

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Prodotto di funzioni generalizzate

Relatore:

Prof. Alexandr Kamencht-
chik

Presentata da:

Carlo Alberto Cremonini

Sessione II

Anno Accademico 2014/2015

Prodotto di funzioni generalizzate

Carlo Alberto Cremonini

Sommario

Le funzioni generalizzate sono uno strumento matematico che trova la sua applicazione fisica quando si trattano problemi con discontinuità o singolarità. Risulta perciò necessario formulare una teoria in grado di descrivere completamente questi oggetti e le loro proprietà. Nella teoria delle funzioni generalizzate il problema del loro prodotto è tuttora aperto poiché non esiste un metodo univoco per dare la definizione tra questi oggetti. Lo scopo di questo elaborato è di presentare la teoria delle funzioni generalizzate e i problemi legati al loro prodotto per poi presentare due metodi per affrontarlo, con esempi e risultati di particolare interesse. Vengono mostrati infine alcuni esempi fisici dove la soluzione richiede l'utilizzo di questo apparato matematico vertendo soprattutto sullo stretto legame tra il prodotto di funzioni generalizzate e la procedura della rinormalizzazione nella teoria dei campi quantistici.

Indice

Introduzione	5
1 Distribuzioni.	7
1.1 Introduzione.	7
1.2 Distribuzioni \mathcal{D}' .	8
1.2.1 Successioni di distribuzioni.	10
1.2.2 Supporto di una distribuzione.	11
1.3 Distribuzioni a supporto compatto.	16
1.4 Distribuzioni Temperate.	18
1.5 Operazioni con le distribuzioni.	18
1.5.1 Prodotto tra distribuzione e funzione.	19
1.5.2 Derivata di una distribuzione.	19
1.5.3 Convoluzione tra distribuzione e funzione.	21
1.5.4 Convoluzione tra distribuzioni.	22
2 Neutrices.	25
2.1 Introduzione.	25
2.2 Definizione.	25
2.3 Neutrix limit.	26
2.4 Distribuzioni.	29
2.4.1 Addizione e Sottrazione.	31
2.4.2 Principio di permanenza.	32
2.4.3 Prodotto tra distribuzioni.	32
2.4.4 Trasformazioni.	34
2.4.5 Limite di distribuzioni.	35
2.4.6 Differenziazione di una distribuzione.	36
2.5 Neutrix di Schwartz.	36
2.5.1 Distribuzioni di Schwartz.	38
3 Prodotto di distribuzioni.	39
3.1 Introduzione.	39
3.2 Metodo Fisher.	39
3.2.1 Calcolo di prodotti.	44

3.3	Metodo Güttinger.	48
3.3.1	Calcolo di prodotti.	52
3.4	Considerazioni finali.	55
4	Applicazioni Fisiche.	57
4.1	Introduzione.	57
4.2	Relatività Generale.	57
4.3	Fluidodinamica.	58
4.4	Teoria dei Campi Quantistici.	60
4.4.1	Matrice S.	61
	Bibliografia	65

Introduzione.

Lo scopo di quest'elaborato è di fornire una trattazione coerente della teoria delle funzioni generalizzate e di studiare in particolare il problema del prodotto tra queste e presentare alcuni metodi di risoluzione. Nell'ultima parte vengono mostrate alcune applicazioni fisiche dell'apparato matematico sviluppato mettendo in luce la necessità di ricorrere alle funzioni generalizzate per studiare o modellizzare alcuni problemi fisici.

Negli anni '20 del Novecento il fisico e matematico inglese P. A. M. Dirac, nei suoi studi sulla meccanica quantistica, introdusse la sua famosa funzione δ senza darne una definizione rigorosa: già capendo che la δ non era una funzione ordinaria, egli la definì come funzione nulla dappertutto tranne che sull'origine dove essa assume il valore di un infinito di potenza sufficientemente elevata tale per cui l'integrale sull'asse reale di questa funzione desse come risultato 1. La definizione rigorosa delle funzioni generalizzate fu data negli anni '30 dal matematico russo S. L. Sobolev anche se lo sviluppo della teoria delle funzioni generalizzate, o come le rinominò lui *distribuzioni*, fu fatto successivamente dal matematico francese L. Schwartz. La teoria sviluppata da Schwartz non risulta però in grado di includere il prodotto tra questi oggetti: molti studiosi si sono adoperati nell'affrontare questo problema utilizzando svariati approcci matematici, ma ancora oggi non esiste una definizione univoca del prodotto di distribuzioni.

La necessità di introdurre le funzioni generalizzate è suscitata sia nel campo matematico che nel campo fisico; Sobolev introdusse questi oggetti per studiare soluzioni più generali (o 'deboli') delle equazioni differenziali visto che le distribuzioni sono oggetti sempre derivabili. In ambito fisico l'utilità di questa teoria nasce dallo studio di sistemi discontinui, in cui le funzioni ordinarie non sono derivabili, e dallo studio di fenomeni impulsivi, come urti tra corpi rigidi, onde d'urto, impulsi elettromagnetici ecc., ovvero di durata temporale trascurabile ma con effetti rilevanti.

Le funzioni generalizzate e in particolare il prodotto tra esse è di fondamentale importanza nella teoria della rinormalizzazione. Nella Teoria dei Campi Quantistici e in particolare nello studio perturbativo dell'accoppiamento tra campi e particelle compaiono termini divergenti che rendono impossibile l'interpretazione fisica. La teoria della rinormalizzazione è la tecnica matematica mediante la quale si "rimuovono" questi infiniti.

In quest'elaborato si vuole inoltre mostrare come il problema della non unicità del prodotto tra distribuzioni si rifletta nella Teoria dei Campi Quantistici attraverso la comparsa di termini divergenti, si vuole mostrare perciò come questi due problemi siano in realtà un problema unico.

Capitolo 1

Distribuzioni.

1.1 Introduzione.

Per descrivere la teoria delle distribuzioni [1] partiamo dalla familiare δ di Dirac, mostrando come non sia una funzione, e a partire dalle sue proprietà astraiamo le proprietà delle distribuzioni.

Si consideri il problema di determinare una funzione $\delta(x)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\delta(x) dx = \phi(0) .$$

Dimostriamo che una funzione siffatta non esiste.

Affinché l'integrale abbia significato avendo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si deve avere $\delta \in L_1^{loc}$. Con queste ipotesi si nota come anche $e^{-\lambda x^2}\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e poi si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2}\phi(x)\delta(x) dx = (\phi(x)e^{-\lambda x^2})_{x=0} = \phi(0) ,$$

inoltre si può maggiorare l'integrando con

$$\left| \delta(x)e^{-\lambda x^2}\phi(x) \right| \leq |\delta(x)\phi(x)| ,$$

che è sommabile quindi si può applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e passare il limite per $\lambda \rightarrow 0$ sotto il segno di integrale ottenendo

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2}\phi(x)\delta(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda x^2}\phi(x)\delta(x)dx = 0$$

, ottenendo così un assurdo poiché non si aveva alcuna condizione sul valore che $\phi(x)$ dovesse assumere per $x = 0$.

Nonostante questo l'applicazione δ di Dirac è fondamentale in moltissimi campi della matematica e della fisica, come ad esempio per descrivere la densità (di massa o di carica) di particelle puntiformi. Si può introdurre la teoria delle *Distribuzioni* o anche *Funzioni generalizzate* partendo dall'esempio della δ .

