3.9 e si prova così che la curva $Y^2 - (X^2(X + 1)) = 0$ è omeomorfa a un toro "strozzato", ossia ad una sfera con due punti identificati tra loro.

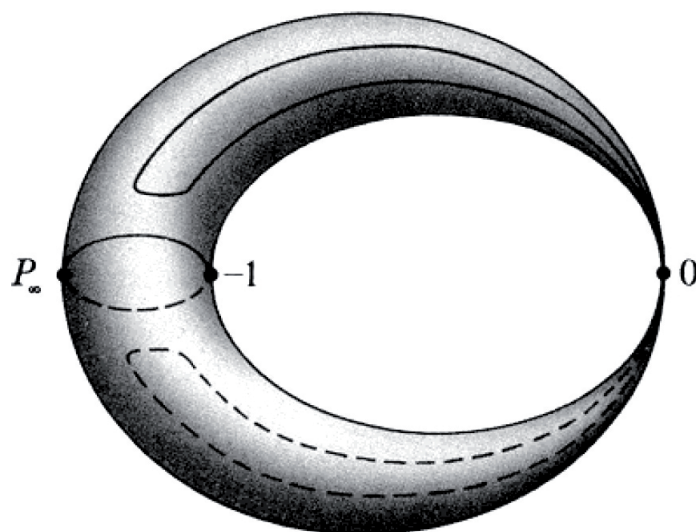


Figura 3.9:

Dall'esempio appena concluso si nota che le singolarità generano casi particolari di superfici. Sarà infatti discusso solo il caso di curve algebriche non singolari irriducibili.

Vediamo una serie di risultati che ci permettono di generalizzare gli esempi visti sin'ora.

Lemma 3.2.1.

Ogni curva algebrica in $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è compatta.

Dimostrazione. C è individuata da un polinomio omogeneo non costante $q(X, Y, Z)$. Quindi l'intera curva è determinata da tre polinomi nelle corrispondenti carte affini $q(1, Y, Z)$, $q(X, 1, Z)$, $q(X, Y, 1)$, ma ognuno di essi è un chiuso nel proprio spazio affine e C è l'unione di quei tre chiusi, e dato che $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è compatto allora C è compatto. \square

Lemma 3.2.2 ([5]).

Ogni curva algebrica $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è connessa.

Lemma 3.2.3 ([5]).

Sia $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva algebrica irriducibile, e sia $\{P_i\}$ l'insieme dei punti singolari di C . Allora $C \setminus \{P_i\}$ è una superficie orientabile.

Corollario 3.2.4. *Se $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è non singolare, allora è orientabile.*

Possiamo enunciare il teorema principale di questa sezione.

Teorema 3.2.5 ([5]).

Sia $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva algebrica irriducibile non singolare, allora C è topologicamente equivalente a una superficie compatta orientabile.

3.3 La formula del genere

Abbiamo visto che ogni curva algebrica $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ irriducibile e non singolare è topologicamente equivalente a una superficie compatta orientabile. Inoltre nel secondo capitolo sono state classificate le superfici compatte a meno di omeomorfismo e, in particolare, quelle orientabili sono omeomorfe o a una sfera o una somma connessa di tori. Inoltre, le superfici sono caratterizzate dal genere che è un invariante topologico e due superfici orientabili sono omeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere. Supponiamo che $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sia irriducibile e non singolare, definita da un polinomio $p(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ e dal polinomio omogeneo $q(X, Y, Z)$, allora C è topologicamente determinata dai polinomi p e q . È ragionevole chiedersi se esiste un modo per trovare il genere g direttamente da p o da q senza ricorrere a complicate rappresentazioni geometriche delle curva.

Il problema è infatti risolto dalla Formula del genere.

Ci limitiamo ad enunciare il teorema, per la dimostrazione vedere [5].

Teorema 3.3.1 (Formula del genere).

Sia $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ irriducibile e non singolare definita dal polinomio omogeneo $q(X, Y, Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$. Se $\deg(q) = n$ allora il genere g di C è

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Bibliografia

- [1] Graziano Gentili, Classificazione delle superfici compatte, universitá di Firenze, dispense (2009), (si veda <http://web.math.unifi.it/users/gentili/archiviodispenseI/Dispense25maggio.pdf>).
- [2] Radò T., Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Litt.Sci. Szeged., 2, (1925), pp. 101-121.
- [3] Checcucci V., Tognoli A., Vesentini E, Lezioni di Topologia Generale, Feltrinelli (1977).
- [4] Massey W.S., Algebraic Topology: an Introduction, Harcourt, Brace & World (1967).
- [5] Kendig K., Elementary Algebraic Geometry, Springer-Verlag (1977).
- [6] Fulton W., Algebraic Curves, An introduction to Algebraic Geometry, Benjamin (1968).
- [7] Maunder G.R.F., Algebraic Topology, Cambridge University Press (1980).

Ringraziamenti

Un primo grazie va ad Alessandro Gimigliano per la grande pazienza e la disponibilità che ha mostrato nei miei confronti.

Grazie babbo per tutte le volte che mi hai sostenuto e hai creduto in me.

Grazie ai miei compagni di viaggio: Filo, Pase, Buds, Lu e tutti gli altri, per avermi sopportato nei momenti di tensione e aiutato sempre.

Infine grazie ai miei amici più stretti perché mi hanno sempre confortato e mi sono stati vicini.