ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Prove INVALSI: osservare gli studenti nella scelta delle strategie risolutive

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Giuseppina Fabiola Farruggia

II Sessione
Anno Accademico 2014/2015

A*i miei genitori,*
per essere stati un costante sostegno
durante questo lungo e difficile percorso.

A*l mio insostituibile fratello,*
per avermi guidato dall'inizio alla fine.

RINGRAZIAMENTI...

Per la seconda volta sono arrivata a questo momento, scrivere i ringraziamenti per la mia tesi di laurea. Finalmente, si spera, che questa sia l'ultima!

Giunta a Bologna due anni fa, tanti erano i dubbi, le perplessità, le paure di non farcela e invece ci sono riuscita e prima delle mie aspettative sono arrivata al mio secondo importante traguardo.

Tanti sono i ringraziamenti da fare, prima di tutto ringrazio il prof. Giorgio Bolondi, relatore di questa tesi, per avermi ispirato con le sue idee e con la sua profonda esperienza nella realizzazione di questo lavoro. Grazie per la disponibilità e cortesia dimostratami, per i buoni consigli e gli utili suggerimenti.

Un sentito grazie lo rivolgo alla prof.ssa Valeria Vesi, mia tutor di tirocinio, che ho avuto il piacere di conoscere. Grazie per la fiducia che mi ha dimostrato e per l'interessamento al mio lavoro, che hanno permesso di poter realizzare il mio progetto di tesi.

Grazie agli studenti delle classi prime del liceo scientifico e delle scienze umane "Albert Bruce Sabin" seguite durante il tirocinio, grazie per la disponibilità e per l'entusiasmo durante la realizzazione delle interviste. Grazie a tutti i docenti e colleghi dell'istituto per l'accoglienza e la stima dimostratami.

Un grazie di cuore va a chi mi è stato vicino (nessuno escluso) con affetto sincero.

Grazie alle mitiche Tiarini's girls (Enrica, Dominique, Maria Concetta e Raffaella) coinquiline e soprattutto amiche, che insieme a me hanno condiviso le tappe di questo percorso.

Grazie alla fantastica famiglia bolognese (Irene, Gaetano e la piccola Maya) che hanno trasformato con i loro sorrisi e la loro spensieratezza pesanti giornate di studio in puro relax e divetimento.

Ennesimi più uno sono i ringraziamenti che voglio rivolgere alla dolcissima Enrica, che in questo percorso è stata il mio punto di riferimento, il mio esempio, il mio sostegno, la mia forza per andare avanti, grazie per esserci stata sempre e comunque.

Un enorme GRAZIE va a mio fratello, sempre disponibile e paziente che mi ha incoraggiato quando dovevo iniziare quest'avventura. Grazie per avermi aiutato e sostenuto in questi due anni, e per aver sopportato tutti quei momenti (e vi assicuro che sono stati tanti) di angosce e incertezze.

Infine, un ultimo ringraziamento particolare lo voglio fare ai miei genitori e alla mia famiglia, per avermi sostenuto.

GRAZIE mamma e papà per tutto quello che avete sempre fatto per me, e non vi preoccupate più: finalmente è finita!!!

Grazie a tutti perchè avete creduto in me, e soprattutto grazie ai miei primi sostenitori, i miei nonni che purtroppo oggi non sono più qui ma sono sicura saranno contenti e soddisfatti.

Grazie grazie grazie...Giusi.

Bologna 30 ottobre 2015

Indice

Introduzione

Lo scopo del presente lavoro è quello di osservare e analizzare le strategie risolutive che gli studenti italiani utilizzano quando si cimentano nello svolgimento delle prove di matematica nazionali INVALSI (Sistema Nazionale per la Valutazione del Sistema dell'Istruzione). L'osservazione è stata svolta durante le ore di tirocinio curriculare che ho effettuato nell'anno accademico 2014/2015 presso il liceo scientifico e delle scienze umame "Albert Bruce Sabin" di Bologna.

L'interesse per l'esperimento è nato dalla constatazione dei risultati deludenti degli studenti italiani nelle prove di matematica rispetto all'andamento internazionale. In tal senso è aumentata la curiosità di conoscere e approfondire il ragionamento che i ragazzi utilizzano quando sono chiamati a risolvere i quesiti delle prove, con il quale arrivano a determinate risposte. Pertanto, in collaborazione con il prof Giorgio Bolondi, relatore dell'elaborato, e della prof.ssa Valeria Vesi insegnante di matematica delle classi prime seguite durante il tirocinio, è stato realizzato un test di domande estrapolate dalle prove INVALSI svolte negli anni precedenti, sottoposto a un campione di 12 studenti (14-15 anni) frequentanti le classi 1M, 1O e 1R.

Il lavoro d'indagine è stato realizzato in due diverse fasi: soluzione del test e intervista-colloquio registrata. In pratica, agli studenti è stato somministrato un test costituito da 4 quesiti e dopo la risoluzione delle domande essi sono stati sottoposti a un'intervista-registrata per interpretare le strategie messe in atto e i processi cognitivi che usano per risolvere tali prove. Le registrazioni, apparse fin da subito molto interessanti, rivelano importanti informazioni che permettono di evidenziare le diverse difficoltà che i nostri studenti incontrano nel risolvere prove di matematica, come ad esempio scarsa comprensione del testo, scarsa abitudine al ragionamento, scarsa abitudine a riflettere sul risultato ottenuto, difficoltà ad individuare la matematica che hanno appreso a scuola all'interno delle prove e dei problemi che riguardano la vita reale.

Dunque, per meglio interpretare i loro comportamenti durante la messa in atto dei processi risolutivi, è stato svolto uno studio e una ricerca riguardanti gli studi e le teorie che interessano il problem solving, oltre a fornire una panoramica sulle ricerche nel campo della valutazione.

L'intero lavoro è stato quindi suddiviso in cinque capitoli, nei primi tre è stata sviluppata sostanzialmente la parte teorica dell'esperimento, mentre nel quarto e nel quinto capitolo è stata inserita la parte sperimentale.

Il primo capitolo illustra le caratteristiche principali dell'indagine OCSE PISA dopo aver fornito una panoramica circa le origini delle indagini sugli apprendimenti, e riporta sia i risultati di alcuni Paesi che dell'Italia per quanto riguarda la valutazione della competenza matematica degli studenti 15enni.

Il secondo capitolo inquadra le prove INVALSI. In particolare espone l'obiettivo principale del sistema di valutazione, ossia ottenere informazioni sugli apprendimenti che si realizzano in matematica nel sistema scolastico italiano.

Il terzo capitolo offre una panoramica degli studi più rilevanti presenti in letteratura: studiosi come Dewey, Polya e Schoenfeld si sono occupati della risoluzione dei problemi di matematica sotto molteplici punti di vista, sviluppando differenti filoni di ricerca.

Il quarto capitolo presenta l'impianto sperimentale, i suoi obiettivi, le modalità di svolgimento e le diverse procedure adottate, nonché le varie fasi e i tempi che hanno scandito il lavoro, oltre a un'attenta analisi dei quesiti somministrati agli studenti.

Infine, nel quinto capitolo si riportano i risultati di una serie di interviste a studenti 15enni frequentanti le classi prime del liceo scientifico e delle scienze umane "Sabin" di Bologna, effettuate dopo aver svolto la prova. Tali interviste hanno permesso di capire quali sono le riflessioni e le congetture che essi fanno nel risolvere tali quesiti, e quali sono i ragionamenti che li portano a dare determinate risposte. Inoltre hanno consentito di formulare diverse ipotesi interpretative rispetto alle difficoltà che i nostri studenti incontrano di fronte a prove di matematica quale quelle INVALSI.

Da questa osservazione emerge dunque che la matematica insegnata a scuola viene percepita dagli studenti come un ricettario di pronta applicazione, di cui riescono poco a cogliere il senso, l'utilità, la funzionalità e forse anche la sua bellezza, e per questo motivo spesso ne hanno un'immagine negativa.

Capitolo 1

Uno sguardo alla nascita delle rilevazioni internazionali

1.1 Alle origini delle indagini sugli apprendimenti

Nel corso degli anni '50, presso l'Istituto di Educazione dell'UNESCO, ad Amburgo, si sono organizzati incontri scientifici annuali, cui hanno preso parte esperti e personalità del mondo della ricerca internazionale, sui temi della valutazione del rendimento scolastico e in particolare di come misurare la realizzazione degli obiettivi educativi. Nel 1958 viene presa la decisione di organizzare indagini comparative transnazionali sui risultati di diversi sistemi d'insegnamento, misurati mediante prove standardizzate. Tra il 1959 e il 1962 viene condotto uno studio pilota in 12 paesi sull'apprendimento della matematica e nel 1962 viene creata l'Associazione Internazionale per la valutazione del rendimento scolastico (IEA), raggruppante centri di ricerca in varie parti del mondo.

L'associazione IEA ha come obiettivi:

a) Il riconoscimento dei limiti della ricerca basata sull'applicazione di metodi strettamente sperimentali in campo educativo per giungere a conclusioni riguardo al funzionamento della scuola reale.

b) L'esigenza di adottare una prospettiva internazionale e comparativa allo scopo di poter confrontare i risultati dei sistemi educativi di diversi paesi, mettendoli in relazione con le loro caratteristiche e con le caratteristiche del contesto più ampio.

c) L'esigenza di distinguere nella valutazione dei risultati fra tre generi di curricolo: curricolo prescritto/previsto, curricolo insegnato, curricolo appreso. A questa originaria distinzione si è aggiunta ultimamente una quarta specificazione: il curricolo valutato.

Gli studi ai quali l'associazione IEA si è dedicata nei primi quarant'anni sono:

- 1961-1965: Primo studio internazionale sulla matematica (FIMS)
- 1966-1975: Primo Studio internazionale sulle scienze (FISS)
- 1970-1971: Studio "Six subjects"
- 1966-1973: Studio sull'educazione letteraria
- 1967-1973: Studio sulla comprensione della lettura
- 1968-1975: Studio sul Francese e l'Inglese come lingue straniere
- 1967-1976: Studio sull'Educazione Civica
- 1976-1989: Secondo studio internazionale sulla matematica (SIMS)
- 1978-1989: Studio sull'ambiente della classe
- 1979-1991: Secondo studio internazionale sulle scienze (SISS)
- 1984-1985: Studio sulla produzione di testi scritti
- 1985-1993: Studio sull'uso del computer in educazione
- 1985-1994: Studio sulle competenze di base nella lettura (IALS)
- 1993-1996: Studio sull'educazione nelle lingue straniere (LES)

- 1994-1995:Terzo studio internazionale sulla matematica e le scienze (TIMSS)

- 1999: Ripetizione dello studio precedente sulla matematica e le scienze sugli alunni dell' ottavo anno (TIMSS-R)

1.2 L'indagine TIMSS

Il TIMSS (Trend in International Mathematics and Science Study) è un progetto dell'IEA, un'associazione indipendente, senza scopo di lucro, di centri di ricerca nel campo delle Scienze dell'educazione, fondata nel 1958 con sede ad Amsterdam, il cui scopo è quello di condurre ricerche comparative internazionali nel campo della valutazione.

L'indagine TIMSS dell'associazione IEA fornisce informazioni preziose sul rendimento degli studenti in matematica e scienze in un contesto internazionale, valuta gli studenti al quarto e all'ottavo anno di scolarità, che si svolge ogni 4 anni, e raccoglie una notevole quantità di dati sul curricolo e la didattica in matematica e in scienze da scuole e da insegnanti.

Il TIMSS fu condotto per la prima volta nel 1994/95 su cinque livelli (terza e quarta primaria, seconda e terza secondaria di primo grado e quinta secondaria di secondo grado) in più di 40 paesi. Nel 1998/99 fu condotto il TIMSS Repeat in 38 paesi solo per gli studenti della terza secondaria di primo grado. Alla sessione del TIMSS nel 2002/03, condotto sulla quarta primaria e sulla terza secondaria di primo grado, hanno partecipato 46 paesi, e nel 2006/07 più di 60 paesi hanno partecipato ad almeno uno dei livelli; in Italia più di 8500 studenti provenienti da circa 340 scuole hanno preso parte al TIMSS 2002/03.

Sporadicamente l'IEA realizza anche un'indagine sui livelli di apprendimento in Matematica e Fisica degli studenti dell'ultimo anno di scuola secondaria che abbiano seguito un programma approfondito nelle due discipline (TIMSS advanced).

L'indagine valuta gli studenti con una specifica preparazione in matematica e in fisica al termine del loro percorso scolastico.

L'interesse manifestato da vari paesi a partecipare all'indagine è dovuto all'ormai riconosciuto forte legame tra competenza scientifica e produttività economica e al tempo relativamente lungo trascorso dalle valutazioni del 1995. Questo consentirà a tali paesi di ottenere dati confrontabili a livello internazionale sul rendimento degli studenti che frequentano corsi avanzati di matematica e di fisica, destinati alla preparazione universitaria.

Prendendo parte al TIMSS Advanced, i paesi, che hanno già partecipato all'indagine nel 1995, potranno determinare se il rendimento degli studenti, che hanno seguito corsi avanzati, è cambiato nel tempo, mentre paesi partecipanti per la prima volta possono valutare i risultati dei propri studenti in tali discipline inquadrandoli in un contesto internazionale.

1.3 La nuova fase delle indagini della IEA: l'indagine OCSE PISA

Le indagini TIMSS 1994-95 e 1999 chiudono un ciclo e aprono una nuova fase contraddistinta dallo studio dell'evoluzione (trends) nell'apprendimento della lettura, della matematica e delle scienze.

Nell'ultimo decennio del XX secolo il monopolio IEA delle inchieste sugli apprendimenti è messo in discussione dalle indagini avviate dall'OCSE con l'avvio nel 2000 del programma PISA che ha come oggetto le competenze di base in lettura, matematica e scienze degli studenti di 15 anni.

Il Programma per l'International Student Assessment (PISA) è un'indagine internazionale promossa dall'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico (OCSE) con periodicità triennale che mira ad accertare conoscenze, competenze e capacità dei quindicenni scolarizzati dei principali Paesi industrializzati e permette un controllo periodico del sistema dell'istruzione.

L'attenzione non si focalizza tanto sulla padronanza di determinati contenuti curriculari, quanto piuttosto sulla misura in cui gli studenti sono in grado di utilizzare competenze acquisite durante gli anni di scuola per affrontare e risolvere problemi e compiti che si incontrano nella vita quotidiana e per continuare ad apprendere in futuro.

L'indagine OCSE PISA ha l'obiettivo di verificare se e in che misura i quindicenni scolarizzati abbiano acquisito alcune competenze giudicate essenziali per svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società e per continuare ad apprendere per tutta la vita (lifelong learning).

Diversi sono gli ambiti di cui l'indagine PISA si occupa, in quanto mira ad approfondire il quadro di conoscenze relative ad alcune competenze considerate fondamentali in una prospettiva di apprendimento lungo il corso di tutta la vita, nello specifico sono: lettura, matematica e scienze.

La competenza di lettura (reading literacy), definita come la capacità di utilizzare e interpretare un testo scritto e di riflettere su di esso; la competenza di matematica (mathematical literacy), che pone l'accento sull'uso funzionale di conoscenze matematiche in vari contesti; la competenza scientifica (scientific literacy), che riguarda la capacità di utilizzare conoscenze scientifiche e di trarre conclusioni basate su dati per capire il mondo della natura e prendere decisioni relative ad esso.

Ogni ciclo dell'indagine rileva le competenze in tutti e tre gli ambiti ma ne approfondisce a rotazione uno in particolare.

Nel primo ciclo (PISA 2000) l'ambito principale è stato la lettura, nel secondo ciclo dell'indagine (PISA 2003) la matematica, nel terzo (PISA 2006) le scienze, nel quarto ciclo (PISA 2009) la lettura, nel quinto ciclo (PISA 2012) la matematica a cui si è aggiunta la somministrazione informalizzata di prove di problem solving come ulteriore area di rilevazione principale, nel sesto (PISA 2015) l'ambito principale approfondito è stato nuovamente le scienze.

Di seguito viene inserita la tabella1.1 relativa agli ambiti d'indagine che riepiloga ed evidenzia l'oggetto principale d'indagine dal 2000 al 2015.

Tabella 1.1: Ambiti d'indagine

2000	Lettura	Matematica	Scienze
2003	Lettura	Matematica	Scienze
2006	Lettura	Matematica	Scienze
2009	Lettura	Matematica	Scienze
2012	Lettura	Matematica + problem solving informatizzato	Scienze
2015	Lettura	Matematica	Scienze

Per ciascun ambito di rilevazione è stato messo a punto un quadro di riferimento che ne definisce i contenuti, i processi cognitivi e i contesti problematici, fornendo il quadro teorico per la costruzione delle prove.

(http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2015draftframeworks.htm).

La popolazione di riferimento è costituita dai quindicenni scolarizzati dal momento che tale età precede, nella maggior parte dei paesi dell'OCSE, il termine dell'obbligo formativo. Dal 2000 un numero sempre crescente di paesi ha scelto di partecipare all'indagine OCSE PISA.

In Italia, il campione di studenti che partecipa all'indagine sarà rappresentativo a livello di:

5 Macroaree geografiche (Nord Est, Nord Ovest, Centro, Sud, Sud-Isole);

5 tipologie di scuole (Licei, Istituti tecnici, Istituti Professionali, Formazione Professionale, Scuole secondarie di primo grado).

1.4 Caratteristiche dell'indagine OCSE PISA

PISA rileva in che misura gli studenti che sono prossimi alla fine dell'istruzione/formazione obbligatoria abbiano acquisito conoscenze e competenze ritenute essenziali per una piena partecipazione alla vita civile nella società moderna.

L'indagine, che si focalizza sulla lettura, la matematica, le scienze e il problem solving non valuta solo se gli studenti siano in grado di riprodurre le conoscenze, ma anche quanto siano in grado di estrapolare una determinata conoscenza da ciò che fino ad allora hanno imparato a scuola, e di applicarla in contesti scolastici ed extra-scolastici non familiari. Questo approccio riflette il fatto che nelle moderne economie la premialità individuale non dipende tanto da ciò che si conosce, ma da come viene utilizzato ciò che si conosce.

PISA è un programma di ricerca in continua evoluzione che fornisce spunti di riflessione per le politiche e le pratiche dell'istruzione; consente di monitorare nel tempo i risultati dei processi di acquisizione di conoscenze e abilità in contesti nazionali diversi e in contesti demografici differenziati all'interno dello stesso paese.

Sebbene attraverso PISA non è possibile individuare relazioni di causa-effetto tra le politiche/pratiche dell'istruzione e i risultati degli studenti, è possibile però ottenere una rappresentazione delle maggiori differenze e similitudini tra i diversi sistemi educativi, con le relative implicazioni di quello che questo significa per gli studenti.

Le caratteristiche principali del progetto PISA sono:

a) la sua concezione innovativa di "literacy" (competenza), intesa come la capacità degli studenti di applicare conoscenze e abilità in precisi ambiti disciplinari e "di analizzare, di ragionare e di comunicare idee in modo efficace nel momento in cui essi pongono, risolvono e interpretano problemi in una molteplicità di situazioni" (OECD, 2003);

b) la sua attinenza con l'apprendimento per tutta la vita (lifelong learning), per cui PISA non si limita soltanto a valutare le competenze curricolari degli studenti, ma vuole anche conoscere le loro motivazioni e le loro strategie nei confronti dell'apprendimento, e l'opinione che essi hanno di loro stessi;

c) la sua periodicità che permette ai Paesi partecipanti di monitorare i loro progressi nel raggiungimento di obiettivi importanti nel campo dell'apprendimento;

d) l'importanza che viene attribuita ai risultati degli studenti tenendo però conto delle caratteristiche del loro background e delle scuole che frequentano per poter esaminare attentamente alcune delle caratteristiche fondamentali che sono associate con il successo scolastico;

e) l'elevato numero di Paesi partecipanti che permette un'ampia copertura geografica e il coinvolgimento di quasi un terzo della popolazione mondiale in questo progetto.

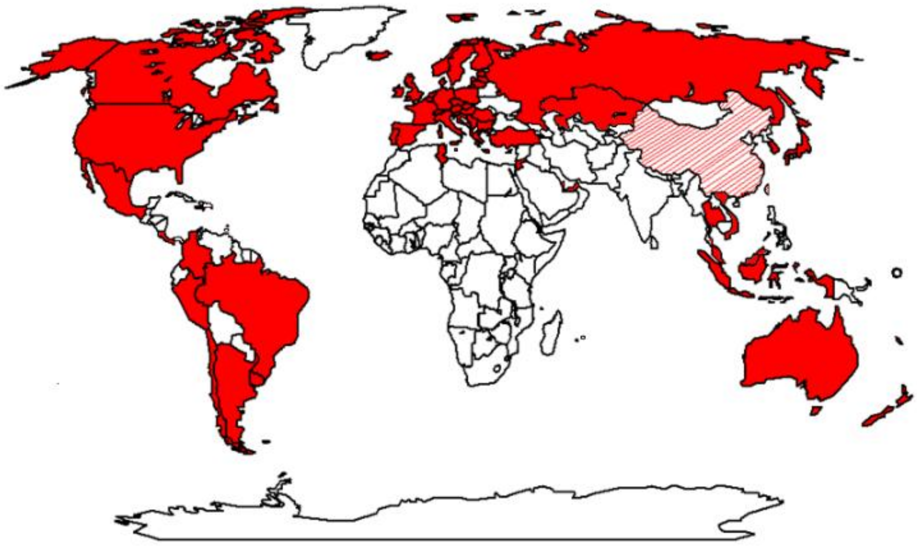
1.5 Il disegno d'indagine in PISA 2003 e in PISA 2012

La Matematica è il dominio principale d'indagine sia in PISA 2003 che in PISA 2012, mentre la lettura e le scienze sono domini secondari.

Al PISA 2003 hanno partecipato circa 275.000 studenti appartenenti a 41 diversi paesi (30 membri dell'OCSE e 11 paesi partner). Non si è trattato di un semplice test sulle abilità matematiche degli studenti 15enni e di quanto essi sappiano eseguire operazioni matematiche, ma piuttosto di una valutazione su quanto essi siano in grado di riconoscere, formulare e affrontare problemi matematici in un contesto di vita reale.

In PISA 2012 hanno invece partecipato studenti appartenenti a 65 paesi di cui 34 paesi membri dell'OCSE.

Figura 1.1: Paesi partecipanti in PISA 2012



Paesi OECD		**Paesi ed Economie partner in PISA 2012**		**Paesi partner nei cicli precedenti**
Australia	Giappone	Albania	Malesia	Azerbaijan
Austria	Corea (Sud)	Argentina	Montenegro	Georgia
Belgio	Lussemburgo	Brasile	Peru	Himachal Pradesh - India
Canada	Messico	Bulgaria	Qatar	Kirgistan
Cile	Paesi Bassi	Colombia	Romania	Macedonia
Rep. Ceca	Nuova Zelanda	Costa Rica	Fed. Russa	Mauritius
Danimarca	Norvegia	Croazia	Serbia	Miranda - Venezuela
Estonia	Polonia	Cipro	Shanghai - Cina	Moldova
Finlandia	Rep. Slovacca	Hong Kong - Cina	Singapore	Antille Olandesi
Francia	Portogallo	Indonesia	Taipei - Cina	Panama
Germania	Slovenia	Giordania	Tailandia	Tamil Nadu - India
Ungheria	Spagna	Kazakistan	Tunisia	
Islanda	Svezia	Lettonia	Emirati Arabi Uniti	
Irlanda	Svizzera	Liechtenstein	Ururguay	
Isrele	Stati Uniti	Lituania	Vietnam	
Italia	Turchia	Macao - Cina		
	Regno Unito			

L'indagine PISA 2012 fornisce la possibilità di valutare i cambiamenti nella performance degli studenti in Matematica a partire dal 2003 e di stabilire se eventuali riforme delle politiche educative messe in atto prima o durante questo periodo abbiano comportato dei miglioramenti nell'apprendimento degli studenti.

PISA 2012 è il quinto ciclo d'indagine dal suo esordio nel 2000 e il secondo, dopo il ciclo 2003, che ha come dominio principale Matematica. Le novità di PISA 2012 sono: la valutazione della literacy Finanziaria (Financial Literacy)[1] e la valutazione della literacy Matematica, di Lettura e di Problem solving[2] attraverso una somministrazione computerizzata delle prove. L'Italia ha partecipato a tutte queste opzioni internazionali.

In PISA, l'abilità Matematica consiste nella capacità di formulare, impiegare e interpretare i concetti matematici in una varietà di contesti. In questo senso si tratta della capacità individuale di ragionare matematicamente e di usare concetti matematici, procedure, fatti e strumenti per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. È importante concepire la literacy Matematica non come un attributo individuale che si possiede oppure no, ma come una capacità che può essere sviluppata lungo tutto l'arco della vita.

Come è stato detto precedentemente, in PISA 2012 è la prima volta in cui la literacy Matematica è stata rilevata anche attraverso la somministrazione computerizzata delle prove. A tale scopo, i quesiti sono stati specificamente adattati e gli studenti dovevano fornire le proprie risposte attraverso l'uso del computer, nonostante fosse permesso loro di utilizzare strumenti cartacei durante lo svolgimento delle prove.

1.6 Definizione e valutazione di competenza matematica in PISA 2003

La definizione di competenza matematica (mathematical literacy) nell'indagine PISA 2003 è la seguente:

[1] PISA 2012 è la prima indagine internazionale su larga scala che rileva questa specifica competenza.

[2] In PISA 2012 il quadro di riferimento relativo alla competenza di Problem solving è stato ampliato e approfondito rispetto a PISA 2003, ciclo nel quale la valutazione di questo tipo di competenza è stata introdotta per la prima volta.

"la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione".

L'espressione "competenza matematica" sta ad indicare che le conoscenze matematiche devono essere attivate in modo funzionale in diverse situazioni e con diversi tipi di approcci basati principalmente sul ragionamento e sull'intuizione. Naturalmente, affinché questa attivazione sia possibile, è necessario possedere un'ampia base di conoscenze ed abilità matematiche e sono proprio queste abilità che fanno parte della definizione di competenza.

Per valutare la competenza matematica degli studenti quindicenni, l'indagine PISA ha utilizzato nel 2003 una serie di prove cognitive costituite ciascuna da uno stimolo iniziale seguito da uno o più quesiti. Le prove sono state preparate dal Consorzio internazionale[3] con il contributo di tutti i paesi partecipanti sulla base del quadro teorico di riferimento messo a punto dall'OCSE, il quale fornisce non soltanto il fondamento teorico della ricerca, ma anche la descrizione di come deve essere impostata la verifica della capacità dei quindicenni di saper utilizzare la matematica quando si trovano di fronte a problemi della vita reale.

Affinché fosse possibile misurare il grado di competenza di uno studente attraverso il modo in cui utilizza conoscenze e abilità matematiche per risolvere i problemi di vita reale, era necessario che le prove fossero costruite tenendo conto di tre diverse componenti (OCSE, 2003):

- le situazioni o i contesti in cui il problema è situato;

- il contenuto matematico che deve essere usato per risolvere il problema;

[3]Il Consorzio Internazionale è costituito da cinque agenzie di ricerca (ACER,WESTAT, NIER, ETS e CITO) ed è responsabile della costruzione degli strumenti di rilevazione, delle procedure di campionamento, della organizzazione della rilevazione, dell'analisi e della elaborazione dei dati, nonché del coordinamento delle attività sul campo condotte dai paesi partecipanti.

- le competenze che devono essere attivate durante il processo risolutivo attraverso il quale il mondo reale, nel quale i problemi hanno origine, viene messo in relazione con la matematica.

Per quanto riguarda il contenuto matematico, nella costruzione delle prove cognitive del PISA sono state prese in considerazione quattro diverse aree di contenuto, denominate idee chiave (in inglese overarching ideas) le quali, contrariamente a ciò che accade per i contenuti scolastici, non possono essere delineate con precisione una rispetto all'altra dal momento che esse si intersecano una con l'altra.

Queste quattro aree di contenuto sono state così denominate:

- Quantità (si riferisce principalmente all'aritmetica)

- Spazio e forma (si riferisce principalmente alla geometria)

- Cambiamento e relazioni (si riferisce principalmente all'algebra)

- Incertezza (si riferisce principalmente alla statistica e probabilità)

Un'altra caratteristica delle prove è il loro livello di difficoltà che per le prove di matematica del 2003 come anche quelle del PISA 2012 variava dal livello 1 (il livello più basso) al livello 6 (il livello più alto). La padronanza tipica di ciascun livello può essere descritta in base alle competenze matematiche che lo studente deve possedere per raggiungere quel determinato livello e per essere, quindi, in grado di risolvere i quesiti corrispondenti a quel livello.