1.2 Distribuzioni \mathcal{D}' .

La δ si descrive matematicamente come un funzionale lineare tale che

$$\delta : \phi \rightarrow \phi(0)$$

o con una notazione più comune

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) .$$

Introduciamo perciò le distribuzioni come un insieme di funzionali lineari definiti su determinate classi di funzioni. Vediamo subito una di queste classi:

Def. 1.1 (Spazio $\mathcal{D}(\Omega)$): Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia ϕ_j successione di funzioni con $\phi_j \in C_0^\infty$, $j \in \mathbb{N}$. Si dice che ϕ_j converge a $\phi \in C_0^\infty$ per $j \rightarrow \infty$ se:

- i) $\exists K \subset \Omega$, K compatto tale che $\text{supp } \phi_j \subseteq K \forall j \in \mathbb{N}$
- ii) $\forall \alpha$ multiindice di interi, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si ha:

$$\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi_j(x) - D^\alpha \phi(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 .$$

Con questa nozione di convergenza lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ si indica $\mathcal{D}(\Omega)$ e si usa la notazione

$$\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \phi .$$

Proseguiamo definendo le distribuzioni che agiscono su questo dato spazio:

Def. 1.2 (Distribuzioni su $\mathcal{D}(\Omega)$): Una *distribuzione* è un funzionale lineare continuo in $\mathcal{D}(\Omega)$. L'insieme dei funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}(\Omega)$ si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$, perciò $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se :

$$\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \phi \implies \langle T, \phi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \phi \rangle .$$

Osserviamo come la linearità del funzionale garantisca che la continuità in un punto sia uguale alla continuità ovunque, in particolare:

$$\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \implies \langle T, \phi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 .$$

Mostriamo subito un esempio di classe di distribuzioni piuttosto semplice:

Sia Ω aperto e sia $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, a f si associa una distribuzione detta *distribuzione di tipo funzione* T_f tale che

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) .$$

La linearità del funzionale è ovvia vista la linearità dell'integrale, verifichiamo la continuità: sia per ipotesi $\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ allora $\exists K$ compatto, $K \subset \Omega$ tale che $\sup_{x \in K} |\phi_j(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ perciò

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi_j \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f(x)\phi_j(x) dx \right| = \left| \int_K f(x)\phi_j(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \sup_{x \in K} \phi_j(x) \right| \int_K |f(x)| dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 , \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio si è sfruttato il supporto compatto di ϕ_j per ridurre l'integrazione sul compatto K anziché sull'intero aperto Ω e nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che essendo $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ ed essendo $K \subset \Omega$ l'integrale di f su K è limitato. Si è verificata così la continuità del funzionale e dunque l'esistenza delle distribuzioni di tipo funzione.

Per verificare la continuità di un funzionale lineare si può ricorrere al seguente teorema che equipara continuità e un determinato criterio di limitatezza:

Teor. 1.1: Un funzionale lineare T definito su $C_0^\infty(\Omega)$ è una distribuzione di $\mathcal{D}'(\Omega)$ se e solo se $\forall K \subset \Omega$ compatto $\exists c(K) \geq 0$, $\exists m(K) \in \mathbb{Z}$ tali che

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq c(K) \sum_{|\alpha| \leq m(K)} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)|$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\text{supp } \phi \subseteq K$.

Dim. 1.1: Verifichiamo innanzitutto che dalla definizione data di limitatezza segue la continuità.

Sia $\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, perciò $\exists K \subset \Omega$ compatto tale che $\sup_{x \in K} |D^\alpha \phi_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Allora:

$$|\langle T, \phi_n \rangle| \leq c(K) \sum_{|\alpha| \leq m(K)} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 ,$$

perciò $|\langle T, \phi_n \rangle| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ da cui segue la continuità.

Vediamo ora come la continuità implichi la limitatezza procedendo per assurdo: negare l'affermazione di limitatezza equivale a dire che

$$\begin{aligned} \exists K \subset \Omega : \forall c(K) \geq 0 , \forall m(K) \in \mathbb{Z} , \exists \phi \in C_0^\infty(\Omega) , \text{supp } \phi \subset K , : \\ |\langle T, \phi \rangle| > c(K) \sum_{|\alpha| \leq m(K)} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi| . \end{aligned}$$

Essendo in questo modo $c(K)$ e $m(K)$ arbitrari si sceglie

$$c(K) = m(K) = j$$

perciò si ha

$$\exists \phi_j : |\langle T, \phi_j \rangle| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi_j(x)|$$

e in particolare si ha $|\langle T, \phi_j \rangle| \neq 0$.

Si consideri

$$\psi_j = \frac{\phi_j}{\langle T, \phi_j \rangle},$$

si hanno dunque

$$\langle T, \psi_j \rangle = 1 \quad \text{e} \\ 1 > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |D^\alpha \psi_j(x)|,$$

da cui segue che $\forall \alpha$ multiindice vale

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \psi_j(x)| < \frac{1}{j} \quad \forall j \geq |\alpha| \quad \implies \\ \implies \psi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{e} \quad \langle T, \psi_j \rangle = 1 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1 \neq 0,$$

da cui l'assurdo poiché è contraddetta l'ipotesi di continuità, perciò vale la tesi.

Può succedere che l'intero $m(K)$ che compare nella definizione di limitatezza non sia effettivamente dipendente da K e in questo caso si dice che la distribuzione in questione è di *ordine finito* m .

Occupiamoci adesso di studiare le *successioni di distribuzioni*.

1.2.1 Successioni di distribuzioni.

Def. 1.3 (Successione di distribuzioni convergente): Una successione di distribuzioni $T_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è detta *convergente in $\mathcal{D}'(\Omega)$* a una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se

$$\langle T_j, \phi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Vediamo subito un esempio di successione di distribuzioni che convergono alla δ di Dirac:

Esempio 1.1.

Sia $u(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si consideri la successione di funzioni $u_j(x) = j^n u(jx)$, si ha che

$$T_{u_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c\delta ,$$

dove $c = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy$. Verifichiamo quest'affermazione:

$$\langle T_{u_j}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} j^n u(jx) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \phi\left(\frac{y}{j}\right) ,$$

dove si è usato il cambio di variabile $jx = y$. Si ha che $\phi\left(\frac{y}{j}\right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \phi(0)$ e inoltre $\left|u(y)\phi\left(\frac{y}{j}\right)\right| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\phi(z)| |u(y)|$ che è integrabile per ipotesi, dunque si può applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \phi\left(\frac{y}{j}\right) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{y}{j}\right) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \phi(0) dy = \\ &= \langle \delta, \phi \rangle \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy = c \langle \delta, \phi \rangle , \end{aligned}$$

dove $c = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dy$. Perciò si è verificato che $T_{u_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c\delta$.

Introduciamo ora un nuovo concetto che ci permetterà di descrivere una classe di distribuzioni diversa da \mathcal{D}' .

1.2.2 Supporto di una distribuzione.

Poiché non sempre si può vedere una distribuzione come una funzione ordinaria non ha senso in generale parlare del valore di una distribuzione in un punto. Per descrivere perciò il supporto di una distribuzione, essendo il supporto delle funzioni di prova ϕ arbitrario, si studia il comportamento della distribuzione in insiemi molto piccoli, potendo verificare se è nulla o no su questi insiemi aperti. Vediamo quindi alcune definizioni:

Def. 1.4 (Restrizione di una distribuzione): Sia Ω aperto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia $\Sigma \subseteq \Omega$ aperto. Si chiama *restrizione di T su Σ* la distribuzione T_Σ definita da:

$$\langle T_\Sigma, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Sigma) .$$

Def. 1.5: Sia Ω aperto e sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si dice che T è nulla sull'aperto $\Sigma \subseteq \Omega$ se

$$T_\Sigma = 0 \quad \text{cioè se} \quad \langle T, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) , \quad \text{supp } \phi \subset \Sigma .$$

Prima di mostrare come la nozione di annullamento su aperti sia additiva premettiamo una definizione ed un lemma propedeutici che ci permettono

di decomporre le funzioni di prova come somma di più funzioni:

Def. 1.6 (Funzione caratteristica smussata): Sia K compatto di \mathbb{R}^n e sia $\eta > 0$, si definisce *funzione caratteristica smussata di K* la funzione $\chi_K(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le proprietà

- 1) $0 \leq \chi_K \leq 1$,
- 2) $\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{se } x \notin K_\eta \end{cases}$,

dove K_η è il compatto allargato ottenuto allargando K di η . Risulta abbastanza facile dimostrare l'esistenza di una funzione così definita e dunque la validità di questa definizione.

