

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

**Modelli dinamici per fenomeni
collettivi in fisica dei sistemi
complessi**

Relatore:
Prof. Armando Bazzani

Presentata da:
Alessia Ambu

Correlatore:
Prof. Graziano Servizi

Sessione II
Anno Accademico 2014/2015

*A Chiara e ai miei genitori
che continuano a sostenermi*

Sommario

In questo lavoro si parla di un particolare comportamento emergente nei sistemi complessi: il flocking. Dopo aver dato una panoramica generale di come sia stato affrontato finora lo studio della formazione degli stormi, vengono portati come esempio un modello matematico e uno studio empirico particolare, il quale fonda le basi del flocking su un'interazione topologica. Il modello matematico, basato su un'interazione metrica, viene dapprima presentato, cercando di darne una parziale spiegazione tramite le proprietà delle matrici laplaciane, per poi essere testato attraverso delle simulazioni numeriche. Lo studio empirico, invece, viene presentato nei dettagli fornendo risultati e ipotesi atte a spiegarli. Infine prendendo spunto da questi due lavori, nell'ultima parte vengono posti a confronto due modelli, uno metrico e uno topologico, tramite simulazioni al computer. L'esito di queste simulazioni conferma le ipotesi avanzate per spiegare i risultati empirici.

Indice

Introduzione	1
1 Il problema del flocking in fisica dei sistemi complessi	3
1.1 Cos'è il flocking?	3
1.2 Studi teorici	4
1.3 Studi empirici	5
1.4 Uno studio empirico particolare: Parisi	6
1.4.1 L'anisotropia	6
1.4.2 Correlazione fra la densità e i due diversi tipi di distanze	7
1.4.3 Interpretazioni possibili	9
2 Il modello di Cucker-Smale	10
2.1 Il modello	10
2.2 Convergenza in tempo continuo	13
2.2.1 Esistenza e stabilità della soluzione stazionaria	13
2.2.2 Teorema	15
2.2.3 Significato del teorema	16
3 Il modello ad interazione metrica e topologica	21
3.1 Necessità di due tipi di interazione	21
3.2 Simulazioni in 2D: 3 vicini	23
3.2.1 Il modello	23
3.2.2 Risultati	24
3.3 Simulazioni in 3D: 7 vicini	25
3.3.1 Il modello	25
3.3.2 Risultati	26
3.4 Test di risposta anti-predatoria	27
Conclusioni	29
Bibliografia	32

Introduzione

In fisica dei sistemi complessi uno dei comportamenti emergenti più studiati è quello del flocking. È infatti frequente in natura osservare gruppi di animali che si muovono in maniera coordinata, per esempio uccelli, pesci, api. Ogni individuo, a partire da una percezione locale della dinamica di gruppo, agisce autonomamente seguendo poche regole, dando come risultato un moto complessivamente ordinato dell'insieme. È quindi un problema di coordinamento, e si vuole capire quali siano le regole fondamentali che ogni agente deve seguire perché ciò avvenga.

Nel primo capitolo di questa tesi, si cerca di dare una panoramica generale del problema del flocking in fisica dei sistemi complessi: esattamente che cosa sia, perché è oggetto di interesse per i fisici, quali siano stati i diversi approcci nell'affrontare il problema, focalizzando infine l'attenzione su uno degli ultimi studi che ha portato a scoperte inattese e interessanti sulla *natura* dell'interazione.

Nel secondo capitolo si presenta un esempio di modello matematico della letteratura sul flocking. In tale modello, l'interazione fra gli uccelli viene parametrizzata tramite una costante che ne quantifica il tasso di decadimento al variare della distanza fra gli stessi, dimostrando che per opportuni valori del parametro la convergenza è sempre garantita oppure necessita di alcune restrizioni sulle condizioni iniziali.

Infine nell'ultimo capitolo, proprio perché esistono molti modelli numerici che dimostrano che poche regole locali sono sufficienti a far emergere il coordinamento di tanti individui, si analizza invece un modello fondato su una nuova ulteriore assunzione che viene da risultati empirici. L'analisi è fatta facendo un confronto fra un modello topologico e uno metrico, mostrando con delle simulazioni numeriche l'efficacia dei due diversi tipi di interazione davanti a perturbazioni esterne dello stormo. Vengono mostrate per ultime delle ulteriori simulazioni, a supporto di una delle ipotesi fatte per spiegare i risultati empirici presentati nel primo capitolo.

Capitolo 1

Il problema del flocking in fisica dei sistemi complessi

1.1 Cos'è il flocking?

La definizione di sistema complesso, ad oggi, non è semplice da dare. Molto probabilmente chiunque usi questo termine, lo fa con un'accezione differente. Ma certamente un sistema il cui comportamento globale non è facilmente prevedibile a partire dal comportamento dei singoli componenti, rientra in questa categoria. In questo senso sono tanti i sistemi complessi possibili, e in questo stesso senso sono oggetto di studio della fisica. Tipicamente, infatti, il fisico si pone come obiettivo quello di trovare le leggi fondamentali che possano descrivere il comportamento di un sistema.

L'emergenza di un comportamento collettivo è spesso una delle caratteristiche che si attribuisce a un sistema complesso. Un esempio banale potrebbe essere il funzionamento stesso del cervello, che nasce dall'interazione, ancora non compresa nei dettagli, dei singoli neuroni. Ma anche in biologia si possono trovare molte specie di esseri viventi, i cui membri interagendo possono dar luogo a particolari dinamiche di gruppo. I fenomeni collettivi quindi sono di vario tipo a seconda della natura dei componenti del sistema che li esibisce. E tutto ciò non è facile da studiare dai rispettivi esperti del settore.

Il *flocking* è un tipico comportamento collettivo animale. Ad essere precisi il termine si riferisce all'aggregarsi degli uccelli in stormi, ma solitamente con esso si indica il moto collettivo che emerge anche in altre specie di animali, per esempio nei pesci, negli sciami di api o in mandrie di mammiferi. La particolarità del fenomeno consiste nel fatto che si manifesta in assenza di un coordinamento centrale. Semplicemente, ogni singolo componente segue autonomamente alcune regole, dando il risultato macroscopico di qualcosa di

coordinato.

Questo particolare fenomeno è stato studiato da molti fisici, in quanto per primi hanno avuto a che fare con degli aggregati di cui, con un approccio statistico, è stato possibile spiegare il comportamento. Le transizioni di fase, ad esempio, sono il comportamento emergente dall'interazione di aggregati molecolari o atomici. Si pensi alle transizioni fra le fasi solide, liquide e gassose, alla transizione da ferromagnetismo a paramagnetismo alla temperatura di Curie, alla transizione da semplici metalli a superconduttori. In generale, quindi, si pensa di poter adattare l'approccio della meccanica statistica anche a fenomeni biologici, ovvero cercare di dedurre le osservazioni di fenomeni collettivi macroscopici a partire dai suoi costituenti elementari.

1.2 Studi teorici

Lo studio da un punto di vista teorico del *flocking* si divide essenzialmente in due filoni: quello delle simulazioni al calcolatore e quello dei modelli matematici.

Il primo tentativo di simulare uno stormo è avvenuto nel 1987 ad opera di Craig Reynolds col suo programma chiamato Boids [8]. Si trattava di un sistema di particelle autonome le une dalle altre, che obbedivano a tre semplici regole, quelle che oggi in letteratura sono note come *coesione*, *separazione* e *allineamento*. Ognuna delle particelle cercava di restare accanto alle sue vicine, evitando le collisioni e allineando la propria velocità con esse. Il risultato era un aggregato coordinato di particelle. L'ampia interpretabilità di queste regole, ne rende però difficile un'analisi oggettiva.

Uno dei primi fisici ad essersi occupato del tema è Vicsek. Il suo modello in 2D [12], si ispira alla tendenza degli spin ad orientarsi in un ferromagnete. Dato un insieme di uccelli con uguali velocità in modulo ma differenti orientazioni iniziali, ognuno guarda ai vicini entro un certo raggio fissato, uguale per tutti, e modifica la propria orientazione angolare facendo una media fra la loro e la propria. Nelle simulazioni si osserva che in certe condizioni di densità iniziale e di rumore, si ottiene un moto complessivamente ordinato delle particelle. Questo comportamento fu poi spiegato per via analitica da Jadbabaie, Lin and Morse [5]. Sostanzialmente, perciò, la maggior parte degli studi ha trattato il problema utilizzando dei modelli a molti agenti, dove ciascun elemento è mosso da semplici regole di interazione locale, con interconnessioni che possono dipendere o meno dal tempo [9][10], spesso facendo anche uso di concetti della teoria dei grafi come le matrici Laplaciane [2][6].