Oltre alle prove cognitive agli studenti è stato somministrato un questionario che raccoglieva informazioni riguardanti la provenienza socio-economica, la motivazione nei confronti della matematica e le strategie di apprendimento della matematica, gli atteggiamenti nei confronti della scuola e le relazioni con gli insegnanti. I risultati dei questionari sono stati utilizzati per cercare di interpretare le diverse performance degli studenti, sia a livello nazionale che a livello internazionale.

1.6.1 I risultati complessivi a livello internazionale

I risultati della rilevazione vengono forniti su cinque diverse scale di valutazione. La prima scala riguarda il punteggio[4] raggiunto da ciascun paese partecipante sulla scala complessiva di competenza matematica, mentre le altre quattro scale si riferiscono al punteggio ottenuto in ognuna alle quattro aree di contenuto (Quantità, Spazio e forma, Cambiamento e relazioni e Incertezza). Il punteggio corrispondente al livello più basso della scala, cioè al livello 1, è compreso tra 358 e 420 punti, quello corrispondente al livello più alto, cioè al livello 6, è superiore a 669. La differenza di punteggio tra un livello e l'altro è di 62 punti. Il livello 3 corrisponde al livello medio.

Nella tabella 1.2 sono riportati i punteggi ottenuti dai principali paesi partecipanti al PISA 2003.

Come si può vedere dalla tabella 1.2, gli unici paesi che hanno avuto risultati significativamente inferiori all'Italia sono la Grecia, la Turchia e il Messico. I paesi con punteggio significativamente uguale all'Italia sono la Federazione russa e il Portogallo, tutti gli altri paesi hanno ottenuto un punteggio significativamente superiore all'Italia.

La maggior parte dei paesi dell'OCSE ha una prestazione media in matematica che si attesta a livello 3. Le eccezioni sono: la Finlandia in cui la media del punteggio si trova al limite tra il livello 3 e il livello 4. L'Italia, la Grecia, il Portogallo e la Turchia con medie a livello 2 e il Messico a livello 1. Inoltre ci sono grosse differenze nel profilo delle abilità matematiche degli studenti dei diversi paesi e ciò può avere serie implicazioni per la competitività internazionale.

Nella tabella 1.3 vengono riportate le percentuali degli studenti che si attestano rispettivamente, al livello più basso (livello 1) e al livello più alto

[4]Per facilitare i confronti e l'interpretazione dei risultati raggiunti, si usa una scala standardizzata su tutti i dati dei paesi OCSE, in modo che la media sia 500 e che circa i due terzi degli studenti abbiano un punteggio compreso tra 400 e 600.

Tabella 1.2: Punteggio medio per la scala complessiva e le quattro scale specifiche di matematica.

Paese	Scala complessiva di competenza matematica	Quantità	Spazio e forma	Cambiamento e relazioni	Incertezza
Hong Kong	550 (4,5)	545	558	540	558
Finlandia	544 (1,9)	549	539	543	545
Corea	542 (3,2)	537	552	548	538
Paesi Bassi	538 (3,1)	528	526	551	549
Giappone	534 (4,0)	527	553	536	528
Canada	532 (1,8)	528	518	537	542
Australia	524 (2,2)	517	521	525	531
N. Zelanda	523 (2,3)	511	525	526	532
Francia	511 (2,5)	507	508	520	506
Germania	503 (3,3)	514	500	507	493
Media OCSE	500 (0,6)	501	496	499	502
Polonia	490 (2,5)	492	490	484	494
Spagna	485 (2,4)	492	476	481	489
USA	483 (3,0)	476	472	486	491
Fed. Russa	468 (4,2)	472	474	477	436
Portogallo	466 (3,4)	465	450	468	471
Italia	466 (3,1)	475	470	452	463
Grecia	445 (3,9)	446	437	436	458
Turchia	423 (6,7)	413	417	423	443
Messico	385 (3,6)	394	382	364	385

Fonte: OECD, 2004. (Fra parentesi l'errore standard)

(Livello 6) sia per la scala complessiva di matematica che per le quattro scale specifiche.

Analizzando i dati della tabella 1.3 si può notare che soltanto il 4% degli studenti dei paesi OCSE è in grado di svolgere problemi di difficoltà corrispondente al livello 6, ma più dell'8% in Giappone, Corea e Hong Kong. Il 13% degli studenti dei paesi OCSE è, invece, in grado di svolgere un compito di livello 1 il che vuol dire che essi possono essere in grado di effettuare operazioni matematiche di base, ma sono incapaci di utilizzare abilità matematiche in determinate situazioni, come viene richiesto dai compiti più facili del PISA. In Italia più del 18% degli studenti è al livello 1 e il 13% è al di sotto di tale livello. Ciò vuol dire che nel nostro paese uno studente su tre arriva al massimo al livello 1 della scala di competenza matematica. Una proporzione così alta di studenti a cui mancano le basi delle abilità matematiche costituisce un problema serio in quanto il sistema economico avrà bisogno anche di una forza lavoro che sia ampiamente competente e coloro che non hanno queste abilità incontreranno difficoltà nella loro vita adulta.

I dati riportati nelle tabelle 1.2 e 1.3 forniscono anche informazioni interessanti riguardo ai diversi risultati che ciascun paese ottiene nelle diverse aree di contenuto dimostrando che all'interno di ciascun paese viene dato un peso diverso all'interno del curricolo di matematica a ciascuna delle diverse aree. Ad esempio, in Finlandia, gli studenti hanno punteggi migliori nell'area di contenuto Quantità rispetto all'area di contenuto Spazio e forma. In Italia, il punto di debolezza è costituito da Cambiamento e relazioni, mentre Quantità è l'area di contenuto in cui si ottiene il miglior risultato.

Tabella 1.3: Percentuali degli studenti a livello 1 e a livello 6 per la scala complessiva di matematica e per le scale specifiche

Paese	**Scala complessiva di competenza matematica**		**Quantità**		**Spazio e forma**		**Cambiamento e relazioni**		**Incertezza**	
	liv. 1	liv. 6	liv. 1	liv. 6	liv. 1	liv. 6	liv. 1	liv. 6	liv. 1	liv. 6
Hong Kong	6,5	10,5	7,0	9,2	7,0	15,6	8,0	9,8	6,3	12,7
Finlandia	5,3	6,7	5,0	7,0	7,3	7,9	7,0	8,9	5,5	6,8
Corea	7,1	8,1	7,2	6,4	8,4	16,0	7,0	10,9	7,2	6,7
Paesi Bassi	8,4	7,3	10,1	6,7	10,1	6,2	7,2	11,3	6,7	9,5
Giappone	8,6	8,2	9,2	6,7	7,4	14,3	8,5	11,3	9,1	6,6
Canada	7,7	5,5	8,9	6,0	10,7	5,6	7,6	7,3	6,4	6,8
Australia	10,1	5,8	11,0	5,2	10,8	7,3	9,5	6,5	9,0	7,4
N. Zelanda	10,2	6,6	11,9	5,0	10,8	8,5	10,2	7,9	9,4	8,6
Francia	11,0	3,5	11,1	3,5	12,0	5,2	9,5	5,6	12,3	2,8
Germania	12,4	4,0	10,4	5,5	13,3	6,0	12,6	6,1	15,3	2,9
Media OCSE	13,2	4,0	12,5	4,0	14,2	5,8	13,0	5,3	13,3	4,2
Polonia	15,2	2,3	13,5	1,8	15,0	5,0	16,1	3,3	13,9	1,6
Spagna	14,9	1,4	13,2	2,6	16,7	1,7	14,9	2,0	13,7	1,5
USA	15,5	2,0	15,6	2,8	18,2	2,3	14,4	2,3	14,9	3,2
Russia	18,8	1,6	16,8	1,4	16,5	4,3	16,2	2,6	24,8	0,5
Portogallo	18,8	0,8	18,4	1,2	21,5	0,9	17,5	1,8	18,4	0,6
Italia	18,7	1,5	16,1	2,9	16,8	3,3	19,3	1,5	18,9	1,4
Grecia	21,2	0,6	19,8	1,0	21,7	0,8	19,9	1,1	20,4	0,7
Turchia	24,6	2,4	23,1	2,3	26,0	2,1	21,1	3,2	25,6	2,6
Messico	27,9	0,0	25,0	0,1	27,8	0,0	24,0	0,1	30,7	0,0

Fonte: OECD, 2004.

1.6.2 I risultati complessivi a livello nazionale

Il risultato conseguito dall'Italia non è di certo confortante, ma è interessante analizzarlo in maniera più approfondita, considerando non il punteggio che l'Italia nel suo complesso ha riportato, bensì i singoli punteggi ottenuti dagli studenti appartenenti alle cinque macroaree (Nord Ovest, Nord Est, Centro, Sud e Sud Isole) in cui il campione italiano è stato suddiviso[5](tabella 1.4).

Tabella 1.4: Punteggi di matematica per area geografica

Macroarea	Scala complessiva di competenza matematica	Quantità	Spazio e forma	Cambiamento e relazioni	Incertezza
Nord Ovest	510 (5,1)	519	515	503	506
Nord Est	511 (7,7)	522	517	500	507
Centro	472 (5,6)	482	478	458	469
Sud	428 (8,2)	438	432	411	426
Sud Isole	423 (6,1)	432	427	407	422
ITALIA	466 (3,1)	475	470	452	463

Fonte: OECD, 2004

Esiste un'enorme disparità tra i risultati conseguiti dagli studenti delle scuole del Nord Est e del Nord Ovest, rispetto a quelli degli studenti del Centro e ancora di più del Sud e del Sud Isole, e ciò conferma quanto già emerso dalla precedente indagine di PISA 2000. In realtà, simili differenze non dovrebbero essere presenti in un paese con un sistema scolastico centralizzato qual è il nostro, che dovrebbe dare una sostanziale omogeneità negli esiti, ma il fatto che invece esistano vuol dire che i risultati non dipendono soltanto dai programmi scolastici e che le scuole non sono ugualmente efficaci su tutto il territorio nazionale.

Riguardo alle percentuali di studenti che si collocano ai diversi livelli di competenza, il Nord Est e il Nord Ovest hanno una percentuale di studenti al livello più basso (Livello 1 o inferiore) simile a quella dei Paesi con i risultati

[5]Il Nord Ovest comprende Piemonte, Lombardia, Liguria e Valle d'Aosta; il Nord Est comprende Veneto, Friuli Venezia Giulia, Trentino, Alto Adige e Emilia Romagna;il Centro comprende Toscana, Lazio, Marche, Umbria; il Sud comprende Abruzzo, Molise, Campania e Puglia; il Sud Isole comprende Calabria, Basilicata, Sicilia e Sardegna.

migliori e inferiore alla media OCSE (rispettivamente 15% e 16%; OCSE 25%), mentre per il Sud e il Sud Isole tale percentuale ammonta al 48%. Il Centro ha valori intermedi 27%. Per quanto riguarda invece le percentuali di studenti al livello più alto, quello cioè delle eccellenze, si riscontra che tale livello è presente solo nelle regioni del Nord ed è praticamente assente nel resto dell'Italia.

Altre differenze importanti si riscontrano nei punteggi ottenuti dagli studenti appartenenti ai diversi tipi di scuola: i licei hanno ottenuto un punteggio medio pari a 503, quindi di poco superiore alla media dei paesi OCSE, gli Istituti Tecnici hanno riportato un punteggio medio di 472 punti e gli Istituti Professionali di 408 punti. È anche interessante vedere come si distribuiscono gli studenti dei vari tipi di scuola nei diversi livelli della scala complessiva di matematica (tabella 1.5).

Tabella 1.5: Percentuale di studenti a ciascun livello della scala complessiva di matematica per tipo di scuola

Tipo di scuola	**Sotto il livello 1**	**Livello 1**	**Livello 2**	**Livello 3**	**Livello 4**	**Livello 5**	**Livello 6**
Licei	5,4	12,4	22,8	28,0	19,3	9,1	3,0
Istituti Tecnici	10,1	16,9	27,4	25,0	14,4	5,2	1,1
Istituti professionali	26,6	31,3	24,5	13,3	3,5	0,7	0,0
Media OCSE	8,2	13,2	21,1	23,7	19,1	10,6	4,0

Fonte: OECD, 2004.

È sorprendente notare che negli Istituti Professionali più di uno studente su 4 non raggiunge nemmeno il primo livello, cioè si trova sotto la soglia di misurabilità e che contemporaneamente non vi sono studenti che raggiungono il livello delle eccellenze. Solo il 18% circa degli studenti di questo tipo di scuole è a un livello medio o di poco superiore alla media. Nei licei, invece, non solo è presente una percentuale simile a quella dei paesi dell'OCSE di studenti a livello 6, ma quasi il 60% degli studenti che frequentano questo tipo di scuola è ad un livello medio o superiore. Risultati intermedi si hanno per gli Istituti Tecnici dove il 46% circa degli studenti è al livello 3 o al di sopra di esso.

Queste differenze così marcate tra i diversi tipi di istruzione sono il risultato della canalizzazione che avviene quando lo studente, al termine della scuola media, si trova a scegliere il tipo di scuola superiore: gli studenti con scarso rendimento scolastico (e generalmente anche basso background socio-economico e culturale) scelgono l'istituto professionale, mentre gli studenti con alto profitto scolastico (e generalmente alto background socio-economico e culturale) scelgono di frequentare il liceo.

Mentre vi sono paesi, come la Danimarca o la Svezia, nei quali i risultati degli studenti sono indipendenti dalle scuole frequentate, ve ne sono altri, come l'Austria, la Germania, i Paesi Bassi, nei quali la varianza tra scuole è pari ai due terzi della varianza media dell'OCSE ad indicare che in tali paesi le scuole raggruppano studenti che hanno risultati di livello abbastanza simile. In Italia, in particolare, la varianza tra scuole è pari al 57%, valore superiore a quello osservato in media nei paesi dell'OCSE che è pari al 34% (Rapporto nazionale, 2006).

Uno dei principali fattori che spiega la differenza tra scuole è costituito dal background socio-economico degli studenti e delle scuole: in Italia, la varianza tra scuole legata alla composizione socio-economica delle scuole è uguale al 31% della varianza media dell'OCSE, percentuale superiore alla corrispondente media OCSE 23%.

1.7 Definizione e valutazione di competenza matematica in PISA 2012

Per competenza matematica nell'indagine PISA 2012, riformulata rispetto ai precedenti cicli, si intende

"la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per

descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo".
La definizione riportata sottolinea l'importanza della literacy matematica per la piena partecipazione alla società e si presume che questa importanza derivi dal modo in cui la matematica può essere usata per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni di molti tipi, come base per un processo decisionale informato.
La literacy matematica, descritta in questo modo, non è un attributo o una dote che un individuo ha o non ha, ma può essere acquisita in maggiore o minore misura, ed è richiesta in vari gradi nella società. Essa è coinvolta in molte attività della vita reale, a partire dagli scambi di denaro per beni e servizi fino alle situazioni in cui la matematica viene utilizzata per spiegare e prevedere fenomeni altamente complessi. Per questo motivo, PISA 2012 mira a rilevare non solo la misura in cui gli studenti sono in grado di riprodurre la conoscenza dei contenuti matematici, ma anche quanto essi riescono a estrapolare dalle loro conoscenze e ad applicarlo anche in situazioni nuove e non familiari.
Il focus sui contesti di vita reale si riflette anche nel riferimento all'utilizzo di strumenti, che appaiono nella definizione di literacy matematica di PISA 2012. La parola strumenti qui si riferisce alle apparecchiature fisiche e digitali, software e dispositivi di calcolo ormai ampiamente diffusi nei luoghi di lavoro del XXI secolo. Esempi di questa strumentazione includono un righello, una calcolatrice, un foglio di calcolo, un convertitore di valuta on line e specifici software di matematica.

1.7.1 I risultati complessivi a livello internazionale

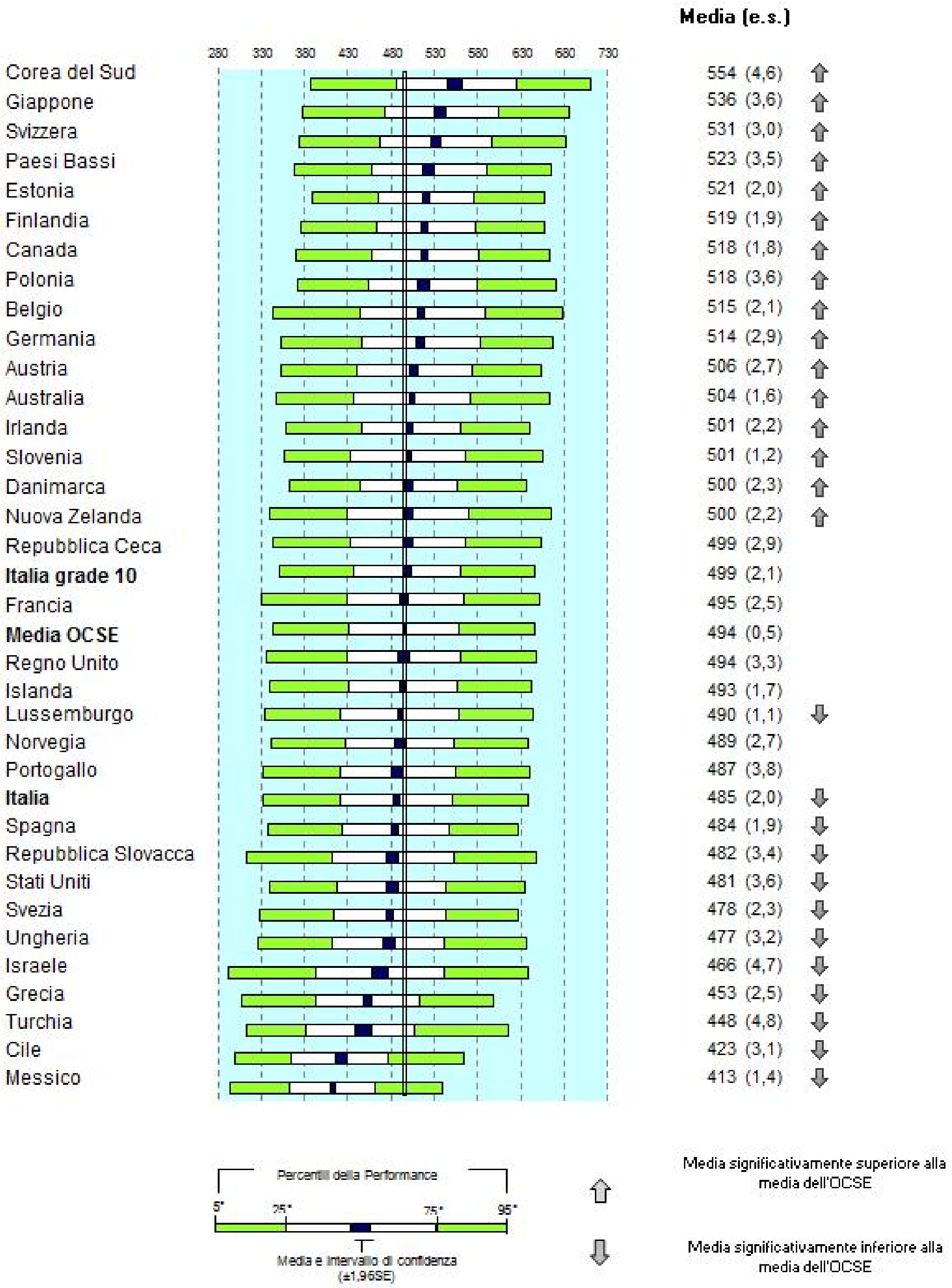
Un primo modo per esaminare i risultati in matematica può essere quello di considerare il livello medio dei risultati della prestazione ottenuta nei paesi partecipanti. Il termine di paragone (benchmark) rispetto al quale è confrontata la prestazione dei paesi è la media OCSE, che nel 2012 corrisponde a 494 punti.

Nell'interpretazione della performance media, vengono prese in considerazione solo quelle differenze tra i paesi che sono statisticamente significative.

Nella figura 1.2, vengono presentati i risultati nella competenza matematica dei diversi paesi. In particolare, si può vedere che la Corea del Sud presenta il punteggio medio più elevato fra i Paesi OCSE (554). Due paesi partner, la provincia cinese di Shangai (613) e Singapore (573), hanno un punteggio medio che è un livello di competenza sopra la media OCSE. Altri paesi dell'OCSE con performance media superiore alla media OCSE sono Giappone (536), Svizzera (531), Paesi Bassi (523), Estonia (521), Finlandia (519), Canada (518), Polonia (518), Belgio (515), Germania (514), Austria (506), Australia (504), Irlanda (501), Slovenia (501), Danimarca (500) Nuova Zelanda (500). Quattro paesi partner sono sopra la media OCSE: Hong Kong (561), Taipei (560), Macao (538), Liechtenstein (535) e Vietnam (511).

Come si evince dal grafico, in cui sono rappresentati i soli paesi OCSE, l'Italia si colloca lievemente ma significativamente sotto la media OCSE con un punteggio di 485. Rispetto agli altri paesi che hanno preso parte all'indagine PISA 2012, l'Italia si colloca tra il 30^{o} e il 35^{o} posto, e tra il 22^{o} e il 27^{o} posto considerando solo i paesi OCSE.

Figura 1.2: Distribuzione della performance in matematica nei paesi OCSE



1.7.2 I risultati complessivi a livello nazionale

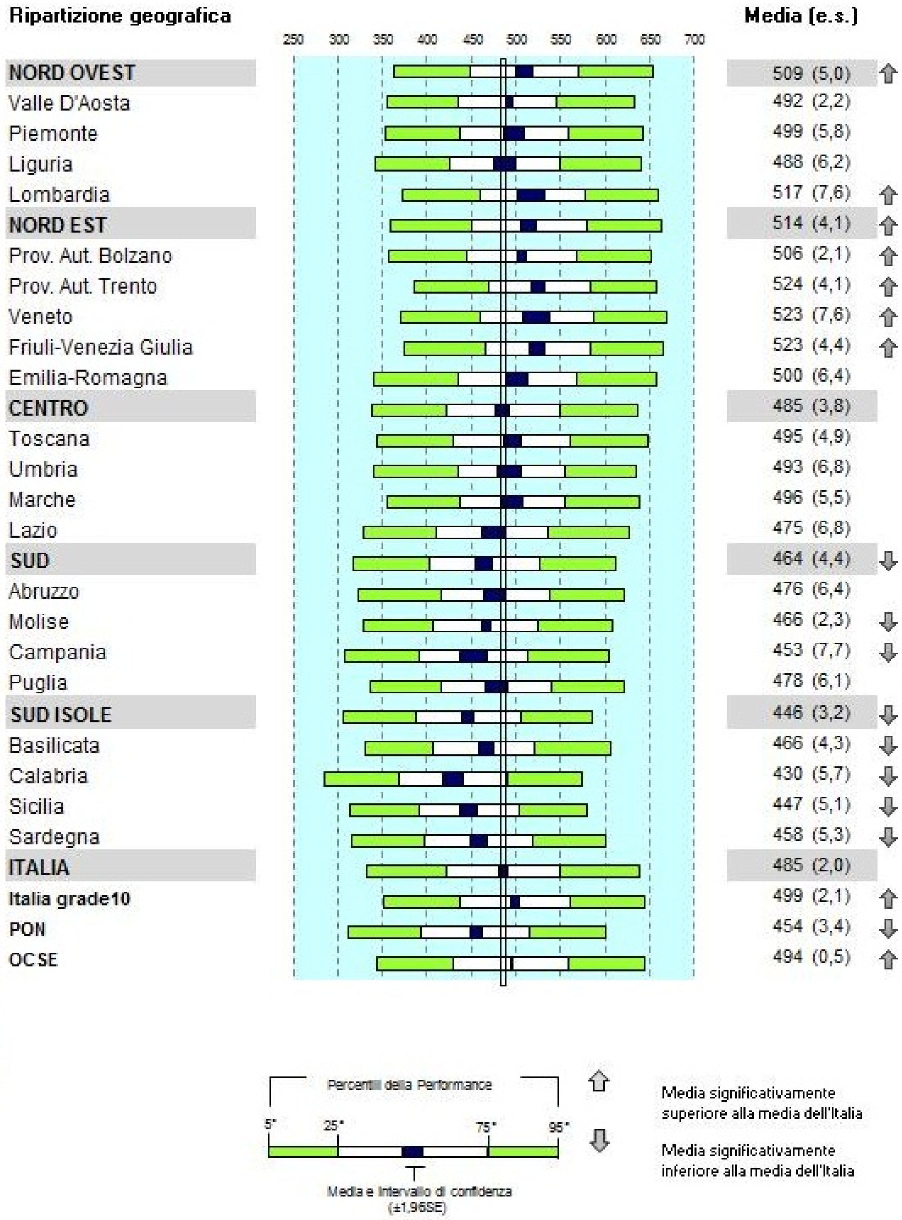
Le competenze dei 15-enni italiani in Matematica si situano leggermente, ma significativamente, al di sotto della media OCSE (circa il 2%, 485 punti a fronte dei 494 della media OCSE).

Fra i paesi OCSE, ottengono un punteggio inferiore all'Italia solo Svezia, Ungheria, Israele, Grecia, Cile e Messico; sono equiparabili all'Italia (avendo valori che non se ne discostano in termini statisticamente significativi) Norvegia, Portogallo, Spagna, Repubblica Slovacca e Stati Uniti.

Confrontando il 2012 con le prime edizioni della rilevazione PISA l'Italia evidenzia però segnali di miglioramento: tra 2006 e 2009 i risultati si innalzano e il 2012 conferma tale inversione di tendenza. Il pattern dei risultati interni all'Italia è coerente con quello delle rilevazioni nazionali condotte dall'INVALSI: ampi sono i divari territoriali, con le regioni del Nord Ovest e del Nord Est avanti, mentre il Mezzogiorno, pur con segnali di miglioramento dal 2006 in poi, specie in alcune regioni, è sotto la media nazionale, sui cui valori si situa il Centro. A livello di singole regioni, i valori più elevati (con risultati sopra la media OCSE) li hanno la Provincia autonoma di Trento, il Friuli-Venezia Giulia, il Veneto e la Lombardia, mentre i risultati peggiori si hanno in Calabria, Sicilia, Campania e Sardegna; Puglia e Abruzzo ottengono risultati più elevati rispetto alla propria macroarea di riferimento, avvicinandosi alla media nazionale, mentre il Lazio è l'unica regione del Centro al di sotto della media nazionale.

Nella Figura 1.3 vengono riportati i punteggi medi e i percentili degli studenti delle diverse macroaree geografiche e regioni/province autonome nella scala complessiva di matematica.

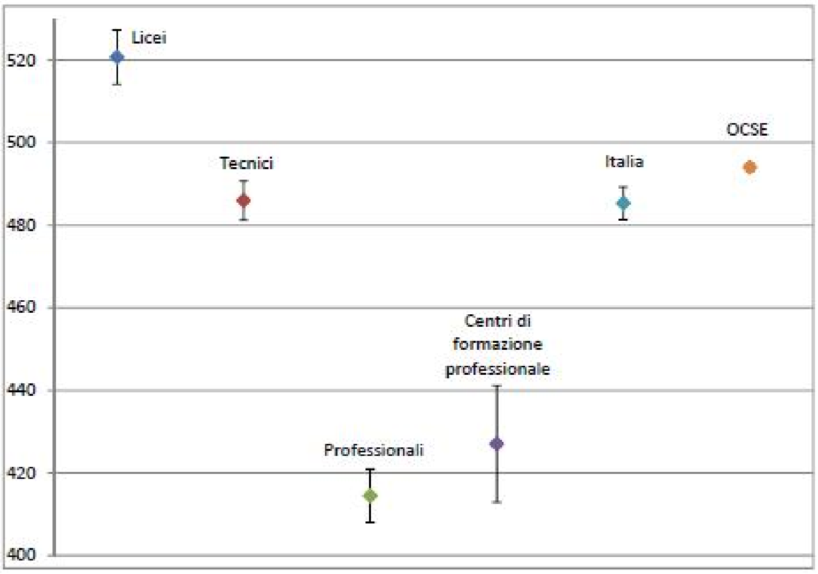
Figura 1.3: Distribuzione della performance in Matematica



Se si vanno ad analizzare i risultati tra le macroaree geografiche e tra le diverse tipologie di scuola frequentate dagli studenti, infatti, l'indagine PISA 2012 mette in evidenza notevoli differenze tra i punteggi ottenuti e quindi tra i livelli di matematica corrispondenti.

