

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**Funzioni a variazione limitata
per la ricolorazione
di un'immagine**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Davide Cordella

II Sessione
Anno Accademico 2014/2015

*“Longum iter est per praecepta,
breve et efficax per exempla.”*

(Seneca)

Introduzione

Nella tesi verrà esposto un metodo per ricolorare un'immagine, di cui è nota soltanto la scala dei grigi e l'informazione sul colore è limitata ad alcune porzioni, mediante strumenti di calcolo delle variazioni in spazi di funzioni a variazione limitata.

Il colore è classicamente descritto da una funzione a valori nello spazio 3-dimensionale RGB (*Red Green Blue*). In particolare possiamo definire la *luminosità* B come la norma euclidea e la *cromaticità* C come il vettore del colore normalizzato. Seguendo un modello introdotto recentemente da Kang - March [5], il problema della ricolorazione viene espresso in termini di minimo di un funzionale del calcolo delle variazioni, in cui l'incognita è la cromaticità nella porzione di immagine nella quale non è dato il colore:

$$E(C) := \int_{\Omega} |DC| + \lambda \int_{D^c} |C - C_0|^2 dx.$$

Tale funzionale consiste nella somma di due termini: il primo regolarizza il colore dell'immagine e il secondo è un termine di simpatia che garantisce di determinare una soluzione che approssima bene il dato di cromaticità nell'insieme in cui è noto.

Funzionali di questo tipo si possono definire nello spazio delle *funzioni a variazione limitata*. Nel secondo capitolo daremo quindi un'ampia presentazione delle proprietà di questi spazi, seguendo il testo di Giusti [4]. Verrà data in principio la definizione di variazione totale e di funzione a variazione limitata a valori reali (*scalari*) su un aperto di \mathbb{R}^n . Tali definizioni verranno estese in modo naturale per funzioni a valori in \mathbb{R}^m (*vettoriali*). Si farà

inoltre un accenno alla definizione della variazione totale sugli *insiemi boreliani* (appartenenti alla σ -algebra generata dagli insiemi aperti). Mostriamo dunque alcuni esempi elementari in cui è possibile dare l'espressione della variazione totale. In questo contesto si osserverà come le funzioni dello spazio di Sobolev $W^{1,1}$ sono un caso particolare di funzioni a variazione limitata BV (dall'inglese *Bounded Variation*), e verrà data una definizione di perimetro di un insieme come variazione totale della sua funzione caratteristica. Vedremo poi alcuni risultati sulle successioni di funzioni BV . Dimostreremo che lo spazio delle funzioni BV , dotato di un'opportuna norma, è di Banach. A questo punto vedremo i teoremi di approssimazione di funzioni a variazione limitata con applicazioni lisce, che ci condurranno infine all'ultimo fondamentale risultato, un Teorema di compattezza per le funzioni BV .

Nell'ultimo capitolo applicheremo i risultati sulle funzioni BV al nostro problema di minimo. Con lo scopo di ottenere soluzioni di norma unitaria verrà in un primo momento modificato il funzionale E , aggiungendo un termine addizionale

$$\alpha \int_{\Omega} (1 - |C|)^2 dx.$$

Otterremo l'esistenza di un minimo per ogni α . Passando al limite per $\alpha \rightarrow +\infty$, una successione dei punti di minimo così ottenuti darà il minimo del problema di partenza. Infine verrà mostrato un esempio di immagine che è stata ricolorata - sempre in [5] - mediante un procedimento che si basa sul problema di minimo relativo al funzionale modificato.

Indice

Introduzione	i
1 Il problema della ricolorazione	1
1.1 Lo spazio dei colori RGB	1
1.1.1 Luminosità e cromaticità	2
1.2 Formulazione matematica del problema	3
2 Funzioni a variazione limitata	5
2.1 Mollificatori simmetrici: richiami	5
2.2 Funzioni BV su un aperto di \mathbb{R}^n	7
2.2.1 Lo spazio $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$	8
2.2.2 Proprietà di misura della variazione totale	9
2.3 Esempi di funzioni BV	10
2.3.1 Funzioni $C^1(\Omega)$	10
2.3.2 Funzioni $W^{1,1}(\Omega)$	12
2.3.3 Funzione caratteristica di un aperto di classe C^2	13
2.3.4 Perimetro di un insieme. Insiemi di Caccioppoli	16
2.4 Successioni di funzioni BV	19
2.4.1 Semicontinuità inferiore	19
2.4.2 $BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach	20
2.4.3 Una disuguaglianza opposta	21
2.5 Approssimazione con funzioni C^∞	22
2.6 Compattezza in $BV(\Omega)$	27

3 Il metodo Total Variation	29
3.1 Dimostrazione dell'esistenza del minimo	29
3.2 Un esempio di immagine ricolorata	32
Riferimenti bibliografici	35

Capitolo 1

Il problema della ricolorazione

Il problema della ricolorazione di un'immagine consiste nel ricostruire l'informazione di colore parzialmente perduta in un'immagine di cui è invece nota la *scala dei grigi*.

Un esempio di situazione reale in cui risulta evidente l'importanza di risolvere tale tipo di problemi è citato in Fornasier [3]. Si tratta del recupero degli affreschi del XV secolo realizzati dal Mantegna nella Cappella Ovetari della Chiesa degli Eremitani a Padova, che fu bombardata dagli Alleati durante la Seconda Guerra Mondiale (Figura 1.1). Di essi sono rimasti pochi pezzi con il colore originale, mentre esiste una fotografia in bianco e nero risalente al 1920.

1.1 Lo spazio dei colori RGB

Esistono molti modelli per considerare, da un punto di vista matematico, il colore in un'immagine. Il più famoso è lo spazio RGB, nel quale il colore viene scomposto nei canali rosso (*Red*), verde (*Green*) e blu (*Blue*). Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio dell'immagine, il colore dell'immagine è dato da

$$p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^3 = \{(r, g, b) : r, g, b > 0\}.$$
¹

¹Nei programmi per la manipolazione delle immagini al computer il dominio è discreto, suddiviso in *pixels*; inoltre i valori dei canali RGB sono interi e variano da 0 a 255.



Figura 1.1: Frammenti disponibili di un affresco di Andrea Mantegna (1452) sovrapposti all'immagine in bianco e nero. (Fonte: Fornasier [3])

Altri esempi di spazi di colori sono dati dai modelli CMYK (*Cyan Magenta Yellow Key*), YIQ, YCbCr (utilizzato per sistemi video digitali), HSV (*Hue Saturation Value*: Tonalità, Saturazione, Valore).

1.1.1 Luminosità e cromaticità

Consideriamo, a partire dal modello RGB, la *decomposizione CB* (*Chromaticity and Brightness*, Cromaticità e Luminosità). Essa consiste nella scomposizione del colore in due componenti:

Definizione 1.1. Sia p la funzione di colore nello spazio RGB definita in precedenza. Si definiscono:

- Componente di *luminosità* $B := |p|$: è una funzione scalare corrispondente alla scala dei grigi;
- Componente di *cromaticità* $C = p/|p| = p/B$: è una funzione vettoriale a valori in $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ che fornisce le informazioni sul colore.

1.2 Formulazione matematica del problema

Sia $\Omega :=]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ il dominio dell'immagine. Consideriamo l'insieme misurabile $D \subset \Omega$: esso rappresenterà il *dominio di colorazione*, ovvero la porzione che desideriamo ricolorare. Indichiamo con D^c il complementare di D in Ω , cioè $\Omega \setminus D$. Sia $p_0 \in L^\infty(D^c, \mathbb{R}^3)$ il campo vettoriale che esprime il colore nel modello RGB. Sia $B_0 \in L^\infty(\Omega)$ la componente di luminosità (che è il nostro dato di partenza su tutto Ω). Sull'insieme D^c essa coincide quasi dappertutto ² con $|p_0|$, ed è (quasi dappertutto) definita la componente di cromaticità $C_0 := p_0/B_0$, $C_0 \in L^\infty(D^c, S^2)$ ³.

In Kang - March [5] viene proposto un modello di ricolorazione espresso formalmente come il minimo del funzionale

$$E(C) := \int_{\Omega} |DC| + \lambda \int_{D^c} |C - C_0|^2 dx, \quad (1.1)$$

dove λ è una costante fissata > 0 e bisogna porre la condizione che i valori di C siano q.d. (quasi dappertutto) di norma unitaria. Nel funzionale E il secondo addendo viene chiamato termine di *simpatia*, perché il minimo sarà prossimo, nel senso della distanza in L^2 , al dato di cromaticità noto in D^c . Il primo termine garantisce che la soluzione sarà regolare in un senso opportuno.

Nel capitolo seguente introdurremo una classe di funzioni sui quali il funzionale è ben definito ed esiste il punto di minimo desiderato. Una volta esposti i principali risultati su tali applicazioni, avremo gli strumenti giusti per la dimostrazione dell'esistenza del minimo.