Lem. 1.2: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, ricopribile da un insieme finito di aperti

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i .$$

Allora $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\exists \phi_1, \dots, \phi_k : \phi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ tali che

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^k \phi_i(x) .$$

Dim. 1.2: Si inizia considerando il caso di $k = 2$ per semplicità poi si generalizza a k arbitrario. Si ha

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 .$$

Se si considerano le funzioni caratteristiche di Ω_1 e Ω_2 si ha:

$$\phi(x) = \phi(x)\chi_{\Omega_1}(x) + \phi(x)(1 - \chi_{\Omega_1}(x))\chi_{\Omega_2}(x) .$$

Infatti se $x \in \Omega_1$ allora $\chi_{\Omega_1}(x) = 1$ e $1 - \chi_{\Omega_1}(x) = 0$ ottenendo $\phi(x)$, mentre se $x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$ si ha $\chi_{\Omega_1}(x) = 0$, $1 - \chi_{\Omega_1}(x) = 1$ e $\chi_{\Omega_2}(x) = 1$ ottenendo ancora $\phi(x)$, avendo così ottenuto

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) .$$

Però in questo modo ϕ_1 e ϕ_2 non sono funzioni regolari a causa delle funzioni caratteristiche, proviamo allora un altro approccio usando le funzioni caratteristiche smussate.

Sia $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ e sia $\text{supp } \phi = K$, allora $\forall x \in K \exists U_x$, intorno aperto del punto x , contenuto in almeno uno degli Ω_j e non è restrittivo supporte anche $U_x^- \subset \Omega_j$. Essendo K compatto lo si può ricoprire con un numero finito di questi intorni aperti:

$$K \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_N} .$$

Possiamo costruire ora i compatti K_j ottenuti raggruppando i vari $U_{x_l}^-$ contenuti negli stessi Ω_j , $\forall j = 1, \dots, k$:

$$K_j = \bigcup_{U_{x_l}^- \subset \Omega_j} U_{x_l}^- ,$$

ottenendo così un ricoprimento di K di compatti:

$$K \subset K_1 \cup \cdots \cup K_k = \bigcup_{j=1}^k K_j .$$

Al posto dei compatti K_j si possono usare i compatti allargati $K_{j\epsilon_j}$ tali che

$$\begin{aligned} K_1 &\subset K_{1\epsilon_1} \subset \Omega_1 \\ &\vdots \\ K_k &\subset K_{k\epsilon_k} \subset \Omega_k \end{aligned}$$

ed essendo in numero finito $\exists \epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ così che si possano considerare i compatti allargati $K_{j\epsilon}$. Su questi introduciamo le funzioni caratteristiche smussate $\chi_{K_{j\epsilon}}$ con le quali ci occupiamo di scrivere la $\phi(x)$ come somma di funzioni. Se $x \in \Omega$ si ha

$$\phi(x) (1 - \chi_{K_{1\epsilon}}(x)) \cdot \cdots \cdot (1 - \chi_{K_{k\epsilon}}(x)) = \phi(x) \prod_{j=1}^k (1 - \chi_{K_{j\epsilon}}(x)) = 0 .$$

Infatti se $x \notin K = \text{supp } \phi$ allora $\phi = 0$ e se $x \in K$ allora $x \in K_j$ per un qualche j e si ha $(1 - \chi_{K_{j\epsilon}}(x)) = 0$. Perciò vale la seguente espressione:

$$\phi(x) = \phi(x) - \phi(x) \prod_{j=1}^k (1 - \chi_{K_{j\epsilon}}(x)) = \phi(x) \left(1 - \prod_{j=1}^k (1 - \chi_{K_{j\epsilon}}(x)) \right) .$$

Si fa uso ora della formula

$$1 - \prod_{j=1}^k (1 - \chi_j) = \sum_{i=1}^k \chi_i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \chi_j) ,$$

che dimostreremo a fine teorema. Si è ottenuto così:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x) \left(1 - \prod_{j=1}^k (1 - \chi_{K_{j\epsilon}}(x)) \right) = \\ &= \phi(x) \sum_{i=1}^k \chi_{K_{i\epsilon}}(x) \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \chi_{K_{j\epsilon}}(x)) = \sum_{i=1}^k \phi_i(x) , \end{aligned}$$

dove $\phi_i(x) = \phi(x) \cdot \chi_{K_{i\epsilon}}(x) \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \chi_{K_{j\epsilon}}(x))$. Queste $\phi_i(x)$ sono a supporto compatto, grazie al supporto compatto di $\phi(x)$ e delle $\chi_{K_{i\epsilon}}(x)$, e contenuto in Ω_i e sono infinitamente differenziabili grazie alla regolarità di $\phi(x)$ e delle funzioni caratteristiche smussate $\chi_{K_{i\epsilon}}(x)$.

Come ultimo passo della dimostrazione validiamo la formula

$$1 - \prod_{j=1}^k (1 - \chi_j) = \sum_{i=1}^k \chi_i \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \chi_j)$$

procedendo per induzione:

$k = 1$: $1 - 1 + \chi_1 = \chi_1$ che ovviamente è vera;

sia vero per k , verifichiamolo per $k + 1$:

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \chi_i) &= 1 - (1 - \chi_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1 - \chi_i) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \chi_i) + \chi_{k+1} \prod_{i=1}^k (1 - \chi_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k \chi_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \chi_j) + \chi_{k+1} \prod_{j=1}^k (1 - \chi_j) = \sum_{i=1}^{k+1} \chi_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \chi_j), \end{aligned}$$

avendo usato l'ipotesi induttiva al terzo passaggio.

Risulta così dimostrato il lemma.

Nel seguente teorema si mostra come l'annullarsi di una distribuzione su aperti sia una nozione additiva:

Teor. 1.3: Sia Ω aperto e sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, se T si annulla su ogni aperto di una famiglia (non necessariamente numerabile) Ω_λ di aperti contenuti in Ω , allora T si annulla anche sulla loro unione $\bigcup_{\lambda} \Omega_\lambda$, cioè:

$$\langle T, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi : \text{supp } \phi \subset \Omega_\lambda \quad \forall \lambda \implies \langle T, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi : \text{supp } \phi \subset \bigcup_{\lambda} \Omega_\lambda.$$

Dim. 1.3: Sia $\text{supp } \phi = K \subset \Omega$, essendo K compatto si può estrarre dalla famiglia Ω_λ un sottoricoprimento finito di aperti tale che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N \Omega_{\lambda_j}.$$

Per il lemma 2.1 si può decomporre $\phi(x)$ in

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x),$$

tali che $\text{supp } \phi_j \subset \Omega_j$. Perciò grazie alla proprietà di linearità si ottiene:

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{j=1}^N \langle T, \phi_j \rangle = 0$$

per ipotesi; risulta così dimostrata la tesi.

Possiamo ora, grazie alla nozione additiva di annullamento di una distribuzione su un aperto, definire il supporto di una distribuzione a partire dall'insieme complementare:

Def. 1.7 (Supporto di una distribuzione): Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, si definisce *supporto della distribuzione* T l'insieme dei punti x per i quali $\nexists U_x$ intorno aperto in cui T si annulla, perciò:

$$\Omega \setminus \text{supp } (T) = \{x \in \Omega : \exists U_x \text{ intorno aperto di } x : T_{U_x} = 0\}$$

da cui

$$\text{supp } (T) = \Omega \setminus \{x \in \Omega : \exists U_x \text{ intorno aperto di } x : T_{U_x} = 0\}$$

che è insieme chiuso.

Questa definizione è in perfetto accordo con la definizione di supporto di una funzione infatti data $f \in C(\Omega)$, questa definisce una distribuzione di tipo funzione e si può facilmente dimostrare che $\text{supp } f = \text{supp } T_f$.

Come esempio mostriamo la determinazione del supporto della distribuzione δ di Dirac:

Esempio 1.2.

Sia $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$, $\langle \delta(x - x_0), \phi \rangle = \phi(x_0)$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, si vuole mostrare come $\text{supp } (\delta_{x_0}) = \{x_0\}$.

Sia $x_1 \neq x_0$ e un suo intorno aperto $V_{x_1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x, x_1) < d(x_1, x_0)\}$; si consideri $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \phi \subset V_{x_1}$ allora si ha:

$$\phi(x_0) = 0 \quad , \quad \langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0) = 0 \quad ,$$

perciò $\delta_{x_0} = 0 \quad \forall x \neq x_0$. Sia ora V_{x_0} intorno aperto del punto x_0 e sia $\text{supp } \phi \subset V_{x_0}$: $\phi(x_0) = 0$ allora vale

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0) \neq 0 \quad ,$$

perciò $\text{supp } \delta_{x_0} = \{x_0\}$ poiché è l'unico punto dove la distribuzione non si annulla.

Grazie alla nozione di supporto di una distribuzione possiamo ora introdurre una nuova classe di distribuzioni.