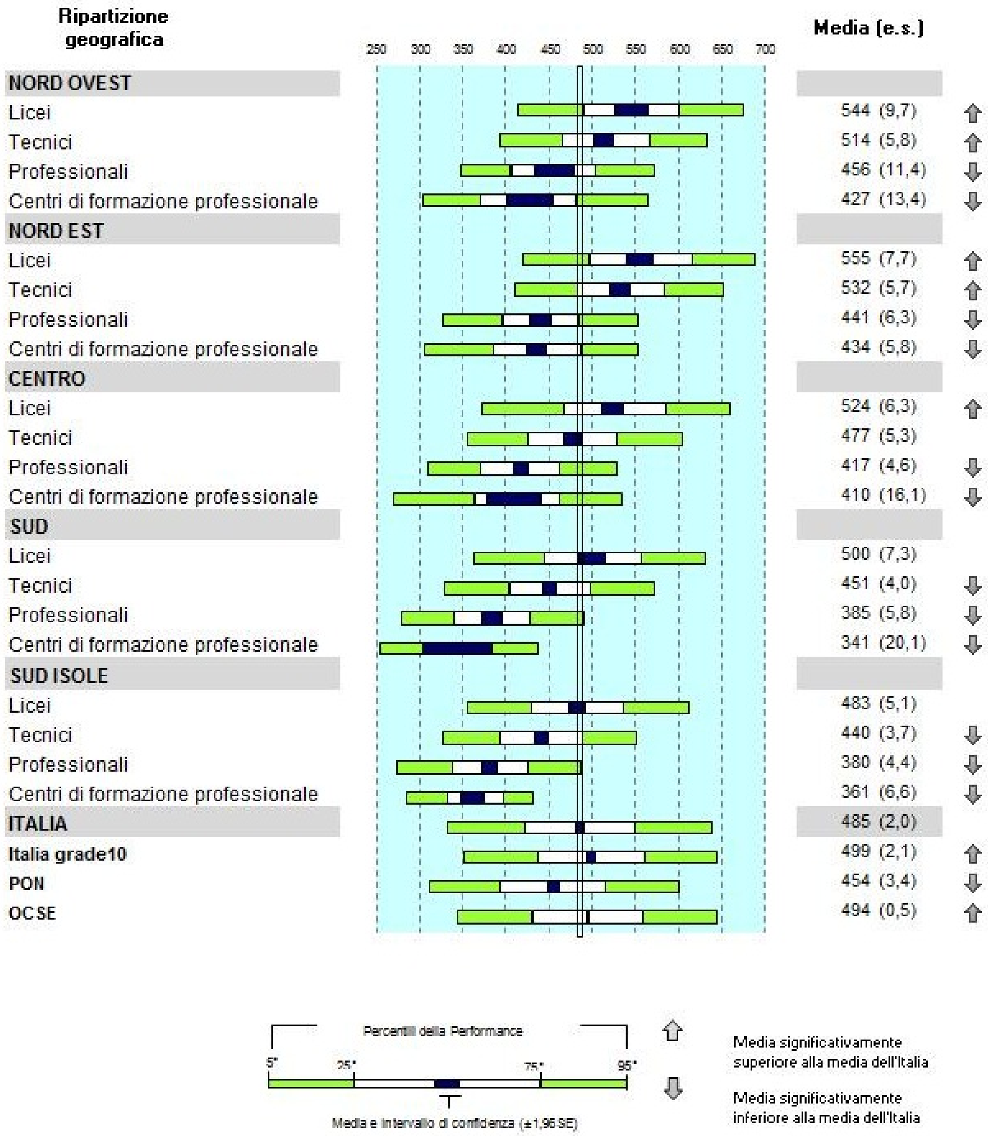
Analizzando i risultati medi nazionali per tipologia d'istituto frequentato dagli studenti, emerge che gli studenti dei Licei con una media di 521 punti conseguono risultati significativamente superiori sia della media nazionale sia alla media OCSE. Gli studenti degli Istituti tecnici, con una media di 486, non si discostano dalla media nazionale, ma ottengono risultati significativamente al di sotto della media OCSE. Gli studenti degli Istituti professionali con una media di 414 e della Formazione professionale con una media di 427 sono al di sotto sia della media nazionale sia della media OCSE. (Figura1.4)

Figura 1.4: Punteggi medi nella scala complessiva di literacy matematica, per tipologia di istituto



Se vediamo nel dettaglio cosa accade nelle diverse macroaree geografiche, la situazione dei differenti tipi di scuola ha un andamento simile a quello nazionale. (Figura 1.5)

Figura 1.5: Distribuzione della performance ni Matematica Macroarea per tipologia di scuola



Per la Matematica è anche possibile considerare dati di dettaglio distintamente per 3 tipologie di processi logici stimolati dalle domande poste nelle prove "utilizzare", "interpretare" e "formulare" strumenti matematici e per 4 aree di contenuto dei quesiti posti "cambiamento e relazioni", "quantità", "spazio e forma","incertezza e dati". (Figura 1.6, Figura 1.7)

Il differenziale negativo evidenziato dagli studenti italiani è marcato in particolare nella sottoscala formulare, che prevede l'identificazione delle opportunità di applicare e usare la matematica (vale a dire rendersi conto del fatto che è possibile applicare la matematica per comprendere o risolvere un particolare problema o sfida) e nella sottoscala relativa a cambiamento e relazioni, che misura la comprensione delle tipologie fondamentali del cambiamento (all'interno di sistemi di oggetti correlati o in circostanze nelle quali gli elementi si influenzano a vicenda) e la capacità di riconoscerle quando si manifestano per poter utilizzare modelli matematici adeguati a descrivere e predire il cambiamento.

Figura 1.6: Distribuzione della performance in Matematica nelle diverse sottoscale di Processi

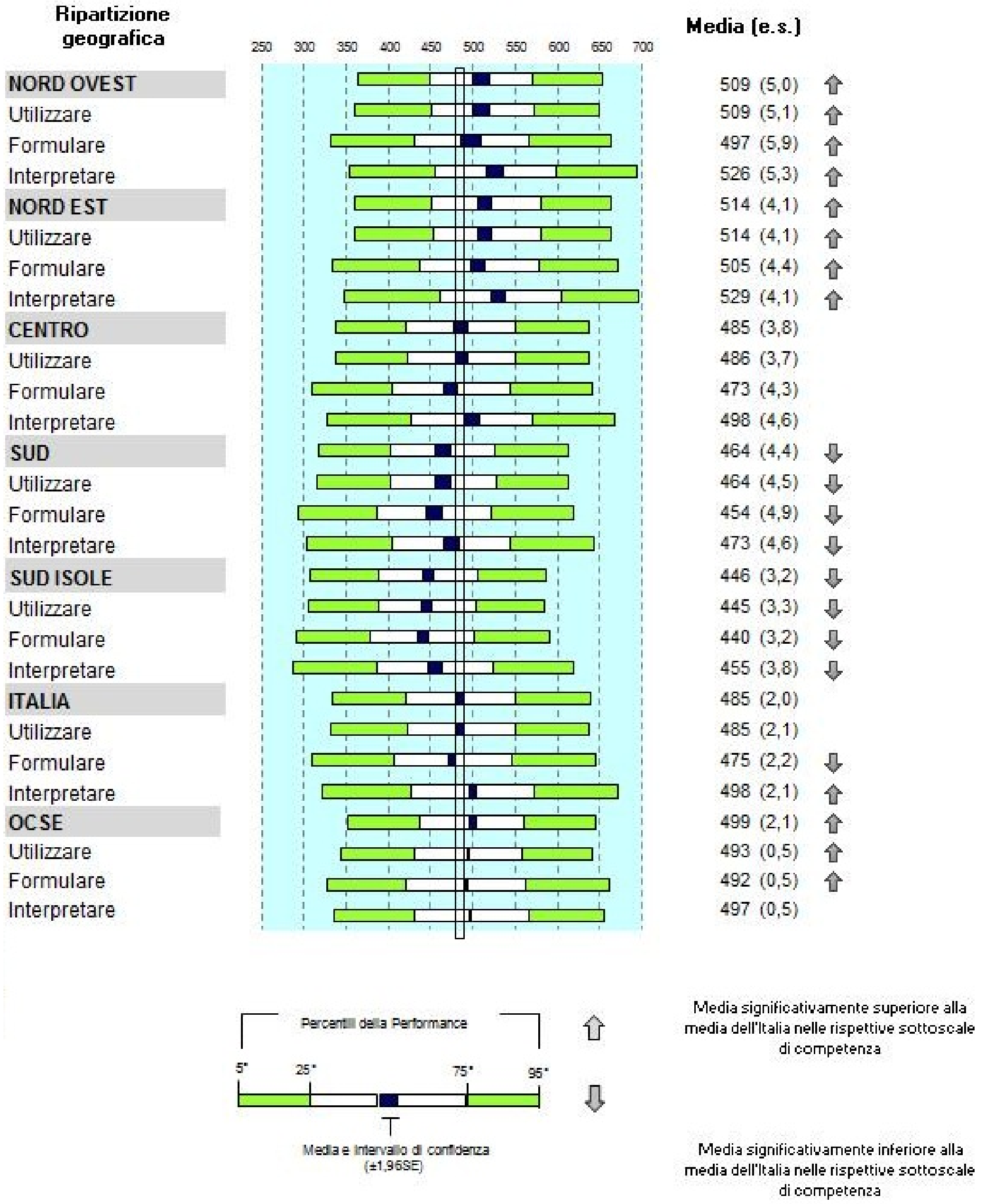
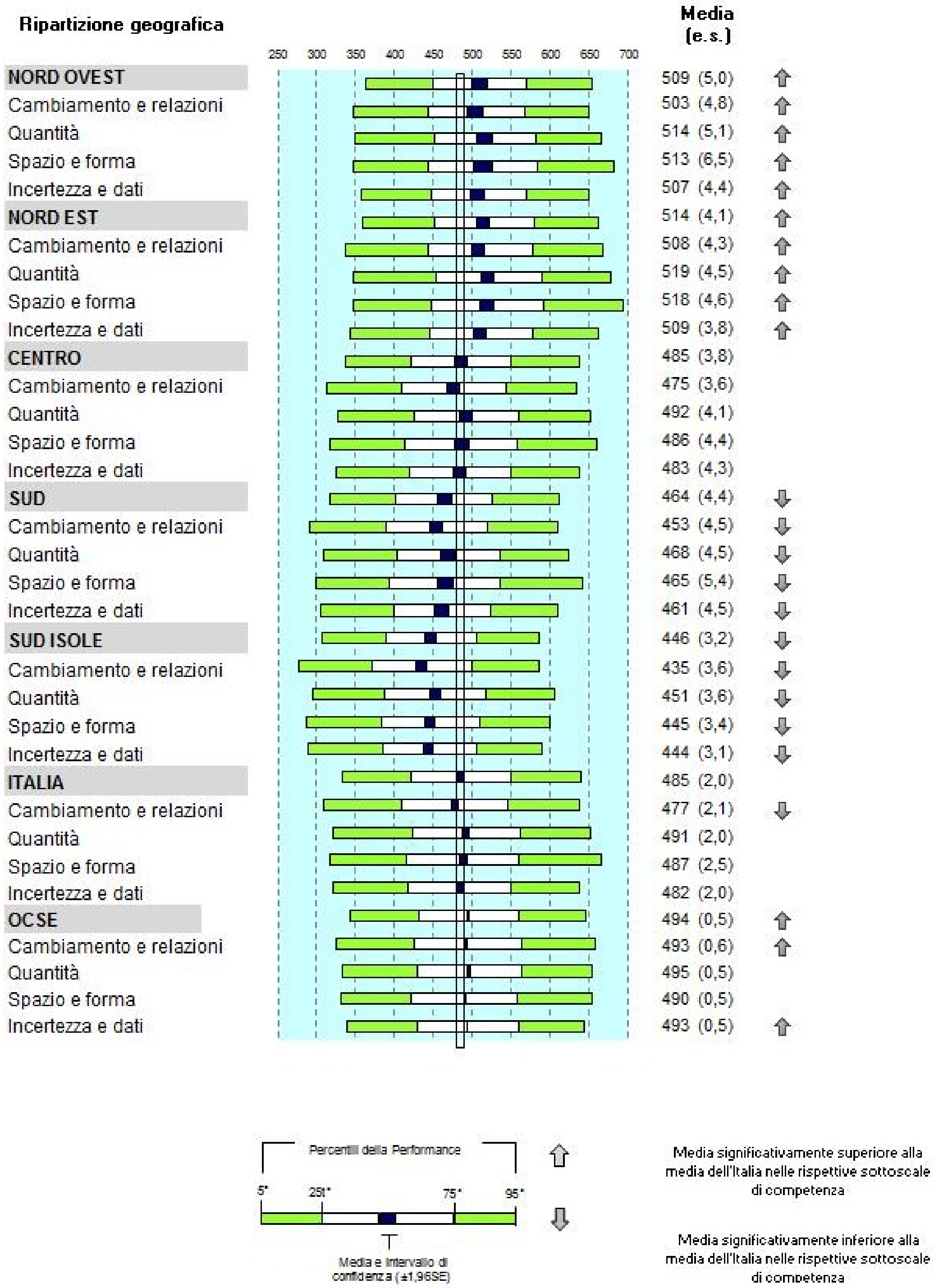


Figura 1.7: Distribuzione della performance in Matematica nelle sottoscale di Contenuto



Inoltre, nella Matematica l'Italia presenta una performance significativamente peggiore per le ragazze rispetto ai ragazzi (476 a fronte di 494), con un divario che è più ampio di quello registrato nella media dei paesi OCSE (18 punti vs 11).

1.8 Livelli di competenza in matematica

Poiché nella rilevazione del 2012 la matematica ha avuto il ruolo principale, sono stati somministrati un numero di quesiti più alto degli altri ambiti ed è stato possibile, per questo, descrivere con maggiore precisione i 6 livelli della scala sotto forma di livelli di competenza. La padronanza tipica di ogni livello della scala può essere descritta in base alle competenze matematiche che si devono possedere per raggiungere quel determinato livello, cioè per risolvere correttamente i quesiti associati.

I sei livelli di competenza in matematica usati in PISA 2012 sono gli stessi stabiliti per la rilevazione del 2003 in cui la matematica è stata per la prima volta l'ambito principale di valutazione.

I quesiti che si trovano ai livelli più alti della scala delle competenze richiedono, da parte dello studente, un certo grado di riflessione, pensiero e creatività. Di solito le situazioni descritte non fanno riferimento a situazioni familiari e necessitano quindi di più alti livelli d'interpretazione. Le domande generalmente richiedono l'interpretazione di dati complessi e non familiari; l'applicazione di costrutti matematici a situazioni complesse del mondo reale e la spiegazione della soluzione trovata. A questi alti livelli di competenza le domande tendono ad avere più elementi che devono essere collegati dagli studenti e la soluzione in genere richiede un approccio strategico attraverso diversi passaggi interconnessi.

Al livello intermedio della scala di competenza, i quesiti richiedono un'interpretazione sostanziale, spesso di situazioni che sono relativamente poco familiari. Gli studenti sono tenuti a utilizzare rappresentazioni diverse della stessa situazione, comprese anche le rappresentazioni matematiche più formali, al fine di mettere in relazione le diverse rappresentazioni e arrivare ad analizzare e comprendere il problema. Ciò comporta una catena di ragionamento o una sequenza di calcoli. Agli studenti può inoltre essere richiesto di esprimere il loro ragionamento e la soluzione ottenuta attraverso una semplice spiegazione. Attività tipiche, a questo livello, includono: l'interpretazione di grafici, l'interpretazione del testo, sulla base di informazioni ricavabili in una tabella o in un grafico, l'uso di scale di conversione per calcolare delle distanze su una mappa, e l'utilizzo del ragionamento spaziale e conoscenze di tipo geometrico per calcolare distanze, velocità e tempo.

Nella parte inferiore della scala delle competenze, i quesiti vengono posti in modo semplice e fanno riferimento a contesti familiari. Viene richiesta solo l'interpretazione più semplice della situazione, e l'applicazione diretta di concetti matematici ben noti. Attività tipiche, a questi livelli della scala, includono la lettura di un dato direttamente da un grafico o da una tabella, l'esecuzione di un calcolo aritmetico molto semplice, il saper ordinare correttamente un piccolo insieme di numeri, il calcolo di un semplice tasso di cambio. Nella tabella 1.6 vengono descritti sinteticamente i livelli e viene indicata la percentuale di studenti dei Paesi OCSE e di studenti italiani che si collocano a ciascun livello.

Tabella 1.6: Descrizione dei livelli di competenza sulla scala complessiva di matematica

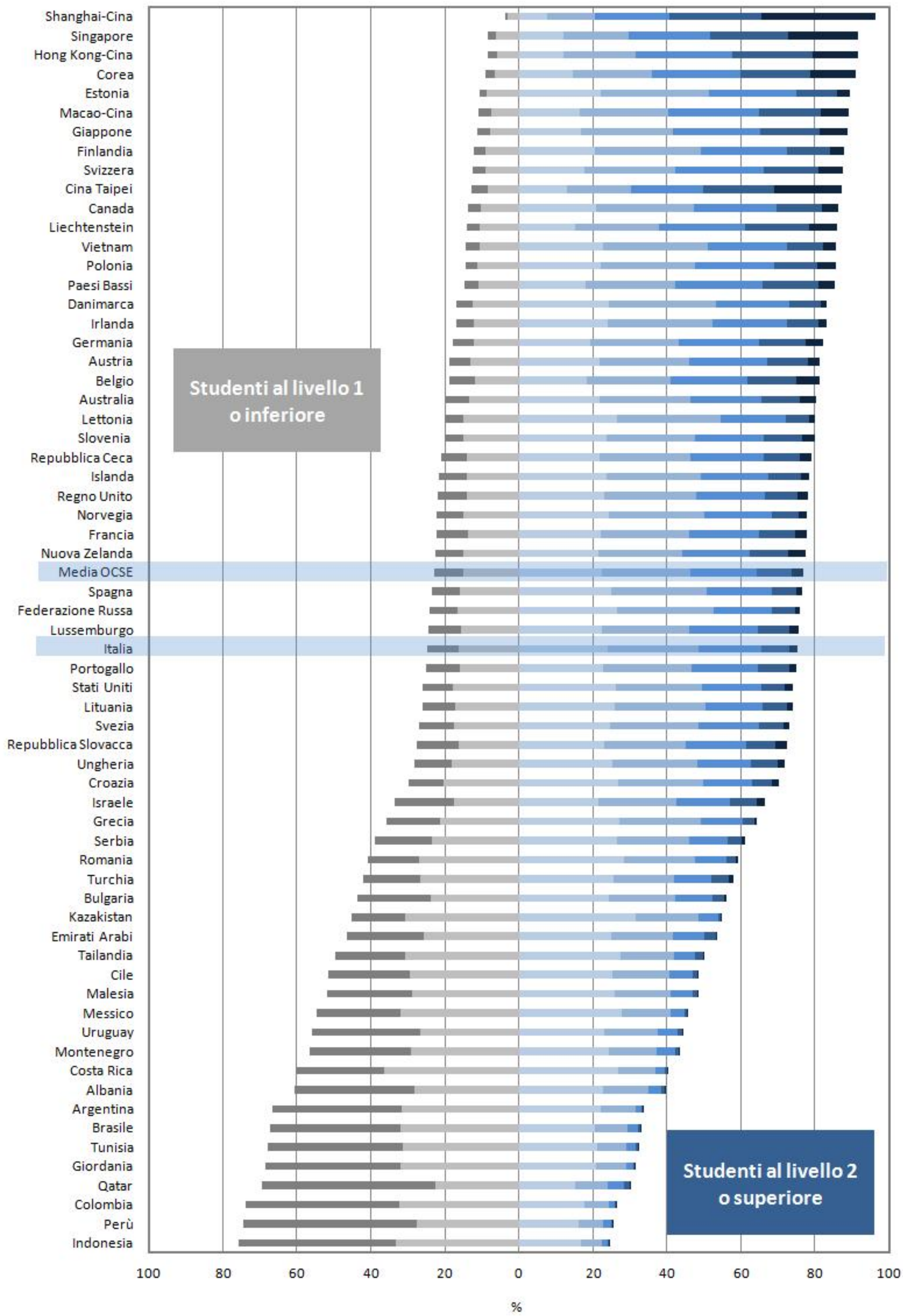
Livello	**Punteggio limite inferiore**	**Percentuale di studenti in grado di svolgere i compiti del livello considerato**	**Competenze necessarie a risolvere i compiti proposti e caratteristiche dei compiti stessi**
6	669	OCSE: 3,3% Italia: 2,2% Italia Livello 10: 2,6%	Gli studenti che si collocano al **6° Livello** sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni basate sulla propria analisi e modellizzazione di situazioni problematiche e complesse. Essi sono in grado di collegare fra loro differenti fonti d'informazione e rappresentazioni passando dall'una all'altra in maniera flessibile. A questo livello, gli studenti sono capaci di pensare e ragionare in modo matematicamente avanzato. Essi sono inoltre in grado di applicare tali capacità di scoperta e di comprensione contestualmente alla padronanza di operazioni e di relazioni matematiche di tipo simbolico e formale in modo da sviluppare nuovi approcci e nuove strategie nell'affrontare situazioni inedite. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di esporre e di comunicare con precisione le proprie azioni e riflessioni collegando i risultati raggiunti, le interpretazioni e le argomentazioni alla situazione nuova che si trovano ad affrontare
5	607	OCSE: 9,3% Italia: 7,8% Italia Livello 10: 9,0%	Gli studenti che si collocano al **5° Livello** sono in grado di sviluppare modelli di situazioni complesse e di servirsene, di identificare vincoli e di precisare le assunzioni fatte. Essi sono inoltre in grado di selezionare, comparare e valutare strategie appropriate per risolvere problemi complessi legati a tali modelli. A questo livello, inoltre, gli studenti sono capaci di sviluppare strategie, utilizzando abilità logiche e di ragionamento ampie e ben sviluppate, appropriate rappresentazioni, strutture simboliche e formali e capacità di analisi approfondita delle situazioni considerate. Essi sono anche capaci di riflettere sulle proprie azioni e di esporre e comunicare le proprie interpretazioni e i propri ragionamenti.
4	545	OCSE: 18,2% Italia: 16,7% Italia Livello 10: 19,0%	Gli studenti che si collocano al **4° Livello** sono in grado di servirsi in modo efficace di modelli dati applicandoli a situazioni concrete complesse anche tenendo conto di vincoli che richiedano di formulare assunzioni. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e di integrare fra loro rappresentazioni differenti, anche di tipo simbolico, e di metterle in relazione diretta con aspetti di vita reale. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di utilizzare abilità ben sviluppate e di ragionare in maniera flessibile, con una certa capacità di scoperta, limitatamente ai contesti considerati. Essi riescono a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni basandosi sulle proprie interpretazioni, argomentazioni e azioni.
3	482	OCSE: 23,7% Italia: 24,6% Italia Livello 10: 26,5%	Gli studenti che si collocano al **3° Livello** sono in grado di eseguire procedure chiaramente definite, comprese quelle che richiedono decisioni in sequenza. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e applicare semplici strategie per la risoluzione dei problemi. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di interpretare e di utilizzare rappresentazioni basate su informazioni provenienti da fonti differenti e di ragionare direttamente a partire da esse. Essi riescono a elaborare brevi comunicazioni per esporre le proprie interpretazioni, i propri risultati e i propri ragionamenti.

Tabella 1.6: Descrizione dei livelli di competenza sulla scala complessiva di matematica

Livello	**Punteggio limite inferiore**	**Percentuale di studenti in grado di svolgere i compiti del livello considerato**	**Competenze necessarie a risolvere i compiti proposti e caratteristiche dei compiti stessi**
2	420	OCSE: 22,5% Italia: 24,1% Italia Livello 10: 22,6%	Gli studenti che si collocano al **2° Livello** sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedano non più di un'inferenza diretta. Essi sono in grado, inoltre, di trarre informazioni pertinenti da un'unica fonte e di utilizzare un'unica modalità di rappresentazione. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di servirsi di elementari algoritmi, formule, procedimenti o convenzioni. Essi sono capaci di ragionamenti diretti e di un'interpretazione letterale dei risultati.
1	358	OCSE: 15,0% Italia: 16,1% Italia Livello 10: 13,6%	Gli studenti che si collocano **1° Livello** sono in grado di rispondere a domande che riguardino contesti loro familiari, nelle quali siano fornite tutte le informazioni pertinenti e sia chiaramente definito il quesito. Essi sono in grado, inoltre, di individuare informazioni e di mettere in atto procedimenti di routine all'interno di situazioni esplicitamente definite e seguendo precise indicazioni. Questi studenti sono anche capaci di compiere azioni ovvie che procedano direttamente dallo stimolo fornito.

I risultati ottenuti a livello internazionale dagli studenti nelle prove riguardanti la matematica sono sintetizzati nel grafico in Figura 1.8 dove sono riportate le percentuali di studenti in ogni livello di competenza della scala complessiva.

Figura 1.8: Percentuale di studenti a ciascun livello della scala di literacy matematica



In dettaglio possiamo vedere come si distribuiscono gli studenti nei diversi livelli:

- Livello 6 (punteggio superiore a 669 punti)

  In media nei Paesi OCSE, il 3,3 % degli studenti raggiungere il livello 6. L'Italia ha il 2,2% di studenti a questo livello.

- Livello 5 (punteggio superiore a 607)

  Nei paesi OCSE, il 12,6% degli studenti sono top performers, nel senso che raggiungono livello 5 o superiore[6]. L'Italia ha il 7,8% degli studenti al livello 5 e il 9,9% di studenti che si collocano al livello 5 o superiore.

- Livello 4 (punteggio superiore a 545)

  Nei paesi OCSE, in media il 30,8% degli studenti sono al livello 4 o superiore. L'Italia ha il 16,7%di studenti al livello 4 e il 26,7

- Livello 3 (punteggio superiore a 482)

  Nei paesi dell'OCSE, una media del 54,5% degli studenti sono al livello 3 o superiore (cioè, al livello 3, 4, 5 o 6). L'Italia ha il 24,6% di studenti al livello 3 e il 51,3% di studenti al livello 3 o superiore.

- Livello 2 (punteggio superiore a 420)

  Il livello 2 è considerato il livello base di competenza matematica che è richiesto per poter partecipare pienamente alla società moderna. Nei paesi dell'OCSE, una media del 77,0% degli studenti è al livello 2 o superiore. L'Italia ha il 24,1% di studenti al livello 2 e il 75,3% di studenti al livello 2 o superiore.

- Livello 1 (punteggio superiore a 358) e al di sotto

  Tutti i paesi OCSE e i paesi partner mostrano una percentuale di studenti al livello 1 o al di sotto , ma la più grande percentuale di studenti

[6] Gli studenti che rispondono correttamente alle domande dei livelli superiori della scala rispondono correttamente anche alle domande dei livelli inferiori della scala.

che raggiungono solo questi livelli si trovano nei paesi che hanno ottenuto risultati medi peggiori. Nei paesi dell'OCSE, una media del 15,0% degli studenti si trova al livello 1 e l' 8,0% sotto il livello 1, ma ci sono grandi differenze tra i paesi. In Italia il 16,1% di studenti sono al livello 1 e l'8,5% sotto questo livello.

I paesi dove gli studenti ottengono un punteggio al di sotto del livello 2 ed hanno viceversa aumentato la percentuale di studenti che ottengono un punteggio al livello 5 o superiore sono paesi che sono stati in grado di diffondere i miglioramenti nei loro sistemi di istruzione a tutti i livelli di competenza.

Capitolo 2

L'INVALSI e la valutazione del sistema scolastico italiano

2.1 Cosa sono, ma soprattutto a cosa servono le prove INVALSI?

Le prove del Sistema Nazionale per la Valutazione del Sistema dell'Istruzione (INVALSI) sono test standardizzati nazionali per la rilevazione degli apprendimenti, che vengono somministrati nelle seconde e quinte elementari, terze medie e in tutte le seconde superiori.