²Cioè a meno di un insieme di misura Lebesgue nulla.

³Cioè $|C_0(x)| = 1$ q.d. su D^c .

Capitolo 2

Funzioni a variazione limitata

2.1 Mollificatori simmetrici: richiami

Definizione 2.1. Una funzione $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *mollificatore* se

1. $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;
2. $\text{spt } \eta \subset \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$;
3. $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$.

Un mollificatore η è *positivo* se $\eta(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ ed è *simmetrico* se esiste una funzione $\mu : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\eta(x) = \mu(|x|) \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 2.1. È un mollificatore positivo simmetrico la funzione

$$\tilde{\eta}(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases},$$

dove C è una costante scelta in modo che sia $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\eta}(x) dx = 1$.

Sia ora η un mollificatore simmetrico positivo e f una funzione $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.
Definiamo $\forall \varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right);$$
$$f_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon \star f)(x) = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy.$$

Osservazione 2.1. È possibile dimostrare, a partire dalle proprietà dei mollificatori, che valgono i seguenti fatti:

- a) $\forall \varepsilon > 0 \ f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- b) $f_\varepsilon \rightarrow f$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (in $L^1(\mathbb{R}^n)$ nel caso in cui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, uniformemente sui compatti di \mathbb{R}^n se f è continua);
- c) $\alpha \leq f(x) \leq \beta \ \forall x \in \mathbb{R}^n \implies \alpha \leq f_\varepsilon(x) \leq \beta \ \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- d) se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f g_\varepsilon \, dx$
(Per questo punto è fondamentale che il mollificatore sia *simmetrico*);
- e) se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\partial_{x_i} f_\varepsilon = (\partial_{x_i} f)_\varepsilon$;
- f) $\text{spt } f^1 \subseteq A \implies \text{spt } f_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon := \{x : \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$.

Proposizione 2.1. (Cfr. Lanconelli [6]) Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e $K \subset \Omega$ compatto. Allora esiste una funzione $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \omega \leq 1$ e $\omega|_K \equiv 1$.

Dimostrazione. Siccome K è compatto, $\delta := \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. Posto $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq \frac{\delta}{2}\} \subseteq \Omega$, η mollificatore positivo simmetrico, si definiscano $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon)$, con $\varepsilon \in]0, \frac{\delta}{2}[$, e

$$\omega(x) := \eta_\varepsilon \star \chi_{K_\delta} = \int_{K_\delta} \eta_\varepsilon(x-y) \, dy,$$

dove χ_{K_δ} è la funzione che vale 1 su K_δ e 0 altrove. (*funzione caratteristica*). Si verifica allora che tale funzione è quella cercata. Si ha che ω è $C^\infty(\Omega)$ dal momento che $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\chi_{K_\delta} \in L^1_{loc}(\Omega)$. Siccome $\text{spt } \eta_\varepsilon \subset \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$, allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega(x) &= \int_{K_\delta \cap |x-y| < \varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y) \, dy \leq \int_{|x-y| < \varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y) \, dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(z) \, dz = 1. \end{aligned}$$

¹ $\text{spt } f := \overline{\{x \in \Omega : h(x) \neq 0\}}$ è il *supporto* di f .

Se $x \in K$ allora $\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\} \subseteq K_\delta$ e dunque

$$\omega(x) = \int_{|x-y|<\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-y) dy = 1.$$

Infine $\omega(x) > 0$ implica che K_δ abbia intersezione non nulla con $\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \varepsilon\}$, cioè $\text{dist}(x, K) < \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \delta$: se ne conclude che il supporto di ω è un compatto $\subset \Omega$. \square

2.2 Funzioni BV su un aperto di \mathbb{R}^n

Definizione 2.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f \in L^1(\Omega)$. Definiamo la *variazione totale* di f :

$$\int_{\Omega} |Df| := \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\} \quad (2.1)$$

dove con $\operatorname{div} g := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} g_i$ si indica la *divergenza* di g .

La funzione f è detta *funzione a variazione limitata* su Ω se

$$\int_{\Omega} |Df| < +\infty.$$

L'insieme delle funzioni a variazione limitata su Ω si indica con $BV(\Omega)$. Vedremo in seguito (paragrafi 2.3.1 e 2.3.2) che nei casi di funzioni in spazi C^1 o $W^{1,1}$ la variazione totale coincide con $\int_{\Omega} |\nabla f| \, dx$.

Osservazione 2.2. La variazione totale di una funzione f sommabile su Ω assume valori in $[0, +\infty]$. Per dimostrare che è ≥ 0 basta osservare che, nel caso in cui $\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx < 0$, si ha $\int_{\Omega} f \operatorname{div} (-g) \, dx > 0$.

Osservazione 2.3. Dalla definizione 2.2 segue che $\forall f, \tilde{f} \in BV(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$f + \tilde{f} \in BV(\Omega)$$

$$\lambda f \in BV(\Omega),$$

cioè $BV(\Omega)$ ha la struttura di \mathbb{R} -spazio vettoriale.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D(f + \tilde{f})| &= \sup_{g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} (f + \tilde{f}) \operatorname{div} g \, dx \right\} \leq \\ &\leq \sup_{g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx \right\} + \sup_{h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |h| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \tilde{f} \operatorname{div} h \, dx \right\} = \\ &= \int_{\Omega} |Df| + \int_{\Omega} |D\tilde{f}|. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che $f, \tilde{f} \in BV(\Omega) \implies f + \tilde{f} \in BV(\Omega)$;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D(\lambda f)| &= \sup_{g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} (\lambda f) \operatorname{div} g \, dx \right\} = \\ &= \begin{cases} \lambda \sup_g \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx \right\} & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \sup_g \left\{ \int_{\Omega} (-\lambda f) \operatorname{div} (-g) \, dx \right\} & \text{se } \lambda < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

e siccome $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \implies -g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|-g\| \leq 1$, ottengo in entrambi i casi

$$|\lambda| \sup_{g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx \right\} = |\lambda| \int_{\Omega} |Df|,$$

da cui si deduce che $\lambda f \in BV(\Omega)$ per λ reale e $f \in BV(\Omega)$. \square

2.2.1 Lo spazio $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$

La definizione data nel paragrafo precedente si può estendere anche al caso di funzioni a valori vettoriali: se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n e $f \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, si definisce la *variazione totale*:

$$\int_{\Omega} |Df| := \sup_{\phi \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} f_i \operatorname{div} \phi_i \, dx \quad (2.2)$$

con $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ e

$$\mathcal{F} = \left\{ \phi \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n}) : \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

Diremo allora che $f \in BV(\Omega; \mathbb{R}^m)$ se e solo se $\int_{\Omega} |Df| < +\infty$.

Osservazione 2.4. Dalla definizione si ha che $f \in BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ equivale al fatto che ogni sua componente $f_i \in BV(\Omega)$.

Infatti, se ogni componente di f è a variazione limitata, i termini della sommatoria in (2.2) sono tutti limitati superiormente al variare di ϕ in \mathcal{F} , dunque la variazione totale è minore di $+\infty$; se invece esiste una componente $f_j \notin BV(\Omega)$, allora

$$\sup_{g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \int_{\Omega} f_j \operatorname{div} g \, dx = +\infty$$

e siccome $\phi = (0, \dots, g, \dots, 0)$, con g corrispondente all'indice j , è una funzione di \mathcal{F} , la variazione totale è $+\infty$: $f \notin BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

D'ora in avanti in questo capitolo verrà esposta la teoria delle funzioni BV a valori reali, ma i risultati di convergenza e compattezza si potranno estendere anche al caso vettoriale: sono infatti validi per ogni componente.

2.2.2 Proprietà di misura della variazione totale

Sia $f \in L^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Se A è un sottoinsieme aperto di Ω , allora $f \in L^1(A)$ e si può calcolare la variazione totale $\int_A |Df|$ con la definizione data in precedenza. Vorremmo ora estendere tale definizione anche ad insiemi che non siano necessariamente aperti.

Definizione 2.3. Sia $f \in L^1(\Omega)$ e $B \subset \Omega$ un *boreliano* di Ω , ossia un elemento della σ -algebra generata dalla topologia indotta su Ω da quella euclidea su \mathbb{R}^n . Allora definiamo

$$\int_B |Df| := \inf \left\{ \int_A |Df|, A \text{ aperto}, B \subseteq A \subseteq \Omega \right\}. \quad (2.3)$$

Dunque, se indichiamo con \mathcal{B} l'insieme dei sottoinsiemi boreliani di Ω , abbiamo un'applicazione

$$|Df| : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty], |Df|(B) = \int_B |Df|.$$

Vale il seguente risultato:

Teorema 2.2. $|Df|$ è una misura, cioè

1. $\int_{\emptyset} |Df| = 0$;
2. (σ -additività) se $\{B_j\}$ è una famiglia numerabile di boreliani $\subseteq \Omega$ disgiunti a due a due, allora

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} |Df| = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} |Df|. \quad (2.4)$$

Corollario 2.3. Sia $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di boreliani $\subseteq \Omega$.