1.3 Distribuzioni a supporto compatto.

Come fatto per le distribuzioni \mathcal{D}' dobbiamo prima definire la classe di funzioni sulle quali le distribuzioni a supporto compatto agiscono e per fare ciò introduciamo un criterio di convergenza per queste funzioni:

Def. 1.8 (Spazio $\mathcal{E}(\Omega)$): Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n , si dice che una successione $\phi_j \in C^\infty(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$, converge a $\phi \in C^\infty(\Omega)$ se

$$\forall K \subset \Omega \text{ compatto, } \forall \alpha \text{ multiindice, } \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi_j(x) - D^\alpha \phi(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 .$$

Con questa nozione di convergenza lo spazio $C^\infty(\Omega)$ si indica con $\mathcal{E}(\Omega)$ e si ha la notazione

$$\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^{\mathcal{E}} \phi .$$

Si osservi come rispetto allo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ qui non sia richiesta l'esistenza di un compatto che contenga i supporti di tutte le ϕ_j nel quale si verifichi la convergenza, ora la convergenza si verifica su un qualunque compatto, quindi si ha una richiesta più debole. Si ha perciò:

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega) .$$

Possiamo ora definire i funzionali lineari continui su questo spazio:

Def. 1.9 (Distribuzioni su spazio $\mathcal{E}(\Omega)$): L'insieme dei funzionali lineari e continui definiti su $\mathcal{E}(\Omega)$ definisce l'insieme delle distribuzioni $\mathcal{E}'(\Omega)$ a supporto compatto. Perciò dato T funzionale lineare si ha $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ se

$$\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^{\mathcal{E}} \phi \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \phi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \phi \rangle .$$

Un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{E}(\Omega)$ è continuo anche su $\mathcal{D}(\Omega)$ infatti

$$\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^{\mathcal{D}} \phi \quad \Longrightarrow \quad \phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^{\mathcal{E}} \phi \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \phi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \phi \rangle ,$$

perciò si ha che

$$\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) .$$

Anche nel caso delle distribuzioni $\mathcal{E}'(\Omega)$ la linearità permette di poter verificare la continuità solo su un punto, ad esempio l'origine:

$$T \in \mathcal{E}'(\Omega) \text{ se } \phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^{\mathcal{E}} 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \phi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 .$$

Sempre come nel caso delle distribuzioni $\mathcal{D}'(\Omega)$ si può connettere la continuità a un criterio di limitatezza:

Teor. 1.4: Un funzionale lineare T è una distribuzione di $\mathcal{E}(\Omega)$ se e solo se $\exists H \subset \Omega$ compatto, $\exists c \geq 0$, $\exists m \in \mathbb{Z}$ tali che

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in H} |D^\alpha \phi(x)| \quad \forall \phi \in C^\infty(\Omega) .$$

Dim. 1.4: Verifichiamo innanzitutto che dalla definizione data di limitatezza segue la continuità.

Sia $\phi_j \in \mathcal{E}(\Omega)$, $\phi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, essendo questa convergenza valida $\forall K$ compatto allora è valida anche per H , perciò:

$$\sup_{x \in H} |D^\alpha \phi_j(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \implies \quad |\langle T, \phi_j \rangle| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

e per la linearità di T la continuità in 0 implica la continuità ovunque.

Vediamo ora come la continuità implichi la limitatezza procedendo per assurdo come già fatto per $\mathcal{D}'(\Omega)$: negare l'affermazione di limitatezza equivale a dire che

$$\forall K \text{ compatto}, \forall c \geq 0, \forall m \in \mathbb{Z}, \exists \phi \in C^\infty(\Omega) : \\ |\langle T, \phi \rangle| > c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in H} |D^\alpha \phi(x)| .$$

Essendo questa relazione valida $\forall H$ compatto, sarà valida anche per compatti così costruiti:

$$H_i = \{x \in \Omega : |x| \leq i, d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{i}\} , \quad i \in \mathbb{N} ,$$

cioè una successione di compatti che tende a ricoprire Ω . Ovviamente vale $H_i \subset H_{i+1}$; si opera una scelta di c e di m ponendo $c = m = i$ e si determina la $\phi_i = \phi$ che verifica:

$$|\langle T, \phi_i \rangle| > i \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in H_i} |D^\alpha \phi_i| ,$$

in particolare $\langle T, \phi_i \rangle \neq 0$. Costruiamo ora la funzione

$$\psi_i = \frac{\phi_i}{\langle T, \phi_i \rangle} \quad \text{e vale ovviamente} \quad \langle T, \psi_i \rangle = 1 .$$

Perciò combinando le due relazioni si ottiene

$$1 > i \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in H_i} |D^\alpha \psi_i(x)| \quad \implies \quad \sup_{x \in H_i} |D^\alpha \psi_i(x)| < \frac{1}{i} .$$

Se si fissa un compatto $K \subset \Omega$, esiste un i abbastanza grande tale per cui $K \subseteq H_i$ perciò:

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \psi_i(x)| \leq \sup_{x \in H_i} |D^\alpha \psi_i(x)| < \frac{1}{i} ,$$

quindi

$$\psi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \quad \longrightarrow \quad \langle T, \psi_i \rangle = 1 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 1 \neq 0 ,$$

quindi T non è continua e da qui l'assurdo, perciò vale la tesi.

Descriviamo adesso un terzo tipo di distribuzioni.

1.4 Distribuzioni Temperate.

Questa classe di distribuzioni nasce a partire dalla teoria della trasformata di Fourier e della sua applicazione alle distribuzioni. Una volta introdotta un'opportuna nozione di convergenza, lo spazio funzionale su cui agiscono le distribuzioni che a breve descriveremo è lo *Spazio di Schwartz*, ovvero lo spazio invariante per trasformate di Fourier:

Def. 1.10 (Spazio di Schwartz): Lo spazio $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ detto *Spazio di Schwartz* o delle *funzioni a decrescenza rapida* è costituito dalle funzioni $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che $\forall \alpha, \beta$ multiindici vale:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty ,$$

cioè $\phi(x)$ e tutte le sue derivate tendono a 0 più rapidamente di qualunque potenza.

L'esempio classico di una funzione a decrescenza rapida è la gaussiana e^{-x^2} ; si osservi inoltre come ovviamente ogni funzione a supporto compatto sia funzione a decrescenza rapida.

La seguente definizione riporta il criterio di convergenza nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

Def. 1.11: Sia $\phi_j \in \mathcal{S}, j \in \mathbb{N}$ una successione di funzioni, si dice che ϕ_j converge a $\phi \in \mathcal{S}$ se e solo se $\forall \alpha, \beta$ multiindici vale

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi_j(x) - x^\alpha D^\beta \phi(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

e si usa la notazione $\phi_j(x) \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{\mathcal{S}} \phi(x)$.

Possiamo adesso descrivere la classe di distribuzioni che agiscono sul dato spazio funzionale:

Def. 1.12 (Distribuzioni Temperate): L'insieme dei funzionali lineari e continui su \mathcal{S} costituisce l'insieme delle *distribuzioni temperate* indicato con \mathcal{S}' . Perciò $T \in \mathcal{S}'$ se

$$\phi_j \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{\mathcal{S}} \phi \implies \langle T, \phi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \phi \rangle .$$

Ci occupiamo ora di descrivere le principali operazioni che si possono compiere con le distribuzioni.

1.5 Operazioni con le distribuzioni.

Per comodità ci si riferisce alle distribuzioni di \mathcal{D}' ma le varie definizioni e i risultati sono facilmente estendibili alle altre classi di distribuzioni.

1.5.1 Prodotto tra distribuzione e funzione.

Come prima operazione mostriamo il prodotto tra una funzione e una distribuzione e le condizioni affinché si possa definire senza incorrere in errori:

Def. 1.13 (Prodotto tra distribuzione e funzione): Sia Ω aperto e siano $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $h \in C^\infty(\Omega)$, la *distribuzione prodotto* hT è definita da

$$\langle hT, \phi \rangle = \langle T, h\phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) .$$

Si osserva come la richiesta $h \in C^\infty(\Omega)$ sia piuttosto onerosa ma necessaria per avere garantito che $h\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ anche se caso per caso si possono considerare anche funzioni meno regolari.