Questi test sono preparati dall'INVALSI e servono, nelle intenzioni del Ministero dell'Istruzione, a valutare il livello di preparazione degli alunni italiani, in Italiano e Matematica.

La finalità di questa valutazione, che il decisore politico ha voluto far prevalere, è che gli esiti delle prove invalsi sono importanti perchè il Ministro conosca il livello di apprendimento e di preparazione degli studenti italiani su una scala macroeconomica, finalizzata a decidere quali interventi migliorativi attuare e dove attuarli.

Contro i test, il loro significato e il loro scopo si crea ogni anno un movimento di opinione contrario, sostenuto dalle componenti scolastiche, in particolare da insegnanti e genitori, con le motivazioni più varie. I genitori temono che questa prova "valuti" in qualche modo i loro figli e che di questa valutazione venga tenuto conto a livello di certificazioni finali.

Gli insegnanti, dal canto loro, temono che la valutazione degli studenti sia un primo passo verso l'introduzione di differenze retributive basate sui risultati delle classi o delle scuole. Altri ancora temono che le analisi condotte sui risultati degli studenti vengano utilizzate per introdurre differenziali di risorse tra scuole, tra province o tra regioni del Paese.

Ma in realtà non è niente di tutto ciò; le prove INVALSI infatti devono essere collocate all'interno della valutazione di un sistema che risponde alle finalità di rendere trasparenti e accessibili all'opinione pubblica informazioni sintetiche (la lettura di dati sintetici è necessariamente schematica e scevra da elementi valutativi soggettivi) sugli aspetti più rilevanti del sistema educativo, e devono offrire ai decisori politici ed istituzionali elementi oggettivi per valutare lo stato di salute dell'istruzione e formazione dei nostri giovani.

La concezione dei test INVALSI è frutto di analisi dei sistemi europei dell'istruzione con i quali in una prospettiva di una policy dell'educazione e dell'istruzione a livello Europeo è necessario confrontarsi. Nella maggior parte dei paesi occidentali, infatti, le scuole convivono pacificamente da molti anni con la rilevazione degli apprendimenti su base nazionale o regionale. Il fatto che l'Italia, all'alba del nuovo secolo, si sia finalmente dotata di un sistema di rilevazione degli apprendimenti degno di una democrazia occidentale non può che essere salutata con favore.

A tal proposito, come spiega con chiarezza il professor Alberto Martini[1] in un articolo su La Voce, "i test standardizzati sono un ottimo strumento di diagnostica dei mali e delle carenze del nostro sistema formativo. L'evidenza empirica che portano permetterebbe, in un paese normale, di poter discutere di riforme, interventi e bisogni in maniera serena e guidata da un interesse

[1] Alberto Martini: Direttore Scientifico di Progetto Valutazione. Dal 1999 al 2004 è stato presidente del Nucleo di Valutazione dell'Università del Piemonte Orientale. Nel 2001-2002 è stato presidente dell'Associazione Italiana di Valutazione (AIV). Dal 2007 è membro del Consiglio Italiano delle Scienze Sociali, di cui co-presiede la Commissione di studio sulla valutazione degli effetti delle politiche pubbliche.

al di sopra di tutti gli altri: migliorare la scuola italiana". Certo gli aspetti da indagare e le dimensioni e le aree di indagine sono molteplici, proprio per questo è necessario che sia i docenti che i genitori siano consapevoli della valenza delle prove, che non sostituiscono né integrano la valutazione singola dell'alunno, ma rivestono un'importante fondamentale per il decisore politico in ordine all'implementazione di correttivi che permettano al sistema italiano dell'istruzione di essere al pari con i sistemi presenti nel panorama europeo.

Allo stesso tempo, va ribadito quel che i test NON fanno e non potranno mai fare. I test NON possono sostituire la valutazione fatta dai docenti del singolo studente e i test non possono valutare da soli l'operato del singolo docente o dirigente. Non valutano il singolo studente perchè questo lo fa già la scuola nella sua routine quotidiana. Non valutano il singolo insegnante o dirigente, per un ampio insieme di ragioni: in primis, perchè non è questo il loro scopo; poi perchè si tratterebbe di una valutazione incompleta (si valuterebbero solo gli insegnanti di italiano e matematica). Tutta questa confusione, come sottolineano Martini e Romano[2] in un altro articolo pubblicato su L'indice della scuola, deriva dalla molteplicità di significati della parola "valutazione": questo vocabolo viene utilizzato per un'ampia gamma di accezioni, molte delle quali fuori luogo quando si parla di test standardizzati di apprendimento. In quest'ultimo caso, per valutazione si intende misurazione. In particolare, misurazione degli apprendimenti degli studenti per una corretta diagnostica delle carenze del sistema di istruzione italiano.

2.2 Prove INVALSI: istruzioni per l'uso

Le prove INVALSI sono lo strumento utilizzato per rilevare e misurare periodicamente il livello di apprendimento degli studenti italiani. Gli stan-

[2]Barbara Romano: Ricercatrice del Progetto Valutazione. Ha svolto attività di ricerca e didattica presso l'Università degli Studi di Pavia e di Milano - Bicocca. Dal 2004 è ricercatrice a Progetto Valutazione dove si occupa principalmente dei progetti con le Fondazioni Bancarie.

dard delle prove sono definiti a partire dalle Indicazioni per il curricolo[3] del Ministero. Attualmente si prevede la somministrazione di prove oggettive di italiano e matematica, discipline scelte anche per la loro valenza trasversale. È, inoltre, prevista la somministrazione di un questionario anonimo. Queste prove sono rivolte a tutti gli studenti che frequentano le seguenti classi:

- II e V primaria;
- III secondaria di I grado;
- II secondaria di II grado.

Le prove, servono per monitorare il Sistema nazionale d'Istruzione e confrontarlo con le altre realtà comunitarie ed europee. In particolare servono a:

a) ciascuno studente, perché è un diritto conoscere il livello di competenze raggiunto;

b) le singole istituzioni scolastiche, per l'analisi della situazione al fine di mettere a punto eventuali strategie di miglioramento;

c) il Ministero dell' Istruzione, per operare investimenti e scelte politiche.

Le domande delle prove, i cui contenuti rispettano un preciso quadro di riferimento[4] sia per l'italiano sia per la matematica, sono predisposte da insegnanti dei diversi livelli scolastici opportunamente formati. Queste domande sono prima testate su un campione ristretto di studenti per verificarne l'affidabilità e la validità e, successivamente, solo quelle valide vengono scelte collegialmente da un team di esperti.

Le prove, che per ciascun livello di classe si svolgono sul territorio nazionale nella stessa giornata, sono importanti perché permettono di confrontare ciascuna classe e ciascuna scuola con:

1) l'intero Paese

[3] Le "Indicazioni Nazionali per il curricolo" sono un testo di riferimento unico per tutte le scuole autonome, che sostituisce quelli che, un tempo, si chiamavano "programmi ministeriali".

[4] Il Quadro di Riferimento (QdR) per le prove di valutazione dell'INVALSI presenta le idee chiave che guidano la progettazione delle prove, per quanto riguarda gli ambiti della valutazione e i modi della valutazione.

2) le macroaree geografiche

3) le singole regioni/province

4)le scuole della stessa tipologia

inoltre, servono a confrontarsi col sistema nel suo complesso e rappresentano uno strumento in più ma non sostituiscono la valutazione dell'insegnante.

Per affrontare le prove non è richiesta alcuna specifica forma di preparazione. E' possibile vedere come sono fatte e provare a farle, scaricandole dal sito dell'INVALSI.

Per la secondaria di II grado, le prove sono uguali per tutti i tipi di scuola (licei, istituti tecnici, istituti professionali) e quindi non vogliono rilevare le specifiche nozioni apprese in ciascuna di esse ma le competenze di base acquisite durante l'intero percorso formativo.

Il questionario, anonimo, serve a raccogliere preziose informazioni sulle caratteristiche degli studenti di una scuola e sul loro contesto familiare. Gli studenti più grandi possono esprimere, sempre in forma anonima, opinioni sulle attività della scuola ed esplicitare le loro esigenze. Le informazioni raccolte con i questionari offrono un'ulteriore chiave di lettura dei dati e permettono di confrontare, in maniera più equa, i risultati di scuole diverse e di fornire maggiori supporti a quelle scuole che operano in un contesto difficile.

I risultati delle prove sono restituiti alle singole scuole in forma privata e anonima. Ciascuna scuola potrà analizzare dunque i risultati dell'apprendimento dei propri studenti confrontandoli al proprio interno (classi della stessa scuola) e con altre scuole. Questa comparazione consentirà a ogni Istituto scolastico di valutare la propria efficacia educativa e di riflettere sulla propria organizzazione didattico-metodologica al fine di promuoverne il miglioramento.

Affinché le scuole possano confrontare i loro dati con l'esterno, l'INVALSI individua, per ciascun livello scolare, alcune classi campione, rappresentative di tutte le realtà scolastiche italiane, i cui risultati fanno da standard di riferimento.

Tutte queste osservazioni portano a riflettere sull'importante effetto di ricaduta che il complesso delle prove INVALSI ha sull'intero sistema scolastico e sulle sue scelte didattiche. È proprio in questo senso, come si è detto, che una attenta analisi dei risultati delle prove somministrate potrà contribuire a fornire una guida per il miglioramento dell'insegnamento. Sarebbe al contrario un danno per l'insegnamento e la Scuola se la prospettiva di queste prove dovesse tradursi nella preoccupazione di addestrare gli allievi ad affrontare tipologie valutative simili, limitandosi ad imitarne la forma nelle prove di verifica svolte in classe nel corso dell'anno, senza invece curare l'effettiva crescita di quel retroterra cognitivo e culturale di cui le prove INVALSI dovrebbero, al contrario, rilevare e valutare l'esistenza, per stimolarne poi lo sviluppo e la crescita.

2.3 L'obiettivo delle prove INVALSI in ambito matematico

L'apprendimento della matematica è una componente fondamentale nell'educazione e la crescita della persona, secondo un punto di vista che ha origini lontane e che è oggi universalmente condiviso. Nel contempo, nella società attuale la matematica è nel cuore del trattamento quantitativo dell'informazione nella scienza, nella tecnologia e nelle attività economiche e nel lavoro, e quindi la competenza matematica è un fattore fondamentale nella consapevolezza del futuro cittadino e nella sua riuscita nel mondo professionale.[5]

Interessa perciò sondare se le conoscenze che la scuola, ai diversi livelli, stimola e trasmette, sono ben ancorate ad un insieme di concetti fondamentali di base e di conoscenze stabili, almeno sui livelli essenziali. Si vuole in

[5] Questo aspetto è predominante nell'indagine Programme for International Student Assessment (PISA) dell'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico (OCSE) che riguarda i quindicenni.

primo luogo valutare la conoscenza della disciplina matematica e dei suoi strumenti, intendendo tale disciplina come conoscenza concettuale, frutto cioè di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento "meccanico" o di apprendimento mnemonico. Una conoscenza concettuale quindi, che affondi le sue radici in contesti critici di razionalizzazione della realtà, senza richiedere eccessi di astrazione e di formalismo. La formalizzazione matematica dovrebbe infatti essere acquisita a partire dalla sua necessità ed efficacia nell'esprimere ed usare il pensiero matematico. Gli aspetti algoritmici applicativi ed esecutivi, che pure costituiscono una componente irrinunciabile della disciplina matematica, non dovrebbero essere considerati fine a se stessi.

Visti gli obiettivi generali che sono attribuiti all'insegnamento della matematica dalle disposizioni di legge, ma più in generale dalla nostra società, nel solco di una visione della matematica profondamente radicata nella cultura, le prove INVALSI non devono limitarsi a valutare l'apprendimento della matematica utile, ma devono cercare di far riferimento alla matematica come strumento di pensiero e alla matematica come disciplina con un proprio specifico statuto epistemologico.

Le prove INVALSI di matematica sono volte a valutare le conoscenze e le abilità matematiche acquisite dagli studenti in entrata e in uscita del ciclo d'istruzione. Tali prove consistono di quesiti costruiti in relazione a due dimensioni:

I. i contenuti matematici, divisi per grandi blocchi o nuclei: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Misure, dati e previsioni;

II. i processi cognitivi coinvolti nel lavoro matematico e nella risoluzione di problemi.

La divisione dei contenuti in grossi blocchi è ormai condivisa a livello internazionale; è però interessante un confronto fra le scelte operate dall'Italia a partire dai Curriculi UMI-CIIM[6] e essenzialmente confermate nei documenti

[6]Commissione Italiana Insegnamento della matematica, insieme a SIS (Società Itaiana di Statistica e Mathesis all'interno di un protocollo di intesa con il MIUR ha prodotto tre

Tabella 2.1: Nuclei tematici

Indicazioni Nazionali e Indicazioni per il curricolo	**OCSE-PISA 2006 Overarching ideas (idee chiave)**	**TIMSS 2007 Content domains (domini di contenuto)**	**NCTM Standards 2000 Contents (contenuti)**
NUMERI	QUANTITA'	NUMERO	NUMERI E OPERAZIONI
SPAZIO E FIGURE	SPAZIO E FORMA	GEOMETRIA	GEOMETRIA
RELAZIONI E FUNZIONI	CAMBIAMENTI E RELAZIONI	ALGEBRA	ALGEBRA
MISURE, DATI E PREVENZIONI	INCERTEZZA	DATI E CASO	ANALISI DEI DATI E PROBABILITA'

programmatici (dalle Indicazioni Nazionali[7] alle Indicazioni per il Curricolo[8]) e le scelte operate a livello internazionale (OCSE-PISA[9], TIMSS 2007e NCTM 2000[10])

"Si noti dalla Tabella 2.1 la scelta italiana di utilizzare come titoli dei temi i nomi di oggetti matematici e non di teorie, e cioè numeri anziché aritmetica, spazio e figure anziché geometria, relazioni e funzioni anziché algebra, dati e previsioni anziché statistica e probabilità. Questa scelta tende a valorizzare gli oggetti con cui gli alunni devono fare esperienza, rispetto alla sitemazione

volumi Matematica 2001, 2003 e 2004 La matematica per il cittadino scaricabili all'indirizzo http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2001/matematica2001.html

[7]Legge 53/2003 e D.Lgs. 59/2004

[8]Decreto Ministeriale 31 luglio 2007

[9]OECD, MIUR, INVALSI, (2007) Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica, Armando Editore

[10]NCTM (National Council of Teachers of Mathematic) che ha prodotto nel 2000 i Principles and Standars for School Mathematics (U.S.A.) si veda il sito http://standards.nctm.org/

teorica, che peraltro non deve essere tralasciata"[11]. La scelta di OCSE-PISA riguarda le idee chiave (overarching ideas) che rappresentano i diversi modi di leggere e interpretare la realtà secondo un determinato quadro teorico di riferimento nel quale la matematica è vista essenzialmente come strumento per descrivere, leggere e interpretare la realtà. Per TIMSS 2007 e NCTM 2000 la scelta è mista come si evince dalla precedente tabella.

È importante sottolineare il fatto che (in matematica) non è possibile in generale stabilire una corrispondenza univoca tra il singolo quesito e un unico contenuto o processo il cui possesso venga verificato in esclusiva mediante quello stesso quesito. Infatti, in generale, la risposta a ciascuna domanda coinvolge diversi livelli di conoscenze di vario tipo e richiede contemporaneamente il possesso di diverse abilità. È questa una conseguenza della natura stessa del pensiero matematico, che non consiste solo in convenzioni o procedure di calcolo, ma in ragionamenti complessi, che coinvolgono rappresentazioni, congetture, argomentazioni, deduzioni. Ogni quesito delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione viene quindi riferito a un ambito di contenuti e a un singolo processo, ma va sempre inteso che quelli indicati sono l'ambito e il processo prevalenti.

L'ambito Numeri è riconducibile all'ambito Aritmetica e algebra delle Indicazioni Nazionali e l'ambito Spazio e figure a quello Geometria.

L'elenco che segue vuole esplicitare i nodi concettuali attorno ai quali vengono costruite le prove. Forniamo i possibili oggetti della valutazione ritenuti particolarmente significativi per valutare la competenza matematica nel primo e nel secondo ciclo.

[11]Anzellotti, G., Cotoneschi S., (2007), Matematica, in "Le indicazioni per il curricolo: la parola alla scuola", Notizie della scuola, 2/3, AnnoXXXV, Tecnodid Editrice

Tabella 2.2: Ambito di valutazione (I ciclo)

AMBITO DI CONTENUTO	**OGGETTI DI VALUTAZIONE**
NUMERI	Numeri naturali e loro rappresentazione in base dieci. Addizione e sottrazione fra numeri naturali. Moltiplicazione e divisione fra numeri naturali. Numeri decimali e frazioni. Frazioni equivalenti. Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali. Operazioni fra numeri decimali. Proprietà delle operazioni. Significato delle parentesi in sequenze di operazioni. Proprietà dei numeri naturali: precedente successivo, pari dispari, doppio, metà...). Operazioni con i numeri interi. Calcolo approssimato. Potenze di numeri naturali e interi. Numeri primi. Multipli e divisori. Rapporti, percentuali e proporzioni. Numeri decimali limitati e illimitati periodici (rappresentazione decimale e frazionaria). Numeri razionali. Operazioni con i numeri razionali. Numeri decimali non periodici.

Tabella 2.2: Ambito di valutazione (I ciclo)

AMBITO DI CONTENUTO	OGGETTI DI VALUTAZIONE
SPAZIO E FIGURE	Mappe, piantine e orientamento. Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Semplici figure dello spazio e del piano (cubo, sfera, triangolo, quadrato...). I principali enti geometrici. Angoli e loro ampiezza. Rette incidenti, parallele e perpendicolari. Verticalità, orizzontalità. Uguaglianza di figure. Equivalenza fra figure. Composizione e scomposizione di figure. Elementi di semplici figure dello spazio (vertici, spigoli, ...). Unità di misure di lunghezze, aree e volumi. Perimetro di poligoni. Aree di poligoni. Somma degli angoli di un triangolo e di poligoni. Teorema di Pitagora. Traslazioni, rotazioni e simmetrie. Riproduzioni in scala: ampliamenti e riduzioni. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Angoli al centro e angoli alla circonferenza. Aree e volumi dei principali solidi. Rappresentazione piana di figure solide. Sistema di riferimento cartesiano. Rappresentazione sul piano cartesiano di figure piane e di trasformazioni geometriche
RELAZIONI E FUNZIONI[12]	Classificazione di oggetti, figure, numeri in base a una determinata proprietà. Equivalenze e ordinamenti. Grandezze direttamente e inversamente proporzionali Ricerca di regolarità in sequenze di numeri, figure, simboli e parole. Generalizzazione di regolarità attraverso parole e espressioni algebriche. Funzioni del tipo y=ax, y=a/x e y=x2 e loro rappresentazione grafica. Rappresentazione di funzioni attraverso parole, tabelle, grafici, espressioni algebriche. Equazioni di primo grado. Rappresentazione di fatti e fenomeni attraverso tabelle, grafici ed espressioni algebriche.

[12] Il Nucleo Relazioni e funzioni sarà valutato a partire dalla classe V della scuola primaria

Tabella 2.2: Ambito di valutazione (I ciclo)

AMBITO DI CONTENUTO	OGGETTI DI VALUTAZIONE
MISURA, DATI E PREVISIONI	Il collettivo statistico e i suoi elementi. Prime rappresentazioni di dati (tabelle, pittogrammi, grafici a barre, ecc.). Caratteri qualitativi e quantitativi. Moda, mediana e media aritmetica. Istogrammi. Calcolo di frequenze relative e percentuali. Diagrammi di vario tipo. Evento certo, possibile e impossibile. Campione estratto da una popolazione: casuale e non casuale. Probabilità di un evento: valutazione della probabilità di eventi elementari ed equiprobabili. Semplici valutazioni di probabilità di un evento a partire da dati statistici. Misure di grandezze discrete per conteggio. Misure di grandezze continue attraverso oggetti e strumenti. Il Sistema Internazionale di misura. Stime e approssimazioni. Notazione scientifica

Tabella 2.3: Ambito di valutazione (II ciclo)

AMBITO DI CONTENUTO	OGGETTI DI VALUTAZIONE
NUMERI	Numeri naturali, interi e razionali: significati, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, rappresentazioni e ordinamento sulla retta dei numeri, rappresentazioni sul piano cartesiano. Rapporti, frazioni, percentuali, proporzioni: significati, operazioni e proprietà. Potenze, radici: significati, operazioni e proprietà. Grandezze: significati, misura, stima, cifre significative, ordine di grandezza, arrotondamento. Espressioni numeriche: significati, rappresentazioni, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, problemi. Espressioni simboliche: significati, rappresentazioni, operazioni e proprietà, problemi. Successioni: ricerca di regolarità, rappresentazioni numeriche e simboliche.

Tabella 2.3: Ambito di valutazione (II ciclo)

AMBITO DI CONTENUTO	OGGETTI DI VALUTAZIONE
SPAZIO E FIGURE	Le principali figure del piano e dello spazio: definizioni, relazioni tra i loro elementi (congruenza, perpendicolarità, parallelismo, ...), costruzioni, proprietà. Segmenti (distanza punto-punto, punto-retta,...): misure con utilizzo del righello, calcoli e problemi. Angoli (interni, esterni, opposti al vertice,...): misure con utilizzo del goniometro, calcoli e problemi. Traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini: significati, invarianti, proprietà, problemi. Teoremi di Pitagora e di Euclide: problemi di equivalenza. Teorema di Talete: problemi di similitudine. Perimetri, aree e volumi di figure del piano e dello spazio: operazioni, relazioni, somme, scomposizioni, approssimazioni. Punti, rette, semplici parabole, semplici iperboli nel piano cartesiano: rappresentazioni, relazioni, problemi. Rappresentazioni bidimensionali di figure nello spazio: collocazione, interpretazione spaziale, descrizione.
RELAZIONI E FUNZIONI	Relazioni tra oggetti matematici (numeri, figure, ...): rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà (es. perpendicolarità, ordine, proporzionalità diretta e inversa,...). Successioni di numeri, figure, dati: ricerca di regolarità, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche. Funzioni (lineari, quadratiche, valore assoluto, razionali fratte): significati, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche. Zeri di una funzione: semplici equazioni, proprietà. Segno di una funzione: semplici disequazioni, proprietà. Relazioni tra funzioni rappresentate sul piano cartesiano: sistemi di equazioni e disequazioni.

Tabella 2.3: Ambito di valutazione (II ciclo)

AMBITO DI CONTENUTO	OGGETTI DI VALUTAZIONE
DATI E PREVISIONI	Insiemi di dati: raccolta, organizzazione, rappresentazione. Frequenza assoluta, relativa, percentuale: significati, calcoli, rappresentazione (tabelle, grafici, diagrammi, . . .). Campione estratto da una popolazione: determinazione casuale e non casuale. Valori medi e misure di variabilità: calcoli, rappresentazione. Eventi e previsioni (evento certo, possibile e impossibile, eventi disgiunti, dipendenti e indipendenti): significati, determinazione di probabilità a priori e a posteriori.

2.4 Strumenti disponibili, caratteristiche generali delle prove e criteri di formulazione dei quesiti

I processi utilizzati per costruire le domande e analizzare i risultati sono i seguenti:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...);

2. conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, algebrico, statistico e probabilistico);

3. conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, numerica, simbolica, grafica, ...);

4. risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo,. . .);

5. riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto,. . .);

6. utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare ...);

7. utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni ...).

8. riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, . . .).

Le prove di Matematica sono costituite da quesiti di diverse categorie: a "risposta chiusa", a "risposta falsa-aperta", a "risposta aperta", "cloze".

La prima categoria consiste in quesiti con risposta a scelta multipla che presentano diverse alternative di risposte secondo quanto è richiesto dalla natura del quesito (attualmente sono previste 4 alternative). Una sola delle alternative di risposta è corretta.

Per quesiti a "risposta falsa-aperta" si intendono domande aperte a risposta univoca (come ad esempio il risultato di un calcolo algebrico o numerico oppure ancora l'adesione o la negazione di determinate affermazioni) che sono perciò suscettibili di una valutazione rapida e univoca.

I quesiti a "risposta aperta" possono richiedere semplici argomentazioni, giustificazioni, sequenze di calcoli. Per questi viene fornita una griglia di correzione articolata, costruita in base alle risposte ottenute nel pretest.

Per queste domande è inevitabile che ci sia una certa discrezionalità nella correzione.

I quesiti di tipo "cloze" richiedono il completamento di frasi, calcoli o espressioni mediante l'utilizzo di elementi forniti nel testo.

Durante le prove è possibile utilizzare una calcolatrice ed è necessario disporre di strumenti da disegno (riga, squadra, compasso, goniometro). Non sono previsti, attualmente, quesiti in cui sia indispensabile disporre di una calcolatrice, ma è consentito nelle prove per la classe seconda della secondaria di secondo ciclo l'uso di qualsiasi tipo di calcolatrice a condizione che essa NON sia quella dei telefoni cellulari e che NON sia collegabile né alla rete internet né a qualsiasi altro strumento (ad esempio, tramite bluetooth, wireless, ecc.). È possibile che per certe prove sia fornito un formulario.

Per quanto riguarda la formulazione dei quesiti, gli estensori e i compilatori della prova cercanno quando possibile di attenersi ai seguenti criteri:

a) I quesiti potranno (e possibilmente dovranno) essere formulati impiegando diversi registri: testi, figure, immagini, tabelle, grafici, formule.

b) I quesiti non saranno formulati necessariamente per valutare l'apprendimento dei contenuti minimi o irrinunciabili.

c) I quesiti possono sia essere formulati in un contesto che li collega a situazioni concrete sia riguardare situazioni interne alla matematica.

d) La formulazione dei quesiti eviterà, per quanto possibile, espressioni vaghe, ambigue o inutilmente complicate (per esempio l'uso della doppia negazione o domande con formulazione negativa).

e) Si eviterà di proporre i quesiti più complessi all'inizio della prova.

f) La lunghezza e la struttura delle risposte di un singolo quesito dovranno essere possibilmente omogenee.

g) Nel caso di utilizzo di definizioni su cui non vi sia completo accordo nei libri di testo e in generale nella prassi scolastica, la definizione da utilizzare sarà richiamata nel testo del quesito o comunque nel fascicolo della prova.

h) Sarà richiamato esplicitamente, ogni volta che sarà opportuno, il significato dei simboli; si cercherà di non utilizzare simboli non standard.

i) I grafici e le tabelle saranno corredati da tutti gli elementi (etichette, legende,...) necessari per interpretarli e per contestualizzarli; se lo si riterrà opportuno, questi elementi potranno essere presenti anche quando non saranno strettamente necessari per rispondere al quesito.

j) Quando in una figura geometrica o in una immagine due elementi sono congruenti, questo sarà indicato esplicitamente (nel testo o con un'adeguata e chiara simbologia sulla figura).

Infine per quanto riguarda l'interpretazione della correzione delle prove e l'interpretazione dei risultati, l'INVALSI, per ogni fascicolo di prove fornirà agli insegnanti una griglia per la correzione in cui saranno riportate le riposte corrette per i quesiti a risposta chiusa, e delle indicazioni per la classificazione e la valutazione dei quesiti a risposta aperta. Queste indicazioni sono costruite sulla base degli esiti del pretest, ma ovviamente non potranno mai esaurire la variabilità delle risposte possibili. Si cercherà in generale di chiarire lo spirito della domanda, per aiutare gli insegnanti - autonomamente e responsabilmente - a decidere i casi dubbi. L'INVALSI predispone anche delle Guide alla lettura, contenenti per ciascun item la classificazione in termini di ambito e processo prevalente, il richiamo degli obiettivi di apprendimento coinvolti, un breve commento di natura didattica tendente a chiarire il possibile ruolo dei distrattori e sottolineare alcuni possibili comportamenti degli studenti, altre informazioni utili per capire quali indicazioni fornisce l'item in questione.

2.5 Alcuni esempi di prove INVALSI

Gli esempi che seguono vogliono essere un modello per capire come sono i quesiti proposti nelle prove INVALSI. Tali esempi sono tratti dalla prova dell'SNV del 2010/11, essi vogliono esemplificare quanto esposto nei paragrafi precedenti e in particolare il tipo di ambiti e di processi che le prove vogliono valutare.