1. se $B_j \subseteq B_{j+1} \forall j \in \mathbb{N}$, allora

$$\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} |Df| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{B_j} |Df|; \quad (2.5)$$

2. se $\int_{B_1} |Df| < +\infty$ e $B_j \supseteq B_{j+1} \forall j \in \mathbb{N}$, allora

$$\int_{\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j} |Df| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{B_j} |Df|. \quad (2.6)$$

2.3 Esempi di funzioni BV

2.3.1 Funzioni $C^1(\Omega)$

Lemma 2.4. Sia $\psi \in C_0^1(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora, $\forall i = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} \psi \, dx = 0. \quad (2.7)$$

Se $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C_0^1(\Omega)$, si ha $\forall i = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} f \partial_{x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} \partial_{x_i} f g \, dx \quad (2.8)$$

Dimostrazione. La prima affermazione è un caso banale del Teorema della divergenza (vedi Teorema 2.7 al paragrafo 2.3.3). La seconda affermazione segue dalla prima sostituendo fg a ψ . \square

Proposizione 2.5. *Sia $f \in C^1(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora $f \in BV(\Omega)$ se e solo se $\nabla f \in L^1(\Omega)$. Vale infatti*

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx. \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Applicando il Lemma 2.4 si ottiene che $\forall i = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} f \partial_{x_i} g_i \, dx = - \int_{\Omega} \partial_{x_i} f g_i \, dx$$

e dunque, usando la linearità dell'integrale e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, g \rangle \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx.$$

Con un passaggio al sup possiamo intanto concludere che $f \in BV(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx < +\infty.$$

Ora poniamo

$$\gamma := \begin{cases} -\frac{\nabla f}{|\nabla f|} & \text{se } \nabla f \neq 0 \\ 0 & \text{se } \nabla f = 0 \end{cases}.$$

Ipotizzando che Ω sia limitato, abbiamo che γ è sommabile su Ω . Essendo $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un sottoinsieme denso dello spazio di Banach $(L^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^1})$, esiste una successione $(g^j)_{j \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ convergente a γ in norma L^1 , cioè

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\gamma - g^j| \, dx = 0.$$

Tale successione si può ottenere restringendo γ ad un opportuno supporto e facendo la convoluzione con una successione di mollificatori simmetrici: possiamo dunque supporre che sia $\|g^j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \, \forall j$ per le proprietà dei mollificatori simmetrici (vedi paragrafo 2.1). Allora, essendo $\int_{\Omega} \langle \nabla f, \gamma - g^j \rangle \, dx \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\Omega} |\gamma - g^j| \, dx$ e $\|\nabla f\|_\infty < +\infty$, si ha

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f \operatorname{div} g^j \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \gamma \rangle \, dx = \int_{\Omega \cap \{\nabla f \neq 0\}} \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} \, dx = \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx.$$

Si può allora affermare che

$$\int_{\Omega} |Df| \geq \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx$$

e si ottiene l'uguaglianza cercata.

Se ora Ω non è limitato la funzione γ potrebbe non essere sommabile. In tal caso basta scrivere Ω come $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ con $\Omega_j := \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < j\}$. Infatti

$$\int_{\Omega} |Df| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} |Df| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} |\nabla f| \, dx = \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx,$$

applicando la (2.5), la (2.9) appena dimostrata per insiemi limitati, come gli Ω_j , e il Teorema di convergenza monotona. \square

2.3.2 Funzioni $W^{1,1}(\Omega)$

Ricordiamo brevemente la definizione dello spazio di Sobolev $W^{1,1}$.

Definizione 2.4. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Allora

$$W^{1,1}(\Omega) := \left\{ f \in L^1(\Omega) : \exists h_1, \dots, h_n \in L^1(\Omega) \text{ t.c. } \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \int_{\Omega} h_i \phi \, dx = - \int_{\Omega} f \partial_{x_i} \phi \, dx \, \forall i = 1, \dots, n \right\}. \quad (2.10)$$

Si dimostra che le funzioni h_i sono determinate q.d.: esse si dicono *derivate deboli* di f e si utilizza la notazione $h_i = \partial_{x_i} f$. Definiamo inoltre il *gradiente debole* $\nabla f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f)$.

Per tali funzioni vale un risultato analogo a quello precedente:

Proposizione 2.6. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se $f \in W^{1,1}(\Omega)$, allora $f \in BV(\Omega)$.

Inoltre

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f| \, dx.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è praticamente la stessa della Proposizione 2.5, dove le derivate e i gradienti sono sostituiti dalle versioni *deboli*. \square

2.3.3 Funzione caratteristica di un aperto di classe C^2

Definizione 2.5. (Cfr. Brezis [1]) Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, non vuoto. Sia

$$Q = \{x = (\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\hat{x}| < 1 \text{ e } |x_n| < 1\}.$$

Si dice che E è un *insieme (con bordo) di classe C^k* , $k \geq 1$, se $\forall x \in \partial E$ esiste U intorno aperto di x e un diffeomorfismo $\Phi : U \rightarrow Q$ di classe C^k tale che:

$$\Phi(\partial E \cap U) = Q \cap \{x_n = 0\};$$

$$\Phi(\text{int } E \cap U) = Q \cap \{x_n > 0\}.$$

Sia E un siffatto insieme. È possibile definire per ogni $x \in \partial E$ un vettore di \mathbb{R}^n $\nu(x)$ che sia ortogonale a ∂E in x^2 , di norma 1 e tale che

$$\exists \delta > 0 : x + t\nu \notin \bar{E} \quad \text{e} \quad x - t\nu \in E \quad \text{per } t \in]0, \delta[;$$

tale vettore è detto *normale esterna* in x e definisce una funzione ν da ∂E a S^n (sfera n -dimensionale di raggio unitario).

Richiamiamo ora due teoremi importanti, il Teorema della divergenza e l'esistenza di partizioni dell'unità.

Teorema 2.7 (Teorema della divergenza). *Sia Ω un aperto di classe C^1 in \mathbb{R}^n e $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\int_{\Omega} \text{div } F \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1}, \quad (2.11)$$

dove con \mathcal{H}_{n-1} si intende la misura di Hausdorff $(n-1)$ -dimensionale .

Teorema 2.8 (Teorema di partizione dell'unità). *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n e sia $\mathcal{B} = (U_{\alpha})_{\alpha \in A}$ un suo ricoprimento aperto. Allora esiste una famiglia $\{\rho_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ di funzioni $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ - detta partizione dell'unità associata al ricoprimento \mathcal{B} - tale che:*

²Dalla definizione segue che ∂E è una varietà $(n-1)$ -dimensionale di classe C^k . Ha dunque senso parlare di vettore ortogonale al bordo.

- $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$ per ogni indice α .
- $\text{spt } \rho_\alpha \subseteq U_\alpha$ per ogni indice α ;
- $\{\text{spt } \rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un ricoprimento localmente finito di Ω ;
- $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$ su tutto Ω .

Osservazione 2.5. (Cfr. [6], Teorema A.2 pag. 79) Nel caso in cui ho un ricoprimento aperto $\mathcal{B}_1 = (V_i)_{i \in \mathcal{I}}$ di un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ vale un caso particolare del Teorema precedente: esistono funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ρ_1, \dots, ρ_s con

$$0 \leq \rho_j \leq 1 \quad \forall j, \quad \text{spt } \rho_j \subset\subset V_{i_j} \in \mathcal{B}_1, \quad \sum_{j=1}^s \rho_j(x) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^s \rho_j \Big|_K \equiv 1.$$

Consideriamo ora gli aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$, quest'ultimo con bordo di classe C^2 . Sia χ_E la *funzione caratteristica* dell'insieme E , ossia:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 2.6. È immediato notare, dal momento che E è un insieme limitato, che la funzione χ_E appartiene a $L^1(\Omega)$: $\int_\Omega \chi_E \, dx = m(E \cap \Omega)$, che è $< +\infty$.

Osservazione 2.7. A meno di casi particolari, si ha $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la funzione ammetta derivate deboli $\partial_{x_i} \chi_E$; siccome $m(\partial E) = 0$ e χ_E è costante sugli aperti $E \cap \Omega$ e $\Omega \setminus \bar{E}$, si ottiene, per i indice fissato e per qualunque $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, che

$$\int_\Omega \chi_E \partial_{x_i} \phi \, dx = - \int_\Omega \phi \partial_{x_i} \chi_E \, dx = - \int_{E \cap \Omega} \phi \partial_{x_i} \chi_E \, dx - \int_{\Omega \setminus \bar{E}} \phi \partial_{x_i} \chi_E \, dx = 0.$$

Sia ora $\hat{\phi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{\phi}(x) = x_i \chi_E$. Approssimando $\hat{\phi} \in L^1(\Omega)$ con funzioni $\hat{\phi}_j \in C_0^\infty(\Omega)$ per densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$, si ha che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_\Omega \chi_E \partial_{x_i} \hat{\phi}_j \, dx = \int_{E \cap \Omega} \partial_{x_i} \hat{\phi} \, dx = \int_{E \cap \Omega} dx = m(E \cap \Omega).$$

L'ultima quantità è in generale diversa da 0, e in tal caso si giunge ad un assurdo. \square

Proposizione 2.9. χ_E è una funzione $BV(\Omega)$ e la sua variazione totale è pari a $\mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$.