1.3 Studi empirici

Diverso è invece l'approccio empirico al problema. Piuttosto che utilizzare modelli che presentano parametri di ignoto significato fisico, si cerca di studiare l'organizzazione degli individui all'interno di gruppi reali, nella speranza di poter estrapolare qualche informazione sulla natura dell'interazione che ha originato la struttura. Dal momento che il comportamento collettivo deve emergere dall'interazione di molti soggetti, è necessario trovare il modo di raccogliere dati su grandi gruppi. Questo è stato a lungo un problema perché rilevare le posizioni nello spazio di centinaia o migliaia di individui che potrebbero anche nascondersi a vicenda in fase di presa dati, non è semplice. A lungo, infatti, gli studi empirici sono stati condotti su poche decine di individui, e con tecniche piuttosto inadeguate, a volte semplici foto utilizzate per ottenere una proiezione bidimensionale del gruppo, come per i banchi di pesci. Oggi, tramite tecniche di fotografia stereometrica in cui vengono scattate foto da diverse angolazioni di una stessa porzione di spazio, invece, si riescono a raccogliere grandi quantità di dati in 3D, anche su gruppi di centinaia o qualche migliaio di individui. I dati vengono poi usati per calcolare alcuni parametri descrittivi, quali la densità, la distanza e l'angolo medio a cui si trova il primo vicino, e così via. Gli stessi parametri spesso risultano diversi da specie a specie e quindi vanno spiegati di volta in volta, per esempio in funzione della dimensione dei corpi degli individui stessi o del tipo di risposta antipredatoria, come nel tentativo di spiegare le differenti figure complesse che si creano quando i pesci nuotano insieme [7], e così via.

1.4 Uno studio empirico particolare: Parisi

Uno studio particolarmente interessante, per i risultati ottenuti, è quello di M. Ballerini e N. Cabibbo, con la collaborazione di G. Parisi, che hanno analizzato dieci diversi episodi di flocking di ben 2,600 storni sui cieli di Roma [1]. Dall'analisi della struttura organizzativa degli stormi, è emersa l'evidenza che per garantire la coesione del gruppo basta che ogni individuo guardi a un numero limitato di altri uccelli, indipendentemente dalla distanza a cui si trovano.

L'importanza di questo risultato, in letteratura, sta nel fatto che va a contrastare l'assunzione di quasi tutti i modelli matematici esistenti, in cui la distanza fisica fra due uccelli giocava un ruolo fondamentale nel far decadere l'intensità dell'interazione, gradualmente o improvvisamente, a zero.

1.4.1 L'anisotropia

Ricostruendo al computer le posizioni dei singoli individui all'interno dello stormo, si è trovato che la distribuzione media dei primi vicini segnalava una forte anisotropia nella struttura. Preso cioè ogni uccello, come quello di riferimento e guardando all'orientazione angolare dei suoi primi vicini rispetto alla direzione del moto dello stormo, è risultata un'assenza di uccelli proprio lungo questa direzione. Guardando invece alla distribuzione dei vicini più lontani, per tutti questa risultava isotropica, come accadrebbe per un insieme di punti non interagenti. L'anisotropia è stata quindi utilizzata come fattore determinante i limiti dell'interazione.

Per poterla quantificare hanno definito una funzione $\gamma(n) = (W^{(n)} \cdot \vec{V})^2$, dove $W^{(n)}$ è un vettore unitario che punta nella direzione di minor addensamento dell' n -esimo primo vicino, al variare degli uccelli di riferimento, e \vec{V} è un altro vettore unitario che punta nella direzione del moto dello stormo. È risultato che γ decade gradualmente con n , per poi mantenersi circa costante a $1/3$, valore per cui si ha una distribuzione dei primi vicini isotropica. Il valore di n a partire dal quale γ diventa $1/3$, segna allora la fine dell'anisotropia e l'inizio dell'isotropia, ed è perciò considerato il range di interazione. Ciò significa che, se si indica questo valore con n_c , gli uccelli più lontani dell' n_c -esimo vicino non interagiscono con l'uccello di riferimento. La novità di questo primo risultato, rispetto alla maggior parte dei lavori precedenti, sta nel fatto che la quantificazione del decadimento dell'interazione è di natura empirica, e non lasciata all'arbitrarietà tipicamente utilizzata nei modelli

teorici. In questi infatti, si usa far terminare l'interazione a una certa distanza, o farla decadere lentamente con la distanza, ma i valori di questi limiti non sono scelti sulla base di istanze reali di stormi.

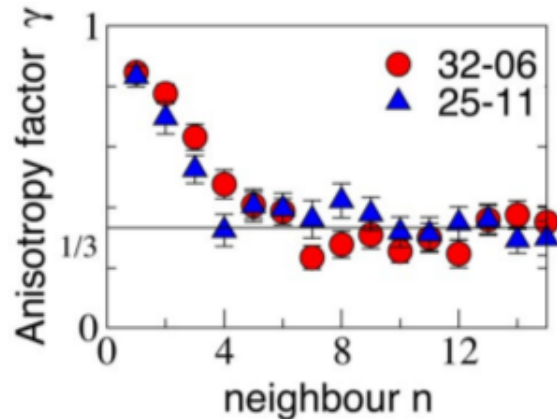


Figura 1.1: Il fattore di anisotropia γ viene plottato in funzione dell' n -esimo primo vicino per due differenti stormi. Per entrambi si vede che la struttura diventa approssimativamente isotropica tra il sesto e il settimo vicino. Viene definito range topologico n_c , il valore di n per cui un fit lineare di γ interseca il valore $1/3$. Grafico preso da [1].

1.4.2 Correlazione fra la densità e i due diversi tipi di distanze

Definito un range di interazione n_c in unità di uccelli, cioè una distanza topologica, si denota con r_c la distanza in metri dell' n_c -esimo vicino, dall'uccello di riferimento. Queste due distanze non sono intercambiabili, perchè nel primo caso il numero di uccelli interagenti è fissato, nell'altro varia con la densità (a densità maggiori r_c sarà più piccolo che a densità minori). Per comprendere, quindi, quale di queste due distanze pesi di più nell'interazione, hanno tentato di capire innanzitutto quale fosse la relazione fra r_c e n_c con la densità, che in generale è diversa nei 10 stormi presi in esame.

Il numero di uccelli n entro una sfera di raggio r deve essere proporzionale a r^3 , e questo deve valere anche per l' n_c -esimo vicino entro una distanza r_c :

$$r_c \sim r_1 n_c^{1/3}$$

dove r_1 è una quantità inversamente proporzionale alla densità dello stormo particolare. Nei due diversi casi in cui viene fissato n_c oppure r_c , dovrebbe allora aversi rispettivamente o che $r_c \sim r_1$, in quanto n_c viene considerato costante da stormo a stormo, oppure che $n_c^{-1/3} \sim r_1$, se si suppone che il primo vicino si trovi alla stessa distanza da un uccello di riferimento, anche in stormi a differenti densità. Dai loro risultati appare che c'è un' evidente

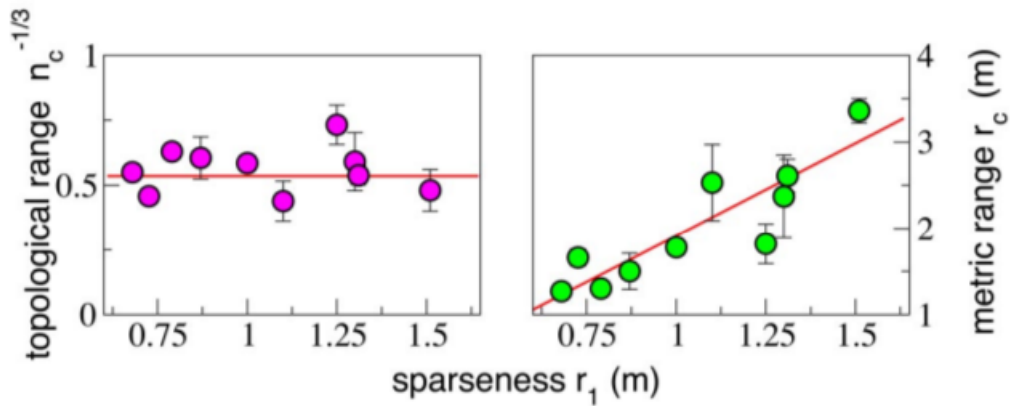


Figura 1.2: La potenza alla $-1/3$ del range topologico n_c e il range metrico r_c , ovvero la distanza in metri dell' n_c -esimo vicino, sono plottati in funzione della radezza r_1 dei 10 stormi presi in esame. r_1 è una quantità inversamente proporzionale alla densità, quindi più uno stormo è denso e meno è rado, ed è misurata per ciascuno stormo tramite un fit lineare di r_n (distanza dell' n -esimo vicino) in funzione di $n^{-1/3}$. Dai grafici si vede che meno è rado lo stormo (più è denso), più si trova vicino l' n_c -esimo vicino, mentre il range topologico resta circa lo stesso per differenti densità. Grafico preso da [1].

correlazione lineare fra r_c ed r_1 , come mostrato in Figura 1.2, il che fa supporre un'interazione di tipo topologico, e poiché n_c risulta effettivamente circa costante da stormo a stormo, essi sono giunti al risultato che gli stormi analizzati si fossero coordinati guardando soltanto i primi 6 - 7 vicini.

1.4.3 Interpretazioni possibili

Le possibili spiegazioni date nel loro studio del perché ciascun uccello debba interagire con 6 o 7 uccelli sono state di due tipi.