Verifichiamo di seguito come questa definizione sia coerente nel caso di distribuzioni di tipo funzione: sia $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ che definisce una distribuzione T_f , il prodotto di f con una funzione h sufficientemente regolare garantisce che fh definisca ancora una distribuzione di tipo funzione T_{fh} tale che

$$\langle T_{fh}, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)h(x)\phi(x) dx = \langle T_f, h\phi \rangle ,$$

perciò la definizione è coerente.

1.5.2 Derivata di una distribuzione.

Per dare una definizione coerente di derivata di una distribuzione procediamo costruttivamente partendo dal prototipo delle distribuzioni di tipo funzione come visto precedentemente: sia $f \in C^1(\Omega)$ e $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ e con derivate $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ancora localmente sommabili, allora si ha:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\phi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) ,$$

avendo usato la regola di integrazione per parti. Generalizzando questo risultato si ha la seguente definizione:

Def. 1.14 (Derivata distribuzionale): Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia α multiindice, si definisce la *derivata distribuzionale* $D^\alpha T$ a partire da:

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) .$$

Dimostriamo ora come la definizione sia ben posta, cioè come $D^\alpha T$ sia funzionale lineare e continuo e dunque distribuzione: la linearità del funzionale è dovuta banalmente alla linearità della derivata, resta da verificare la continuità. Essendo T continua per ipotesi, si ha che $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ vale

$$\forall K \subset \Omega \exists c(K) \geq 0 , \exists m(K) \in \mathbb{N} : |\langle T, \phi \rangle| \leq c(K) \sum_{|\alpha| \leq m(K)} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi|$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \left| \langle D^\beta T, \phi \rangle \right| &= \left| \langle T, D^\beta \phi \rangle \right| \leq c(K) \sum_{|\alpha| \leq m(K)} \sup_{x \in K} |D^{\alpha+\beta} \phi| = \\ &= c(K) \sum_{\gamma \leq m(K)+|\alpha|} \sup_{x \in K} |D^\gamma \phi|, \end{aligned}$$

perciò $D^\alpha T$ è limitata nel senso di $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dunque continua per il teorema 1.1.

La derivata distribuzionale gode di molte proprietà alcune delle quali le mostriamo di seguito:

1) la derivata di una distribuzione esiste sempre; questa proprietà è conseguenza diretta della definizione di derivata distribuzionale che si “scarica” sulla funzione di prova infinitamente differenziabile;

2) le derivate miste sono uguali, cioè $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}$. Si ha infatti

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \phi \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}, \phi \right\rangle,$$

essendo le derivate parziali commutanti su ϕ ;

3) le derivate sono applicazioni lineari continue, cioè:

$$T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T \quad D^\alpha T_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} D^\alpha T.$$

Infatti si ha

$$\langle D^\alpha T_j, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_j, D^\alpha \phi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle = \langle D^\alpha T, \phi \rangle;$$

4) nel caso del prodotto di $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\alpha \in C^\infty(\Omega)$ vale la regola di Leibnitz

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha T) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} T + \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha T), \phi \right\rangle &= - \left\langle \alpha T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle T, \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = \\ &= - \left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha \phi) - \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \phi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha \phi) \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \phi \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \alpha \phi \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \phi \right\rangle = \left\langle \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \phi \right\rangle = \\ &= \left\langle \alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} T, \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

Consideriamo adesso un esempio di derivata distribuzionale.

Esempio 1.3.

Si consideri la funzione $\Theta(x)$ di Heaviside $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$,

$\Theta(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\Theta(x) \notin C(\mathbb{R})$ perciò non è derivabile in senso funzionale. Calcoliamone la derivata distribuzionale:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dT_\Theta}{dx}, \phi \right\rangle &= - \left\langle T_\Theta, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Theta(x) \frac{d\phi}{dx} = - \int_0^{\infty} dx \frac{d\phi}{dx} = -\phi(x)|_0^\infty = \\ &= -\phi(\infty) + \phi(0) = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle \end{aligned}$$

da cui perciò

$$\frac{d\Theta}{dx}(x) = \delta(x).$$

1.5.3 Convoluzione tra distribuzione e funzione.

Ricordiamo la definizione di prodotto di convoluzione di due funzioni (quando esiste):

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy.$$

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ il secondo integrale si può considerare come l'azione di una distribuzione di tipo funzione su $g_x(y)$ avendo trattato x come un parametro. Quest'interpretazione suggerisce la definizione seguente:

Def. 1.15 (Convoluzione tra distribuzione e funzione): Sia $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, si pone $\phi_x(y) = \phi(x-y)$ e si definisce *convoluzione di* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con ϕ

$$(T * \phi)(x) = \langle T, \phi_x \rangle.$$

Nel seguente teorema si mostra come la convoluzione sia un'operazione regolare e una sua proprietà:

Teor. 1.5: Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, allora $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e stesso vale se $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre in entrambi i casi vale:

$$D^\alpha(T * \phi) = T * (D^\alpha \phi) = (D^\alpha T) * \phi.$$

Dim. 1.5: Per una notazione più snella si considera $n = 1$. Sia

$$f(x) = (T * \phi)(x) = \langle T, \phi_x \rangle.$$

Si considera $f(x+h) + f(x) - h \frac{df}{dx}$ e si verifica che sia un ordine di h^2 . Si ha intanto

$$\begin{aligned}\phi(x+h) - \phi(x) - h \frac{d}{dx} \phi(x) &= \int_0^1 dt (1-t) \frac{d^2}{dt^2} \phi(x+th) = \\ &= h^2 \int_0^1 dt (1-t) \frac{d^2}{dx^2} \phi(x+th) = h^2 \psi_h(x),\end{aligned}$$

dove $\phi_h(x)$ è della stessa classe funzionale di ϕ . Si ottiene di conseguenza

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= (T * \phi)(x+h) - (T * \phi)(x) = \langle T, \phi_{x+h} \rangle - \langle T, \phi_x \rangle = \\ &= \langle T, \phi_{x+h} - \phi_x \rangle = h \left\langle T, \frac{d\phi_x}{dx} \right\rangle + h^2 \langle T, (\psi_h)_x \rangle = h \left\langle T, \frac{d\phi_x}{dx} \right\rangle + O(h^2),\end{aligned}$$

essendo $\psi_h(x)$ della stessa classe funzionale di ϕ e dunque essendo limitata.

Si è ottenuto perciò

$$\frac{d}{dx} (T * \phi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left\langle T, \frac{d\phi_x}{dx} \right\rangle.$$

Iterando il procedimento esposto e generalizzando su \mathbb{R}^n si ottiene:

$$D^\alpha (T * \phi)(x) = \langle T, D^\alpha \phi_x \rangle,$$

ma essendo $D^\alpha \phi_x = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \phi(x-y)$ si ottiene la formula richiesta:

$$D^\alpha (T * \phi)(x) = \langle T, D^\alpha \phi_x \rangle = \left\langle T, (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \phi_x \right\rangle = \langle D_y^\alpha T, \phi_x \rangle.$$

Cerchiamo ora di generalizzare questi risultati per definire la convoluzione tra distribuzioni.

1.5.4 Convoluzione tra distribuzioni.

Per arrivare a una definizione del prodotto di convoluzione tra distribuzioni che sia soddisfacente procediamo come al solito a partire dal prototipo delle distribuzioni di tipo funzione: siano f, g funzioni per le quali si può definire il prodotto di convoluzione $f * g$ tali per cui si possa definire la distribuzione di tipo funzione $T_{f * g}$, allora si ha:

$$\begin{aligned}\langle T_{f * g}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} dx (f * g)(x) \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy f(x-y) g(y) \phi(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dz \int_{\mathbb{R}^n} dy f(z) g(y) \phi(z+y) = \langle T_f(z), \langle T_g(y), \phi(z+y) \rangle \rangle.\end{aligned}$$

Generalizzando questo risultato si ottiene la seguente definizione:

Def. 1.16 (Convoluzione di distribuzioni): Siano T ed S distribuzioni di cui almeno una a supporto compatto, il *prodotto di convoluzione* $T * S$ è la distribuzione di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definita da:

$$\langle T * S, \phi \rangle = \langle T(x), \langle S(y), \phi(x + y) \rangle \rangle ,$$

avendo esplicitato la dipendenza dalle variabili anche per le distribuzioni per una maggiore chiarezza.