Dimostrazione. Sia $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Per il Teorema della divergenza 2.7 si ha, poiché $|\nu| \equiv 1$, che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} g \, dx &= \int_{E \cap \Omega} \operatorname{div} g \, dx = \int_{\partial E \cap \Omega} \langle g, \nu \rangle \, d\mathcal{H}_{n-1} \leq \\ &\leq \int_{\partial E \cap \Omega} d\mathcal{H}_{n-1} = \mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega). \end{aligned}$$

In virtù di ciò, passando all'estremo superiore rispetto a g , si può già concludere che $\chi_E \in BV(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |D\chi_E| \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega) < +\infty.$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta ci serve un Lemma di estensione.

Lemma 2.10. Sia $\nu : \partial E \rightarrow S^n$ la normale esterna sul bordo di E , che per le ipotesi fatte risulta essere una funzione $C^1(\partial E, \mathbb{R}^n)$. Esiste allora $N \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tale che $|N| \leq 1$ su tutto \mathbb{R}^n e $N|_{\partial E} \equiv \nu$.

Dimostrazione del Lemma. Sia $x \in \partial E$. Allora esiste U_x intorno aperto di x e un diffeomorfismo di classe C^2

$$\Phi : U_x \rightarrow Q = \{(\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\hat{x}| < 1 \text{ e } |x_n| < 1\}.$$

Sia $p : Q \rightarrow Q_0 := Q \cap \{x_n = 0\}$, $p(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Siccome $\Phi^{-1}(Q_0) = \partial E \cap U_x$, su cui è definita la normale esterna ν , è possibile definire la funzione

$$\tilde{N} : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \tilde{N} := \nu \circ \Phi^{-1} \circ p \circ \Phi.$$

Tale applicazione è $C^1(U_x, \mathbb{R}^n)$, $|\tilde{N}(x)| = 1 \, \forall x \in U_x$ e la sua restrizione a $\partial E \cap U_x$ coincide con ν .

Consideriamo ora la famiglia di aperti $\{U_x\}_{x \in \partial E}$: è un ricoprimento aperto di ∂E , il quale è un compatto di \mathbb{R}^n essendo chiuso e limitato. Sia $\{\rho_j\}_{j=1}^s$ una partizione dell'unità associata a tale ricoprimento (cfr. Osservazione 2.5):

$$0 \leq \rho_j \leq 1 \, \forall j, \quad \operatorname{spt} \rho_j \subset\subset U_{x_j}, \quad \sum_{j=1}^s \rho_j(x) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^s \rho_j \Big|_{\partial E} \equiv 1.$$

Sia per ogni j \tilde{N}_j l'estensione di ν trovata in precedenza sull'aperto U_{x_j} . Allora si ha che la funzione $N := \sum_{j=1}^s \tilde{N}_j \rho_j$ è $C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ³, la restrizione $N|_{\partial E}$ è $\sum_{j=1}^s \nu \rho_j = \nu$ e $|N(x)| \leq \sum_{j=1}^s |\tilde{N}_j(x)| \rho_j(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}^n$. \square

Concludiamo la dimostrazione della Proposizione. Sia N come nel Lemma e $h \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $|h| \leq 1$ su Ω . Allora, applicando il Teorema della divergenza 2.7, si ha

$$\int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div}(hN) \, dx = \int_{\partial E \cap \Omega} h |\nu|^2 \, d\mathcal{H}_{n-1} = \int_{\partial E \cap \Omega} h \, d\mathcal{H}_{n-1}.$$

Dunque

$$\int_{\Omega} |D\chi_E| \geq \sup_{h \in C_0^\infty(\Omega), |h| \leq 1} \int_{\partial E \cap \Omega} h \, d\mathcal{H}_{n-1}.$$

Approssimando con applicazioni $C_0^\infty(\Omega)$ la funzione $\chi_{\bar{E}}$ si ottiene che l'ultimo estremo superiore è $\geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$ e si può infine dedurre che

$$\int_{\Omega} |D\chi_E| \geq \mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega) \implies \int_{\Omega} |D\chi_E| = \mathcal{H}_{n-1}(\partial E \cap \Omega),$$

valendo la disuguaglianza anche nell'altro senso. \square

Osservazione 2.8. Abbiamo trovato un esempio di funzione $BV(\Omega)$ che non è $W^{1,1}(\Omega)$. Dunque si tratta di insiemi diversi, e in particolare

$$W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega).$$

2.3.4 Perimetro di un insieme. Insiemi di Caccioppoli

Generalizzando l'ultimo esempio visto, ne seguono una definizione di *perimetro* di un insieme e la relativa nozione di *insieme di Caccioppoli*, le quali assumono una certa importanza nell'ambito della teoria analitica delle superfici minime (cfr. Giusti [4]). Non affronteremo questo aspetto.

³ $\tilde{N}_j \in C^1(U_{x_j}) \forall j$; se $x_0 \notin \bigcup_{j=1}^s U_{x_j}$, N è identicamente nulla in un intorno di x_0 , essendo $\operatorname{spt} \rho_j \subset\subset U_{x_j}$.

Definizione 2.6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un boreliano e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Il *perimetro* di E in Ω è

$$P(E, \Omega) := \int_{\Omega} |D\chi_E| = \sup_{g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div} g \, dx. \quad (2.12)$$

Si pone $P(E) := P(E, \mathbb{R}^n)$.

Se E ha perimetro $P(E, \Omega) < +\infty$ per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, allora E è un *insieme di Caccioppoli*.

Proposizione 2.11. Valgono le seguenti proprietà (con Ω, Ω_1 aperti di \mathbb{R}^n , E, E_1, E_2 boreliani di \mathbb{R}^n):

1. se $\Omega \subseteq \Omega_1$, allora $P(E, \Omega) \leq P(E, \Omega_1)$ e l'uguaglianza è verificata qualora $E \subset \subset \Omega$;
2. $P(E_1 \cup E_2, \Omega) \leq P(E_1, \Omega) + P(E_2, \Omega)$, con l'uguaglianza verificata se $\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0$;
3. se $m(E) = 0$, allora $P(E) = 0$. In particolare, definito $E_1 \Delta E_2 := (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$, se $m(E_1 \Delta E_2) = 0$, allora $P(E_1) = P(E_2)$.

Dimostrazione. (1.) $P(E, \Omega) \leq P(E, \Omega_1)$ è immediato dalla definizione di variazione totale. Supponiamo ora che \bar{E} sia compatto $\subset \Omega$. Per la Proposizione 2.1 esiste $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \omega(x) \leq 1 \forall x \in \Omega$, $\omega|_{\bar{E}} \equiv 1$. Sia $h \in C_0^1(\Omega_1, \mathbb{R}^n)$ tale che $\|h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Ne segue che ωh è $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e inoltre $\|\omega h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Perciò

$$\int_{\Omega_1} \chi_E \operatorname{div} h \, dx = \int_E \operatorname{div}(\omega h) \, dx = \int_{\Omega} \chi_E \operatorname{div}(\omega h) \, dx \leq P(E, \Omega).$$

Dunque passando all'estremo superiore su h si ricava la disuguaglianza opposta.

(2.) Sia $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Siccome $\chi_{E_1 \cup E_2} \leq \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$, allora

$$\int_{\Omega} \chi_{E_1 \cup E_2} \operatorname{div} g \, dx \leq \int_{\Omega} \chi_{E_1} \operatorname{div} g \, dx + \int_{\Omega} \chi_{E_2} \operatorname{div} g \, dx \leq P(E_1, \Omega) + P(E_2, \Omega),$$

da cui segue, passando all'estremo superiore, $P(E_1 \cup E_2, \Omega) \leq P(E_1, \Omega) + P(E_2, \Omega)$.