Una di queste sfrutta alcuni risultati ottenuti in laboratorio su dei piccioni addestrati [3]. Essi sembrano essere in grado di distinguere insiemi di oggetti di diversa numerabilità, purché questi insiemi contengano meno di 7 oggetti. Ciò va imputato probabilmente a un limite nell'elaborazione degli input al livello della corteccia visiva. Dato il risultato del loro studio che pone gli uccelli interagenti a 6 o 7, potrebbe allora spiegarsi in questo modo: 7 è il numero massimo di uccelli che ognuno riesce a distinguere e questa capacità visiva sarebbe alla base del comportamento collettivo.

La seconda possibile spiegazione è che 7 sia il numero che ottimizzi la risposta anti-predatoria dello stormo. Effettivamente, bisogna prendere in considerazione che, trattandosi di un sistema biologico, la necessità di sviluppare strategie che garantiscano la sopravvivenza della specie deve essere in qualche modo determinante. Uno fattore importante in tale senso potrebbe essere proprio l'attacco di un predatore, e l'interazione potrebbe essersi evoluta in maniera tale da rendere lo stormo più stabile davanti a tali stimoli esterni. L'ipotesi è che 7 sia il numero che ottimizzi questa situazione. In 2D esiste un modello di comportamento collettivo che mette questo valore ottimale fra i 3 e i 5 individui interagenti [4], che guarda caso è lo stesso numero ottenuto in laboratorio in esperimenti in 2D come limite percettivo visivo dei pesci [11].

La possibile spiegazione del perché invece la distanza topologica debba contare più di quella metrica nell'interazione, si lega anch'essa alla risposta anti-predatoria. Ad un livello puramente intuitivo, un'interazione topologica dovrebbe risultare più forte di una metrica in caso di variazioni di densità dello stormo. Infatti se il numero di uccelli interagenti resta fissato, essi continuano a interagire anche dopo essersi dispersi. Se invece il numero di uccelli interagenti dipende dalla distanza fisica, allontanandosi oltre il range visivo non si ha più interazione e si diventa facili prede.

Per supportare quest'ipotesi hanno posto a confronto un'interazione di tipo metrico con una di tipo topologico con un semplice modello in 2D di uno stormo sotto attacco. I risultati sono a favore di questa ipotesi ma verranno discussi più avanti.

Capitolo 2

Il modello di Cucker-Smale

Felipe Cucker e Steve Smale hanno costruito un modello matematico per descrivere il raggiungimento di un consenso in situazioni in cui non vi è un coordinamento centrale. Le applicazioni sono le più diverse, dall'emergenza di comuni linguaggi nelle società primitive ai comportamenti collettivi animali. Come esempio hanno scelto di descrivere una popolazione di uccelli, o di pesci, con l'obiettivo di dare una giustificazione teorica di come degli oggetti in \mathbb{R}^3 , in particolari condizioni iniziali possano convergere ad una situazione in cui si trovino ad avere una velocità comune, o di come in talune altre situazioni, invece, il gruppo possa disperdersi.

Per dare la giusta flessibilità al modello, in esso compaiono dei parametri, alcuni dei quali per certi valori critici garantiscono la convergenza.

2.1 Il modello

Il modello prende spunto da quello di Vicsek, per essere poi modificato. Essenzialmente si postula che ciascun uccello aggiusti istante per istante la propria velocità, sommando ad essa una media delle differenze della sua velocità con quella degli altri uccelli. Ciascuna di queste differenze è pesata per un termine a_{ij} che quantifica l'influenza data dall'uccello corrispondente. Quindi, presa una popolazione di k uccelli, ad ogni istante $t \in \mathbb{N}$, per l'uccello i -esimo vale

$$v_i(t+1) = v_i(t) + \sum_{j=1}^k a_{ij} (v_j(t) - v_i(t)). \quad (2.1)$$

A differenza del modello originale, o di tanti altri in cui veniva considerato un numero limitato di individui scelti in base a una distanza fissata a priori, qui si assume che *tutti* gli uccelli si influenzino l'un l'altro in base a

una distanza relativa, che potrebbe essere una distanza fisica, o magari una distanza visuale. In ogni caso si assume che ciascun termine di influenza a_{ij} sia una funzione *non crescente* della distanza:

$$a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2) = \eta(y)$$

dove $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e

$$\eta(y) = \frac{K}{(\sigma^2 + y)^\beta} \quad (2.2)$$

per qualche valore delle costanti positive K e σ , e per $\beta \geq 0$. L'idea alla base del modello è che al crescere della distanza fra due individui, l'influenza che ciascuno esercita sull'altro diventi via via trascurabile. Il tasso di decadimento di questa influenza è determinato dal parametro β , che fa sì che vada a zero con la distanza in maniera continua e non repentinamente come nel modello di Vicsek. Se β è sufficientemente grande (si vedrà che dev'essere almeno $1/2$), il decadimento sarà abbastanza rapido e la convergenza sarà garantita solo per certe condizioni iniziali v_0 e x_0 .

Per esprimere il modello in una forma più concisa vengono considerate una matrice di influenza A_x , $k \times k$, di elementi a_{ij} , una matrice diagonale D_x , $k \times k$, di elementi diagonali $d_i = \sum_{j \leq k} a_{ij}$, e una matrice data dalla differenza delle due: $L_x = D_x - A_x$. Il pedice x sta a ricordare che tutte queste matrici dipendono dalla posizione degli uccelli, che in generale sarà diversa al variare del tempo.

Quindi

$$\begin{aligned} v_i(t+1) - v_i(t) &= \sum_{j=1}^k a_{ij}(v_j(t) - v_i(t)) \\ &= - \sum_{j=1}^k a_{ij}(v_i(t) - v_j(t)) \\ &= - \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} \right) v_i(t) + \sum_{j=1}^k a_{ij} v_j(t) \\ &= -[D_x v(t)]_i + [A_x v(t)]_i \\ &= -[L_x v(t)]_i \end{aligned}$$

dove $A_x, D_x, L_x : (\mathbb{R}^3)^k \rightarrow (\mathbb{R}^3)^k$. Cioè, ricordando che i $\vec{v}_{j \leq k} \in \mathbb{R}^3$ e prendendo ad esempio A_x , applicata al vettore $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$ indicato

semplicemente con v nell'equazione precedente, lo mappa in $(a_{i1}\vec{v}_1 + \dots + a_{ik}\vec{v}_k)_{i \leq k}$.

All'equazione per l'evoluzione delle velocità si può aggiungere in maniera abbastanza naturale quella per l'evoluzione delle posizioni. Perciò il modello a tempo discreto è descritto dal seguente sistema di equazioni

$$x(t+1) = x(t) + \Delta t v(t) \quad (2.3)$$

$$v(t+1) = (Id - \Delta t L_x)v(t). \quad (2.4)$$

Volendo invece considerare il modello a tempo continuo, dividendo il precedente sistema per Δt e facendo il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = v \quad (2.5)$$

$$\dot{v} = -L_x v. \quad (2.6)$$

Il risultato del loro lavoro, sia per il modello discreto che per quello continuo, si riassume in un teorema che fornisce le condizioni iniziali per cui è garantita la convergenza ad una velocità comune e la limitatezza delle distanze fra gli uccelli.

Teorema Siano $(x(t), v(t))$ le soluzioni del sistema di equazioni 2.5 e 2.6, con condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$. Allora se $\beta < 1/2$, per $t \rightarrow \infty$ le velocità v_i tendono a un comune vettore $\hat{v} \in \mathbb{R}^3$ e i vettori $x_i - x_j$ tendono a un vettore limite \hat{x}_{ij} , $\forall i, j \leq k$. Lo stesso vale per $\beta \geq 1/2$ ma con una restrizione sulle condizioni iniziali x_0 e v_0 .

Per il caso discreto deve valere un'ulteriore assunzione: $K < \frac{\sigma^{2\beta}}{(k-1)\sqrt{k}}$.

2.2 Convergenza in tempo continuo

Il modello a tempo discreto viene suggerito per modellizzare situazioni basate sullo scambio di segnali. Ma volendo descrivere un insieme di oggetti che si muovono nello spazio euclideo \mathbb{E}^3 , è più utile considerare il modello continuo.

2.2.1 Esistenza e stabilità della soluzione stazionaria

Nel modello compare la matrice $L = D - A$, che così come definita è la Laplaciana di A . Dato un qualunque grafo G , ad esso resta associata una matrice delle adiacenze A , che per un grafo semplice è costituita da degli 0 e 1, dove un 1 indica la presenza di una connessione fra due vertici del grafo, e questo è il caso del modello di Vicsek. Ma quando al posto degli 1 compaiono degli altri numeri, questi vanno interpretati come i pesi da attribuire ai collegamenti, e questo è il caso del modello di Smale, un grafo completamente pesato. Per un grafo non orientato, come in questo caso, A risulta simmetrica, e così L . La matrice Laplaciana associata a un grafo permette di determinare molte proprietà del grafo stesso.