Il prodotto di convoluzione tra distribuzioni eredita le sue proprietà dal prodotto di convoluzione tra funzioni, come ad esempio l'associatività e la commutatività.

Nel seguente esempio mostriamo come la δ di Dirac sia l'elemento neutro di quest'operazione:

Esempio 1.4

Sia T distribuzione (in \mathcal{D}' o in \mathcal{E}'), si consideri $\delta * T$, si ottiene:

$$\langle \delta * T, \phi \rangle = \langle \delta(x), \langle T(y), \phi(x + y) \rangle \rangle = \langle T(y), \phi(x + y) \rangle |_{x=0} = \langle T(y), \phi(y) \rangle .$$

Si consideri ora $T * \delta$, si ottiene:

$$\langle T * \delta, \phi \rangle = \langle T(y), \langle \delta(x), \phi(x + y) \rangle \rangle = \langle T(y), \phi(y) \rangle ,$$

perciò $\delta * T = T * \delta = T$.

Il prodotto di convoluzione tra k distribuzioni può essere definito ricorsivamente a patto che almeno $k - 1$ di queste siano a supporto compatto, altrimenti si potrebbe incorrere in paradossi.

Rimane adesso da definire il prodotto di distribuzioni. Quest'operazione non può essere definita banalmente come le altre quindi riserviamo una trattazione approfondita per il capitolo 3.

Capitolo 2

Neutrices.

2.1 Introduzione.

In questo capitolo studiamo la teoria delle *neutrices* [2], un ingegnoso apparato matematico, grazie al quale si possono semplificare e generalizzare definizioni e risultati dell'analisi ordinaria. Con questo strumento giungeremo ad una definizione nuova di limite, così che con opportune considerazioni sia sempre definibile il limite di funzioni. Sfrutteremo poi questa generalizzazione nel capitolo successivo per affrontare il prodotto di distribuzioni.

2.2 Definizione.

Si considerino un insieme non vuoto N' detto *Dominio* e un gruppo commutativo N'' detto *Range*. Si consideri poi un gruppo commutativo N formato dalle funzioni $\nu(\xi)$ definite sul dominio N' tale che $\forall \xi \in N', \nu(\xi) \in N''$. Essendo N gruppo commutativo, se $\nu(\xi) \in N$ allora anche $\nu(\xi) - \nu(\xi) \in N$ ed è funzione identicamente nulla. Il gruppo N è detto una "*Neutrix*" se l'elemento nullo è l'unica funzione costante del gruppo. In altre parole: N è una *Neutrix* se data $\nu(\xi) \in N, \nu(\xi) = \gamma \forall \xi \in N' \Rightarrow \gamma$ è l'elemento neutro di N'' .

Perciò se N soddisfa la condizione di Neutrix allora N è detta una *Neutrix di dominio N' e range N''* e le funzioni di N sono dette *trascurabili* in N . Essendo N un gruppo segue che la somma o la differenza di due funzioni trascurabili è ancora trascurabile.

Esempio 2.1.

Si consideri un gruppo commutativo N con dominio nell'intervallo $0 \leq \xi \leq 1$ e con funzioni trascurabili date da $c \sin 2\pi\xi$ con c numero reale arbitrario. Questo gruppo è detto essere una Neutrix se $c \sin 2\pi\xi = \gamma$ con γ

indipendente da ξ , quindi se $c = 0$ e quindi $\gamma = 0$.

Due neutrices P e N si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso dominio N' , le stesse funzioni trascurabili e la stessa variabile ξ . Per “stessa variabile” si intende che due neutrices P e N con stesso dominio e stesse funzioni trascurabili ma variabili ξ e η indipendenti o dipendenti ma tali che ξ non sia sempre uguale a η sono diverse.

Esempio 2.2

Si consideri la neutrix con dominio $0 \leq \xi < 1$ e con funzioni trascurabili $c \sin 2\pi\xi$ con c numero reale arbitrario. Questa neutrix è diversa da quella dell'Esempio 2.1 poiché hanno dominio diverso.

Esempio 2.3

Si consideri la neutrix con dominio $0 \leq \xi \leq 1$ e con funzioni trascurabili date da $c \sin 2\pi\xi$ con c numero complesso arbitrario. Questa neutrix è diversa da quella dell'Esempio 2.2 per il dominio differente e diversa da quella dell'Esempio 2.1 poiché ammette funzioni trascurabili non ammesse in N , come ad esempio $i \sin 2\pi\xi$ con $c = i$.

2.3 Neutrix limit.

Si consideri un insieme di punti N' su un dato spazio topologico e un punto limite $b \notin N'$. Si consideri un gruppo commutativo di funzioni N definite su N' con la proprietà che se $\exists \nu(\xi) \in N : \lim_{\xi \rightarrow b} \nu(\xi) = \gamma$ allora $\gamma = 0$. Allora per la definizione data N è una neutrix poiché se una funzione $\nu(\xi)$ assume lo stesso valore $\gamma \forall \xi \in N'$ allora tende a γ per $\xi \rightarrow b$ e $\gamma = 0$.

Se $f(\xi)$ è una funzione su N' ed è possibile trovare una costante l tale che $f(\xi) - l$ sia trascurabile in N allora l è detto il *neutrix limit* di $f(\xi)$ con $\xi \rightarrow b$ e si indica

$$N - \lim_{\xi \rightarrow b} f(\xi) = l .$$

Si osserva come il limite l , se esiste, sia definito univocamente poiché se si suppone che $f(\xi) - l$ e $f(\xi) - l'$ siano entrambe trascurabili si ottiene grazie alle proprietà di gruppo e alla definizione di neutrix che anche $l - l'$ è trascurabile perciò uguale a 0.

Si osserva inoltre come se in una neutrix N le funzioni trascurabili sono quelle che tendono a 0 con $\xi \rightarrow b$ in N' il neutrix limit coincida col limite ordinario. Vediamo un esempio per chiarire le idee:

Esempio 2.4

Si assuma N' essere l'intervallo $0 < \xi < 1$ e le funzioni trascurabili essere del tipo

$$a\xi^{-(1/2)} + b \left(\log \log \frac{1}{\xi} \right)^2 + o(1) ,$$

dove a e b sono costanti arbitrarie e $o(1)$ è una funzione che tende a 0 con ξ che tende a 0. Allora N è una neutrix poiché nell'intervallo $0 < \xi < 1$

$$a\xi^{-(1/2)} + b \left(\log \log \frac{1}{\xi} \right)^2 + o(1) = \gamma ,$$

con γ costante indipendente da ξ , implica $a = b = 0$ e dunque $\gamma = 0$. Si ha per esempio:

$$N - \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(3\xi^{-(1/2)} + 2 \left(\log \log \frac{1}{\xi} \right)^2 + \sqrt{9 + \xi} \right) = 3 ,$$

poiché $\sqrt{9 + \xi} - 3 = o(1)$, cioè è una funzione che tende a 0 con ξ che tende a 0.

Risulta ovvio che in base a questa definizione di limite, esso dipenda dalla scelta delle funzioni trascurabili e perciò dalla neutrix in questione, cioè una data funzione può ammettere limiti diversi, o anche non ammettere affatto limite, in neutrices diverse.

La definizione così data di neutrix limit risulta molto utile poiché si può sempre costruire una neutrix tale per cui data una certa funzione il neutrix limit esista. Vediamo come:

sia $f(\xi)$ una funzione con dominio N' su un dato spazio topologico e sia b un punto limite non appartenente a N' ; sia N'' un range con una topologia tale per cui dato un elemento $\alpha \in N''$ e dato un numero naturale n , esiste ed è unico un elemento $\beta \in N''$ tale che α sia la somma di n termini β . Con questa proprietà una data funzione $g(\xi)$ che per $\xi \rightarrow b$ tende a l' ha la proprietà che dato k razionale allora $kg(\xi)$ tende a kl' .

Per ogni funzione che per $\xi \rightarrow b$ tende a un limite finito l' è possibile costruire una neutrix tale che il neutrix limit per $\xi \rightarrow b$ di $f(\xi)$ è proprio l' . Infatti basta scegliere la neutrix tale per cui le funzioni trascurabili sono quelle che per $\xi \rightarrow b$ tendono a 0.