Nell' ipotesi $\text{dist}(E_1, E_2) = \delta > 0$, si ha $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ e quindi $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$; inoltre gli insiemi

$$U_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, E_1) < \frac{\delta}{3} \right\}, \quad U_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, E_2) < \frac{\delta}{3} \right\}$$

sono tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $\bar{E}_1 \subseteq U_1$, $\bar{E}_2 \subseteq U_2$. Siano g_1 e g_2 funzioni $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con norma ≤ 1 su tutti i punti di Ω . Sia K l'unione dei supporti compatti di g_1 e g_2 . La Proposizione 2.1 ci dice che esistono funzioni $\omega_1, \omega_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che:

$$0 \leq \omega_1 \leq 1, \quad \omega_1|_{\bar{E}_1 \cap K} \equiv 1, \quad \text{spt } \omega_1 \subset\subset (U_1 \cap \Omega);$$

$$0 \leq \omega_2 \leq 1, \quad \omega_2|_{\bar{E}_2 \cap K} \equiv 1, \quad \text{spt } \omega_2 \subset\subset (U_2 \cap \Omega).$$

Ne segue che la funzione $h := \omega_1 g_1 + \omega_2 g_2$ è $C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con supporto contenuto in $K \subset\subset \Omega$. Inoltre

$$h(x) = \begin{cases} \omega_1(x)g_1(x) & \text{se } x \in U_1 \cap \Omega, \\ \omega_2(x)g_2(x) & \text{se } x \in U_2 \cap \Omega, \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus (U_1 \cup U_2), \end{cases}$$

dunque $|h(x)| \leq 1$ su Ω . Possiamo dunque dire che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_{E_1} \text{div } g_1 \, dx + \int_{\Omega} \chi_{E_2} \text{div } g_2 \, dx &= \int_{E_1 \cap K} \text{div } (\omega_1 g_1) \, dx + \\ + \int_{E_2 \cap K} \text{div } (\omega_2 g_2) \, dx &= \int_{\Omega} \chi_{E_1} \text{div } h \, dx + \int_{\Omega} \chi_{E_2} \text{div } h \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \chi_{E_1 \cup E_2} \text{div } h \, dx \leq P(E_1 \cup E_2, \Omega). \end{aligned}$$

L'estremo superiore di $\int_{\Omega} \chi_{E_1} \text{div } g_1 \, dx + \int_{\Omega} \chi_{E_2} \text{div } g_2 \, dx$ al variare di g_1 e g_2 è $P(E_1, \Omega) + P(E_2, \Omega)$: si ottiene così la disuguaglianza opposta.

(3.) Se $m(E) = \int_E dx = 0$, allora

$$P(E) = \sup_{g \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \int_E \text{div } g \, dx = \sup_g \left(\|\text{div } g\|_{L^\infty} \int_E dx \right) = 0.$$

Se $m(E_1 \triangle E_2) = 0$, a maggior ragione $m(E_2 \setminus E_1) = 0$ e per quanto appena dimostrato $P(E_2 \setminus E_1) = 0$. $P(E_1) \leq P(E_1 \cup E_2)$ poichè $\chi_{E_1} \leq \chi_{E_1 \cup E_2}$. D'altro canto si può sfruttare il punto 2. ottenendo $P(E_1 \cup E_2) \leq P(E_1) + P(E_2 \setminus E_1) = P(E_1)$. Quindi $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1)$. Dall'ipotesi segue anche che $P(E_1 \setminus E_2) = 0$ e ragionando analogamente con E_2 al posto di E_1 si conclude che $P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1)$. \square

2.4 Successioni di funzioni BV

2.4.1 Semicontinuità inferiore

Il seguente è un primo fondamentale risultato relativo alle funzioni a variazione limitata.

Teorema 2.12 (Semicontinuità inferiore per funzioni BV). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni BV(Ω) convergente a f in norma L^1 sui compatti di Ω . Allora*

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j|. \quad (2.13)$$

Dimostrazione. Sia $g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tale che $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Allora $\forall j \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_j \operatorname{div} g \, dx - \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx \right| &\leq \int_{\operatorname{spt} g} |f_j - f| |\operatorname{div} g| \, dx \leq \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} |\operatorname{div} g(x)| \int_{\operatorname{spt} g} |f_j - f| \, dx. \end{aligned}$$

L'estremo superiore è $< +\infty$ e il supporto di g è compatto, dunque

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_j \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx. \quad (2.14)$$

Inoltre dalla definizione di variazione totale (vedi Definizione 2.2) si ottiene:

$$\int_{\Omega} f_j \operatorname{div} g \, dx \leq \int_{\Omega} |Df_j|; \quad (2.15)$$

$$\sup_{g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |g| \leq 1} \int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Omega} |Df|. \quad (2.16)$$

Passando al limite in (2.15) e sfruttando la (2.14) si ha

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j|,$$

ed essendo il secondo membro indipendente da g posso infine passare all'estremo superiore per $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$: grazie alla (2.16) si ottiene

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j|,$$

cioè la (2.13). □

Esempio 2.2. Mostriamo ora che l'uguaglianza nella (2.13) può non sussistere. Sia $\Omega =]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ e $f_j(x) = \frac{\sin jx}{j}$ con $x \in \Omega$ e $j \in \mathbb{N}$. Le f_j sono sommabili su Ω e

$$0 \leq \int_{\Omega} |f_j| \, dx = \frac{1}{j} \int_0^{2\pi} |\sin jx| \, dx \leq \frac{2\pi}{j}.$$

Dunque, facendo tendere j a $+\infty$ si ha $f_j \rightarrow f \equiv 0$ in $L^1(\Omega)$. D'altro, canto, essendo le f_j funzioni lisce su Ω , si può applicare la (2.9):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Df_j| &= \int_0^{2\pi} |\cos jx| \, dx = \frac{1}{j} \int_0^{2\pi j} |\cos y| \, dy = \int_0^{2\pi} |\cos y| \, dy = \\ &= [\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin y]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + [\sin y]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 4. \end{aligned}$$

Ma allora $0 = \int_{\Omega} |Df| < \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j| = 4$.

2.4.2 $BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach

Teorema 2.13. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. L'applicazione*

$$\|\cdot\|_{BV} : BV(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty[$$

$$\|f\|_{BV} := \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Df|$$

è una norma. Lo spazio $BV(\Omega)$ dotato di tale norma è uno spazio di Banach.

Dimostrazione. $\|\cdot\|_{BV}$ è una norma poiché $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ è una norma e $f \mapsto \int_{\Omega} |Df|$ è una seminorma, dal momento che (cfr. Osservazioni 2.2 e 2.3):

$$\int_{\Omega} |Df| \geq 0, \quad \int_{\Omega} |D(\lambda f)| = |\lambda| \int_{\Omega} |Df| \text{ con } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\Omega} |D(f + \tilde{f})| = \int_{\Omega} |Df| + \int_{\Omega} |D\tilde{f}|.$$

Sia ora $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV})$, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \|f_j - f_k\|_{BV} < \varepsilon \quad \forall j, k \geq N. \quad (2.17)$$

Dalla definizione di $\|\cdot\|_{BV}$ segue che la successione $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy anche nello spazio di Banach $(L^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^1(\Omega)})$ e dunque converge ad una funzione f in $L^1(\Omega)$. Inoltre $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è limitata in norma $\|\cdot\|_{BV}$ poiché di Cauchy, e allora $\exists M > 0 : \int_{\Omega} |Df_j| \leq M \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Applicando ora il Teorema 2.12 concludiamo che

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j| \leq M < +\infty,$$

ergo $f \in BV(\Omega)$. A partire da (2.17) si ricava che, per j, k maggiori di N , $\int_{\Omega} |D(f_j - f_k)| < \varepsilon$. Siccome $f_j - f_k \rightarrow f_j - f$ in $L^1(\Omega)$ per $k \rightarrow +\infty$, un'ulteriore applicazione del Teorema 2.12 porta a ottenere:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall j \geq N, \int_{\Omega} |D(f_j - f)| \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |D(f_j - f_k)| \leq \varepsilon.$$

Dunque $f_j \rightarrow f$ anche in norma BV : ogni successione di Cauchy converge nello spazio $(BV(\Omega), \|\cdot\|_{BV})$, che è quindi uno spazio di Banach. \square

2.4.3 Una disuguaglianza opposta

Come conseguenza del Teorema 2.12 si ottiene anche il seguente risultato.