Nel caso in questione la laplaciana compare nell'equazione

$$\dot{v} = -Lv \tag{2.7}$$

che, *nel caso in cui L sia costante*, tramite le proprietà delle matrici laplaciane si può dimostrare avere una soluzione stazionaria e stabile, che è ciò che afferma il modello quando parla di convergenza ad una velocità comune.

Una matrice laplaciana è caratterizzata dalla proprietà che

$$\sum_i l_{ij} = 0,$$

e che

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j \neq i} a_{ij}, & i = j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

In questo caso, se vogliamo interpretare la matrice delle adiacenze A come una matrice di probabilità di transizione, che significa che $0 < a_{ij} < 1$, devono essere $-1 < l_{ij} < 0$ per $i \neq j$. Notare che anche $\sum_j l_{ij} = 0$.

Un'altra proprietà è che se $\lambda_{i \leq k}$ sono gli autovalori di L , allora

$$\lambda_i \geq 0.$$

Ciò si può verificare facendo alcune considerazioni sulla matrice $\Pi = (Id - \Delta t L)$ (che compare nelle equazioni a tempo discreto), mettendoci nella condizione $\Delta t \ll 1$. Π è una matrice stocastica e ciò si verifica facilmente. Infatti perché sia stocastica devono valere

1.

$$0 < \pi_{ij} < 1$$

che per $i = j$ richiede che $0 < \sum_{j \neq i} a_{ij} < 1$, mentre per $i \neq j$ che $l_{ij} < 0$, le quali, come già detto, sono verificate se A è una matrice di probabilità di transizione.

2.

$$\sum_i \pi_{ij} = 1$$

che significa che $\forall j$ deve valere che $\sum_i l_{ij} = 0$, e ciò è vero per ogni matrice laplaciana.

Di conseguenza se Π è stocastica gode della proprietà che i suoi autovalori sono tutti strettamente minori di 1, eccetto quello di valore unitario. Allora, poiché i suoi autovalori sono legati a quelli di L dalla relazione

$$\lambda_{\Pi} = 1 - \lambda_L,$$

e le due matrici hanno gli stessi autovettori, segue che gli autovalori di L sono tutti positivi eccetto uno che è 0, a cui corrisponde lo stato stazionario \hat{v} per l'equazione 2.7. Tale autovettore ha le componenti tutte uguali chiaramente, dato che l'autovettore corrispondente all'autovalore 1 di Π , il vettore fatto di soli 1, è anche autovettore per L relativamente all'autovalore 0.

Più esplicitamente, per cercare lo stato stazionario \hat{v} , basta imporre che $\forall i$ $[L\hat{v}]_i = 0$, da cui segue che

$$\begin{aligned} \sum_j l_{ij} \hat{v}_j &= \sum_{j \neq i} a_{ij} \hat{v}_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} \hat{v}_j \\ &= \sum_{j \neq i} a_{ij} (\hat{v}_i - \hat{v}_j) = 0 \quad \forall i, \end{aligned}$$

e dato che non può essere $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$, dev'essere $\hat{v}_i - \hat{v}_j = 0 \quad \forall i, j$. Quindi la soluzione stazionaria per $\dot{v} = -Lv$, è quella in cui gli uccelli raggiungono una comune velocità.

Relativamente agli autovalori di L , il più piccolo non nullo, viene chiamato Fiedler number di A , indicato nel modello di Smale con ϕ . Esso si trova in corrispondenza dell'autovalore di Π di modulo massimo diverso da quello unitario, che, si sa, determina la velocità di convergenza di un qualunque vettore verso l'autovettore di autovalore 1, per cui ϕ dà la velocità di convergenza verso lo stato stazionario per il sistema descritto da A .

La soluzione stazionaria è anche stabile, cioè la soluzione dell'equazione 2.7 che si può scrivere in forma esplicita come

$$v(t) = e^{-Lt}v_0,$$

di condizione iniziale v_0 , per $t \rightarrow \infty$ tende a \hat{v} . Infatti, si consideri un vettore v^* che si discosti per una piccola variazione dallo stato stazionario \hat{v} . Esso si può sempre esprimere come una combinazione lineare di autovettori di L :

$$v^* = c\hat{v} + \sum c_k v_k,$$

con v_k i restanti autovettori della base. Allora, supponendo di partire da v^* e applicando la dinamica si ha

$$e^{-Lt}v^* = e^{0t}c\hat{v} + \sum e^{-\lambda_k t}c_k v_k$$

e siccome gli autovalori $\lambda_k > 0$, per $t \rightarrow \infty$ l'intera sommatoria va a 0

$$e^{-Lt}v^* \longrightarrow c\hat{v},$$

e la velocità con cui ciò avviene è data dal Fiedler number ϕ , che è l'ultimo autovalore a mandare in zero la somma.

2.2.2 Teorema

Quanto detto nel paragrafo precedente vale nel caso in cui la laplaciana L sia costante, ma il sistema da cui si è partiti non è lineare. Si ricordi che si parlava di una L_x . Il risultato di Smale è, quindi, quello di dare le condizioni per la convergenza nel caso più generale.

Per $x, v \in (\mathbb{E}^3)^k$, si definiscono le seguenti

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2$$

$$\Lambda(v) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \|v_i - v_j\|^2.$$

In quanto segue viene fissata una soluzione $(x(t), v(t))$ per il sistema di equazioni (2.5) e (2.6). Allora per indicare che Γ e Λ verranno seguite lungo le soluzioni, si usa la notazione $\Gamma(t) := \Gamma(x(t))$ e $\Lambda(t) := \Lambda(v(t))$. Inoltre i valori iniziali si indicano così: $\Gamma_0 := \Gamma(x(0))$ e $\Lambda_0 := \Lambda(v(0))$. La quantità ν che compare nel teorema invece è una quantità che limita le norme precedenti.

Enunciato : Si assumano $K, \sigma > 0, \beta \geq 0$ e

$$a_{ij} = \frac{K}{(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta}$$

e che valga una delle seguenti ipotesi

- i)** $\beta < \frac{1}{2}$
- ii)** $\beta = \frac{1}{2}$ e $\Lambda_0 < \frac{(\nu K)^2}{2}$
- iii)** $\beta > \frac{1}{2}$ e $\left[\left(\frac{1}{2\beta} \right)^{\frac{1}{2\beta-1}} - \left(\frac{1}{2\beta} \right)^{\frac{2\beta}{2\beta-1}} \right] \left(\frac{(\nu K)^2}{2\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2\beta-1}} > 2\Gamma_0 + \sigma^2$

Allora esiste una costante B_0 (indipendente da t) tale che $\Gamma(t) \leq B_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}_+$. Inoltre per $t \rightarrow \infty$, $\Lambda(t) \rightarrow 0$ e i vettori $x_i - x_j$ tendono ad un vettore limite \hat{x}_{ij} per ogni $i, j \leq k$.

2.2.3 Significato del teorema

Volendo limitare questo modello agli stormi e in questo contesto volendo riassumere il significato dei tre diversi casi, si potrebbe dire che fissati $K, \sigma > 0$, quando il valore del parametro β è troppo grande, i termini di interazione decadono rapidamente con la distanza, per cui c'è bisogno di ulteriori condizioni iniziali favorevoli affinché lo stormo converga. Nel caso **iii)**, appunto, questo accade quanto più sono piccoli Λ_0 e Γ_0 , che significa, rispettivamente, che le velocità iniziali sono molto simili e che gli uccelli inizialmente non distinguono troppo l'uno dall'altro. Questo basterebbe a garantire la convergenza. Il caso **ii)** è simile. Mentre quando il parametro β è abbastanza piccolo (caso **i)**), al di sotto di $\frac{1}{2}$, in qualunque condizione iniziale, questo valore garantisce una convergenza perché i termini a_{ij} descrivono un'interazione ancora forte.

A verifica di ciò, vengono riportati i risultati delle simulazioni numeriche dei tre diversi casi, variando la dimensione L della scatola in cui si trovano inizialmente gli uccelli e l'ampiezza della distribuzione delle velocità. In tutti i casi i valori caratteristici dell'interazione K e σ sono mantenuti costanti per poter fare un equo confronto nei tre possibili casi di β .

Nel primo caso, per $\beta = 0.1$, nonostante le diverse condizioni iniziali si ha sempre la convergenza ad un'unica velocità comune. In Figura 2.1 gli uccelli si trovano distribuiti in una scatola di dimensioni più piccole ($L = 20$) che in Figura 2.2 ($L = 100$), quindi $\Gamma_{0_1} < \Gamma_{0_2}$. Inoltre nella prima simulazione ciascun uccello ha un velocità iniziale simile a quella di qualche altro, mentre in Figura 2.2 sono stati creati due gruppi di velocità iniziali, di modo che per qualche i e qualche j , il termine corrispondente nella somma in Λ_0 , risultasse grande. Ciononostante, dopo un adeguato intervallo di tempo, si ha la convergenza.

Nel secondo caso, per il valore critico $\beta = 0.5$, si vede che pur distribuiti in una regione di spazio media ($L = 20$), per velocità iniziali molto diverse la convergenza dell'intero stormo non si verifica (Figura 2.3), mentre con differenze iniziali relative più basse, si (Figura 2.4). In Figura 2.3 si vede anche come ciascuna delle due distribuzioni di velocità iniziali, avendo un relativo Λ_0 piccolo, converge ad una propria velocità.