Processo 1.

Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...)

D10. **Qual è la metà del numero** $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ **?**

☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

Risposta corretta: C

Ambito prevalente: NUMERI

Processo 3.

Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...)

D24. **La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; k indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso.**
Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:
"*È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione*"?

☐ A. $l = 15 + 0{,}5 \cdot P$

☐ B. $l = 75 + 7 \cdot P$

☐ C. $l = 70 + 0{,}01 \cdot P$

☐ D. $l = 60 + 6 \cdot P$

Risposta corretta: C

Ambito prevalente: RELAZIONI E FUNZIONI

Capitolo 3

La risoluzione dei problemi

3.1 Un approccio al problem solving

Le riflessioni fatte nei capitoli precedenti trovano sostegno in analisi di più ampio spettro. Infatti riferendosi ai rilevamenti OCSE-PISA 2003 e 2012 che permettono di determinare il livello di raggiungimento di determinate competenze da parte degli studenti, che in queste edizioni hanno privilegiato l'area della competenza matematica rispetto alle altre, è stato aggiunto un nuovo gruppo di domande specificatamente rivolto al Problem Solving, che hanno permesso di approfondire e monitorare sempre più il livello di conoscenze e l'interesse degli studenti nei confronti della matematica. Per abilità di Problem Solving in OCSE PISA si intende:

"la capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per affrontare e risolvere situazioni reali e interdisciplinari, per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente e nelle quali gli ambiti di competenza o le aree curriculari che si possono applicare non sono all'interno dei singoli ambiti della matematica, delle scienze o della letteratura".

Anche se le capacità elencate nel problem solving sono, come specificato, di tipo interdisciplinare esse possano essere favorevolmente sviluppate nell'ambito dell'insegnamento della matematica, e che anzi un curriculum di matematica non possa esimersi dallo sviluppare questa specifica competenza. L'approccio ai problemi e alle tecniche di soluzione di questi, soprattutto per problemi di tipo tecnologico o di natura scientifica, possono e debbono essere veicolate attraverso l'insegnamento della matematica.

L'importanza del problem solving si rispecchia nel fatto che esso può avere un ruolo fondamentale nella definizione di un sistema di istruzione orientato all'apprendimento, all'occupazione e alla cittadinanza attiva.

Analogamente ai rilevamenti PISA, a livello nazionale con lo svolgimento delle prove INVALSI, il problem solving ha assunto un ruolo importante. Infatti, le capacità necessarie agli studenti per affrontare questo tipo di prove sono diverse, in particolare: identificazione di problemi in ambito pluridisciplinare, identificazione di informazioni rilevanti o limitanti, individuazione di alternative possibili di soluzione e loro rappresentazione, selezione di strategie di soluzione, controllo delle soluzioni e riflessione su di esse, comunicazione dei risultati. Tutte queste capacità rientrano in ambito matematico ma soprattutto nel meccanismo che nasce durante il processo risolutivo di un problema.

Il problem solving infatti è, ed è stato, oggetto di studio da diversi punti di vista in quanto, come sostiene Greeno (1989), insieme a molti altri autori, la risoluzione di problemi di matematica, quali possono essere considerate le prove del PISA o le prove INVALSI, comporta una comprensione della matematica che permette agli studenti di ragionare in modo significativo sui concetti e i principi matematici e quindi lo sviluppo dell'abilità di risolvere problemi merita un'attenzione particolare. Di conseguenza il compito primario dell'istruzione matematica dovrebbe essere sia la trasmissione della conoscenza matematica sia l'insegnare a risolvere i problemi.

Queste prove di matematica possono essere a tutti gli effetti considerate problemi e non esercizi in quanto, come afferma D'Amore (1993) affrontando l'argomento in linea generale, "un problema coinvolge l'uso di più regole o la successione di operazioni la cui scelta è un atto strategico, talvolta creativo, dell'allievo stesso" e le prove di matematica del PISA e dell'INVALSI rispondono a questa definizione. L'esercizio, invece, rientra solitamente più nella categoria del rafforzamento e della verifica immediata e può essere risolto "utilizzando regole già apprese o in via di consolidamento". Inoltre la differenza tra problema ed esercizio, sempre secondo D'Amore, risiede anche nella "maggiore o minore vicinanza alla realtà delle situazioni problematiche proposte" in quanto di solito gli esercizi di tipo scolastico sono fittizi, mentre i problemi presentano una maggiore aderenza alla realtà e questa caratteristica è tipica delle prove PISA e INVALSI che sono tutte contestualizzate in situazioni della vita quotidiana e vi è sempre un'attenzione particolare proprio all'autenticità della situazione. In altri termini, i compiti di PISA e dell'INVALSI sono caratterizzati da contesti nei quali sarebbe realistico avvalersi della matematica per risolvere il problema.

Borasi (1984) identifica quattro elementi principali che costituiscono un qualsiasi problema:

1) la formulazione del problema, ovvero l'esplicita definizione del compito da svolgere, cioè degli obiettivi da raggiungere;

2) il contesto in cui si inquadra il problema;

3) l'insieme delle soluzioni accettabili;

4) i metodi che potrebbero essere usati per affrontare la soluzione del problema.

Anche se i primi due elementi costitutivi rappresentano in genere la parte esplicita del testo del problema, al contrario degli altri due elementi che sono generalmente impliciti nell'impostazione del problema stesso, un problema viene definito nelle sue caratteristiche essenziali proprio da tutti questi elementi che possiamo dire essere presenti in tutte le prove di matematica.

Inoltre Borasi classifica i diversi tipi di problemi che possono interessare la didattica della matematica in 5 diversi tipi:

1) i problemini classici;

2) i problemi rompicapo;

3) la dimostrazione di un teorema annunciato;

4) la matematizzazione di un problema reale;

5) la creazione di un nuovo teorema.

Secondo questa classificazione, le prove PISA così come le prove INVALSI rientrerebbero nella quarta categoria.

Schoenfeld (1985) invece sostiene che se in un compito di matematica un individuo ha accesso immediato ad uno schema risolutivo, quel compito deve essere considerato un esercizio e non un problema.

Secondo Zan (2007) la distinzione tra esercizio e problema risiede nel fatto che "nel primo caso il soggetto ha a disposizione immediata una procedura per raggiungere la meta, nel secondo caso no". Zan, inoltre, fa riferimento a Karl Duncker (1969), psicologo della Gestalt che sostiene che un problema sorge quando si ha una meta, uno scopo da raggiungere, ma non si sa come raggiungerlo. Anche questa descrizione corrisponde alle prove PISA e INVALSI in quanto in esse vi sono sempre situazioni della vita reale in cui c'è sempre un obiettivo concreto da raggiungere.

I diversi studi presenti in letteratura che si sono occupati di risoluzione di problemi hanno affrontato l'argomento sotto molteplici punti di vista, sviluppando differenti filoni di ricerca. In questo capitolo, proprio per l'impossibilità di citare in maniera esaustiva ogni contributo, si tenderà a menzionare principalmente gli studi originali, come ad esempio quelli di Dewey, di Polya e una panoramica degli studi più rilevanti.

3.2 Le diverse fasi di risoluzione di un problema

Molti sono gli autori che hanno esaminato e studiato i diversi comportamenti degli individui nelle varie fasi attraverso le quali si passa durante la risoluzione di un problema, cioè che cosa le persone sanno, cosa fanno e come lavorano quando devono risolvere un problema, in particolare quelli di matematica.

3.2.1 Le fasi di risoluzione di un problema secondo Dewey

Uno degli autori più importanti che ha analizzato i comportamenti degli individui nelle varie fasi di risoluzione di un problema è J. Dewey, il quale, nel libro "How we think" (1933) dedica un capitolo sull'analisi del pensiero riflessivo che corrisponde proprio a ciò che noi indichiamo come problem solving.

Dewey non ha usato spesso il temine problem solving ma è chiaro che i problemi e la loro risoluzione erano cruciali nella sua visione dell'istruzione e della didattica. Infatti ciò che noi indichiamo con il termine problem solving, Dewey lo chiamava reflective thinking (pensiero riflessivo).

Dewey ha distinto tra differenti tipi di pensiero, occupandosi in particolare del pensiero riflessivo, inoltre ha unito l'idea di problem solving come mezzo e come fine degno di un'attenzione particolare. Egli dedica la maggior parte di questa opera ad approfondire la questione di come il pensiero possa essere allenato alla risoluzione dei problemi, per cui sviluppare negli individui la capacità di risolvere i problemi era un fine importante per Dewey, un fine non di certo separato dall'apprendimento progressivo della disciplina che è anch'esso un risultato del pensiero riflessivo. Cioè, la stessa esperienza che porta allo sviluppo del pensiero riflessivo porta anche all'apprendimento di argomenti importanti.

Secondo Dewey, l'esperienza è molto importante, i problemi sorgono naturalmente all'interno dell'esperienza, l'insegnamento e l'apprendimento consistono nella ricostruzione dell'esperienza che porta ad una progressiva organizzazione dell'argomento oggetto di studio, e la ricostruzione dell'esperienza richiede il pensiero riflessivo (o problem solving).

Approfondiamo ora cosa Dewey intende per pensiero riflessivo.

Egli sostiene che quando una persona si trova di fronte ad una situazione problematica, nel momento in cui decide di affrontarla, incomincia a riflettere e a esaminare la situazione in cui si trova per valutare le condizioni esistenti, (ciò che egli definisce "i fatti del caso"), da cui non può prescindere, anche se alcune possono apparire “spiacevoli”. Dall’osservazione di queste condizioni, di questi fatti, nascono ciò che egli chiama “le suggestioni” sui diversi modi di agire. Tali suggestioni possono venire in conflitto una con l’altra, ma, confrontandole, l’individuo arriverà a stabilire quale sia la migliore. L’importante, sostiene Dewey, affinché il pensiero sia riflessivo, è che vi sia una costante interazione tra i fatti rivelati dall’osservazione da un lato e le soluzioni proposte e i metodi suggeriti per trattare la situazione dall’altro e che questa interazione continui “finché qualcuna delle soluzioni non si accordi con tutte le condizioni del caso e non urti contro nessuno dei tratti osservabili in esso” (Dewey, 1933, tr. it. 1961 pag.176).

I fatti osservati costituiscono i dati del problema mentre le soluzioni che derivano dalle difficoltà rilevate dall’osservazione sono le idee. I dati e le idee sono, secondo Dewey, i due fattori indispensabili per un’attività riflessiva. I dati si sviluppano attraverso l’osservazione mentre le idee attraverso l’inferenza. Quest’ultima richiede però un duplice controllo: da una parte il processo attraverso il quale l’idea si è formata deve essere in stretto collegamento con le condizioni presenti e dall’altra, una volta che la soluzione si è delineata, deve essere messa alla prova attraverso “l’agire in base ad essa, nella realtà esterna se è possibile, altrimenti con l’immaginazione” (ibidem, pag. 177). Dalle conseguenze di queste azioni l’idea può essere respinta, oppure confermata oppure modificata. In qualsiasi tipo di problema, sia esso pratico oppure scientifico, bisogna comunque sempre tener conto di questi due aspetti: da una parte le condizioni esistenti e dall’altra le idee per affrontare queste condizioni.

Il pensiero riflessivo si muove tra due estremi: una situazione dubbia e incerta all’inizio e una situazione chiara e risolta alla fine. Il pensiero riflessivo nasce per dare una risposta alla situazione iniziale che pone un problema. Esso è costituito da cinque diverse fasi:

- suggestione
- intellettualizzazione

- ipotesi
- ragionamento
- conclusioni

Queste cinque fasi del pensiero riflessivo non devono essere necessariamente presenti sempre tutte durante la risoluzione di un problema, e il modo di usarle, sostiene Dewey, "dipenderà dal tatto intellettuale e dalla sensibilità di un individuo" (ibidem, pag. 190). Inoltre, se alla fine qualcosa risulta sbagliato, è necessario riesaminare i metodi che hanno portato all'errore per controllare in quale fase è stato commesso.

3.2.2 Le fasi di risoluzione di un problema secondo Polya

John Dewey è stato il primo ad indagare in modo approfondito il problem solving e i suoi lavori hanno influenzato molte aree della didattica e della psicologia. In particolare, le sue idee hanno influenzato George Polya, famoso matematico della seconda metà del secolo scorso che ha dedicato gli ultimi anni della sua vita proprio a cercare di analizzare i metodi generali che usiamo per risolvere i problemi e di descrivere come tali metodi risolutivi potrebbero essere recepiti e insegnati.

Nel suo libro How to solve it (1945, trad. it. Come si risolvono i problemi, 1976) Polya fornisce uno 'Schema di risoluzione' costituito da una serie di suggerimenti e di domande utili per imparare a risolvere un problema, fornisce cioè quelle che vengono definite "euristiche". Lo scopo di questo schema è duplice: da una parte aiutare lo studente a risolvere il problema proposto e dall'altra sviluppare in lui un'abilità che gli permetta di essere in grado di risolvere da solo i problemi che si troverà ad affrontare successivamente.

Dal lavoro di Polya emerge una visione profonda e più complessa del problem solving nel curricolo di matematica: attraverso l'idea dell'euristica egli ripropone l'arte della scoperta ("Scopo dell'euristica è lo studio dei metodi e delle leggi di invenzione e scoperta" Polya, 1945, tr. it. 1976, p.119).

Matematici come Euclide e Pappo, come anche Cartesio e Leibnitz hanno discusso sui metodi e le regole necessarie per scoprire e inventare la matematica, ma le loro idee non sono mai approdate nei curricoli scolastici. È stato Polya che ha riformulato, esteso e illustrato varie idee riguardanti la scoperta in matematica in modo che gli insegnanti le potessero capire e usare.

L'esperienza di Polya nell'apprendimento e nell'insegnamento della matematica lo ha portato a chiedersi se gli studenti non capirebbero meglio la matematica se essi potessero vedere, in primo luogo, come è stata creata e se potessero gustare essi stessi la scoperta matematica. Secondo Polya, la matematica è costituita di informazioni, di capacità e di esperienza. Indipendentemente da come la scuola fornisce informazioni matematiche, se non si insegna agli studenti come utilizzare tali informazioni, queste saranno dimenticate. Egli sostiene che risolvere problemi è un'abilità concreta che si impara attraverso l'imitazione e la pratica (ibidem, p. 24):

"Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria come, permettetemi il paragone, il nuotare. Qualunque abilità pratica può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio (.......). Per imparare a risolvere i problemi, è necessario osservare e imitare come vi riescono altre persone ed infine si riesce a risolvere i problemi....risolvendoli".

Le tecniche che sono utili per la risoluzione dei problemi devono essere spiegate dagli insegnanti, discusse con gli studenti e messe in pratica da loro in un modo non meccanico, ma dimostrando di averle pienamente comprese. Inoltre egli osserva che, sebbene i problemi di routine possono essere usati per assolvere a certe funzioni pedagogiche di insegnamento su come seguire una specifica procedura, oppure su come usare una definizione in modo corretto, soltanto attraverso l'uso sensato di problemi non di routine gli studenti possono sviluppare la loro abilità a risolvere problemi.

Nello sviluppo del lavoro, Polya distingue quattro fasi principali attraverso le quali si articola la risoluzione di un problema e per ciascuna di queste fasi egli illustra una serie di euristiche utili per superare ciascuna fase. Le quattro fasi sono le seguenti:

1. la comprensione del problema;
2. la compilazione di un piano di risoluzione;
3. lo sviluppo e l'esecuzione di questo piano;
4. la verifica del procedimento e il controllo del risultato.

La prima fase, quella della comprensione, è fondamentale. Infatti, è impossibile rispondere ad una domanda che non si è capita. Lo studente, in questa fase, "dovrebbe considerare le parti principali del problema con molta attenzione, più volte e da vari punti di vista" (ibidem, pag. 26). Egli dovrebbe essere in grado di ripetere l'enunciato, di distinguerne le parti principali, di individuare i dati e l'incognita.

La seconda fase è l'impresa più difficile in quanto si devono scoprire i legami che intercorrono tra le varie informazioni, fra ciò che si cerca e i dati, per rendersi conto del tipo di risoluzione e per compilare un piano conveniente. Secondo Polya, si può dire di aver realizzato un piano quando si conoscono i calcoli o le costruzioni che si devono effettuare per risolvere il problema. Il successo di questa fase dipende da vari fattori: è necessario avere una buona dose di concentrazione, la capacità di saper distinguere le parti rilevanti del problema, i dati utili e quelli inutili, e infine sicuramente è indispensabile la mobilitazione delle conoscenze già acquisite.

La terza fase, cioè quella relativa allo sviluppo del piano, è, per Polya, un'impresa molto più semplice rispetto a quella della compilazione del piano, anche se richiede soprattutto pazienza e precisione e un'attenzione particolare alla correttezza di tutti i vari passaggi che dovrebbero portare alla soluzione.

La quarta fase, quella relativa alla verifica del risultato è, secondo Polya, non solo molto importante, ma anche assai istruttiva in quanto, una volta arrivato alla soluzione, attraverso l'analisi del procedimento con cui l'ha ottenuta, lo studente potrebbe approfondire le proprie conoscenze e quindi sviluppare la propria abilità nel risolvere problemi. Invece accade molto spesso che anche gli studenti migliori, una volta arrivati alla soluzione, non si pongano affatto il problema di verificare se il risultato conseguito sia esatto e compatibile con i dati forniti in partenza, ma passano immediatamente al problema successivo.

3.2.3 Altri modelli di risoluzione di un problema

Altri due autori importanti che hanno dato il loro contributo allo studio delle diverse fasi in cui si svolge la risoluzione di un problema sono A. Binet e J.P. Guilford[1]. Il primo, psicologo francese dei primi anni del '900, identifica anch'egli quattro diverse fasi (1911) che chiama:

1) comprensione degli elementi base;

2) invenzione che consiste nella formulazione di varie ipotesi per trovare una soluzione;

3) direzione nella quale si sceglie l'ipotesi che sembra più adatta a completare i contatti con i dati posseduti;

4) verifica dell'esattezza della soluzione.

Guilford (1959) ripropone un schema molto simile a quello del collega francese. Anch'egli identifica quattro fasi che però chiama in modo differente: la prima fase la chiama "cognizione e memoria" nel senso che la mente cerca una serie di elementi presenti in essa che permettano di arrivare alla soluzione del problema, fase quindi molto simile a quella che Binet prima, e Polya poi, chiamano comprensione; la seconda fase la definisce "pensiero divergente" poiché la mente va ad esplorare in varie direzioni per trovare le diverse possibili soluzioni e anche in questo caso si può vedere il parallelismo con le rispettive seconde fasi di Binet e Polya. La terza fase la chiama "pensiero convergente" in quanto la mente sceglie una soluzione tra le molte trovate, quindi il pensiero "converge" verso una direzione unitaria (per usare il termine di Binet) e infine la quarta fase viene definita "valutazione" che

[1]Per quanto riguarda il pensiero di questi due studiosi, si fa riferimento a quanto riportato da Calonghi (1976).

corrisponde alla verifica e al controllo dell'esattezza della soluzione, così come la intendono sia Polya che Binet.

Infine, un altro modello molto celebre e più recente è quello di L. Burton, J. Mason e K. Stacey (in D'Amore, 1993, pag. 253), che è stato pubblicato nel 1992 e che divide l'attività di risoluzione dei problemi sempre in quattro fasi:

1) fase iniziale: lo studente cerca di capire di cosa tratta il problema che ha di fronte;

2) fase di attacco: è la fase più importante in quanto lo studente verifica inizialmente una prima ipotesi di soluzione;

3) fase di revisione: lo studente confronta la propria soluzione con lo stimolo iniziale e controlla se vi è congruenza tra le due cose;

4) fase di estensione: serve per rinforzare un atteggiamento matematico.

Come si può vedere da questa panoramica sui diversi studi riguardanti le vari fasi in cui si attua la risoluzione di un problema, non vi sono differenze sostanziali tra i vari studi e, rispetto al modello originale di Dewey che considera 5 fasi, tutti convergono su quattro diverse fasi che vanno dalla comprensione del problema, alla ricerca e successiva verifica delle possibili soluzioni, fino al controllo finale della soluzione. Questo passaggio dalle 5 fasi di Dewey alle 4 fasi degli altri autori è dovuto al fatto che le prime due fasi di Dewey (quella della suggestione e quella dell'intellettualizzazione) sono riunite in un'unica fase dagli altri studi, cioè in quella che, per dirla come Polya, viene definita "comprensione del problema".

3.3 Le abilità necessarie per la risoluzione dei problemi

Dopo aver analizzato alcune delle più autorevoli opinioni riguardo le varie fasi attraverso le quali un problema può essere risolto, vengono qui illustrate le ricerche più importanti che si sono occupate dello studio delle abilità necessarie per la risoluzione dei problemi. Anche per quanto riguarda questo argomento, la letteratura è molto vasta, per cui si illustreranno soltanto le teorie maggiormente accreditate, quelle cioè che vengono prese come riferimento nella maggior parte delle ricerche.

Un primo autorevole matematico che ha analizzato le abilità che un individuo dovrebbe possedere per risolvere problemi di matematica è Alan H. Schoenfeld. Nel suo libro Mathematical Problem Solving (1985) egli cerca di riassumere gli sforzi da lui fatti negli ultimi dieci anni prima della pubblicazione del libro per capire e insegnare le abilità di risoluzione dei problemi e si pone principalmente due quesiti:

a) che cosa significa pensare in modo matematico e

b) come si possono aiutare gli studenti a fare questo.

Lo scopo del libro è dunque quello di fornire un quadro teorico di riferimento per l'analisi di ciò che le persone sanno e fanno durante la risoluzione dei problemi.

Secondo Schoenfeld, per spiegare il comportamento di un individuo durante la risoluzione di un problema, è necessario far ricorso a quattro diverse categorie di conoscenze e comportamenti. La prima categoria è costituita dalle risorse (resources) che altro non sono che le conoscenze matematiche di base che un individuo possiede. La seconda categoria è denominata euristica (heuristics) e comprende tutta l'ampia gamma di tecniche generali di risoluzione dei problemi che devono essere familiari ad uno studente per essere ingegnoso. La terza categoria è quella del controllo (control) che riguarda la questione di come un individuo sceglie e impiega le risorse che ha a disposizione. L'ultima categoria di conoscenze, è quella relativa al complesso delle convinzioni (belief systems). Si è notato, infatti, che il rendimento di alcuni studenti nella risoluzione dei problemi è influenzato da diverse concezioni errate (misunderstandings) riguardo alla matematica.

Analizzando più in particolare che cosa intende Schoenfeld per risorse, si può dire che secondo questo autore, le risorse sono tutto ciò che un individuo conosce in termini di fatti, procedimenti e abilità riguardanti la matematica e che è capace di utilizzare nella risoluzione di un problema. Il comportamento di uno studente di fronte ad un problema è determinato da diversi fattori che dipendono dalla misura in cui egli possiede o meno determinate risorse e dal modo in cui accede ad esse. Sono considerate risorse la conoscenza intuitiva e informale che uno studente ha riguardo l'ambito del problema; la conoscenza di fatti e definizioni; l'abilità ad applicare algoritmi e la familiarità con procedimenti di routine e infine la presenza o meno di competenze importanti come l'abilità a fornire argomentazioni matematiche. Ognuno di questi fattori, poi, può essere posseduto dallo studente a vari livelli.

Può anche accadere che le conoscenze possedute dallo studente siano errate, ma non semplicemente perché ancora non le abbia apprese, ma perché le ha apprese in maniera sbagliata e le applica quindi coerentemente a come le ha apprese. Schoenfeld riporta un esempio interessante che riguarda gli errori che gli studenti fanno nel seguente problema:

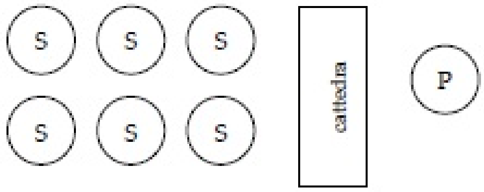
"Usando la lettera S per rappresentare il numero di studenti e la lettera P per rappresentare il numero di professori, scrivi un'equazione che riassuma la seguente frase: in questa università gli studenti sono 6 volte i professori".

La risposta può risultare semplice: S = 6P, ma molti studenti scrivono invece P = 6S.

Secondo Schoenfeld, in questo caso, l'errore di scrivere l'equazione al contrario potrebbe essere dovuto al modo in cui uno studente si rappresenta la situazione: se uno disegna sei studenti per ogni professore come in una tipica situazione di classe, è più portato a scrivere 6S = P piuttosto che S = 6P. (Figura 3.1)

La questione di come uno studente si rappresenti un problema e interpreti tale rappresentazione è quindi fondamentale al fine della sua risoluzione in quanto una rappresentazione errata, o un'interpretazione errata di tale rappresentazione può portare a una soluzione sbagliata.

Figura 3.1: Rappresentazione del problema posto da Schonfeld



Fonte: Schoenfeld, 1985, pag. 67

Per quanto riguarda l'euristica, cioè le regole empiriche che permettono di risolvere con successo un problema e che rappresentano dei suggerimenti generali che aiutano un individuo a comprendere meglio un problema o a progredire verso la soluzione, Schoenfeld si rifà a Polya che viene considerato "il padre dell'euristica".

Altri studi importanti riguardo le abilità necessarie per la risoluzione di un problema sono quelli condotti dagli psicologi della Gestalt, tra i quali merita di essere ricordato Wertheimer.

Secondo la teoria della Gestalt, il processo di soluzione di un problema è più che una semplice riproduzione di risposte apprese: esso implica un processo di riorganizzazione degli elementi del problema. Tale riorganizzazione non avviene per caso, né per tentativi ciechi, né per associazioni, bensì grazie all'insight cioè a un'intuizione che si verifica all'improvviso (Wertheimer, 1958), una specie di illuminazione.

Anche D'Amore, nel suo libro Problemi (1993) dedica un capitolo proprio all'importanza dell'intuizione nella risoluzione dei problemi. Vi sono a volte alcuni studenti che sanno dare risposte a problemi, anche complessi, ma non sanno affatto giustificare la loro risposta. Ciò può dipendere in parte da una difficoltà nella gestione argomentativa della lingua, ma in molti casi invece può dipendere dal fatto che lo studente ha avuto quella che si definisce "una intuizione ".

Che cosa si intende per "intuizione"? Per l'autore, l'intuizione è sia un atto creativo (quello che appunto la psicologia della Gestalt definisce (insight), sia un atto in cui si condensa in un tutt'uno l'esperienza e la competenza di casi non sempre analoghi a quello che si vuole trattare in quel momento.

Secondo D'Amore, nella pratica creativa matematica l'atto di intuizione è preponderante soprattutto nei primi anni di scuola quando i bambini fanno riferimento "ad un atto puro di essa per concentrare il processo altrimenti complesso di risoluzione di un problema". È probabile che, attraverso un processo più o meno lungo di maturazione, uno studente diventi capace di esplicitare i suoi passi logici che lo hanno portato alla risoluzione del problema. In ogni caso, secondo Fischbein (in D'Amore 1993, pag. 80):

"Le forme intuitive messe in atto nei processi di comprensione e di risoluzione continuano a giocare un ruolo importante a ogni età, indipendentemente dal livello di ragionamento raggiunto dal soggetto. Il problema educativo non è allora quello di eliminare le componenti intuitive del ragionamento degli alunni, (....) ma di sviluppare nei ragazzi nuovi modi di vedere che si adattino meglio alle esigenze della struttura concettuale raggiunta. (....) Chiaramente la matematica è una scienza formale: la validità dei suoi concetti, enunciati e ragionamenti è basata su fondamenti logici; le argomentazioni non possono essere sostituite da processi intuitivi".

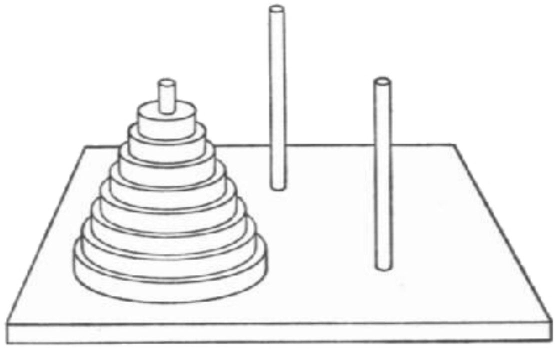
Un'altra teoria che ha affrontato il tema delle abilità nel problem solving è legata alla psicologia cognitiva. Essa ha sviluppato vari modelli relativi a diversi aspetti dei processi di risoluzione. Nell'ambito di tale teoria, il modello più famoso è sicuramente quello di Newell e Simon.