Proposizione 2.14. *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n e $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $BV(\Omega)$ convergente a f in norma L^1 sui compatti di Ω , tale che valga*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j| = \int_{\Omega} |Df|. \quad (2.18)$$

Allora $\forall A \subseteq \Omega$ aperto

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \int_{\bar{A} \cap \Omega} |Df_j| \leq \int_{\bar{A} \cap \Omega} |Df|. \quad (2.19)$$

In particolare, se $\int_{\partial A \cap \Omega} |Df| = 0$, si ha

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_A |Df_j| = \int_A |Df|. \quad (2.20)$$

Dimostrazione. Sia $B := \Omega \setminus \bar{A}$. Per il Teorema di semicontinuità inferiore 2.12

$$\int_B |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_B |Df_j|. \quad (2.21)$$

Ricordando che la variazione totale gode delle proprietà di misura (vedi paragrafo 2.2.2) abbiamo che $\int_{\bar{A} \cap \Omega} |Df_j| = \int_{\Omega} |Df_j| - \int_B |Df_j|$; facendo tendere j a $+\infty$ risulta

$$\begin{aligned} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \int_{\bar{A} \cap \Omega} |Df_j| &\leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j| - \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_B |Df_j| \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |Df| - \int_B |Df| = \int_{\bar{A} \cap \Omega} |Df|. \end{aligned}$$

Nel caso particolare $\int_{\partial A \cap \Omega} |Df| = 0$ si ha che

$$\int_{\bar{A} \cap \Omega} |Df| = \int_{\partial A \cap \Omega} |Df| + \int_A |Df| = \int_A |Df|.$$

L'ultimo termine è $\leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_A |Df_j|$ per il Teorema 2.12. Quindi

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \int_A |Df_j| \leq \limsup_{j \rightarrow +\infty} \int_{\bar{A} \cap \Omega} |Df_j| \leq \int_A |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_A |Df_j|,$$

da cui la (2.20). □

2.5 Approssimazione con funzioni C^∞

Nella prossima Proposizione richiameremo le proprietà dei mollificatori enunciate nell'Osservazione 2.1.

⁴Utilizzando (2.19) e (2.21)

Proposizione 2.15. *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n , $A \subset\subset \Omega$ aperto e $f \in BV(\Omega)$. Sia $\int_{\partial A} |Df| = 0$. Si estenda f su tutto Ω ponendo $f|_{\Omega^c} \equiv 0$. Sia η un mollificatore positivo simmetrico, si definisca $\forall \varepsilon > 0$ la funzione $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \eta(x/\varepsilon)$ e si ponga $f_\varepsilon := \eta_\varepsilon \star f$. Allora*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A |Df_\varepsilon| = \int_A |Df|. \quad (2.22)$$

Dimostrazione. Per la proprietà b) dell'Osservazione 2.1 sappiamo che $f_\varepsilon \rightarrow f$ in norma L^1 per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Allora per il Teorema 2.12

$$\int_A |Df| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A |Df_\varepsilon|. \quad (2.23)$$

Sia $g \in C_0^\infty(A, \mathbb{R}^n)$ con $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Utilizzando le proprietà d), e) dell'Osservazione 2.1 e la bilinearità del prodotto di convoluzione si trova che

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_\varepsilon \operatorname{div} g \, dx &= \stackrel{(d)}{=} \int_\Omega f(\operatorname{div} g)_\varepsilon \, dx = \stackrel{(bilinear.)}{=} \int_\Omega f \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} g_i)_\varepsilon \, dx = \\ &= \stackrel{(e)}{=} \int_\Omega f \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (g_i)_\varepsilon \, dx = \int_\Omega f \operatorname{div} g_\varepsilon \, dx. \end{aligned}$$

Dalle altre proprietà dell'Osservazione 2.1 segue inoltre che:

- $g_\varepsilon = ((g_1)_\varepsilon, \dots, (g_n)_\varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (vedi proprietà a);
- $|g_\varepsilon| \leq 1$ su Ω . Infatti $|\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)g(y) \, dy| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)|g(y)| \, dy$, che è $\leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(z) \, dz = 1$.
- $\operatorname{spt} g_\varepsilon \subset\subset A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ (vedi proprietà f).

Se si sceglie $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(A, \partial\Omega)$, allora $A_\varepsilon \subseteq \Omega$. Sia B un sottoinsieme aperto di Ω contenente A_ε : allora

$$\int_\Omega f_\varepsilon \operatorname{div} g \, dx = \int_B f \operatorname{div} g_\varepsilon \, dx \leq \int_B |Df|.$$

⁵Scegliendo un'arbitraria successione $\varepsilon_j \rightarrow 0^+$ per $j \rightarrow +\infty$, dal Teorema si ottiene $\int_A |Df| \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_A |Df_{\varepsilon_j}|$.

Con il passaggio all'estremo inferiore per B aperto, $A_\varepsilon \subset B \subseteq \Omega$, e poi il passaggio all'estremo superiore per $g \in C_0^\infty(A, \mathbb{R}^n)$ con $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, si deduce che

$$\int_{\Omega} |Df_\varepsilon| \leq \int_{A_\varepsilon} |Df| \implies \int_A |Df_\varepsilon| \leq \int_{A_\varepsilon} |Df|. \quad (2.24)$$

Osserviamo ora che $\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon = \bar{A}$: scegliendo un'arbitraria successione decrescente $\{\varepsilon_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0^+$, si ha che $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{A_{\varepsilon_j}} |Df| = \int_{\bar{A}} |Df|$ [cfr. (2.6)], dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A_\varepsilon} |Df| = \int_{\bar{A}} |Df| = \int_A |Df|, \quad (2.25)$$

dove l'ultima uguaglianza sussiste poiché $\int_{\partial A} |Df| = 0$.

Da quest'ultima uguaglianza e dalla (2.24) si ricava che

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A |Df_\varepsilon| &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{A_\varepsilon} |Df| = \int_A |Df| \\ \implies \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A |Df_\varepsilon| &\leq \int_A |Df| \leq {}^6 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_A |Df_\varepsilon|, \end{aligned}$$

da cui si ottiene immediatamente (2.22), ovvero la tesi. \square

È possibile, con una dimostrazione più laboriosa, ottenere un risultato analogo che è valido su tutto Ω :

Teorema 2.16. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f \in BV(\Omega)$. Allora esiste una successione $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di funzioni $C^\infty(\Omega)$ convergente a f in norma L^1 tale che*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Df_j| = \int_{\Omega} |Df|. \quad (2.26)$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, definendo $\forall k \in \mathbb{N}$ gli aperti

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m+k} \right\} \cap B(0, m+k)$$

⁶vedi (2.23)

si abbia, utilizzando le proprietà di misura della variazione totale: ⁷

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Df| < \varepsilon.$$

Si consideri ora il ricoprimento aperto di Ω

$$A_1 := \Omega_2, \quad A_i := \Omega_{i+1} \setminus \bar{\Omega}_{i-1} \quad i = 2, 3, \dots$$

e la relativa partizione dell'unità $\{\rho_i\} \subset C^\infty(\Omega)$ (cfr. Teorema 2.8):

$$\text{spt } \rho_i \subseteq A_i, \quad 0 \leq \rho_i(x) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(x) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega. \quad (2.27)$$

Sia η un mollificatore positivo simmetrico. Allora si ha che per ogni indice i si può scegliere $\varepsilon_i > 0$ tale che, posto $\eta_{\varepsilon_i}(x) := \varepsilon_i^{-n} \eta(x/\varepsilon_i)$, valgano le seguenti:

$$\text{spt } (\eta_{\varepsilon_i} \star (f\rho_i)) \subset \Omega_{i+2} \setminus \bar{\Omega}_{i-2} \quad (\Omega_{-1} := \emptyset); \quad (2.28)$$

$$\int_{\Omega} |\eta_{\varepsilon_i} \star (f\rho_i) - f\rho_i| \, dx < \frac{\varepsilon}{2^i}; \quad (2.29)$$

$$\int_{\Omega} |\eta_{\varepsilon_i} \star (f\nabla\rho_i) - f\nabla\rho_i| \, dx < \frac{\varepsilon}{2^i}. \quad (2.30)$$

Definiamo infine

$$f_\varepsilon := \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} \star (f\rho_i).$$

Da (2.27) e (2.28) si ha che la somma che definisce f_ε è *localmente finita* e dunque $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Sempre da (2.27) si ha $f = \sum_{i=1}^{\infty} f\rho_i$: allora si ottiene, utilizzando (2.29), che ⁸

$$\int_{\Omega} |f_\varepsilon - f| \, dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\eta_{\varepsilon_i} \star (f\rho_i) - f\rho_i| \, dx < \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon,$$

sicché per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ f_ε converge a f in $L^1(\Omega)$. Per il Teorema di semicontinuit  inferiore 2.12 si pu  dire che

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |Df_\varepsilon|. \quad (2.31)$$

⁷Posto $\forall i \in \mathbb{N} V_i := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\} \cap B(0, i)$ si ha $V_i \subset V_{i+1}$ e $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i = \Omega$, dunque $\int_{\Omega} |Df| = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{V_i} |Df|$. [cfr. (2.5)]

⁸Si osservi, qui e pi  avanti, che lo scambio tra integrale e serie   possibile: le funzioni sono tali che si pu  applicare, ad esempio, il Teorema di convergenza dominata.