Nel terzo caso, per $\beta = 0.9$, per regioni di spazio medie e differenze di velocità iniziali relativamente grandi, la distribuzione delle velocità rimane ampia e anche dopo un adeguato intervallo di tempo non sembra esserci convergenza (Figura 2.5), a meno che non si considerino differenze di velocità iniziali molto piccole e si concentrino le posizioni iniziali in una scatola più piccola ($L = 5$) come si vede in Figura 2.6.

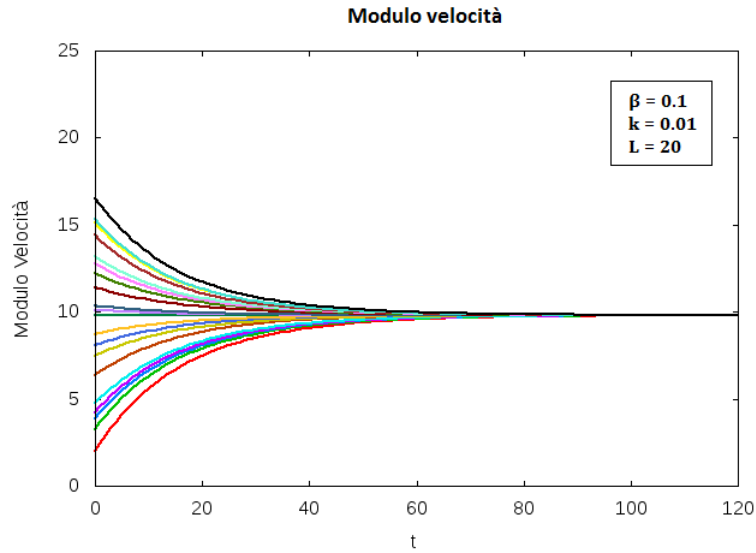


Figura 2.1: Grafico qualitativo dell'andamento del modulo delle velocità in uno stormo di 100 uccelli. Vengono riportate le velocità di soli 20 individui rappresentativi. Parametri caratteristici dell'interazione: $K = 0.01$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.1$. Condizioni iniziali: $L = 20$ e unica distribuzione di velocità, Γ_0 e Λ_0 relativamente piccoli. Si osserva la convergenza ad una velocità comune.

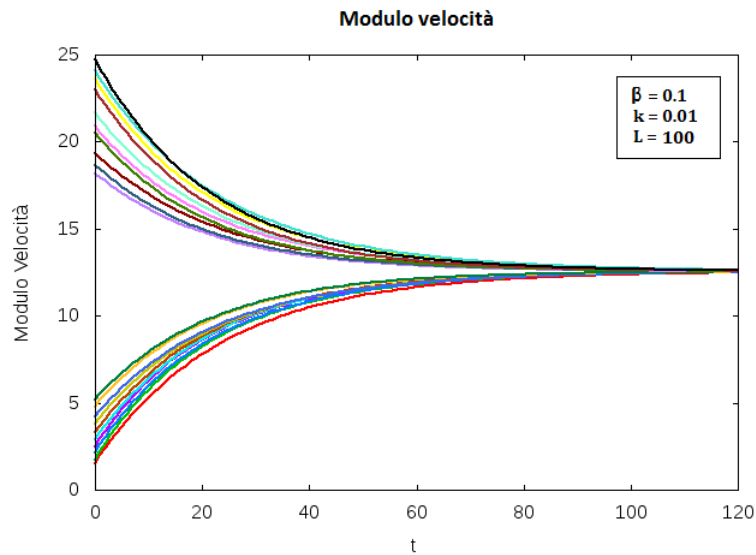


Figura 2.2: Grafico qualitativo dell'andamento del modulo delle velocità in uno stormo di 100 uccelli. Vengono riportate le velocità di soli 20 individui rappresentativi. Parametri caratteristici dell'interazione: $K = 0.01$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.1$. Condizioni iniziali: $L = 100$ e due distribuzioni di velocità con un grande gap fra loro, Γ_0 e Λ_0 relativamente grandi. Si osserva la convergenza ad una velocità comune.

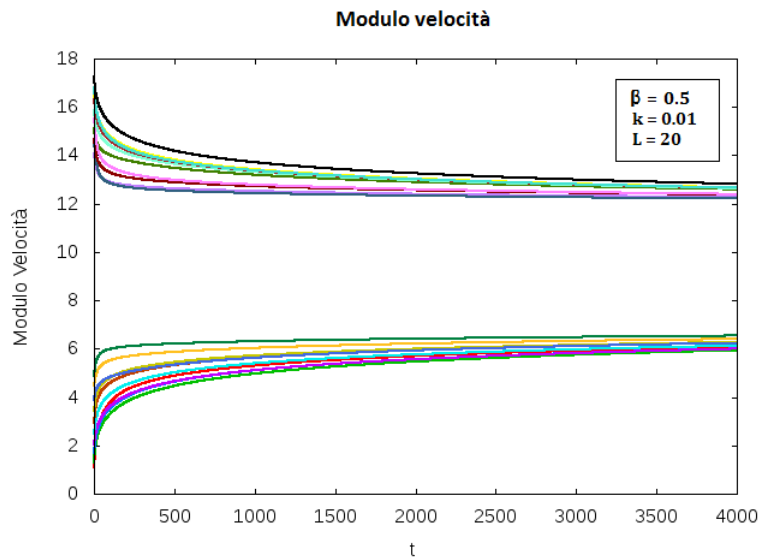


Figura 2.3: Grafico qualitativo dell'andamento del modulo delle velocità in uno stormo di 100 uccelli. Vengono riportate le velocità di soli 20 individui rappresentativi. Parametri caratteristici dell'interazione: $K = 0.01$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.5$. Condizioni iniziali: $L = 20$ e due distribuzioni di velocità con un grande gap fra loro, Γ_0 relativamente piccolo, e Λ_0 relativamente grande. Si osserva che non vi è una convergenza ad una comune velocità. Si osserva invece che ciascuna distribuzione di velocità, avendo un proprio Λ_0 piccolo, si concentra in una propria velocità.

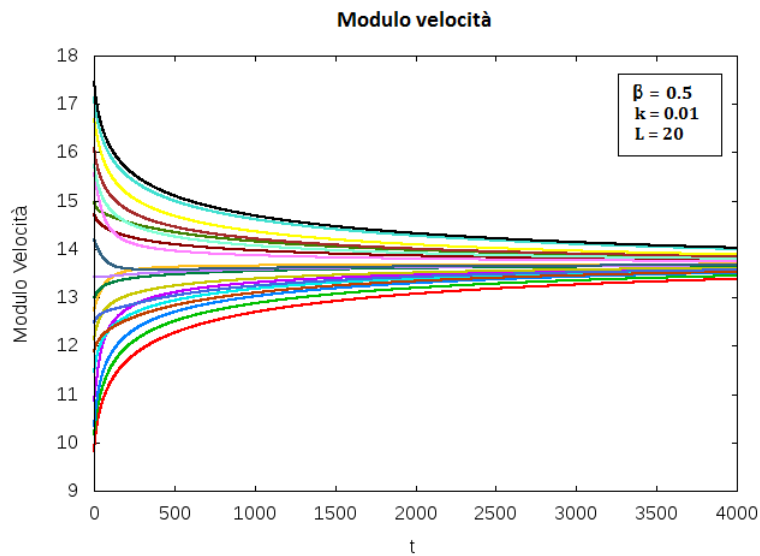


Figura 2.4: Grafico qualitativo dell'andamento del modulo delle velocità in uno stormo di 100 uccelli. Vengono riportate le velocità di soli 20 individui rappresentativi. Parametri caratteristici dell'interazione: $K = 0.01$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.5$. Condizioni iniziali: $L = 20$ e un'unica distribuzione di velocità con differenze relative piccole, Γ_0 e Λ_0 relativamente piccoli. Si osserva la tendenza al raggiungimento di una velocità comune. Il teorema la assicura per $t \rightarrow \infty$.

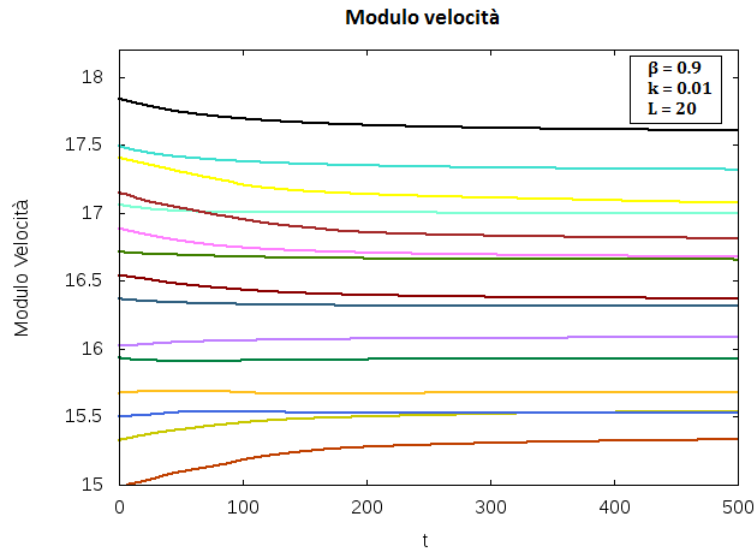


Figura 2.5: Grafico qualitativo dell'andamento del modulo delle velocità in uno stormo di 100 uccelli. Vengono riportate le velocità di soli 20 individui rappresentativi. Parametri caratteristici dell'interazione: $K = 0.01$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.9$. Condizioni iniziali: $L = 20$ e una distribuzione di velocità con differenze relative medie, Γ_0 e Λ_0 piccoli relativamente ad altri valori del parametro β , ma non sufficientemente per $\beta = 0.9$. Ognuno continua a muoversi mantenendo una propria velocità.