Newell e Simon (1972) hanno sviluppato la teoria dello spazio problemico, che viene qui presentata con riferimento al problema della Torre di Hanoi.

Problema della Torre di Hanoi:(Figura 3.2)

"Disegnate una tavoletta in cui sono infissi tre pioli. Nel primo piolo sono infilati, in ordine decrescente di diametro, un numero variabile di dischi forati al centro, così che il disco più grande sta sotto tutti gli altri ed il più piccolo sta in cima alla pila. Meta: trasportare tutti i dischi dal primo al terzo piolo, nello stesso ordine. Regole: si può spostare solo un disco alla volta; un disco più grande non può essere collocato sopra un disco più piccolo".

Figura 3.2: Disegno della torre di Hanoi



Quando le persone risolvono un problema si rappresentano mentalmente lo stato iniziale del problema (tutti i dischi sono collocati sul primo piolo) e lo stato finale del problema (tutti i dischi sono infilati sull'ultimo piolo nello stesso ordine). Per passare dallo stato iniziale a quello finale, passano attraverso una serie di stati intermedi grazie all'applicazione di operatori mentali (es. sposta il disco più piccolo dal primo al terzo piolo, sposta il disco intermedio dal primo al secondo piolo, ecc.). Gli operatori mentali specificano le mosse consentite e quelle non consentite (collocare un disco più grande sopra uno più piccolo). Nel passaggio da ciascuno stato al successivo sono possibili numerosi percorsi alternativi, ovvero un grande numero di mosse diverse. Per spostarsi in modo efficiente da uno stato all'altro, cioè per scegliere la mossa che, ad ogni stato, consente di avvicinarsi il più possibile allo stato finale, le persone usano delle strategie o euristiche. Le euristiche sono procedure approssimate, che non specificano ogni azione, ma guidano la ricerca e la sequenza delle azioni da fare. A differenza degli algoritmi, che sono serie di regole esplicite che, seguite in modo sistematico, portano definitivamente alla soluzione del problema, le euristiche non garantiscono di arrivare alla soluzione, ma se hanno successo implicano un risparmio di tempo e fatica.

Un altro metodo euristico consiste nella ricerca di soluzione tramite analogie, in cui si utilizza lo schema di soluzione di un problema come guida alla soluzione di un altro. Tale metodo è quello più frequentemente usato dagli studenti nel risolvere esercizi di matematica (ibidem, 1995).

Un altro approccio teorico che cerca di capire quali sono i processi implicati nella risoluzione dei problemi è l'approccio psicometrico il quale si basa principalmente sull'individuazione delle caratteristiche che rendono un individuo un bravo solutore, distinguendolo da uno meno bravo, attraverso lo studio della natura dell'intelligenza rivelata attraverso dei test. In questo approccio si rilevano principalmente le abilità che determinano un buon livello di prestazione piuttosto che i processi che soggiacciono a tale prestazione (ibidem, 1995). Da questo tipo di studi si è dimostrato che tanto l'abilità spaziale quanto le abilità linguistiche sono correlate con l'abilità di problem solving.

Riguardo alle abilità linguistiche, anche altri studi hanno messo in luce quanto siano importanti le abilità di lettura e di comprensione del testo dei problemi presentati in forma scritta. Ad esempio, Mosconi (1980, in Lucangeli e Passolunghi, 1995, pag. 105) sostiene che

"non è la complessità o la difficoltà intrinseca dell'algoritmo che rende difficile un problema ma, per così dire, la sua confezione discorsiva, le caratteristiche del messaggio verbale che lo trasmettono".

3.4 I processi metacognitivi e la risoluzione dei problemi

Lo studio della metacognizione comprende diversi aspetti: uno riguarda una conoscenza consapevole, da parte dello studente, della conoscenza, di se stesso come soggetto che apprende, delle risorse che ha a disposizione e della struttura della conoscenza negli ambiti in cui lavora. Un altro aspetto riguarda l'autoregolazione, il monitoraggio e l'organizzazione delle proprie abilità cognitive, infine un ulteriore aspetto, trasversale rispetto ai primi due, è la capacità di saper riflettere sia sulla propria conoscenza che sui processi di gestione di essa. Tutti questi differenti aspetti forniscono un quadro di come uno studente possa apprendere bene in un determinato ambito. Si può considerare uno studente di successo colui che è in grado di riflettere sulla propria attività di risoluzione dei problemi, che ha a disposizione delle strategie efficaci per affrontare problemi nuovi e che controlla e regola queste strategie in modo efficiente ed efficace (Campione J.C., Brown A.L., Connell M.L., 1989). Egli considera l'apprendere qualcosa di stimolante e si sente responsabile del controllo del proprio destino. Invece, uno studente più debole ha a disposizione solo poche strategie per la risoluzione, è meno consapevole dell'utilità di tali strategie e non le usa in modo flessibile mentre apprende cose nuove. Inoltre non è convinto di poter controllare la sua performance e tende ad essere abbastanza passivo nelle situazioni di apprendimento.

Quanto appena detto evidenzia un legame tra metacognizione e problem solving e infatti i primi ricercatori che si sono occupati di problem solving hanno cercato di capire quali fossero le strategie che i bravi solutori utilizzavano nella speranza che tali strategie potessero essere insegnate ai cattivi solutori. Da qui nasce il lavoro di Polya (1945) già citato più volte in precedenza, nel quale egli cerca di indicare le operazioni mentali che sono utili per risolvere un problema e di fornire una guida ad un ragionamento produttivo. Ma mentre il lavoro di Polya si concentra sui processi mentali che caratterizzano i bravi solutori, gli studi successivi, pur ispirandosi a lui, si focalizzano di più sull'insegnamento di strategie specifiche ottenendo risultati scoraggianti in quanto gli studenti a cui erano state insegnate queste strategie non erano in grado di trasferirle ad altre situazioni. A questo punto l'attenzione si sposta dalla conoscenza matematica che uno studente possiede a come questa viene utilizzata, cioè alla capacità di uno studente di saper gestire le proprie conoscenze e le sue facoltà intellettuali. Quindi gli insuccessi di uno studente non possono essere spiegati solo in termini di "mancate conoscenze", ma sono in parte dovuti ai processi metacognitivi, cioè ai processi legati alla gestione di queste conoscenze.

Nella ricerca sulla risoluzione dei problemi in matematica, Schoenfeld, (1987) pone l'accento su tre categorie di comportamento metacognitivo, distinte, ma correlate:

1) la conoscenza del proprio patrimonio cognitivo e dei propri processi di pensiero;

2) il controllo o l'autoregolazione;

3) le convinzioni riguardo il tipo di idee che uno si porta dietro mentre lavora con la matematica e come esse modellano il modo di fare matematica.

Per quanto riguarda il primo punto, si può dire che la consapevolezza dei propri punti forti e deboli ha un ruolo molto importante nell'attivazione dei processi metacognitivi. Essere consapevoli, ad esempio, di avere difficoltà nel calcolo può portare uno studente a porre maggiore attenzione, e quindi ad attivare un processo metacognitivo di controllo, durante i calcoli.

Per quanto riguarda l'autoregolazione si tratta di una questione riguardante il modo di gestire la risoluzione di un problema: in che misura si è in grado di amministrare il proprio tempo e gestire i propri sforzi mentre si lavora su problemi complessi.

Con il termine controllo, Schoenfeld (1985) intende un tipo di comportamento che ha a che fare con il modo in cui gli individui usano le informazioni che hanno potenzialmente a loro disposizione. Tale comportamento si focalizza sulle principali decisioni che riguardano cosa fare in un problema, decisioni che possono portare a fermarsi oppure ad andare avanti durante un tentativo di risolvere un problema. Altri comportamenti interessanti che rientrano in questa categoria comprendono la capacità di pianificare, di selezionare obiettivi e sotto-obiettivi, di monitorare e valutare le soluzioni via via che esse si sviluppano, di rivedere o abbandonare piani risolutivi se e quando se ne presentasse la necessità.

Infine, anche se il terzo aspetto, quello delle convinzioni ci porta un po' fuori dal discorso sulla metacognizione, è comunque importante accennarlo perché ha conseguenze notevoli sul comportamento degli studenti durante la risoluzione dei problemi. Infatti i sistemi di convinzioni modellano la conoscenza, anche quando un individuo non è consapevole di possedere tali convinzioni (Schoenfeld, 1985). Sostiene Schoenfeld (1987) che le persone tendono ad interpretare il mondo intorno a loro e a percepire le proprie esperienze alla luce di un quadro di riferimento che si sono costruiti. Ciò ha ripercussioni sull'insegnamento in quanto quando ci si trova ad insegnare un nuovo argomento agli studenti, non si può assumere che essi siano vuoti contenitori che vanno riempiti di conoscenza. Gli studenti, al contrario, possono avere dei preconcetti e delle misconceptions rispetto all'argomento che stanno studiando, di cui è necessario tenerne conto. Essi infatti sviluppano alcune convinzioni su "che cosa è la matematica" che sono del tutto sbagliate, e che hanno un effetto fortemente negativo sul loro comportamento nei confronti della matematica.

Alcune convinzioni degli studenti sono le seguenti:

a) tutti i problemi possono essere risolti in massimo 10 minuti;

b) la forma in matematica è più importante della correttezza;

c) soltanto i geni sono capaci di fare scoperte matematiche.

Tutte queste convinzioni hanno conseguenze disastrose perché, ad esempio, gli studenti che pensano che i problemi si possano risolvere in 10 minuti o meno, smetteranno di lavorare su un problema dopo pochi minuti, anche se sarebbero in grado di risolverlo con uno sforzo maggiore. Coloro che sono più preoccupati della forma che del risultato dedicheranno più tempo alla forma della loro risposta piuttosto che a comprendere il risultato che stanno scrivendo. E quelli che pensano che la comprensione della matematica è al di fuori dei comuni mortali, avranno un atteggiamento passivo nei confronti della disciplina e accetteranno e memorizzeranno ciò che viene loro insegnato senza tentare di dargli un senso.

Un'ultima convinzione implicita che si crea nel tempo con la ripetizione della prassi scolastica è quella che D'Amore e Martini (1997, pag. 152) definiscono "la clausola di delega formale":

"Risolvere un problema di tipo scolastico standard coincide con il trovare la o le operazioni più adatte; si tratta cioè di interpretare aritmeticamente il testo, passando dalla sua formulazione in lingua naturale, all'espressione aritmetica che porta dai dati al risultato. Una volta eseguito questo passaggiodelega di traduzione e formalizzazione, il testo può anche essere dimenticato, non serve più, non è più oggetto di alcun controllo critico, logico o semantico e tutta la concentrazione e l'attenzione del risolutore si addensano allora sulla esecuzione di tale operazione, a mano o con la macchina calcolatrice. Quando tale esecuzione è terminata, producendo in qualche modo un risultato, quel risultato è automaticamente interpretato come la risposta al problema, proprio a causa della clausola di delega formale detta sopra".

3.5 Motivazioni e cause delle difficoltà degli studenti nella risoluzione dei problemi

Molti sono gli studi che sono stati compiuti per cercare di trovare una spiegazione riguardo alle difficoltà che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi di matematica.

Una prima teoria importante è la teoria degli ostacoli di Brousseau: essa è stata messa a punto per la prima volta da Guy Brousseau nel 1976 e successivamente pubblicata nel 1983. Riprendendo le parole di D'Amore (1999, pag. 210):

"Un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti".

Secondo Marino (1997), un ostacolo può essere considerato una conoscenza che gli studenti possiedono, oppure una conoscenza legata ad altre conoscenze precedenti che però sono spesso poco corrette, imprecise e provvisorie, oppure una conoscenza precedente che ha avuto successo, ma che ora è inadatta. Un ostacolo, dal punto di vista dello studente, ha una valenza negativa in quanto si produce quando egli ritiene di poter applicare in un dato contesto concettuale un certo modello che poi risulta essere inadeguato. L'ostacolo-errore crea quindi un conflitto in quanto esso va contro le certezze dell'allievo, poiché mette in dubbio il suo modello che egli tenta di considerare come universale o assoluto. Anche per un insegnante l'ostacolo ha valenza negativa perché viene considerato come "evidenziatore di difficoltà" nell'apprendimento della materia, mentre per un ricercatore in didattica esso ha valenza positiva in quanto viene considerato come condizione necessaria per la costruzione della conoscenza dell'allievo.

Brousseau (1983 in D'Amore 1999, pag. 210 - 213) distingue tre diversi tipi di ostacoli:

- ostacoli di natura ontogenetica: sono quegli ostacoli legati all'allievo e alla sua maturità;

- ostacoli di natura didattica: dipendono dalle scelte strategiche di ciascun insegnante;

- ostacoli di natura epistemologica: dipendono dalla natura stessa dell'argomento.

Un altro costrutto teorico nato oltre venti anni fa nell'ambito della "Teoria delle situazioni didattiche" di G. Brousseau come causa possibile del fallimento "elettivo" in matematica[2], cioè del fallimento specifico in matematica e non del fallimento globale, indifferenziato è il contratto didattico.

Esso è particolarmente utile per descrivere i rapporti, riguardanti le prestazioni matematiche, che inevitabilmente (anche se spesso in modo inconsapevole) si creano in classe tra insegnante e allievi per il fatto che l'insegnante ha il compito "istituzionale" di insegnare matematica agli allievi, organizzando attività in classe a ciò finalizzate, e gli allievi devono (più o meno di buon grado...) adeguarsi a quello che l'insegnante pretende (D'Amore, 1999). Il contratto didattico secondo Brousseau è:

"l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante" .

Il contratto didattico permette di interpretare vari fenomeni che riguardano le prestazioni matematiche degli allievi e, più in generale, l'apprendimento-insegnamento della matematica, come ad esempio:

a) il comportamento degli allievi nei problemi secondo il quale gli studenti, di fronte all'enunciato di un problema, non sono abituati a mettere in discussione la validità delle domande dell'insegnante perché ripongono fiducia in lui e di conseguenza sono portati a pensare che ogni problema ha una sua soluzione che si può ricavare proprio utilizzando i dati del problema stesso. Questo effetto rientra in quelli cosiddetti di rottura del contratto, infatti lo studente si trova di fronte a un problema che non si può risolvere, dal momento che, proprio a causa del contratto didattico sa che l'insegnante

[2]«Si tratta di quei bambini che presentano un deficit di acquisizione, difficoltà di apprendimento o una mancanza di gusto pronunciati nel campo della matematica, ma che riescono nelle altre materie» (IREM, Bordeaux 1978 in Sarrazy, 1978).

non lo può ingannare, “crede di aver scoperto una frode in una domanda del maestro, e quindi denuncerà la rottura del patto in nome della logica del contratto oppure assumerà su se stesso la rottura del contratto dando in ogni caso una risposta, costi quel che costi, anche se sa fin dall'inizio di essere scorretto o è per lo meno dubbioso”; (D'Amore, 1999, pag. 103).

b) le modalità di studio personale della matematica (fortemente influenzate da quelle che gli allievi pensano siano le prestazioni richieste dall'insegnante);

c) il tentativo disperato, nella risoluzione di un problema, di ricordare degli schemi risolutivi quando si tratterebbe invece di ragionare ex novo oppure viceversa, cioè il tentativo (peraltro assai meno frequente del precedente) di costruire un ragionamento risolutivo originale laddove basterebbe applicare una formula opportuna. Spesso accade che gli studenti applichino meccanicamente un determinato procedimento non perché pensano che sia quello corretto, quanto piuttosto perché magari lo hanno visto applicare più di una volta dall'insegnante a alcuni problemi;

d) l'adozione sistematica di forme di organizzazione della risoluzione di un problema suggerite (e che funzionano) in casi particolari ma che possono risultare di grave impaccio in altri problemi;

e) molte delle difficoltà e delle incomprensioni tra insegnante di matematica e allievi che si manifestano nel passaggio a un nuovo livello scolastico (dalle elementari alle medie, dalle medie alle superiori) o nel cambio di insegnante di matematica all'interno di uno stesso ciclo scolastico.

Inoltre nell'ambito specifico della didattica della matematica sono diversi gli studi che hanno dimostrato quanto le misconceptions siano importanti nel processo di apprendimento e in particolare nell'attività di problem solving. Le prime ricerche sulle misconceptions, termine con il quale si vogliono indicare le concezioni errate, i fraintendimenti, le misconcezioni che spesso sono presenti negli allievi, si riferiscono al campo della Fisica o dell'Economia. I risultati di queste ricerche sono stati utilizzati per sostenere l'ipotesi costruttivista dell'apprendimento, secondo la quale:

"la conoscenza è in gran parte costruita dal discente, che non si limita ad aggiungere nuove informazioni al suo magazzino di conoscenze, ma invece crea collegamenti e costruisce nuove relazioni fra queste strutture" (Zan, 2000, pag.48).

L'individuo è quindi portato, fin dai primi anni della sua vita, a interpretare le proprie esperienze e a costruirsi delle vere e proprie teorie rispetto al mondo reale, teorie che si accompagnano alle sue competenze, ai suoi valori e ai suoi interessi e tutto ciò influenza il modo in cui il bambino prima, e lo studente poi, apprende le nozioni nuove che incontra. È importante tener presente, nel caso della matematica, che il primo vero contatto che un individuo ha con essa avviene a scuola ed è quindi proprio in questo ambito che si cominciano a creare le prime misconceptions derivanti da un'errata interpretazione dei messaggi dell'insegnante. Generalmente queste misconceptions, sempre secondo Zan, non si riconoscono attraverso domande dirette in quanto lo studente in questo caso attiva processi di controllo che gli permettono di far ricorso alla conoscenza formale acquisita. Quando invece lo studente si trova in condizioni tali da non richiedere l'attivazione di questi processi di controllo è facile che tali misconceptions si manifestino in modo più evidente. D'Amore (1999, pag. 124) considera la misconcezione:

"un concetto errato e dunque genericamente un evento da evitare. Tuttavia essa non va vista come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione".

Infine un breve cenno ad un'altra questione: immaginarsi la scena descritta dal testo di un problema, aiuta lo studente nella risoluzione oppure è indifferente? Alcune ricerche hanno dimostrato che questo legame non c'è, ma invece D'Amore e Martini (1997) in una ricerca in cui hanno sottoposto a studenti di età differenti (dalla scuola elementare alla scuola superiore) problemi di tipo diverso, hanno constatato che, quando il modello mentale coincide con la soluzione, esso porta immediatamente ad essa. Il risolutore, infatti, in questo caso ha l'impressione di non avere di fronte un problema, perché la risposta è legata all'esperienza e non passa attraverso nessun tipo di deleghe formali. Quindi si può dire che alcune volte immaginare la situazione problematica che si ha di fronte può essere utile per la risoluzione del problema.

Capitolo 4

Impianto sperimentale

4.1 Presentazione del lavoro sperimentale

Dopo aver analizzato da un punto di vista teorico le varie problematiche relative alla risoluzione dei problemi, alle difficoltà che possono sorgere durante tale risoluzione e alle cause di queste difficoltà, nel presente capitolo si descriverà l'esperimento effettuato durante il tirocinio curriculare svolto presso il liceo scientifico e delle scienze umane "Albert Bruce Sabin" seguendo l'attività didattica delle classi prime degli indirizzi di studio di "Scienze Umane" ed "Economico-Sociale". Con l'esperimento sono state somministrate agli studenti, (un gruppo di 4-5 studenti per classe) delle domande estrapolate dalle prove INVALSI degli anni precedenti con l'obiettivo di osservare le modalità attraverso le quali gli studenti affrontano le prove di matematica e le reali difficoltà di tipo cognitivo e di tipo risolutivo che gli studenti incontrano quando risolvono questo tipo di prove.

Questo esperimento nasce dalla constatazione che gli studenti italiani hanno ottenuto risultati deludenti nelle prove standardizzate di matematica. In parte questi risultati sono già stati spiegati dal Rapporto Nazionale, pubblicato a cura dell'INVALSI, attraverso l'analisi di alcune variabili quali il background socio-economico e culturale dello studente oppure fattori affettivi e motivazionali quali l'ansia nei confronti della matematica o il senso di autoefficacia o l'interesse che lo studente dichiara nei confronti della matematica.

Quando si parla di difficoltà in matematica è necessario tener presente gli atteggiamenti e le emozioni che tale disciplina suscita in tutti coloro che vengono a contatto con essa: ci sono studenti che la amano e che ne hanno una visione positiva, ma ci sono anche quelli che la odiano e che ne hanno un' immagine negativa, oppure che addirittura si vantano, invece di rammaricarsene, di avere grossi problemi con la matematica. Il blocco nei confronti della matematica non si può spiegare solo con cause esteriori o comunque attraverso fattori su cui l'alunno non fa alcuna presa quali il carattere ostico della materia o il modo in cui viene insegnata. Infatti, se la matematica fosse per sua natura ostica, nessun alunno vi si sarebbe mai potuto interessare, oppure, se la colpa è del modo in cui viene insegnata, difficilmente si potrebbe spiegare perché uno stesso insegnante può fallire nel suo lavoro con alcuni studenti e riuscire invece con altri. Quindi all'origine dei problemi vi sono cause più profonde, legate alle emozioni che i soggetti provano nei confronti della matematica.

Per poter studiare e capire gli aspetti che influenzano l'interesse degli studenti verso la matematica, per cercare di capire il tipo di ragionamento attraverso il quale arrivano a determinate risposte, e per descrivere le strategie risolutive che gli studenti italiani mettono in atto quando si trovano a dover affrontare questo tipo di quesiti, è stato effettuato un test, che tramite l'osservazione delle strategie risolutive utilizzate dagli studenti, possa fornire una chiave di lettura delle difficoltà che vengono riscontrate nei nostri studenti durante la risoluzione delle prove di matematica, difficoltà testimoniate dagli scarsi risultati raggiunti. Inoltre, attraverso tale analisi si vuole cercare di verificare, come d'altronde sarebbe logico aspettarsi, se esistono delle categorie di errori e di strategie risolutive che si ripetono in studenti diversi e provare quindi a delinearle e a descriverle e, dove possibile, a motivarle.

4.2 Modalità di svolgimento dell'esperimento

Per il raggiungimento degli obiettivi sopra descritti, e cioè per capire il tipo di ragionamento utilizzato dagli studenti con il quale arrivano a determinate risposte e per indagare sulle strategie risolutive che gli studenti italiani utilizzano nella risoluzione dei quesiti delle prove di matematica, è stato realizzato un test di domande estrapolate dalle prove di matematica INVALSI svolte negli anni precedenti, in particolare nell'anno scolastico 2010/2011 e 2012/2013, che rispettano la stessa tipologia delle prove ma con un numero inferiore di quesiti.

L'esperimento è stato svolto su un campione di 12 studenti (14-15 anni) divisi in gruppi, frequentanti la 1M e 1O dell'indirizzo Economico-Sociale, e 1R dell'indirizzo Scienze Umane del liceo scientifico "Albert Bruce Sabin" con sede a Bologna, durante il periodo di svolgimento del tirocinio curriculare (novembre-dicembre 2014). Gli studenti scelti facevano parte delle classi seguite durante l'attività di tirocinio e sono stati indicati dalla prof.ssa Vesi Valeria insegnante di matematica delle stesse classi e inoltre tutor aziendale di tirocinio.

Il lavoro d'indagine è stato realizzato in due diverse fasi:

1) soluzione del test;

2) intervista-colloquio registrata.

La prima fase è stata di natura qualitativa e si è basata sulla somministrazione di un test costituito da 4 quesiti estrapolati dalle prove INVALSI degli anni precedenti, scelti con l'aiuto dell'insegnante di matematica in base alle conoscenze possedute dagli studenti quindicenni delle classi osservate. L'insegnante ha curato la scelta degli studenti da sottoporre al test, cercando di inserire nel gruppo studenti con capacità e interesse per la matematica differenti, fornendo un campione abbastanza variegato nel quale ritroviamo studenti eccellenti con ottime capacità matematiche, studenti mediocri e studenti disinteressati nei confronti della disciplina.

Il test è stato svolto dagli studenti durante le ore di lezione, la metodologia è stata sempre la stessa in ogni classe. Gli studenti venivano indicati

dall'insegnante e poi invitati a sedersi in fondo all'aula all'insaputa di quello che dovevano fare. Dopo essersi sistemati è stato consegnato loro il fascicolo con i quesiti, sono stati invitati a non girare il foglio e quando è stato consegnato a tutti hanno girato leggendo le istruzioni su quello che dovevano fare. Da quel momento in poi hanno avuto a disposizione 20 minuti di tempo per rispondere ai quesiti.
Il fascicolo risolto dagli studenti comprendeva i seguenti quesiti:

1. Per calcolare a mente 49 x 12, quale fra le seguenti strategie è corretta?

☐ A. (49 x 2) + (49 x 10)
☐ B. (49 x 2) x 2
☐ C. (49 x 10) + (9 x 12)
☐ D. (49 x 2) x 10

2. Ad un club sportivo sono iscritti 55 soci. 50 giocano a tennis, 20 vanno a cavallo. Sapendo che ogni iscritto pratica almeno uno dei due sport, quanti sono gli iscritti che vanno a cavallo e giocano a tennis?

☐ A. 5
☐ B. 15
☐ C. 30
☐ D. 35

3. Giorgio decide di cominciare un programma di 6 settimane per mettersi in forma. La prima settimana corre per 1km ogni giorno, la seconda settimana per 1,250 km ogni giorno, la terza settimana per 1,5 km ogni giorno.
a) Se lo schema continua in questo modo, quanto correrà ogni giorno la sesta settimana?

☐ A. 1,250 km
☐ B. 2,250 km
☐ C. 2,500 km
☐ D. 7,500 km

b) Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.

....

4. Indica se ciascuna delle seguenti proposizioni é vera (V) o falsa (F).

	V	F
a. Se un numero é pari allora é multiplo di 4	☐	☐
b. Se un numero è multiplo di 9 allora é multiplo di 3	☐	☐
c. Un numero é multiplo di 6 solo se é pari	☐	☐
d. Un numero é multiplo di 5 se e solo se é multiplo di 10	☐	☐

Gli studenti hanno lavorato in piena autonomia singolarmente, cercando di rispondere sulla base delle loro conoscenze matematiche acquisite durante il loro percorso di studi. Quasi tutti quando si sono visti il fascicolo davanti hanno capito di cosa si trattava e quindi nonostante il test improvvisato hanno saputo svolgere la prova e nonostante lo stupore iniziale si sono poi concentrati per rispondere alle domande.

I quesiti rilasciati sono un esempio del tipo di prove che sono state utilizzate nella prove INVALSI e abbracciano quindi tutte le diverse caratteristiche di esse, cioè appartengono alle diverse aree di contenuto, ai diversi raggruppamenti di competenza, ai diversi livelli di difficoltà e alle diverse tipologie di domanda.

Per lo svolgimento della seconsa fase dell'indagine, gli studenti sono stati sottoposti a un'intervista-registrata dopo la risoluzione dei quesiti, per valutare e interpretare le strategie che mettono in atto e i processi cognitivi che usano per risolvere prove di questo tipo. Per le interviste si è fatto uso della metodologia del "pensare ad alta voce", che consiste nel fare esprimere nel modo più spontaneo possibile l'allievo evitando in ogni modo di direzionarlo verso una data risposta e di inibire o di censurare ciò che passa per la sua mente.

In pratica, ogni gruppo i studenti selezionato dopo aver finito il test, è stato portato fuori dalla classe con la richiesta di commentare le risposte date ad alta voce in modo che fosse possibile raccogliere, con l'uso di un registratore, tutti i vari passaggi risolutivi che lo studente metteva in atto.

Nonostante l'imbarazzo iniziale, determinato dalla presenza del registratore, cosa che è stata superata appena hanno iniziato a commentare le varie risposte, correggendosi l'uno con l'altro e attraverso uno scambio di opinioni, sono riusciti ad arrivare a determinare la risposta corretta per ogni domanda.

Tali interviste hanno permesso di capire quali sono le riflessioni e le congetture che essi fanno nel risolvere tali quesiti e quali sono i ragionamenti che li portano a dare determinate risposte.