Sia adesso $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Si ha che

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \operatorname{div} g \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon_i} \star (f \rho_i) \operatorname{div} g \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} f \rho_i \operatorname{div} (\eta_{\varepsilon_i} \star g) \, dx. \quad (2.32)$$

Vale $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \operatorname{div} (\rho_i (\eta_{\varepsilon_i} \star g)) \, dx &= \int_{\Omega} f \rho_i \operatorname{div} (\eta_{\varepsilon_i} \star g) \, dx + \int_{\Omega} \langle f \nabla \rho_i, \eta_{\varepsilon_i} \star g \rangle \, dx \\ &= \int_{\Omega} f \rho_i \operatorname{div} (\eta_{\varepsilon_i} \star g) \, dx + \int_{\Omega} \langle \eta_{\varepsilon_i} \star (f \nabla \rho_i), g \rangle \, dx \end{aligned}$$

e dunque, siccome da (2.27) si ricava l'identità $\sum_{i=1}^{\infty} \nabla \rho_i = 0$, dalla quale segue che $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} f \langle \nabla \rho_i, g \rangle \, dx = 0$, si può riscrivere (2.32) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \operatorname{div} g \, dx &= \int_{\Omega} f \operatorname{div} (\rho_1 (\eta_{\varepsilon_1} \star g)) \, dx + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{\Omega} f \operatorname{div} (\rho_i (\eta_{\varepsilon_i} \star g)) \, dx + \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} \langle \eta_{\varepsilon_i} \star (f \nabla \rho_i) - f \nabla \rho_i, g \rangle \, dx. \end{aligned}$$

Il primo addendo del secondo membro, essendo $|\rho_1 (\eta_{\varepsilon_1} \star g)| \leq 1$, è per definizione $\leq \int_{\Omega} |Df|$; considerando che per $i \geq 2$ i supporti delle funzioni ρ_i sono contenuti in $\Omega \setminus \Omega_0$ e l'intersezione di un numero maggiore di tre di questi supporti è vuota, il secondo addendo si stima così:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int_{\Omega} f \operatorname{div} (\rho_i (\eta_{\varepsilon_i} \star g)) \, dx \leq 3 \int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Df| < 3\varepsilon$$

(dove l'ultima disuguaglianza segue dalla definizione di Ω_0); ricordando infine che $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ e che vale (2.30), è possibile pure maggiorare il terzo addendo utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} \langle \eta_{\varepsilon_i} \star (f \nabla \rho_i) - f \nabla \rho_i, g \rangle \, dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\eta_{\varepsilon_i} \star (f \nabla \rho_i) - f \nabla \rho_i| \, dx < \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Alla fine si ottiene che

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} \operatorname{div} g \, dx \leq \int_{\Omega} |Df| + 4\varepsilon.$$

Passando all'estremo superiore per $g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ con $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ si ha

$$\int_{\Omega} |Df_{\varepsilon}| \leq \int_{\Omega} |Df| + 4\varepsilon$$

e allora

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |Df_{\varepsilon}| \leq \int_{\Omega} |Df|.$$

Mettendo in relazione quest'ultima relazione con (2.31), risulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} |Df_{\varepsilon}| = \int_{\Omega} |Df| \quad [\text{cfr. (2.26)}].$$

Si ottiene così la tesi. \square

2.6 Compattezza in $BV(\Omega)$

Enunciamo senza dimostrazione un notevole Teorema sulle immersioni di spazi di Sobolev (Cfr. Brezis [1], Evans-Gariepy [2]).

Teorema 2.17 (Rellich - Kondrachov). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitziana.* ⁹ *Sia $1 \leq p < n$. Poniamo $p^* := \frac{np}{n-p}$. Allora $W^{1,p}(\Omega)$ ha immersione compatta in $L^q(\Omega) \forall q \in [1, p^*[$ ed ha immersione continua in $L^{p^*}(\Omega)$.*

Possiamo ora dimostrare un risultato di compattezza per lo spazio delle funzioni a variazione limitata.

Teorema 2.18 (di compattezza per funzioni BV). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitziana. Sia $\{f_j\}$ una successione di funzioni $BV(\Omega)$ che sia uniformemente limitata in norma BV ($\sup \|f_j\|_{BV} \leq M$ con $M > 0$). Allora si può estrarre una sottosuccessione $\{f_{j_h}\}$ convergente in norma L^1 ad una funzione $f \in BV(\Omega)$.*

⁹È localmente il grafico di una funzione Lipschitziana in $n - 1$ variabili.

Dimostrazione. Per il Teorema 2.16 possiamo individuare, $\forall j \in \mathbb{N}$, delle funzioni $\tilde{f}_j \in C^\infty(\Omega)$ tali che

$$\int_{\Omega} |f_j - \tilde{f}_j| \, dx < \frac{1}{j}; \quad (2.33)$$

$$\sup_j \int_{\Omega} |\nabla \tilde{f}_j| \, dx \leq 1 + M. \quad (2.34)$$

Le ipotesi fatte consentono di poter applicare il Teorema di Rellich - Kondrakov 2.17 con $p = 1$: si ha che l'immersione di $W^{1,1}(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$ è compatta. Ora da (2.33) e per l'ipotesi $\int_{\Omega} |\tilde{f}_j| \, dx < 1 + M$ per ogni j . Considerando (2.34), abbiamo dunque una successione di funzioni uniformemente limitata in $W^{1,1}(\Omega)$.¹⁰ Allora esiste una sottosuccessione $\{\tilde{f}_{j_h}\}$ convergente in norma L^1 ad una funzione f sommabile su Ω .

Applicando il Teorema di semicontinuità inferiore 2.12 si dimostra che $f \in BV(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla \tilde{f}_{j_h}| \, dx < +\infty.$$

Inoltre da (2.33) segue che $\{\tilde{f}_{j_h}\}$ converge a f , ma questa è una sottosuccessione estratta dalla successione di partenza, e allora la tesi è provata. \square

¹⁰La norma in $W^{1,1}(\Omega)$ è $\|f\|_{W^{1,1}} = \|f\|_{L^1} + \|\nabla f\|_{L^1}$.

Capitolo 3

Il metodo Total Variation

3.1 Dimostrazione dell'esistenza del minimo

Ritorniamo ora, avendo esposto tutto il necessario sulla teoria delle funzioni a variazione limitata, al nostro problema di minimo. Denotiamo con $BV(\Omega, S^2)$ l'insieme delle funzioni $C \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tali che $|C(x)| = 1$ q.d. su Ω . Il nostro scopo sarà quello di trovare, se esiste, il

$$\min\{E(C) : C \in BV(\Omega, S^2)\},$$

dove $E : BV(\Omega, \mathbb{R}^3) \rightarrow [0, +\infty]$ è il funzionale

$$E(C) := \int_{\Omega} |DC| + \lambda \int_{D^c} |C - C_0|^2 dx, \quad (3.1)$$

dove λ è una costante positiva, $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ è il dominio dell'immagine, D è il dominio di colorazione e C_0 è il dato di cromaticità su $D^c = \Omega \setminus D$. Tale funzionale, contenendo nella sua espressione la variazione totale della funzione su cui è calcolato, è detto funzionale di *Total Variation*, e il procedimento relativo per la ricolorazione di un'immagine è detto di conseguenza "metodo Total Variation".

Per questioni riguardanti il vincolo che stiamo considerando, in [5] si suggerisce di modificare il problema di minimo aggiungendo un termine addizionale (*penalty term*) al funzionale E e conseguentemente indebolire la

condizione su C : per ogni $\alpha > 0$ si definisce

$$E_\alpha(C) := \int_\Omega |DC| + \lambda \int_{D^c} |C - C_0|^2 dx + \alpha \int_\Omega (1 - |C|)^2 dx. \quad (3.2)$$

Ci chiediamo ora se, per ogni α fissato, esiste una funzione $C_\alpha \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tale che $\|C_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ e

$$E_\alpha(C_\alpha) = \min\{E_\alpha(C) : C \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3), \|C\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}. \quad (3.3)$$

La risposta è affermativa.

Proposizione 3.1. *Per ogni $\alpha > 0$ esiste una funzione $C_\alpha \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3)$ con $\|C_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, tale che valga la (3.3).*

Dimostrazione. Sia $\alpha > 0$ fissato. Sia $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $BV(\Omega, \mathbb{R}^3)$ con $\|C_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, tale che $E_\alpha(C_j) < K$ con K costante positiva indipendente da j . Allora

$$\int_\Omega |DC_j| \leq K; \quad \|C_j\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |C_j(x)| dx \leq m(\Omega) = 1.$$

Dunque le funzioni C_j sono uniformemente limitate in norma BV e si può applicare il Teorema 2.18. Esisterà allora una funzione a variazione limitata C_α e una sottosuccessione $\{C_{j_h}\}_{h \in \mathbb{N}}$ che per $h \rightarrow +\infty$ converge a C_α puntualmente q.d. in Ω e in norma L^1 . In particolare $\|C_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Ricordiamo il seguente Lemma, che è una conseguenza del Teorema di convergenza monotona:

Lemma 3.2 (Fatou). *Se $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni da $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $[0, +\infty]$ misurabili, allora*

$$\int_A \liminf_{j \rightarrow +\infty} f_j dx \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_A f_j dx.$$

Ne segue che

$$\int_{D^c} |C_\alpha - C_0|^2 dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{D^c} |C_{j_h} - C_0|^2 dx, \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} (1 - |C_{\alpha}|)^2 dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (1 - |C_{j_h}|)^2 dx \quad (3.5)$$

Applicando il Teorema di semicontinuità inferiore 2.12 si ottiene che

$$\int_{\Omega} |DC_{\alpha}| \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |DC_{j_h}|. \quad (3.6)$$

Se scegliamo la successione delle C_j in modo che sia minimizzante, ossia $\lim_{j \rightarrow +\infty} E_{\alpha}(C_j) = \beta$ con

$$\beta := \inf\{E_{\alpha}(C) : C \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3), \|C\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq 1\},$$

allora, applicando le disuguaglianze (3.4), (3.5) e (3.6) si ha che

$$E_{\alpha}(C_{\alpha}) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} E_{\alpha}(C_{j_h}) = \beta \leq E_{\alpha}(C_{\alpha}).$$

Quindi $\beta = E_{\alpha}(C_{\alpha})$ e C_{α} è punto di minimo. \square

Vediamo ora cosa succede se si fa tendere α a $+\infty$.