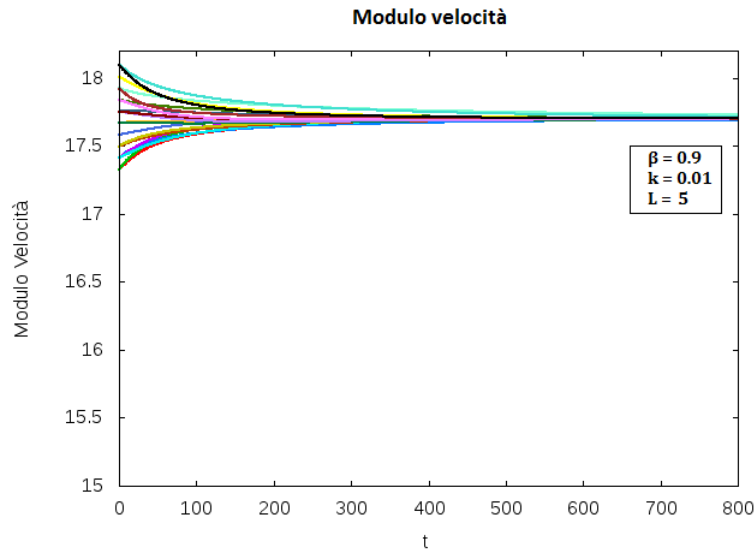


Figura 2.6: Grafico qualitativo dell'andamento del modulo delle velocità in uno stormo di 100 uccelli. Vengono riportate le velocità di soli 20 individui rappresentativi. Parametri caratteristici dell'interazione: $K = 0.01$, $\sigma = 1$, $\beta = 0.9$. Condizioni iniziali: $L = 5$ e un'unica distribuzione molto stretta di velocità, Γ_0 e Λ_0 molto piccoli. Si osserva la convergenza ad una velocità comune.

Capitolo 3

Il modello ad interazione metrica e topologica

3.1 Necessità di due tipi di interazione

Come accennato nel primo capitolo, in merito allo studio condotto dal gruppo di G. Parisi, esistono due tipi di interazione possibili da prendere in considerazione in merito ai comportamenti collettivi animali.

L'**interazione metrica** vuole che la distanza fisica, o *metrica*, fra gli individui, determini il peso da attribuire a ciascun altro elemento del gruppo. Come visto nel modello di Smale, tipicamente l'interazione viene pensata matematicamente come una funzione non crescente della distanza. Fissato un range metrico, l'interazione può rimanere in intensità costante o decrescere in qualche modo entro il range, per poi diventare nulla al di fuori. Elementi del gruppo più lontani nello spazio, quindi, in generale contano meno di quelli vicini.

In un'**interazione topologica**, invece, si guarda ai primi n vicini, dove n è il range topologico. Il peso, qui, è il concetto stesso di "vicinanza". Tutto ciò che cade nel range topologico è considerato vicino indipendentemente dalla distanza fisica, e quindi ugualmente importante.

Per capire la differenza sostanziale fra i due tipi di interazione, si pensi a due ipotetici stormi A e B, con A più denso di B, e si prenda un uccello di riferimento. Fissato un range metrico uguale per entrambi gli stormi, al suo interno cadranno più uccelli in A che in B, data la maggiore densità. Fissato invece un range topologico uguale per entrambi, il numero di individui presi in considerazione è lo stesso, per definizione, solo che in A si trovano fisicamente più vicini all'uccello di riferimento che in B. Pur mettendoci nel caso favorevole in cui tutti gli individui entro i due tipi di range pesino

allo stesso modo, comunque, il numero di quelli presi in considerazione nel caso metrico varia con la densità dello stormo, nel caso topologico no. Se quindi l'intensità dell'interazione è direttamente proporzionale al numero di elementi interagenti, il caso topologico, a parità di densità, dovrebbe essere più forte di quello metrico.

Cosa succede allora, nei due casi, quando uno stormo inizialmente coeso, è sottoposto a una variazione di densità? Danno lo stesso tipo di risposta?

La domanda è interessante perché fluttuazioni di densità si realizzano nella pratica durante l'attacco di un predatore, e dal momento che si sta trattando un sistema biologico l'adattamento all'ambiente potrebbe non essere un fattore da trascurare.

3.2 Simulazioni in 2D: 3 vicini

Il risultato del gruppo di Parisi è stato che i dati supportano l'idea di un'interazione di tipo topologico.

Una possibile spiegazione è che risulti vantaggiosa rispetto a quella metrica davanti all'attacco di un predatore. Per verificare quest'ipotesi hanno costruito un semplice modello bidimensionale, che prende spunto da quello di Vicsek ma opportunamente modificato perché diventi topologico oltre che metrico. L'interazione topologica è regolata dai primi 3 vicini, risultato empirico ottenuto con proiezioni bidimensionali di gruppi di pesci [11].

3.2.1 Il modello

Ciascun uccello i è identificato da un vettore posizione \vec{r}_i , una velocità \vec{v}_i e un numero di vicini N_i scelti secondo uno dei due tipi di range. Tutti gli uccelli possiedono una velocità in modulo uguale e un'orientazione sul piano definita dall'angolo θ_i . L'evoluzione del modello è data dalle equazioni

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(t+1) &= \vec{r}_i(t) + \Delta t \vec{v}_i \\ \theta_i(t+1) &= \frac{[\theta_i(t) + \sum_{j \leq N_i} \theta_j(t)]}{N_i + 1}.\end{aligned}$$

L'evoluzione della posizione è banale, mentre quella per la velocità consiste semplicemente nell'aggiornare l'orientazione angolare facendo una media della propria con quella dei vicini. Nel caso topologico per ogni i , il numero di vicini $N_i = n_c$, con $n_c = 3$. Nel caso metrico invece per ogni i si considerano gli N_i vicini che si trovano entro una distanza fissata r_c . Notare dall'equazione per θ che sia nel caso topologico che in quello metrico, ciascun vicino è pesato $\frac{1}{N+1}$, ma, scrivono, che modificando il modello in modo da pesare con la distanza i vicini entro il range metrico, i risultati non sono qualitativamente diversi.

L'attacco del predatore viene simulato con un oggetto che si muove in moto relativo opposto allo stormo e che esercita una forza repulsiva che decresce con la distanza uccello-predatore. All'equazione per θ va aggiunto, perciò, un termine

$$F_0 \frac{[y_i \cos \theta_i - x_i \sin \theta_i]}{r_i^2}.$$

3.2.2 Risultati

In generale si può pensare che l'esito dell'attacco ad un gruppo coeso, porti alcuni elementi a separarsi da esso, del resto è questo lo scopo: isolarne qualcuno perché sia più vulnerabile. Nell'ottica in cui gli uccelli debbano fronteggiare al meglio tale situazione, un'interazione forte dovrebbe far sì che subito dopo, lo stormo sia in grado di ricomporsi. Quindi quanto più è forte l'interazione, più ci si aspetta che il numero di componenti connesse residue M dopo l'attacco tenda ad 1, dove $M = 1$ indica che lo stormo si è riformato nella sua interezza. Una componente connessa, nel loro modello, è definita come un insieme di uccelli che si trovano entro una distanza $3r_c$ da almeno un altro individuo dell'insieme.