Consideriamo adesso il caso in cui la funzione $f(\xi)$ non abbia un limite finito per $\xi \rightarrow b$. Sia l un numero arbitrario e sia N la neutrix con dominio N' e funzioni trascurabili date da $k(f(\xi) - l) + o(1)$ dove k è un numero razionale e $o(1)$ indica una funzione di ξ che tende a 0 per $\xi \rightarrow b$ in N' . Si osservi come la condizione di neutrix sia soddisfatta infatti

$$k(f(\xi) - l) + o(1) = \gamma$$

implica $k = 0$ altrimenti $f(\xi)$ tenderebbe al limite finito $\frac{\gamma}{k} + l$ contrariamente all'ipotesi di partenza. Perciò la costante γ tenderebbe a 0 per $\xi \rightarrow b$ e perciò è uguale a 0, verificando così la condizione di neutrix.

Ovviamente si ha

$$f(\xi) = l + (f(\xi) - l) ,$$

dove $(f(\xi) - l)$ è funzione trascurabile, perciò

$$N - \lim_{\xi \rightarrow b} f(\xi) = l .$$

Allo stesso modo ogni funzione $g(\xi)$ tale per cui per $\xi \rightarrow b$ esiste un limite finito l' , si può scrivere come

$$g(\xi) = l' + o(1) ,$$

dove il secondo termine è una funzione trascurabile in N così che il neutrix limit per $\xi \rightarrow b$ esista e sia uguale a l' .

Questo risultato si può facilmente generalizzare ottenendo: dato un insieme N' col punto limite $b \notin N'$, il range N'' e infinite funzioni $f_h(\xi)$ con $h = 1, 2, \dots$ si può costruire una neutrix con dominio N' tale che $\forall h, f_h(\xi)$ ammetta il neutrix limit l' per $\xi \rightarrow b$, con l'accorgimento che per ogni funzione che con la data topologia ammette limite finito l' esiste il neutrix limit che vale proprio l' .

La prova di questo fatto si fa mostrando che $\forall h \geq 0$ e intero esiste una neutrix N_h con le seguenti proprietà:

1. ogni funzione $f_1(\xi), \dots, f_h(\xi)$ ammette un $N_h - \lim$;
2. ogni funzione che per $\xi \rightarrow b$ ammette un limite finito l' in accordo con la data topologia, ammette un $N_h - \lim$ uguale a l' ;
3. se $h \geq 2$, per ogni funzione $\nu(\xi)$ trascurabile in N_{h-1} anche $k\nu(\xi)$ è trascurabile in N_{h-1} e le funzioni trascurabili in N_{h-1} lo sono anche in N_h ;
4. se $h \geq 2$, ogni funzione che possiede per $\xi \rightarrow b$ un $N_{h-1} - \lim$ finito uguale a l' allora ha anche $N_h - \lim$ finito e uguale a l' .

Si definisce adesso una neutrix N con le funzioni trascurabili date dalla proprietà che ogni funzione sia trascurabile in almeno una delle neutrices N_h ; si osserva come N sia gruppo commutativo, infatti date due funzioni trascurabili in N esiste un h tale per cui esse siano entrambe trascurabili in N_h , dunque è trascurabile anche la loro somma o differenza che dunque lo è anche in N . Inoltre si osserva come sia soddisfatta la condizione di neutrix poiché se una funzione trascurabile in N è uguale a una costante γ , visto che è trascurabile in almeno uno degli N_h si ha che $\gamma = 0$. Questa neutrix N possiede le proprietà prima elencate e mostra dunque come si possa costruire una neutrix tale per cui il $N - \lim$ di un set di funzioni esista sempre.

2.4 Distribuzioni.

Sia $s \in \mathbb{N}$, si considerino s neutrices N_1, \dots, N_s con stesso range N'' e variabili distinte ξ_1, \dots, ξ_s . Si introduce la funzione $f(\xi_1, \dots, \xi_s)$ definita per ogni scelta di $\xi_\sigma \in N'_\sigma$, $\sigma = 1, \dots, s$ tale che $f(\xi_1, \dots, \xi_s) \in N''$.

L'insieme d formato da tutte le funzioni

$$f(\xi_1, \dots, \xi_s) + \nu_1(\xi_1) + \dots + \nu_s(\xi_s) ,$$

dove $\nu_\sigma(\xi_\sigma)$ è funzione arbitraria trascurabile in N_σ è detto *distribuzione con neutrices* $N_1 \cdots N_s$ generata dalla funzione $f(\xi_1, \dots, \xi_s)$ e si denota con

$$\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle .$$

Due funzioni in d sono uguali a meno di termini trascurabili in N_1, \dots, N_s e la differenza tra due di queste funzioni si può considerare come un insieme di s termini, il primo trascurabile in N_1 , il secondo in N_2 , ... , l'ultimo trascurabile in N_s . Perciò due funzioni generatrici di d sono uguali a meno di termini trascurabili e allo stesso modo se f è funzione generatrice di d ogni funzione uguale a f a meno di termini trascurabili è una funzione generatrice di d .

Sia $r \leq s$ l'intero positivo più piccolo tale che la distribuzione d abbia funzioni generatrici che dipendono da solo r delle s variabili ξ_1, \dots, ξ_s , r è detto *ordine della distribuzione* d . Perciò una distribuzione di ordine 0 può essere generata da una costante, una distribuzione di ordine 1 può essere generata da una funzione $f(\xi_\alpha)$ con $\alpha \leq s$. Risulta ovvio che r può essere al massimo uguale al numero di neutrices che compaiono nella distribuzione.

Si indicano con $N_{\alpha_1}, \dots, N_{\alpha_r}$ le neutrices di base della distribuzione e con $\phi(\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_r})$ una funzione di base generatrice. Dalla definizione data risulta ovvio che data una distribuzione le neutrices di base e l'ordine sono univocamente determinati mentre non le funzioni di base, infatti se $\phi(\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_r})$ è funzione di base, ogni funzione uguale a ϕ a meno di termini trascurabili sarà funzione di base. Infatti se ϕ è funzione di base e χ è uguale a ϕ si ha:

$$\phi(\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_r}) - \chi(\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_r}) = \sum_{\sigma=1}^s \nu_\sigma(\xi_\sigma) ,$$

dove $\nu_\sigma(\xi_\sigma)$ è trascurabile in N_σ se σ compare in $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ e identicamente nulla se σ non compare in $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Perciò $\phi - \chi$ è data da una somma di termini trascurabili in $N_{\alpha_1}, \dots, N_{\alpha_r}$, perciò χ dipende solo dalle variabili $\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_r}$ ed è perciò funzione generatrice di d .

Con queste definizioni si può introdurre il concetto di equivalenza tra due distribuzioni: due distribuzioni $\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle$ e $\langle g; P_1, \dots, P_t \rangle$ sono

dette *equivalenti* se e solo se hanno lo stesso ordine, le stesse neutrices di base e le stesse funzioni generatrici di base.

Cerchiamo di chiarire questa definizione: siano ξ_1, \dots, ξ_s le variabili delle neutrices N_1, \dots, N_s e η_1, \dots, η_t le variabili delle neutrices P_1, \dots, P_t , la prima distribuzione può essere generata da una funzione $\phi(\xi_{\alpha_1}, \dots, \xi_{\alpha_r})$ dipendente da r variabili tra le ξ_1, \dots, ξ_s e la seconda distribuzione può essere generata da una funzione $\psi(\eta_{\beta_1}, \dots, \eta_{\beta_r})$ dipendente da r variabili tra le η_1, \dots, η_t . Il fatto che le due distribuzioni abbiano le stesse neutrices di base implica che si possa fare un riordinamento dell'insieme β_1, \dots, β_r tale che

$$N_{\alpha_\rho} = P_{\beta_\rho} \quad \text{e dunque} \quad \xi_{\alpha_\rho} = \eta_{\beta_\rho} \quad , \quad \rho = 1, \dots, r .$$

L'ultima richiesta nella definizione significa che le funzioni che generano la prima distribuzione formano lo stesso insieme delle funzioni che generano la seconda e questa richiesta è equivalente a dire che ogni funzione di base della prima distribuzione è uguale a ogni funzione di base della seconda distribuzione sempre a meno di termini trascurabili.

Si osserva come questa definizione di equivalenza, in base alle definizioni di neutrices date, sia riflessiva, simmetrica e transitiva.