La metodologia utilizzata per indagare i processi mentali messi in atto dagli studenti quindicenni nella risoluzione delle prove di matematica, come si è detto, è quella del "pensare ad alta voce". La regola principale di tale tecnica è fare in modo che l'interlocutore possa rendere immediatamente esplicito ciò che pensa a bassa voce quando è concentrato su un problema e cerca di risolverlo. Questa tecnica prevede che vi sia contemporaneità tra processo mentale e verbalizzazione. Un tale approccio da parte dell'intervistatore consente infatti di ottenere dati validi, in quanto fedeli al pensiero dello studente e in grado di testimoniare il processo che ha generato determinati ragionamenti.

L'uso di questa procedura è giustificato dal fatto che spesso chi insegna crede di conoscere e dunque di poter interpretare il pensiero seguito dagli studenti e di capire così la natura dell'errore da loro commesso e le difficoltà da loro incontrate. In realtà, molti sono i ragionamenti che è possibile seguire per arrivare a una soluzione, a volte, sono addirittura ragionamenti impensabili per una persona "esperta". In altri termini, le difficoltà di comprensione sono in qualche modo chiarite all'insegnante se si riescono a portare alla luce quei processi nascosti e generalmente incomprensibili, perché effettuati in modo automatico e inconscio.

4.3 Il pensare ad alta voce

Negli anni venti fu Claparède uno dei primi psicologi ad utilizzare il "metodo della riflessione parlata" in quanto egli riteneva che chiedere di verbalizzare i propri pensieri mentre essi si svolgono permette di evitare quegli errori associati a conservare i pensieri nella propria memoria per poi doverli successivamente rievocare. Inoltre questo metodo (Claparède, 1972, pag. 108)

"si differenzia notevolmente dall'introspezione ordinaria perché il soggetto, invece di ricevere la consegna di evocare ciò che succede in lui, riceve quella, più semplice, di riflettere ad alta voce. (...) Questo metodo ha il vantaggio, rispetto all'introspezione, di non richiedere al soggetto nessuno sdoppiamento: egli non ha bisogno di pensare ed osservarsi a pensare nello stesso tempo. Più semplicemente, lavorando da solo, egli pensa come se parlasse a se stesso, con l'unica differenza che, nel nostro caso, il linguaggio interiore viene sostituito dalla parola ad alta voce".

Pellerey (2006), in un interessante libro sull'opera di Luigi Calonghi, ripercorre le tappe che hanno portato a considerare il "pensare ad alta voce" come un valido metodo per indagare in particolare i processi di pensiero coinvolti nella soluzione di problemi. Successivamente a Claparède, molti altri psicologi (ad esempio quelli della Gestalt) negli anni trenta e quaranta hanno utilizzato questo metodo per studiare i processi di soluzione di problemi.

Per poter conoscere i processi di pensiero attraverso i quali uno studente arriva alla soluzione dei problemi di matematica e le difficoltà che egli incontra e per poter successivamente intervenire in maniera efficace, è necessario adottare alcuni comportamenti verbali centrati sull'allievo in difficoltà che, come dimostrano alcune ricerche condotte in Italia da Lucia Lumbelli, sono in grado di permettere l'accertamento delle abilità degli studenti. L'intelligenza diventa, infatti, maggiormente studiabile quando "inciampa, si blocca e deve rallentare il proprio passo" (Lumbelli 1994, p.144). È in questa situazione che il lettore in difficoltà fa ipotesi per cercar di trovare la soluzione che lo aiuta a risolvere il problema. In altri termini, la difficoltà di comprensione permette di svelare quei processi nascosti e generalmente incomprensibili, perché effettuati in modo automatico e inconscio.

L'intervento non direttivo, denominato "ad eco" o "a specchio" o "riflesso", è uno tra i comportamenti linguistici, utilizzato in ambito terapeutico (Rogers 1951), che permette e incoraggia una partecipazione attiva dell'interlocutore. Tale atto linguistico aiuta a fare esprimere liberamente la persona con cui si interloquisce e di conseguenza consente di raccogliere testimonianze più attendibili sulle affermazioni e sui processi cognitivi che vengono messi in atto.

Gli interventi non direttivi sono stati definiti dalla studiosa Lucia Lumbelli "un modo di domandare senza domandare". Tali atti hanno, infatti, la forma di una constatazione e l'effetto di un'interrogazione. Nella situazione specifica, con questi interventi si ripropone il contenuto delle affermazioni fatte dagli studenti formulando ipotesi di comprensione tramite glosse del tipo "tu pensi dunque che...", ripetendo le frasi pronunciate dagli studenti, riformulando o sintetizzando quanto da loro detto, facendo sempre in modo che il tono della voce non esprima alcun tipo di commento e di giudizio.

Questo tipo di intervento sostituisce espressioni come "prova a ripetere", "esprimiti in forma più chiara", "ricomincia daccapo", il cui probabile effetto è segnalare allo studente la possibilità di aver commesso un qualche errore, provocando sullo studente un possibile effetto psicologico/emotivo negativo.

Lo studente, tramite gli interventi indiretti fatti dall'insegnante / intervistatore diventa così ascoltatore di se stesso e può confrontare quanto ha detto con ciò che ha nella mente e che credeva di avere espresso. È questo "confronto interno al parlante, divenuto ascoltatore di se stesso, che contribuirebbe a stimolare la sua produzione autonoma di quelle integrazioni e di quei chiarimenti che l'intervistatore gli ha chiesto solo indirettamente con la risposta a riflesso" (Lumbelli, 1997, p. XVI). In altre parole, lo studente attraverso questi atti comunicativi percepisce l'attenzione dell'altro nei suoi confronti ed è incoraggiato a parlare.

Un'efficace interazione può consentire ai formatori di ottenere testimonianze su quanto essi hanno nella mente e aiutare a conoscere i percorsi che determinano il raggiungimento di un prodotto, con il principale scopo di mettere in atto situazioni di apprendimento-insegnamento che tengano realmente conto delle difficoltà e lacune dello specifico studente.

In altre parole, l'utilizzo di una tecnica di comunicazione verbale adeguata consente al docente di analizzare le informazioni relative al processo che l'allievo mette in atto per giungere a certi risultati e ottenere determinati prodotti. A maggior ragione, tale tecnica presenta notevoli vantaggi quando si ha a che fare con studenti "poco abili", "inesperti", linguisticamente svantaggiati, con deprivazione socioculturale e conseguenti frustrazioni scolastiche e non con studenti che presentano scarse "doti" intellettuali, e a cui, invece, si imputa spesso la principale responsabilità dell'insuccesso scolastico.

Lumbelli (1971) indica una serie di condizioni importanti per l'efficacia del "pensare ad alta voce": l'atteggiamento non valutativo, di accettazione da parte dell'intervistatore, il controllo delle sue manifestazioni espressive in modo da determinare un'atmosfera permissiva, non bloccante nei riguardi del comportamento verbale dello studente, la riduzione al massimo delle domande qualora si volessero ottenere ulteriori informazioni su un determinato punto e la sostituzione di queste domande con interventi "a specchio" che, riprendendo alcune affermazioni dello studente lo invitino ad aggiungere qualcosa ad esse o a ridimensionarle, a seconda dei casi.

In base a tutto ciò, durante le interviste con gli studenti si è cercato il più possibile di attenersi a tutte queste condizioni per seguire il più fedelmente possibile il pensiero dello studente. All'inizio di ogni intervista, viene chiesto ad ogni studente di leggere ogni singola domanda e, immediatamente dopo, di risolverla esprimendo ad alta voce il ragionamento seguito.

Compito dell'intervistatore è quello di raccogliere il maggior numero di informazioni, adottando adeguati comportamenti verbali, ed evitando qualsiasi occasione in grado di ostacolare il libero fluire della comunicazione da chi è osservato. L'intervistatore riprende cioè qualche aspetto del discorso dell'interlocutore, riformulando o sintetizzando quanto da lui detto. Ad esempio, quando lo studente è in difficoltà perché non riesce ad esprimere bene il suo pensiero nel momento in cui deve, ad esempio, scrivere i motivi per cui dà una determinata risposta piuttosto che un'altra, lo si può invitare a ripetere quello che sta pensando dicendogli: "Vediamo di ridire quello che hai pensato e poi troviamo un modo per scrivere". Oppure quando lo studente all'inizio dà una risposta sbagliata, ma poi si corregge e fornisce quella corretta, l'intervistatore, per cercare di capire in che modo lo studente è riuscito ad arrivare alla soluzione giusta, quale ragionamento ha effettuato che gli ha permesso di arrivare alla risposta esatta, gli chiede: "Quali sono i fattori che hanno influenzato la tua risposta?". Oppure quando lo studente, dopo aver letto la domanda, dice di non aver capito aspettandosi dall'intervistatore una spiegazione, lo si invita a rileggere la domanda dicendogli: "Rileggi di nuovo la domanda, esplora tutto quello che hai sulla carta, senza escludere niente".

Nei prossimi paragrafi verranno riportati vari stralci provenienti da diverse interviste che permetteranno di esemplificare quanto appena detto.

4.4 Analisi dei quesiti

Per effettuare l'indagine, sono stati utilizzati 4 quesiti di matematica, appartenenti alle diverse aree di contenuto, ai diversi raggruppamenti di competenza, ai diversi livelli di difficoltà e alle diverse tipologie di domande presenti nelle prove INVALSI.

- Il primo quesito è:

  Per calcolare a mente 49 x 12, quale fra le seguenti strategie è corretta?
  ☐ A. (49 x 2) + (49 x 10)
  ☐ B. (49 x 2) x 2
  ☐ C. (49 x 10) + (9 x 12)
  ☐ D. (49 x 2) x 10

La risposta corretta è A, l'ambito prevalente di contenuto in cui si inserisce il quesito è " numeri", l'oggetto di valutazione riguarda le "operazioni con i numeri interi" inoltre richiede di conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...). L'obiettivo del quesito è quello di riconoscere strategie corrette per eseguire calcoli mentali. In tal senso, lo studente deve padroneggiare la scrittura polinomiale dei numeri per eseguire mentalmente l'operazione. I distrattori propongono modi errati o parziali di eseguire l'operazione sfruttando la scrittura polinomiale.

- Il secondo quesito è:

  Ad un club sportivo sono iscritti 55 soci. 50 giocano a tennis, 20 vanno a cavallo. Sapendo che ogni iscritto pratica almeno uno dei due sport, quanti sono gli iscritti che vanno a cavallo e giocano a tennis?

  ☐ A. 5
  ☐ B. 15
  ☐ C. 30
  ☐ D. 3

La risposta corretta è B, l'ambito prevalente di contenuto in cui si inserisce tale quesito è " numeri". Il quesito richiede di risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo,…). Inoltre l'obiettivo del quesito è di utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...)

- Il terzo quesito è:

Giorgio decide di cominciare un programma di 6 settimane per mettersi in forma. La prima settimana corre per 1km ogni giorno, la seconda settimana per 1,250 km ogni giorno, la terza settimana per 1,5 km ogni giorno.

a) Se lo schema continua in questo modo, quanto correrà ogni giorno la sesta settimana?

☐ A. 1,250 km

☐ B. 2,250 km

☐ C. 2,500 km

☐ D. 7,500 km

b) Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.

....

La risposta corretta è:

a) B

b) Lo studente doveva spiegare come ha impostato i calcoli e andava corretta indipendentemente dal fatto che la risposta a) fosse corretta.
L'ambito prevalente di contenuto in cui si inserisce tale quesito è " numeri", l'oggetto di valutazione riguarda le "operazioni con i numeri decimali" inoltre richiede di saper risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...). L'obiettivo del quesito è quello si saper risolvere problemi utilizzando frazioni e numeri decimali in contesti concreti (denaro, misure,. . .).

In particolare, la situazione chiede di trovare il sesto termine di una sequenza numerica. L'allievo può rispondere eseguendo una serie di addizioni, fino a trovare il risultato richiesto, o costruendo un modello del tipo 1+(0,250)xN , dove N è il numero di settimane successive alla prima. La domanda aperta b) dovrebbe aiutare l'insegnante a capire la strategia risolutiva scelta, e individuare (ad esempio) se il ragazzo ha scelto il distrattore C perché nel modello succitato ha contato, erroneamente, anche la prima settimana. La scelta del distrattore D può indicare la mancanza di una effettiva strategia.

- Il quarto e ultimo quesito è:

  Indica se ciascuna delle seguenti proposizioni é vera (V) o falsa (F).

	V	F
a. Se un numero é pari allora é multiplo di 4	☐	☐
b. Se un numero è multiplo di 9 allora é multiplo di 3	☐	☐
c. Un numero é multiplo di 6 solo se é pari	☐	☐
d. Un numero é multiplo di 5 se e solo se é multiplo di 10	☐	☐

  La risposta corretta è:

  a. F

  b. V

  c. V

  d. F

L'ambito prevalente di contenuto in cui si inserisce tale quesito è " numeri", l'oggetto di valutazione riguarda "numeri pari e dispari, multipli e divisori di un numero" inoltre richiede di acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...). L'obiettivo del quesito è di conoscere numeri pari e dispari, multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri.

Capitolo 5

Analisi delle strategie risolutive

5.1 Premessa

In questo capitolo verranno analizzate le interviste svolte durante la seconda fase di indagine (intervista-colloquio registrata) la cui modalità è stata descritta nel precedente capitolo. Le interviste effettuate ai nostri studenti sono state molto utili, in quanto hanno dato la possibilità di indagare in modo più approfondito i ragionamenti che i nostri 15enni fanno quando rispondono ai quesiti Invalsi e di capire le difficoltà che essi incontrano quando cercano di risolverli.

Per analizzare le interviste si è proceduto nel seguente modo: innanzitutto tutte le interviste sono state trascritte integralmente e arricchite di alcuni commenti circa particolari comportamenti da parte dello studente che si erano rilevati durante l'intervista e di cui si era preso nota. Ad esempio, cosa lo studente fa durante i momenti di silenzio (fa calcoli con la calcolatrice, osserva un grafico, indica con la mano un dato in particolare ecc.), oppure se presenta atteggiamenti particolari di paura o di ansia, di incertezza o di difficoltà nel comprendere alcune domande. Successivamente ciascuna intervista è stata analizzata mettendo in evidenza gli atteggiamenti che sembravano particolarmente interessanti in relazione alle diverse tipologie di difficoltà che lo studente presentava nella risoluzione di un problema, ai diversi tipi di ragionamento che egli faceva o alle diverse strategie che utilizzava per arrivare alla risposta.

Per poter meglio categorizzare queste varie osservazioni emerse, si è deciso di prendere come riferimento lo schema di risoluzione di Polya in quanto è il più utilizzato e ripreso in letteratura: tale autore è stato infatti uno dei primi ad effettuare studi sistematici sui metodi risolutivi e la sua opera pubblicata nel 1945 "How to solve it" (in italiano "Come risolvere i problemi di matematica", 1976) rappresenta una pietra miliare a cui molti altri autori si sono successivamente ispirati. Utilizzando il suo schema è stato possibile suddividere le diverse osservazioni in base alla fase risolutiva in cui esse venivano osservate.

Polya distingue quattro fasi[1] che a suo parere sono sempre presenti durante la risoluzione di un problema:

- Prima fase: comprensione del problema.
- Seconda fase: compilazione di un piano di risoluzione.
- Terza fase: sviluppo ed esecuzione del piano.
- Quarta fase: verifica del procedimento e controllo del risultato.

5.2 Analisi delle interviste

5.2.1 Prima fase: comprensione del problema.

La prima fase, quella della comprensione, secondo Polya, è fondamentale. Infatti, è impossibile rispondere ad una domanda che non si è capita. Si deve quindi *"comprendere"* il problema ed è necessario capire chiaramente cosa sia richiesto. Lo studente, in questa fase, "dovrebbe considerare le parti principali del problema con molta attenzione, più volte e da vari punti di

[1] Le fasi di risoluzione di un problema di Polya sono state ampliamente descritte nel terzo capitolo

vista". Egli dovrebbe essere in grado di ripetere l'enunciato, di distinguerne le parti principali, di individuare i dati e l'incognita. Per questo motivo, in questa fase rientrano le difficoltà che i nostri studenti incontrano nella semplice lettura delle prove di matematica, difficoltà che possono essere legate al modo in cui le prove sono scritte, cioè ad esempio, con un linguaggio per loro troppo complesso, oppure possono dipendere da come gli studenti leggono questo tipo di prove e cioè con superficialità e ponendo scarsa attenzione.

Secondo Ferrari (2004): l'interpretazione di un testo non è un'operazione di pura e semplice decodificazione ma, più o meno esplicitamente, richiede inferenze di vario tipo. I soggetti davanti a un testo generalmente si sforzano di dargli comunque un senso, ne afferrino o meno gli scopi o il significato complessivo. (....) Per rispondere non basta interpretare singole frasi o parole, ma occorre coordinare l'interpretazione di più frasi e svolgere delle inferenze, cioè dei ragionamenti, non necessariamente deduttivi, per ricavare informazioni che non sono date esplicitamente.

Nelle interviste alcuni studenti, per poter comprendere del tutto ciò che la domanda richiede loro, devono leggere il testo più di una volta e spesso la semplice rilettura della domanda aiuta nella risoluzione in quanto alla prima lettura spesso hanno posto scarsa attenzione e di conseguenza hanno avuto solo una comprensione parziale di ciò che viene loro richiesto. L'invito che viene loro rivolto dall'intervistatore di rileggere di nuovo la domanda dal momento che alla prima lettura dimostrano di non aver compreso del tutto la richiesta, fa sì che essi pongano un'attenzione maggiore che li aiuta a comprendere meglio la domanda.

La rilettura della domanda non è però sempre garanzia di risposta corretta, ma serve principalmente per superare un momento di stallo o un blocco psicologico che si crea nello studente quando non ha chiaro in mente che cosa gli si sta chiedendo o come deve rispondere.

Sulla base di quanto detto, analizziamo le interviste effettuate nelle diverse classi osservate, e in particolare uno stralcio dell'intervista svolta, nella 1M dell'indirizzo economico sociale del liceo scientifico e delle scienze umane “Sabin”, dopo aver risposto alle domande. L’intervista in tale classe ha coinvolto 5 studenti: Olindo, Micol, Laura, Luca e Irene; è stata svolta in gruppo in modo tale che l’intevistatore riuscisse ad estrapolare da essa il ragionamento utilizzato dagli studenti per arrivare alla risposta.

Su richiesta dell’intervistatore, Micol legge ad alta voce la prima domanda[2] della prova, che chiede di calcolare a mente 49x12 e scegliere la strategia corretta fra quelle proposte. La studentessa legge tutto il quesito con le diverse opzioni di risposta e poi rimane in silenzio e alla fine risponde C in maniera dubbiosa nonostante fosse la sua risposta data alla domanda. Intanto tutti gli studenti forniscono le loro risposte, e mentre Laura e Irene rispondono in maniera sicura affermando che sia la A la risposta corretta Luca e Olindo sostengono che sia la D la risposta e quando viene chiesto loro di spiegare perchè avevano scelto quella opzione, gli studenti commentano nel seguente modo:

Micol: Io ho messo C, sicuramente adesso metterei la A perchè ho visto bene e.....le proprietà delle....operazioni...

Intervistatore: Tu invece? (*rivolgendosi a Luca*)

Luca: Nonostante ho messo come risposta la D,... (*lo studente rileggendo la domanda e commentando le risposte si accorge che quella corretta è la A, infatti dice*),...direi la A perchè bisogna scomporre il 12

Irene: Era la A come le operazioni in colonna perchè si sommano appunto 49x2 e 49x10

Laura: Io prima ho calcolato 49x12 facendo l’operazione e poi ho calcolato gli altri e ho visto quale era il risultato uguale.

Olindo:....(*lo studente non sa giustificare la risposta D che ha dato*)

Da questo stralcio di intervista si può vedere come Micol e Luca abbiano letto la domanda, una prima volta, in modo superficiale, non facendo attenzione fino a quando non viene riletta ad alta voce. A questo punto, con una lettura più attenta, si accorgono dell’errore e riescono a giustificare la rispo-

[2] I testi di tutte le prove che vengono citate si trovano nel capitolo relativo all’impianto sperimentale

sta corretta che andava scelta. Quindi sia Micol che Luca erano in grado di risolvere in modo corretto questa prova, ma la loro distrazione li ha condotti su una strada sbagliata.

Un altro problema che rientra in questa fase riguarda l'errata comprensione di una domanda o proprio la difficoltà nella comprensione del testo o dei dati a disposizione, indipendentemente dall'attenzione che lo studente pone nel leggere la domanda. In ogni caso, non sempre la rilettura della domanda permette allo studente di comprenderla meglio o di interpretarla in modo corretto.

Questo è proprio quello che ritroviamo nell'atteggiamento di Olindo in quanto fornisce una risposta errata che non riesce a commentare e giustificare perchè non ha compreso bene la domanda nonostante l'invito dell'intervistatore a rileggerla ad alta voce. Questo inoltre fa intuire una poca comprensione del quesito e anche una scarsa conoscenza dell'argomento.

Diverso invece è stato l'atteggiamento di Irene e Laura che non solo rispondono correttamente alla domanda ma riescono anche a fornire una sicura e precisa spiegazione della loro risposta. Entrambe infatti arrivano alla giusta soluzione nonstante utilizzano ragionamenti differenti.

Questo stralcio di intervista è molto interessante perché dimostra come la tecnica del rispecchiamento[3] funzioni molto bene per far riflettere gli studenti sui propri errori. Infatti mentre Micol e Luca pensano di aver fornito la risposta corretta, in realtà l'intervistatore facendo rileggere la domanda ha semplicemente rispecchiato ciò che loro avevano letto, facendo ripetere il quesito, questo è stato sufficiente per farli rendere conto di aver sbagliato, di non aver compreso la domanda e farli arrivare alla giusta conclusione.

Vediamo ora un altro stralcio di intervista della classe 1M, riferito al soluzione del quarto quesito che rientra in questa fase di risoluzione.

Il punto b della domanda 4 chiedeva di indicare se fosse vero o falso se

[3]Intervento non direttivo denominato ad "eco" o a "specchio" o a "riflesso", abbondantemente descritto nel capitolo precedente, che incoraggia una partecipazione attiva dell'interlocutore

un numero è multiplo di 9 allora è anche multiplo di 3.
Naturalmente è vero ma Irene rileggendo il quesito si accorge di aver sbagliato infatti:
Irene: (*Legge ad alta voce il quarto quesito*)
Micol: Io ho messo vero
Laura: Anch'io ho messo vero
Luca: Vero
Irene: Nooo...è vero, perchè ho messo falsa?
Olindo: (*non ha risposto né durante l'intervista né sul fascicolo*)
Intervistatore: Allora vero. Poi la c? (*il quesito chiedeva: un numero è multiplo di 6 solo se è pari?*)
Micol: Falsa
Laura: Vero
Luca: Vero
Irene: Vero
Olindo: Falso
Intervistatore: Perchè hai messo falso? (*rivolgendosi ad Olindo*)
Olindo: ....un attimo...dice un pari...allora vero già!!!

Sia Irene nel punto b che Olindo nel punto c si accorgono dell'errore commesso dopo che la domanda è stata riletta. Da un punto di vista didattico, sia questo risultato che quello precedente sono molto interessanti in quanto dimostrano che a volte basta dare l'opportunità ad uno studente di riflettere semplicemente su quello che ha scritto o su ciò che ha appena letto per farlo rendere conto dei propri errori. Non è necessario sottolineare il fatto che ha sbagliato o voler per forza dargli un suggerimento, è sufficiente farlo ritornare sui propri passi.

5.2.2 Seconda fase: compilazione di un piano di risoluzione.

Il percorso che dalla comprensione del problema porta alla realizzazione di un piano è abbastanza complesso, tanto che si considera questa fase come la più ardua. Spesso essa procede per gradi: infatti molte volte, dopo alcuni tentativi all'apparenza vani, all'improvviso gli studenti hanno un'intuizione che permette loro di passare alla fase successiva. Polya (1976, pag.28) afferma che:

"naturalmente è difficile avere un'idea geniale quando non si conosce a fondo l'argomento ed è impossibile quando non se ne abbia alcuna conoscenza. Le buone idee si fondano sull'esperienza precedente e su cognizioni già acquisite. Una vaga reminiscenza non basta a suscitare un'ispirazione felice, ma non si può sperare di avere un'idea brillante se non si ricordano verità più o meno intimamente connesse con l'argomento di cui si sta trattando. (.....) Per risolvere un problema di matematica sono indispensabili alcune informazioni di una certa importanza dedotte da conoscenze matematiche acquisite in precedenza: problemi già risolti o teoremi già dimostrati."

Secondo Polya, si può dire di aver realizzato un piano quando si conoscono i calcoli o le costruzioni che si devono effettuare per risolvere il problema. Il successo di questa fase dipende da vari fattori: è necessario avere una buona dose di concentrazione, la capacità di saper distinguere le parti rilevanti del problema, i dati utili e quelli inutili, e infine sicuramente è indispensabile la mobilitazione delle conoscenze già acquisite. Questa situazione nelle interviste si verifica di frequente: gli studenti non conoscono bene l'argomento o perché, da quanto loro stessi affermano, a scuola non l'hanno mai affrontato oppure perché lo hanno affrontato, ma non se lo ricordano più.

A sostegno di quanto appena detto, si riporta un altro esempio, sempre riferito alla soluzione della prima domanda, estrapolato dall'intervista svolta in 1O classe dell'indirizzo economico sociale del liceo scientifico e delle scienze umane "Sabin". Gli studenti coinvolti nell'intervista in questa classe sono 4: Laura, Alessia, Filippo e Guglielmo. In particolare l'atteggiamento di Filippo e Guglielmo si avvicina al pensiero di Polya infatti:
Filippo: (*legge ad alta voce la prima domanda e risponde*)....ho messo D
Intervistatore: Secondo voi è corretta? (*rivolgendosi agli altri studenti*)
Laura-Alessia-Guglielmo: Nooo.... (*intervengono gli studenti che hanno*

risposto correttamente)
Intervistatore: Perchè?
Laura: Perchè non viene lo stesso risultato di 49x12
Alessia: Esatto
Intervistatore: Qual'è la risposta corretta secondo voi?
Laura-Alessia-Guglielmo: La A
Laura: La A perchè è l'unico che viene 588 come 49x12
Intervistatore: Quindi come hai fatto per rispondere? (*rivolgendosi a Laura*)
Laura: Ho fatto il calcolo 49x12 e (49x2)+(49x10) ed era lo stesso risultato
Intervistatore: Perchè hai risposto D (*rivolgendosi a Filippo*)
Filippo: Boh...sinceramente ho fatto...praticamente non ho fatto il calcolo ho cercato di farlo a mente e alla fine pensavo che...(49x2)x10 pensavo venisse uguale a 49x12 adesso però riguardando mi sono accorto dell'errore
Guglielmo: Io ho visto che non tornava, cioè non venivano uguali...sapendo anche...insomma applicando la proprietà insomma veniva così, tornava insomma non venivano altri numeri.

Da questa intervista si evidenzia, nonostante il formato della domanda era a scelta multipla per cui gli studenti potevano controllare immediatamente se il risultato ottenuto era corretto oppure no, che la difficoltà maggiore che i nostri studenti hanno incontrato non è stata tanto nel riuscire a capire quali fossero i dati che dovevano essere messi in relazione, ma proprio l'utilizzo della proprietà corretta per arrivare alla giusta soluzione.

Filippo infatti, ha capito perfettamente che deve calcolare 49x12 ma non sa stabilire qual'è la strategia corretta per rispondere al quesito né tanto meno è in grado di ricavarsela. Quasi mai agli studenti, viene in mente che, in matematica, se qualcosa non si ricorda si può sempre ricavare con il ragionamento. Questa è, probabilmente, la conseguenza di un insegnamento della matematica basato più sulla memorizzazione di regole che sull'effettiva comprensione di esse. Una volta che le regole non si ricordano più, gli studenti non sono in grado di ricavarsele attraverso il ragionamento. Filippo quindi, decide di utilizzare una strategia che è del tutto scorretta e priva di senso da un punto di vista matematico.

Guglielmo invece, nonostante nel fascicolo delle domande in un primo momento segna come risposta la B, poi tramite una strategia particolare basata sulla prova delle varie risposte, alla quale non riesce ad associare un ragionamento matematico, o anche tramite esempi mentali o teorici fornisce la risposta corretta attraverso un'idea intuitiva.