In un opportuno range di parametri sono stati osservati 200 uccelli in 2000 diverse condizioni iniziali per il caso topologico e 5000 per quello metrico. Il risultato è che nel caso metrico il numero più frequente di componenti connesse dopo un attacco è stato $M = 5$, in quello topologico $M = 1$. Ciò è

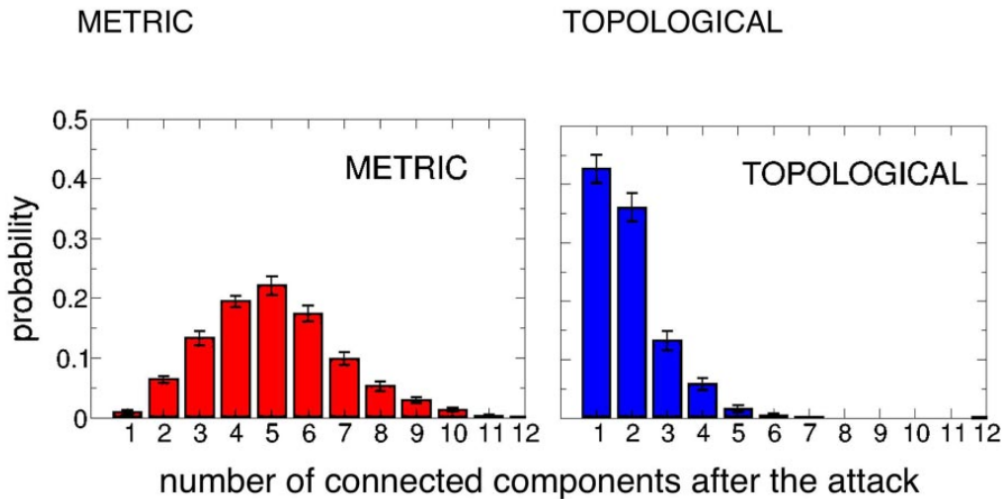


Figura 3.1: Frequenza delle componenti connesse dopo una perturbazione, ottenute nelle simulazioni in 2D del gruppo di Parisi, per un'interazione metrica e una topologica regolata dai primi 3 vicini. $r_c = 0.15$, $n_c = 3$, $v_i = 0.25s^{-1}$, $F_0 = 0.05$. Gli uccelli si trovano inizialmente in un'area di raggio $R = 1$ e hanno le velocità allineate. Grafici estrapolati da [1].

considerato un'ulteriore elemento a favore dell'ipotesi che l'interazione topologica dia una migliore risposta anti-predatoria di un'interazione metrica, e si aspettano che simulazioni in 3D in cui si guardi ai primi 7 vicini, invece che ai primi 3 come in questo modello semplificato in 2D, possano dare risultati simili.

3.3 Simulazioni in 3D: 7 vicini

In questa tesi si è cercato di verificare se in una simulazione più realistica in 3D, usando il risultato empirico dei primi 7 vicini, si potesse confermare quanto ottenuto col modello semplificato bidimensionale.

3.3.1 Il modello

Il modello utilizzato è quello di Smale, con opportune modifiche sia per il caso topologico che quello metrico.

In uno stormo di N uccelli, ognuno con un vettore posizione $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ e una velocità $\vec{v}_i = (v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i})$, l'evoluzione avviene secondo le equazioni del modello di Smale

$$\begin{aligned}\vec{r}_i(t+1) &= \vec{r}_i(t) + \Delta t \vec{v}_i(t) \\ \vec{v}_i(t+1) &= \vec{v}_i(t) + \sum_{j=1}^k a_{ij} (\vec{v}_j(t) - \vec{v}_i(t))\end{aligned}$$

dove gli a_{ij} sono i termini della solita matrice di influenza A , che vanno specificati per il caso metrico e quello topologico.

Nel primo caso si ha che $\forall i$

$$a_{ij} = \frac{K}{(\sigma^2 + \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2)^\beta}$$

$\forall j \in \mathcal{N}_i$, con $\mathcal{N}_i = \{k \in \mathbb{N} : \|\vec{r}_k(t) - \vec{r}_i(t)\| \leq R\}$, e $0 \forall j \notin \mathcal{N}_i$.

In poche parole per il caso metrico si è scelto di dare un cut-off, o un raggio di vista R , a ciascun uccello. Per ogni elemento dello stormo ora esiste un vicinato fatto di tutti coloro i quali si trovano entro una data distanza R da esso, e *ciascuno* di questi vicini è pesato in base alla distanza secondo Smale. Gli elementi al di fuori della sfera non contano. È una sorta di tentativo di rendere più realistica l'interazione: si ammette che esiste un limite alla capacità visiva ma si fa l'ipotesi che l'influenza decresca con la distanza. La matrice A , perchè valga ancora il Teorema che garantisce la convergenza, deve rimanere una matrice di probabilità di transizione, quindi devono essere scelti opportuni valori dei parametri σ , K e β .

Nel caso topologico, la matrice A ha ingressi

$$a_{ij} = \frac{1}{n_T}$$

$\forall j$ appartenente all'insieme degli indici dei primi n_T vicini topologici, mentre valgono 0 altrimenti. Anche qui conta solo il vicinato, i primi $n_T = 7$ vicini per l'esattezza.

Il disturbo che viene scelto per simulare l'attacco è meno realistico del modello in 2D, in cui il predatore faceva ingresso nello stormo respingendo chi vi passasse vicino. In questa versione semplificata viene semplicemente sommato, per un breve intervallo di tempo, un piccolo termine casuale alle equazioni per la velocità, come si stesse scaldando un insieme di particelle.

3.3.2 Risultati

Sono stati presi in esame $N = 200$ uccelli, distribuiti in una scatola di lato $L_s = 20$ con una comune velocità casuale.

Nel caso metrico sono stati scelti i parametri β , σ e K in maniera tale da garantire la convergenza. Ciascun uccello ha un raggio di vista $R = 10$.

Il sistema viene osservato in 500 diverse condizioni iniziali, uguali per il caso metrico e quello topologico, per 2000 step temporali, e per soli 10 di questi viene sommato un numero casuale a media nulla e varianza unitaria ad ogni componente delle velocità.

Una componente connessa (CC) viene definita come l'insieme di quegli uccelli per cui la differenza fra i vettori velocità da almeno un altro elemento dell'insieme, è un vettore di modulo inferiore a un certo numero d . Per $d = 10^{-3}$, si osserva che il numero di CC residue, sono distribuite qualitativamente nello stesso modo della simulazione in 2D, sia nel caso metrico che in quello topologico.

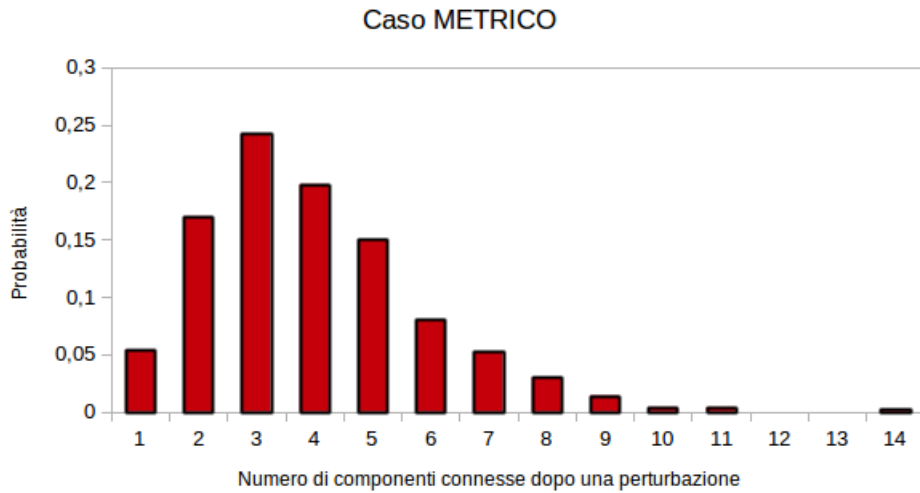


Figura 3.2: Frequenza delle componenti connesse dopo una perturbazione. Caso metrico: $N = 200$ uccelli si trovano inizialmente in una scatola di lato $L_s = 20$, ognuno dei quali ha un raggio di vista $R = 10$, mentre i parametri dell'interazione secondo Smale sono $\beta = 0.1$, $K = 0.01$, $\sigma = 1$. 2000 step temporali, 500 diverse condizioni iniziali.

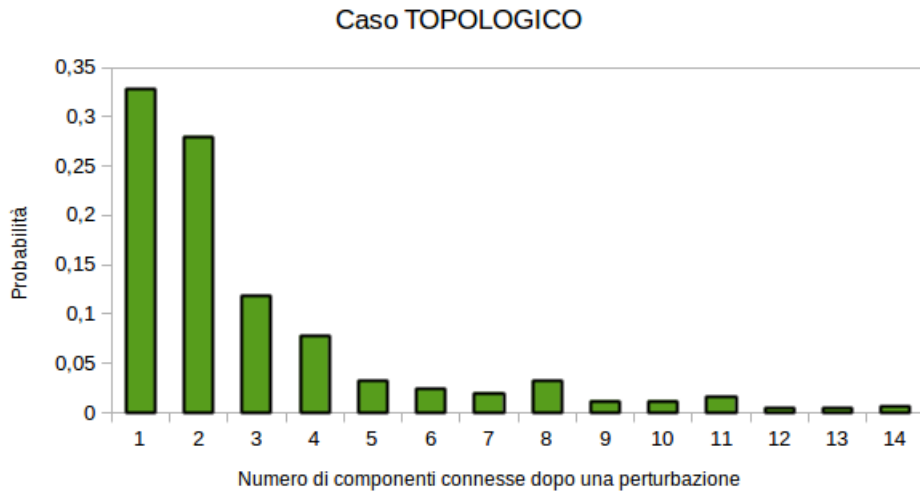


Figura 3.3: Frequenza delle componenti connesse dopo una perturbazione. Caso topologico: $N = 200$ uccelli si trovano inizialmente in una scatola di lato $L_s = 20$, range topologico $n_T = 7$ vicini, 2000 step temporali, 500 diverse condizioni iniziali. Vengono riportate le frequenze solo fino a 14 componenti connesse ma è presente una coda fino a 37 CC.