Proposizione 3.3. *Sia C_{α} un punto di minimo del funzionale E_{α} (che esiste per la Proposizione precedente), $\forall \alpha > 0$. Allora, considerando $\{C_{\alpha}\}_{\alpha > 0}$, esiste una sottosuccessione $\{C_{\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge in norma L^1 ad una funzione $C^* \in BV(\Omega, S^2)$ per la quale vale:*

$$E(C^*) = \min\{E(C) : C \in BV(\Omega, S^2)\},$$

dove E è il funzionale definito in (3.1).

Dimostrazione. Sia $\tilde{C} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale costante di norma unitaria. È una funzione $C^1(\Omega)$ e il suo gradiente è nullo, dunque la variazione totale di \tilde{C} è 0 (basta applicare la (2.9)). Quindi per qualunque $\alpha > 0$ vale

$$E_{\alpha}(C_{\alpha}) \leq E_{\alpha}(\tilde{C}) = \lambda \int_{D^c} |\tilde{C} - C_0|^2 dx = M,$$

dove M è un numero reale in quanto $C_0 \in L^{\infty}(D^c, S^2)$ e $|\tilde{C}| \equiv 1$. Da ciò segue che, sempre per ogni $\alpha > 0$,

$$\int_{\Omega} |DC_{\alpha}| \leq M; \quad \|C_{\alpha}\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |C_{\alpha}(x)| dx \leq m(\Omega) = 1.$$

Per il Teorema di compattezza 2.18 esiste una sottosuccessione $\{C_{\alpha_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge ad una funzione $C^* \in BV(\Omega, \mathbb{R}^3)$ puntualmente q.d. su Ω e in norma L^1 . Dunque $\|C^*(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Però si ha anche che

$$\alpha \int_{\Omega} (1 - |C_\alpha|)^2 dx \leq E_\alpha(C_\alpha) \leq M$$

per ogni α positivo, perciò

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (1 - |C_\alpha|)^2 dx = 0,$$

da cui si può dedurre che $|C^*(x)| = 1$ q.d. su $x \in \Omega$, cioè $C^* \in BV(\Omega, S^2)$. Resta da dimostrare che C^* è un punto di minimo del funzionale E . A tal proposito, sia \hat{C} una generica funzione $BV(\Omega, S^2)$. Allora, $\forall \alpha > 0$, $E(\hat{C}) = E_\alpha(\hat{C}) \geq E_\alpha(C_\alpha)$. Sfruttando il Teorema di semicontinuità inferiore 2.12 e il Lemma di Fatou 3.2, si ricavano le disuguaglianze

$$\int_{\Omega} |DC^*| \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |DC_{\alpha_k}|; \quad \int_{D^c} |C^* - C_0|^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{D^c} |C_{\alpha_k} - C_0|^2 dx,$$

dalle quali si deduce che

$$E(C^*) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} E_{\alpha_k}(C_{\alpha_k}) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} E_{\alpha_k}(\hat{C}) = E(\hat{C}).$$

Per l'arbitrarietà di $\hat{C} \in BV(\Omega, S^2)$, si conclude che C^* rende minimo il funzionale. \square

3.2 Un esempio di immagine ricolorata

Con la dimostrazione del paragrafo precedente possiamo dire che il metodo del funzionale Total Variation è valido da un punto di vista teorico. Ciò che abbiamo ottenuto non ci consente immediatamente di avere a disposizione un *algoritmo* che, se viene fatto eseguire su un calcolatore, restituisce l'immagine ricolorata.

A partire dal risultato teorico si possono comunque derivare *metodi numerici*: in Kang - March [5] viene utilizzato un metodo iterativo che consiste

in una discretizzazione dell'immagine e in approssimazioni successive della cromaticità, il quale è basato sul problema di minimo del funzionale E_α con il *penalty term*. Ponendo opportuni valori ai parametri α , λ si ha il risultato esposto nella Figura 3.1.

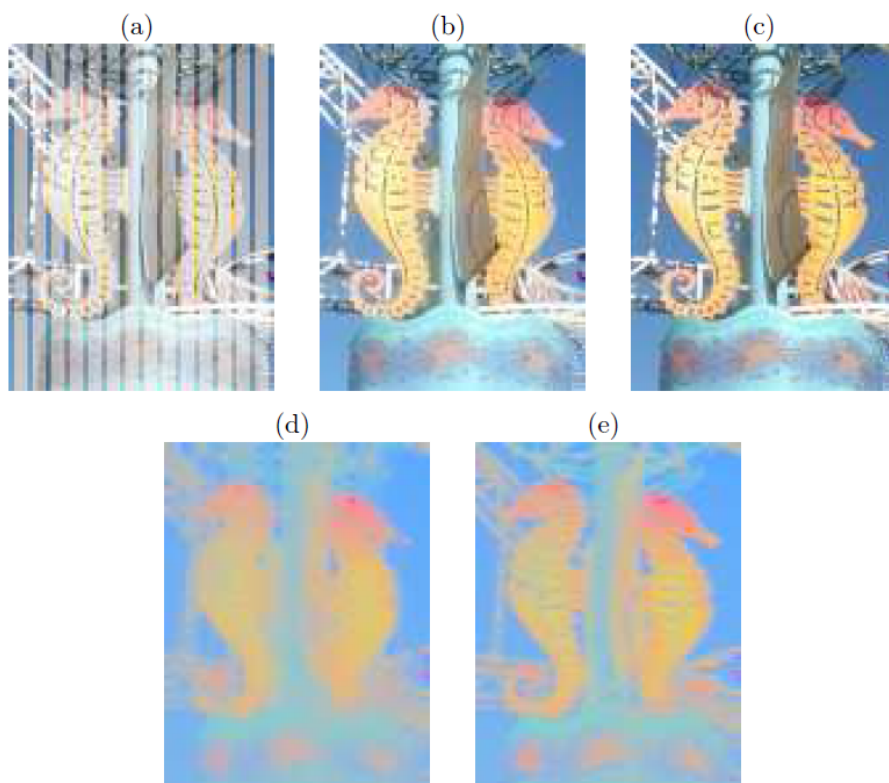


Figura 3.1: a) Immagine data. b) Immagine ricostruita con il metodo TV. c) Immagine originale. d) Cromaticità ricostruita. e) Cromaticità originale. (Fonte: Kang - March [5])

Osservazione 3.1. Osservando la Figura 3.1, si può notare che il colore iniziale è dato da strisce sottili e il risultato che si ottiene con il metodo Total Variation (TV) è sufficientemente simile a quello originale, nonostante i dettagli presenti. Va altresì fatto notare che non tutta l'immagine è stata colorata nel modo giusto: infatti il “naso” del cavalluccio marino di destra è diventato azzurro, diversamente dall'immagine reale, in quanto questa è la soluzione

che minimizza la variazione totale essendo la cromaticità nota intorno a quei punti prevalentemente nella direzione del blu.

In [5] si asserisce che l'errore generato dal metodo utilizzato si può stimare con l'ampiezza del dominio di colorazione D : il colore viene recuperato meglio se i punti di D sono prossimi a quelli del complementare D^c . Nel caso di domini di colorazione molto larghi, come nel caso della Figura 1.1 del primo capitolo, l'errore che si ottiene potrebbe essere troppo grande per essere soddisfacente.

Bibliografia

- [1] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011
- [2] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992
- [3] M. Fornasier, *Nonlinear projection digital image inpainting and restoration methods*, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(3): 359-373, 2006
- [4] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, *Monographs in Mathematics*, vol. 80, Birkhäuser, 1984
- [5] S. H. Kang, R. March, *Variational Models for Image Colorization via Chromaticity and Brightness Decomposition*, *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(9): 2251-2261, 2007
- [6] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2 Seconda Parte*, Pitagora Editrice, Bologna 1997