A differenza di Filippo e Guglielmo. Laura sa perfettamente quale strategia scegliere per rispondere correttamente, ma la sua sua esperienza personale è talmente radicata in lei, che non riesce ad giustificare il risultato utilizzando concetti e prorpietà matematiche acquisite durante il suo percorso di studi, ma tramite una prova determinata da un'intuizione.

La tecnica dell'intuizione viene utilizzata nuovamente nel quarto quesito per rispondere al punto b, da Guglielmo che giustifica la sua risposta nel seguente modo:

Filippo: (*legge ad alta voce la domanda che chiedeva: se un numero è multiplo di 9 allora è multiplo di 3 e risponde correttamente*)...Vero perchè 3 è un sottomultiplo di 9

Intervistatore: Tu invece come hai ragionato?(*rivolgendosi a Guglielmo*)

Guglielmo: Io ho messo vero perchè ho fatto i calcoli e funzionava sempre, e comunque come ha fatto lui prima (*rivolgendosi a Filippo*)

Intervistatore: Quindi che calcoli hai fatto?

Guglielmo: Io facevo i multipli di 9 poi provavo a dividerli per 3 e veniva sempre.

Attraverso lo sue continue prove, Guglielmo intuisce che la regola *"funziona sempre"* come lui dice e quindi risale alla risposta corretta senza utilizzare un ragionamento o una strategia puramente matematica.

Questo tipo di ragionamento lo ritroviamo nell'intervista svolta in 1R classe dell'indirizzo di scienze umane del liceo scientifico e delle scienze umane "Sabin" sottoposto alle studentesse: Giorgia, Giulia e Giada. Queste ultime rispondono bene al quarto quesito e quando devono giustificare le lo-

ro risposte un commento fatto da Giulia per spiegare come è arrivata alla risposta del punto c, che chiedeva di dire se fosse vero o falso se un numero è multiplo di 6 solo se è pari, Giulia ha risposto nel seguente modo:
Giulia: Io ho ripassato un pò la tabellina del 6

Quindi anche in questo caso, una tecnica spesso utilizzata dai nostri studenti per rispondere ai quesiti matematici è l'intuizione, che spesso si rivela una strategia vincente, e ciò potrebbe essere importante ai fini didattici per aiutare gli studenti nella risoluzione dei problemi.

L'intuizione come anche la logica guiderà il ragionamento fatto dagli studenti di 1O, per rispondere al secondo quesito che chiedeva: 55 soci sono iscritti ad un club sportivo, 50 giocano a tennis e 20 vanno a cavallo. Sapendo che ogni iscritto pratica almeno uno dei due sport, veniva chiesto di stabilire quanti fossero gli iscritti che vanno a cavallo e giocano a tennis. Nel seguente stralcio di intervista, in particolare riportiamo il dialogo fatto fra Alessia e Laura che cercano di spiegare a vicenda il modo in cui sono arrivate alla risposta.
Alessia: Io ho messo B 15...ho fatto 50+20-55=15 cioè ho sommato gli iscritti a tennis e a cavallo e poi ho tolto 55 soci e mi torna
Intervistatore: Tutti B avete risposto?
Guglielmo-Filippo-Laura-Alessia: siiii...
Intervistatore: Come avete ragionato?
Laura: Io ho fatto 55-50 che viene 5, ho tolto i 5 dai 20 e veniva 15 perchè significa che i 5 che non giocano a tennis vanno a cavallo mentre gli altri giocano sia a tennis che a cavallo
Intervistatore: Potrebbe andare o è stata fortunata? (*si rivolge agli altri studenti*)
Alessia: Boh....non ho capito il ragionamento
Guglielmo: Troppo complicato rispiega
Alessia: Infatti io non ho capito...
Laura: Allora ho fatto 55-50 che significa che 50 dei 55 giocano a tennis gli altri 5 vanno a cavallo, ho fatto 20-5 che sian sicuri che non giocano a tennis

e viene 15
Alessia: Troppo complicato
Laura: Ho fatto più a logica che per calcolo

Questo tipo di ragionamento è stato ritrovato molto di frequente nelle interviste e ciò denota uno scarso utilizzo da parte degli studenti delle procedure e tecniche matematiche studiate a scuola ed evidenzia la loro difficoltà ad utilizzare ciò che apprendono in situazioni che escono al di fuori del contesto scolastico.

5.2.3 Terza fase: sviluppo ed esecuzione di un piano.

Lo sviluppo del piano, è, secondo Polya, un'impresa molto più semplice rispetto a quella della compilazione del piano, anche se richiede soprattutto pazienza e precisione e un'attenzione particolare alla correttezza di tutti i vari passaggi che dovrebbero portare alla soluzione. In realtà, spesso si è osservato durante le interviste che i nostri studenti, quando risolvono i problemi, saltano completamente la seconda fase per arrivare subito alla terza: essi cioè non sono in grado di mettere a punto un piano di risoluzione, di pensare quale strategia risolutiva potrebbe essere adatta per risolvere quel determinato problema, e di conseguenza procedono per tentativi adottando ora un tipo di piano risolutivo, ora un altro, senza avere ben chiaro in mente il perché agiscono in un determinato modo, piuttosto che in un altro. Anzi, forse, sarebbe più corretto affermare che i nostri studenti procedono attraverso un processo casuale, perché in realtà essi non hanno un' idea chiara di ciò che è necessario fare.

Durante la risoluzione della prova accade spesso che lo studente, invece di riflettere su quali siano i dati a disposizione e quali relazioni intercorrano tra essi, utilizzi i dati in modo assolutamente casuale, fino a che non arriva ad un risultato che gli sembra più a meno plausibile. Appare chiaro durante questo modo di procedere che lo studente non è affatto cosciente del perché stia utilizzando un tipo di operazione piuttosto che un altro e anche quando arriva alla soluzione, che a volte è anche corretta, non è nemmeno convinto

che effettivamente sia quella giusta. Vediamo come esempio di quanto appena detto il seguente stralcio, tratto dall'intervista a Irene e Micol, studentesse della 1M del liceo scientifico indirizzo economico sociale quando commentano la risposta al secondo quesito:
Intervistatore: Come avete risposto alla seconda domanda? (*si rivolge agli studenti della 1M*)
Irene: Io ho messo C
Laura: Anch'io ma non so....
Micol: C
Luca: B
Intervistatore: Allora perchè C e perchè B?
Micol: Ho messo C perchè ho fatto 50-20 che farebbe 30, 50 giocano a tennis, 20 giocano a cavallo, quindi sottraendo...
Irene: Ok...(*prova a ragionare e spiegare*) allora 50 giocano a tennis e 20 vanno a cavallo, quindi i 35 perchè rimangono 5 soci a meno che non faccia...
Laura: Noooo...sottraendo 50 che giocano a tennis e 20 vanno a cavallo fa 30
Intervistatore: Quindi...ditemi?
Irene-Laura-Micol: La C
Intervistatore: Tu? (*rivolgendosi ad Olindo*)
Olindo: Eh...B (*nonostante ha segnato la risposta B corretta non sa spiegare come è arrivato alla soluzione*)
Luca: No io credo sia la B
Irene-Laura-Micol: Come la B...perchè spiegacelo
Luca: Perchè considerando che 50 giocano a tennis 55-50=5, allora 5 vanno solo a cavallo quindi 20-5=15 che sono i rimanenti fanno entrambi gli sport.

Dall'intervista si nota che, Irene come Micol e Laura non sanno motivare la scelta della sottrazione per risolvere il quesito. Le studentesse infatti, scelgono tra tutti i risultati proposti 30, che ottengono effettuando un calcolo casuale utilizzando i dati messi a disposizione dal quesito anche se non è il risultato corretto. Inoltre, non riescono a motivare la loro scelta e questo fa pensare che si tratti più di una scelta casuale che gli permetta di ottenere uno tra i risultati da scegliere, ma non che loro abbiano effettivamente compreso appieno il ragionamento da utilizzare, cosa che invece riesce a intuire Luca. Olindo invece fornisce la risposta corretta ma non riesce a spiegare il ragionamento svolto.

Un'altra osservazione interessante che rientra sempre in questa terza fase, riguarda tutti quei casi in cui gli studenti, pur sviluppando un piano corretto per la risoluzione del problema, forniscono una risposta errata oppure, viceversa, arrivano a una risposta corretta utilizzando una strategia di risoluzione del tutto sbagliata. Vediamo innanzitutto qualche esempio relativo al primo caso, cioè quando lo studente dà una risposta errata pur avendo seguito un ragionamento del tutto corretto.

Nell'inervista fatta in 1M, Irene risponde al punto a del quarto quesito, che chiedeva di dire se fosse vero o falso se un numero è pari allora è multiplo di 4, in modo errato pur facendo un ragionamento corretto, infatti:

Micol: (*legge la domanda a e risponde...*) Io ho messo vero

Laura: Anch'io vero

Luca: Io ho messo falso

Irene: Vero

Olindo: Vero

Intervistatore: Perchè falsa?

Irene: Hai ragione (*si rivolge a Luca*) perchè 18 non è un multiplo di 4 ed è pari.

Irene infatti, confrontandosi con i suoi compagni si accorge di aver risposto in modo errato ma riesce a fornire un ragionamento corretto per arrivare alla giusta risposta. Analogamente sempre nel quarto quesito al punto d, che chiedeva di dire se fosse vero o falso se un numero è multiplo di 5 se e solo

se è multiplo di 10, Irene commette lo stesso errore di prima, infatti:
Laura: (*legge la domanda d e risponde...*) Io ho messo falso
Luca: Anch'io
Olindo: Vero
Micol: Io volevo mettere falso ma ho messo vero
Irene: Vero
Intervistatore: Perchè avete messo vero, come avete ragionato?
Irene: No perchè ho capito dopo che era falso, no ci sono arrivata dopo perchè ad esempio 25 è multiplo di 5 ma non è multiplo di 10.

Alcune volte accade invece esattamente il contrario di quanto appena detto e cioè alcune risposte corrette derivano in realtà da un ragionamento sbagliato e ciò lo ritroviamo nell'intervista fatta in 1O quando Alessia per commentare la sua risposta al secondo quesito, del club sportivo, spiega il ragionamento seguito, e nonostante non sia del tutto corretto arriva alla giusta risposta.
Alessia: (*legge la domanda e risponde...*) Io ho messo B 15, ho fatto 50+20-55=15 cioè dagli iscritti a tennis e a cavallo poi ho tolto 55 soci e veniva.

Come si può notare da questo stralcio di intervista, Alessia non usa una strategia precisa per stabilire quanti soci fanno entrambi gli sport, e ciò nonostante arriva alla risposta corretta.

Ancora un esempio riguardo al modo di procedere errato che però porta ad una corretta soluzione viene fornito da Giada, studentessa della classe 1R che per rispondere al terzo quesito che chiedeva di calcolare quanti km doveva correre Giorgio la sesta settimana dopo aver seguito una sequenza crescente nelle settimane precedenti risponde correttamente nonostante l'errato ragionamento.
Giada: (*legge la domanda e risponde in modo dubbioso...*) Credo B
Intervistatore: (*si accorge che aveva segnato un'altra risposta e le chiede...*) come mai hai cambiato risposta?
Giada: No perchè avevo fatto un errore, ho sbagliato a segnare perchè avevo

letto male allora...
Intervistatore: E quindi alla fine come hai ragionato?
Giada: Io ho fatto il calcolo matematico, cioè nel senso ho aggiunto ogni volta 250 eh 0,250...poi però non sapevo spiegarlo...allora ho cercato di tipo...ho sbagliato tutto
Intervistatore: Tranquilla spiegalo per bene...
Giada: Considerando che ogni settimana Giorgio aggiunge 0,250 km, basta fare (0,250 x 6) x 2.
La strategia risolutiva di Giada è alquanto confusa e priva di qualsiasi fondamento matematico, infatti nonostante capisce che ogni settimana Giorgio aggiunge 0,250 km al suo percorso, svolge un calcolo privo di senso moltiplicando per 2 ma arriva alla fine a segnare la risposta corretta.
Questi esempi dimostrano come i nostri studenti utilizzino i numeri spesso in modo del tutto casuale,senza essere interessati a capire che cosa rappresenti il risultato a cui giungono. Come già detto in precedenza, appare chiaro che le difficoltà che i nostri studenti incontrano nella risoluzione delle prove derivano dal fatto che essi non sono abituati, o forse comunque non sono in grado, di mettere a punto una strategia risolutiva prima della risoluzione del problema, per cui trovare la soluzione ad un problema vuol dire soltanto fare una serie di calcoli che permettano di trovare il risultato che più sembra intuitivamente corretto e non matematicamente esatto.
Sempre in questa terza fase rientrano le difficoltà che gli studenti incontrano nel calcolo e gli errori che essi commettono quando cercano di fare i calcoli mentali oppure addirittura quando utilizzano la calcolatrice. Oltre agli errori connessi ad un errato uso della calcolatrice, gli studenti durante le interviste hanno commesso anche vari errori di calcolo, dimostrando ad esempio, di conoscere male le tabelline e di avere difficoltà nel calcolo mentale. Analizziamo un esempio in tal senso, estrapolato dall'intervista fatta in 1M quando per rispondere al terzo quesito Micol e Laura durante la spiegazione del ra-

gionamento svolto si accorgono di aver sbagliato a calcolare, infatti:
Micol: (*legge la domanda e risponde...*) Io ho messo C
Olindo: B
Laura: C anch'io
Irene: B
Intervistatore: Allora perchè B e perchè C?
Micol: Ho messo C perchè ho fatto i calcoli tipo: la prima settimana era 1 km che sarebbero 1000m, poi 1000+50 fa 1500 che è la seconda settimana, la prossima settimana 1550....la.....nooo ho sbagliato perchè ho messo la seconda settimana con un calcolo diverso.....ho sbagliato a calcolare
Intervistatore: Chi ha messo pure la C?
Laura: Anch'io ho messo C perchè stavo facendo il calcolo che ha fatto lei, può essere che mi sono sbagliata a calcolare cioè aggiungendo ad ogni settimana 250.

Le studentesse non hanno avuto difficoltà di comprensione del quesito, infatti avevano chiaro come dover operare, quello che le ha fatte sbagliare è stato il calcolo effettuato nonostante fosse molto semplice. Questo tipo di errore può essere causato da diversi fattori: poca concentrazione, superficialità nella risoluzione del quesito in quanto si ritiene abbastanza semplice, confusione generata ad esempio dalla presenza nei calcoli delle unità di misura. Quest'ultima rappresenta un'ulteriore difficoltà che i nostri studenti hanno dimostrato durante lo sviluppo del piano di risoluzione. Analizziamo un errore di questo tipo che riguarda sempre la risposta al terso quesito nell'intervista fatta in 1O a Guglielmo:
Laura: (*legge la domanda e risponde...*) Io ho messo B perchè ho aggiunto tutte le volte 250 per ogni settimana, cioè siamo partiti da 1 km, 1km e 250 fa 1250km+250 viene 1500km+250 ottengo 1750km+250 ho 2250km
Intervistatore: Ok, tu come hai fatto? (*si rivolge ad Alessia*)
Alessia: Uguale
Intervistatore: C'era qualche altra strategia secondo voi?
Guglielmo: Io all'inizio ho sbagliato, ho messo C perchè ho fatto....all'inizio

avevo ragionato bene poi non ero convinto ho detto aggiungiamo un intero cioè 1km e ho messo la C però all'inizio avevo fatto come hanno fatto loro aggiungendo 250 ogni settimana

Intervistatore: Quindi alla fine quali calcoli hai fatto?

Guglielmo: Ho fatto 1,5+1=2,5 non mi fidavo di me.

Un'osservazione interessante a proposito della risposta data da Guglielmo, riguarda oltre all'errore di calcolo, il passaggio automatico che lui compie nell'associare un intero a 1km che poi trascina nel calcolo che lo porterà ad arrivare a una risposta errata.

5.2.4 Quarta fase: verifica del procedimento e controllo del risultato.

Sostiene Polya (1976) che questa fase non solo è molto importante, ma anche assai istruttiva in quanto, una volta arrivato alla soluzione, attraverso l'analisi del procedimento con cui l'ha ottenuta, lo studente potrebbe approfondire le proprie conoscenze e quindi sviluppare la propria abilità nel risolvere problemi. Invece accade molto spesso che anche gli studenti migliori, una volta arrivati alla soluzione, non si pongano affatto il problema di verificare se il risultato conseguito sia esatto e compatibile con i dati forniti in partenza, ma passano immediatamente al problema successivo.

Nelle interviste emerge che questa fase di controllo sui procedimenti adottati o sul risultato conseguito non viene quasi ma effettuata spontaneamente ed è quindi generalmente poco presente tra i nostri studenti in quanto essi, una volta ottenuto il risultato, non si pongono quasi mai la domanda se esso sia verosimile e/o in accordo con le richieste del problema. Questo tipo di atteggiamento viene definito da D'Amore "clausola di delega formale", ampiamente definita e descritta nel terzo capitolo.

Nelle interviste in particolare gli studenti si accorgono di aver sbagliato rileggendo o commentando il ragionamento svolto oppure confrontandosi con i compagni, cioè ascoltando il ragionamento utilizzato dagli altri si accorgono di aver sbagliato.

Un esempio che rientra in questa fase è quello descritto nell'intervista inserita nella fase precedente, quando Micol e Laura commentando le loro risposte alla terza domanda si accorgono di aver fatto un errore di calcolo e quindi di aver sbaglato la risposta. Molto probabilmente l'errore è stato commesso perchè entrambe non hanno controllato il risultato ottenuto, proseguendo quindi nella risoluzione delle domande successive.

Un altro esempio è quello di Guglielmo, inserito sempre nella terza fase per rispondere allo stesso quesito di Micol e Laura. Lo studente dopo aver ascoltato le varie risposte dei suoi compagni, inizia dicendo di aver sbagliato e cerca di giustificare l'errore affermando di aver effettuato in un primo momento un ragionamento corretto, ma poi per scarsa fiducia in se stesso ha cambiato strategia sbagliando.

Un altro motivo per cui i nostri studenti saltano la fase del controllo finale deriva dal fatto che a volte arrivano al risultato senza saper associare un ragionamento matematico o senza essere in grado di giustificare il motivo per cui hanno dato una risposta piuttosto che un'altra o saper esplicitare i vari passaggi che li hanno portati a quel risultato. Ovviamente non sempre la risposta a cui gli studenti giungono è corretta, anzi, la maggior parte delle volte è sbagliata, ma è molto difficile riuscire a farli ragionare dal momento che non hanno idea di quale sia il procedimento matematico che vi sta dietro.

Questo tipo di comportamento si riscontra in alcune prove in particolare ad esempio si intuisce nell'atteggiamento di Olindo in diversi casi: nel primo quesito infatti non risponde e non riesce a giustificare la sua astensione com' è possibile vedere nell'intervista inserita nella prima fase, mentre per rispondere alla seconda domanda, la cui intervista è stata inserita nella fase precedente, fornisce in modo dubbioso la risposta ma non sa giustificarla. Invece nell'intervista fatta a Giada, quando deve commentare la risposta al terzo quesito, il cui commento è stato inserito nella terza fase, la studentessa riesce a fornire la giusta risposta con un ragionamento confuso e contorto classico esempio quindi di chi non ha ben chiaro quello che deve fare.

Un'ultima osservazione che emerge dalle interviste riguarda la poca fidu-

cia che gli studenti hanno delle loro conoscenze, che li porta ad essere molto dubbiosi e a commettere errori anche nelle semplici domande. Un esempio a riguardo è quello che si nota nell'intervista fatta ad Olindo quando commenta la risposta del punto a della quarta domanda che chiedeva di dire se fosse vero o falso se un numero è pari allora è multiplo di 4. Olindo aveva risposto bene ma in un secondo momento ha cambiato la risposta e per giustificare il cambiamento risponde:
Intervistatore: (*si rivolge ad Olindo*) Perchè hai cambiato la risposta?
Olindo: Ehhh......c'ho ripensato.

Nonostante all'inizio lo studente aveva seguito un giusto ragionamento, poi non ha avuto fiducia in se stesso nelle sue conoscenze che evidentemente non erano molto solide e ha cambiato strategia risolutiva, e alla fine ha sbagliato.

5.3 Conclusioni

Questo esperimento ha permesso, attraverso la realizzazione di diverse modalità di analisi (analisi dei quesiti, analisi delle strategie risolutive e analisi delle interviste), di osservare gli studenti nella scelta delle strategie risolutive quando devono rispondere ad alcuni quesiti delle prove INVALSI, per giungere a formulare una serie di ipotesi interpretative dei risultati ottenuti dalle interviste.

Le ipotesi interpretative che questo lavoro ha consentito di formulare insieme alle motivazioni a loro sostegno, basate sulle difficoltà che i nostri studenti incontrano nel risolvere prove di matematica sono diverse. Tra le ipotesi va ricordata una "scarsa abitudine al ragionamento" che emerge sia esaminando le risposte sia attraverso le interviste condotte, infatti si ha la percezione di trovarsi di fronte a studenti che hanno appreso determinate regole, ma in modo mnemonico e meccanico. Da ciò consegue una conoscenza poco consapevole, superficiale degli argomenti trattati nelle prove derivante probabilmente dal modo in cui tali argomenti sono stati affrontati a scuola.

Gli studenti considerano, infatti, la matematica come qualcosa che non appartiene loro, una materia lontana, da cui hanno appreso solo rigide regole che pedissequamente applicano senza averle però interiorizzate e comprese nella loro interezza.

Un'altra ipotesi alla quale si è arrivati è la "scarsa comprensione del testo delle prove" o la sua errata interpretazione da parte degli studenti probabilmente a causa di una lettura poco attenta e superficiale della domanda oppure di una lettura non completa. Durante le interviste, più di una volta, infatti, è stato necessario far rileggere la domanda con maggiore attenzione allo studente prima di commentare la fase di risoluzione del problema, in modo tale che egli stesso riusciva a rendersi conto di un'eventuale errore commesso.

Da ricordare inoltre è la "difficoltà degli studenti a individuare e riconoscere la matematica che hanno appreso a scuola all'interno di prove di matematica che riguardano la vita reale", e conseguentemente a saperla applicare in contesti diversi. In altre parole, gli studenti italiani hanno difficoltà nell'identificare gli aspetti matematici pertinenti a un problema collocato nella realtà, nel saper rappresentare il problema in modo diverso, nel senso di saperlo organizzare secondo concetti matematici e saper effettuare supposizioni adeguate. Ciò è probabilmente dovuto al fatto che gli studenti italiani sono poco abituati a prove di questo tipo e più a esercizi di tipo scolastico, con poca o nessuna aderenza alla realtà, quasi mai contestualizzati in situazioni della vita quotidiana.

Infine ciò che si riesce a percepire è la "scarsa abitudine dei nostri studenti a riflettere sul risultato ottenuto" con la conseguenza di non accorgersi di aver sbagliato. Ciò che soprattutto si rileva è la mancanza di riflessione sulla compatibilità o meno di un determinato risultato rispetto ai dati a disposizione, una non abitudine all'auto-correzione, all'autocontrollo, all'analisi della verosimiglianza e plausibilità delle risposte.

Le ipotesi interpretative presentate permettono, in conclusione, di mettere in luce una situazione alquanto critica rispetto all'apprendimento della matematica da parte degli studenti italiani. La matematica che viene insegnata a scuola viene percepita dagli studenti come un ricettario di pronta applicazione, di cui riescono poco a cogliere il senso,l'utilità, la funzionalità e forse anche la sua bellezza e per questo motivo spesso ne hanno un'immagine negativa.

Gli studenti possono essere considerati in parte colpevoli e in parte vittime di tale situazione. Colpevoli perché spesso, nonostante le molteplici sollecitazioni da parte degli insegnanti, si rifiutano di ragionare, di riflettere per la fretta di voler arrivare subito al risultato che è quello che per loro conta. Vittime in quanto spesso vengono loro proposti programmi senza nessuno sforzo per attirarne l'interesse e stimolarne la curiosità, programmi con sequenze interminabili di Tecnicismi che danno della matematica un'immagine arida e noiosa.

Bibliografia

[1] Claparède E. (1972), La genesi dell'ipotesi :uno studio sperimentale dei processi di pensiero, Giunti-Barbera, Firenze.

[2] D'Amore B. (1993), "Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving", Franco Angeli, Milano.

[3] D'Amore B. (1999), Elementi di didattica delle matematica, Pitagora Editrice, Bologna.

[4] D'Amore B., Martini B. (1997), "Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard", La matematica e la sua didattica, n.2, pagg.151 – 175.

[5] Dewey J. (1933), How we think, Boston, D.C. Heath & Co. (tr.it. Come pensiamo 1961, La Nuova Italia, Firenze).

[6] Ferrari P.L. (2004), Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica. Pitagora editrice, Bologna.

[7] Lumbelli L., (1994), "Fenomenologia dello scrivere chiaro", Roma, Editori Riuniti.

[8] Lumbelli L.(1997), Introduzione all'edizione italiana di C. Rogers, "Terapia centrata sul cliente", Firenze, La Nuova Italia, pp. VII-XXXIII.

[9] Lucangeli D., Passolunghi M.C. (1995) - Psicologia dell'apprendimento matematico – UTET Libreria- Torino.

[10] OECD (2004), Learning for tomorrow's World, OECD, Parigi.

[11] OECD (2003), The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills, OECD, Parigi (tr. it. PISA 2003. Valutazione dei quindicenni, a cura dell'INValSI, Armando Editore, Roma, 2004)

[12] Pellerey M. (2006), Sulla ricerca didattica degli ultimi cinquanta anni a partire da alcuni apporti metodologici di Luigi Calonghi, in Ricerca, Educazione, didattica – L'opera di Luigi Calonghi: sviluppi attuali, a cura di Alessandra La Marca, Palumbo editore.

[13] Polya G. (1945), How to solve it, Princeton, University Press (tr. it. Come risolvere i problemi di matematica (1976), Feltrinelli, Milano).

[14] Schoenfeld A.H. (1985) – Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

[15] Zan R. (2000), "Misconceptions" e difficoltà in matematica, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 23°, n.1, pagg. 48-68.

[16] Zan R. (2007) "Difficoltà in matematica", Springer, Milano.

[17] Pozio S. "La risoluzione di prove di competenza matematica", (Analisi dei risultati italiani nell'indagine OCSE-PISA 2003), Tesi di dottorato a.a. 2006/2007, Nuova Cultura editrice, Roma.

Sitografia (Aggiornata al 30/09/2015)

[1] Contarini S. "Un approccio al Problem-Solving", Tesi di specializzazione di Matematica all'insegnamento secondario, a.a. 2005/2006 - in http://www.matematicamente.it/tesi-didattica/Contarini-Problem-solving.pdf

[2] Martini A. "La cultura della valutazione: luci e ombre nelle rivelazioni internazionali", Bolzano 24 settembre 2014 - in http://www.provincia.bz.it/servizio-valutazione-italiano/download/martini-Bolzano-24-sett2014.pdf

[3] INVALSI - TIMSS 2007, "TIMSS 2007 - Trends in International Mathematics and Science Study" - in http://www.invalsi.it/ric-int/timss2007/index.php

[4] OECD (2015), "Fascicolo presentazione PISA 2015", febbraio 2014 - in http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2015/doc/Fascicolo-presentazione-PISA2015.pdf

[5] OCSE PISA 2012, "Rapporto NAZIONALE OCSE PISA 2012" - in http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/rappnaz/Rapporto-NAZIONALE-OCSE-PISA2012.pdf

[6] Lerede C. "Che cosa sono, ma soprattutto a cosa servono le prove INVALSI" - in http://www.http://www.edscuola.eu/wordpress/?p=59907

[7] Scuola media statale “Roncalli-CascinoI”, “Prove INVALSI - Istruzioni per l’uso”, 2010/2014 Piazza Armerina (EN) - in http://www.roncallicascino.it/component/content/article/48-prima-pagina/142-prove-invalsi-istruzioni-per-luso.html

[8] “Prove INVALSI: cosa sono e perchè gli insegnanti le boicottano” - in http://www.polisblog.it/post/10273/prove-invalsi-che-cosa-sono-e-perche-gli-insegnanti-le-boicottano

[9] Quadro di riferimento di matematica per la costruzione delle prove di valutazione INVALSI (primo ciclo) - in http://www.invalsi.it/snv0910/documenti/Qdr-Matematica.pdf

[10] Quadro di riferimento secondo ciclo di istruzione prova di matematica - in http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/QDR/QdR-Mat-II-ciclo.pdf