3.4 Test di risposta anti-predatoria

Se è vero che gli uccelli sono in grado di distinguere non più di 7 oggetti, si capisce perchè l'interazione non coinvolga 8 o 9 vicini, ma perchè piuttosto

non i primi 6 o 5? Una possibile spiegazione data in [1] è che 7 sia il numero che massimizzi la risposta anti-predatoria. Vengono riportati, allora, i risultati delle simulazioni condotte nelle medesime condizioni precedenti ma con soli 6 e 5 vicini topologici.

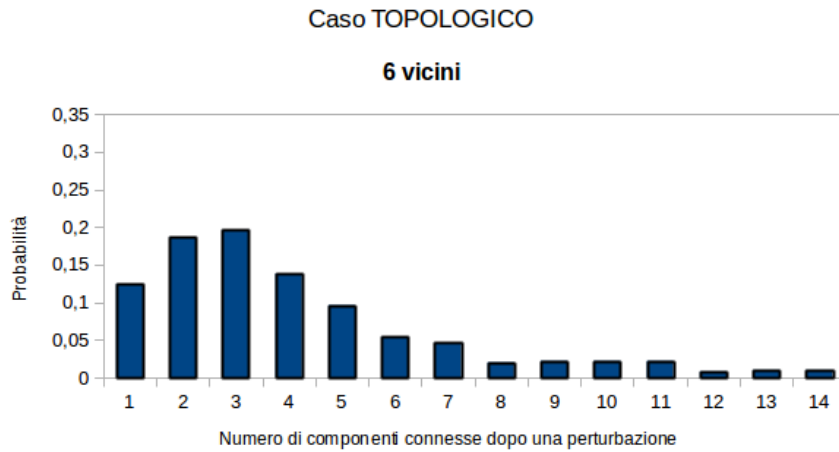


Figura 3.4: Frequenza delle componenti connesse dopo una perturbazione. Caso topologico: $N = 200$ uccelli si trovano inizialmente in una scatola di lato $L_s = 20$, range topologico $n_T = 6$ vicini, 2000 step temporali, 500 diverse condizioni iniziali. Vengono riportate le frequenze solo fino a 14 CC ma è presente una coda fino a 34 CC.

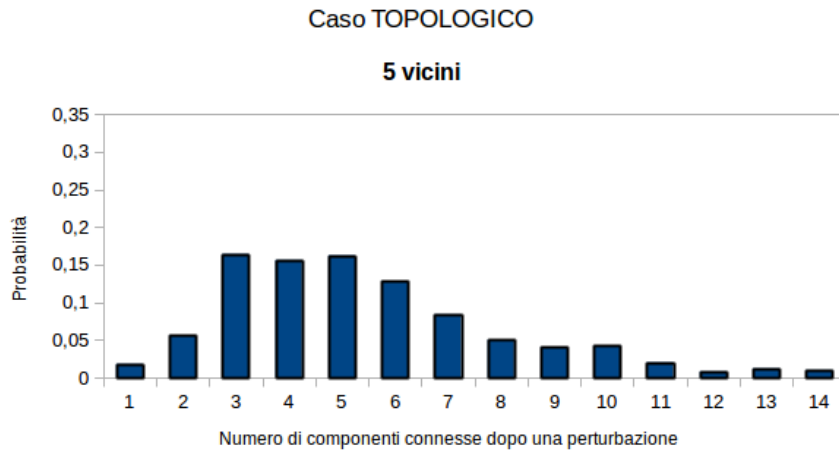


Figura 3.5: Frequenza delle componenti connesse dopo una perturbazione. Caso topologico: $N = 200$ uccelli si trovano inizialmente in una scatola di lato $L_s = 20$, range topologico $n_T = 5$ vicini, 2000 step temporali, 500 diverse condizioni iniziali. Vengono riportate le frequenze solo fino a 14 CC ma è presente una coda fino a 44 CC.

Come si vede dal confronto delle Figure 3.3, 3.4 e 3.5, la probabilità massima di un'unica componente connessa si realizza effettivamente per $n_T = 7$, mentre nei restanti due casi non c'è molta differenza coi risultati del caso metrico.

Conclusioni

Nello studio del flocking possono seguirsi, dunque, due differenti approcci, quello teorico e quello empirico, che comunque devono trovare poi dei riscontri reali.

Nel primo caso, esistono numerosi modelli che "funzionano", nel senso che descrivono bene situazioni in cui degli oggetti, che si trovano ad avere differenti comportamenti iniziali, convergono ad un comportamento comune. Ma si tratta di modelli matematici che dipendono da dei parametri che non hanno in principio un particolare significato fisico, per cui sono ampiamente interpretabili. Potrebbero anche applicarsi a sistemi non biologici, come difatti il modello di Smale si presta alla descrizione dell'evoluzione del linguaggio.

Nel secondo caso, dallo studio di aggregati reali, è possibile estrapolare delle informazioni più precise sul particolare sistema in esame. Se veramente le capacità sensoriali fossero alla base del comportamento collettivo animale, è necessario condurre degli studi sul campo per conoscere i limiti percettivi degli uccelli, così come dei pesci o di qualunque altra specie.

Lo studio particolare del gruppo di Parisi, mette bene in luce come i modelli teorici non possano prescindere dal lato pratico del problema in esame. Il loro risultato, infatti, pone in discussione una delle assunzioni di base di quasi tutti i modelli teorici esistenti, ovvero che l'interazione dipenda dalla distanza metrica. Per meglio dire, essi non asseriscono che questo tipo di distanza non entri mai in gioco. Ammettono infatti, che per le condizioni di densità iniziali degli stormi studiati, i primi sette vicini cadevano certamente nei limiti percettivi degli uccelli. Probabilmente queste due distanze andrebbero integrate. Il range metrico potrebbe aver senso solo come cut-off al range topologico, ma nel caso particolare degli stormi non è emerso che fra i primi sette vicini quelli più prossimi pesino maggiormente di quelli più lontani. Se così fosse, perciò, molta della teoria sul flocking andrebbe rivista.

Infine le varie ipotesi fatte sul *perché* il comportamento collettivo debba emergere da un'interazione topologica, e precisamente con 7 vicini come dimostrano i risultati empirici, sembrano confermate dalle simulazioni in 3D,

anche scegliendo come modello metrico di confronto quello di Smale.
Assumendo che la chiave di lettura sia in un'ottimizzazione della risposta anti-predatoria dello stormo, questa si osserva con un range topologico *minimo* di 7 vicini, contro numeri di vicini inferiori e contro eventuali range metrici.

Bibliografia

- [1] M. Ballerini, N. Cabibbo, R. Candelier, A. Cavagna, E. Cisbani, I. Giardina, V. Lecomte, A. Orlandi, G. Parisi, A. Procaccini, M. Viale, and V. Zdravkovic, *Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance: evidence from a field study*, Proceedings of the national academy of sciences vol.105, no. 4, pp. 1232–1237, 2008.
- [2] F. Cucker and S. Smale, *Emergent Behavior in Flocks*, IEEE Trans. Autom. Control, 32 (5), pp. 852–862.
- [3] J.D. Emmerton and J. Delius, *Beyond sensation: Visual cognition in pigeons.*, In Zeigler HP and Bischof HJ (Eds.) *Vision, Brain, and Behavior in Birds (377–390)*. Cambridge, MA: MIT Press,1993.
- [4] Y. Inada and K. Kawachi, *Order and flexibility in the motion of fish schools.*, J. Theor. Biol. 214: 371-387, 2002.
- [5] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. Morse, *Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 48, no. 6, pp. 988-1001, Jun. 2003.
- [6] R. Olfati-Saber, *Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 51, no. 3, pp. 401-420, Mar. 2006.
- [7] B.L. Partridge, T. Pitcher, J.M. Cullen, and Wilson J., *The three-dimensional structure of fish schools.*, Behav Ecol Sociobiol 6:277-288.
- [8] C.W. Reynolds, *Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model*, Computer Graphics (ACM SIGGRAPH '87 Conference Proceedings), vol. 21, no. 4, pp. 25–34, July 1987.
- [9] H. Tanner, A. Jadbabaie, and G. Pappas, *Stable flocking of mobile agents, part I: Fixed topology*, in Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control, 2003, pp. 2010-2015.
- [10] H. Tanner, A. Jadbabaie, and G. Pappas, *Stable flocking of mobile agents, part II: Dynamic topology*, in Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control, 2003, pp. 2016-2021.

- [11] R.W. Tegner and J. Krause, *Density dependence and numerosity in fright stimulated aggregation behaviour of shoaling fish.*, Philosophical Transaction of the Royal Society of London B 350:381-390, 1995.
- [12] T. Vicsek, A. Cziròk, E. Ben-Jacob, and O. Shochet, *Novel type of phase transition in a system of self-driven particles.*, Phys. Rev. Letters, 75:1226–1229, 1995.