Vediamo qualche semplice esempio di equivalenza tra distribuzioni per chiarire le idee:

Esempio 2.5

Si considerino due distribuzioni $\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle$ e $\langle g; P_1, \dots, P_t \rangle$ di ordine 0; essendo di ordine 0 esse sono generate da una costante. Queste due distribuzioni sono uguali tra loro in base alla definizione data se e solo se sono generate dalla stessa costante α :

$$\langle \alpha; N_1, \dots, N_s \rangle = \langle \alpha; P_1, \dots, P_t \rangle$$

e in questo caso è la sola costante α a contare per la definizione delle distribuzioni.

Esempio 2.6

Siano N_1, \dots, N_s s neutrices con s variabili distinte ξ_1, \dots, ξ_s e sia $f(\xi_1, \dots, \xi_{s-1})$ funzione indipendente da ξ_s allora si ha:

$$\langle f; N_1, \dots, N_{s-1} \rangle = \langle f; N_1, \dots, N_s \rangle$$

poiché hanno stesso ordine, stesse neutrices di base e stessa funzione generatrice.

Esempio 2.7

Si consideri una distribuzione di ordine 0, che può essere perciò generata da una costante γ ; sia b punto limite del dominio N' di N tale che $b \notin N'$, allora per ogni funzione generatrice $f(\xi)$ della distribuzione si ha:

$$N - \lim_{\xi \rightarrow b} f(\xi) = \gamma ,$$

poiché si ha $f(\xi) = \gamma + \nu(\xi)$ dove $\nu(\xi)$ è funzione trascurabile in N .

Occupiamoci adesso di definire alcune operazioni tra le distribuzioni.

2.4.1 Addizione e Sottrazione.

Si considerino due distribuzioni $\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle$ e $\langle g; P_1, \dots, P_t \rangle$ e siano Q_1, \dots, Q_v le distribuzioni distinte dell'insieme $(N_1, \dots, N_s; P_1, \dots, P_t)$. Ovviamente risulta:

$$\max(s, t) \leq v \leq s + t .$$

Si definisce la somma tra le due distribuzioni come:

$$\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle + \langle g; P_1, \dots, P_t \rangle = \langle f + g; Q_1, \dots, Q_v \rangle .$$

Dimostriamo ora come questa definizione sia ben posta, cioè come se al posto delle due distribuzioni del termine sinistro si usano distribuzioni equivalenti si ottenga una distribuzione equivalente al termine destro della definizione.

Se le due distribuzioni da sommare sono scritte nella loro forma irriducibile $\langle \phi; M_1, \dots, M_u \rangle$ e $\langle \chi; R_1, \dots, R_w \rangle$ allora si ha $f = \phi + \mu$ e $g = \chi + \rho$ dove μ e ρ sono funzioni trascurabili rispettivamente in N_1, \dots, N_s e P_1, \dots, P_t tali che $\mu + \rho$ sia trascurabile in Q_1, \dots, Q_v . Perciò il termine destro della definizione è equivalente a $\phi + \chi$ a meno di termini trascurabili e la dimostrazione è completata.

Risulta evidente come la definizione data sia commutativa e associativa, valgono perciò:

$$\begin{aligned} \langle f; N_1, \dots, N_s \rangle + \langle g; P_1, \dots, P_t \rangle &= \langle g; P_1, \dots, P_t \rangle + \langle f; N_1, \dots, N_s \rangle \\ (\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle + \langle g; P_1, \dots, P_t \rangle) + \langle h; R_1, \dots, R_u \rangle &= \\ = \langle f; N_1, \dots, N_s \rangle + (\langle g; P_1, \dots, P_t \rangle + \langle h; R_1, \dots, R_u \rangle) . \end{aligned}$$

Analogamente la sottrazione tra due distribuzioni è definita come:

$$\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle - \langle g; P_1, \dots, P_t \rangle = \langle f - g; Q_1, \dots, Q_v \rangle$$

e con queste definizioni le distribuzioni formano un gruppo commutativo additivo.

2.4.2 Principio di permanenza.

Introduciamo una nuova notazione:

$$\langle f; N_1, \dots, N_s \rangle = f(N_1, \dots, N_s) .$$

Questa notazione è piuttosto naturale poiché riprende la notazione funzionale $f(\xi_1, \dots, \xi_s)$ e la riadatta alla distribuzione generata da f con neutrices N_1, \dots, N_s .

Vediamo un esempio dell'utilizzo di questa notazione:

Esempio 2.7

Si consideri la neutrix N con dominio $N' = [k; +\infty[$, $k \in \mathbb{R}$, con funzioni trascurabili del tipo $a\xi + b\sqrt{\xi} + o(1)$ con a e b costanti arbitrarie e $o(1)$ funzione che tende a 0 per $\xi \rightarrow \infty$. Allora si ha:

$$f(N) = \sqrt{N+1} = 0 \quad \text{e} \quad g(N) = N + 1 = 1$$

poiché

$$f(\xi) = \sqrt{\xi+1} = \sqrt{\xi} + o(1) \quad \text{e} \quad g(\xi) = \xi + 1 ,$$

dove ξ , $\sqrt{\xi}$ e $o(1)$ sono trascurabili.

Si noti come non valga $(\sqrt{N+1})^2 \neq N + 1$, d'altronde non abbiamo neanche definito il quadrato di una distribuzione.

Con questa notazione segue il *Principio di permanenza*: siano N_1, \dots, N_s neutrices di variabili distinte ξ_1, \dots, ξ_s e si supponga valere $\forall \xi_\sigma \in N'_\sigma$ ($\sigma = 1, \dots, s$):

$$f(\xi_1, \dots, \xi_s) = g(\xi_1, \dots, \xi_s)$$

allora vale anche

$$f(N_1, \dots, N_s) = g(N_1, \dots, N_s) ,$$

perciò un'identità valida in senso funzionale è valida anche in senso distribuzionale.

2.4.3 Prodotto tra distribuzioni.

In questa sezione si vuole mostrare come la definizione del prodotto tra distribuzioni non sia banale come la somma e ci si concentra perciò nell'analizzare le problematiche che si incontrano nel tentativo di una definizione coerente.

Come visto nelle sezioni precedenti un'affermazione del tipo

$$f(N_1, \dots, N_s) = \sum_{h=1}^s f_h(N_1, \dots, N_s) ,$$

resta vera se $f(N_1, \dots, N_s)$ è rimpiazzata con una distribuzione equivalente e se anche le $f_h(N_1, \dots, N_s)$ sono rimpiazzate da distribuzioni equivalenti. Esprimiamo questo fatto dicendo che vale un "*Principio di sostituzione*". Cerchiamo di vedere se un tale risultato vale anche per il prodotto limitandoci al caso $s = 1$ per una notazione più leggera.

Sia N una neutrix il cui range N'' sia un anello (non necessariamente commutativo). Siano $f(N)$ e $g(N)$ distribuzioni e si assuma

$$u(N) = f(N)g(N) .$$

Questo vuol dire che $u(\xi) - f(\xi)g(\xi)$ è trascurabile in N . Ci si chiede se anche in questo caso valga un principio di sostituzione, cioè se $v(N) = u(N)$, $h(N) = f(N)$, $j(N) = g(N)$ si vuole vedere in che condizioni valga anche

$$v(N) = h(N)j(N) .$$

Ponendo $v(\xi) = u(\xi) + \nu(\xi)$, $h(\xi) = f(\xi) + \sigma(\xi)$, $j(\xi) = g(\xi) + \tau(\xi)$ si ottiene

$$u(\xi) + \nu(\xi) = f(\xi)g(\xi) + f(\xi)\tau(\xi) + \sigma(\xi)g(\xi) + \sigma(\xi)\tau(\xi) ,$$

da cui

$$u(\xi) - f(\xi)g(\xi) = f(\xi)\tau(\xi) + \sigma(\xi)g(\xi) + \sigma(\xi)\tau(\xi) - \nu(\xi) .$$

Affinché valga il principio di sostituzione si deve avere che $f(\xi)\tau(\xi)$, $\sigma(\xi)g(\xi)$ e $\sigma(\xi)\tau(\xi)$ siano trascurabili e questa è perciò condizione sufficiente. Vediamo che è anche condizione necessaria: se vale il principio di sostituzione allora

$$f(\xi)\tau(\xi) + \sigma(\xi)g(\xi) + \sigma(\xi)\tau(\xi)$$

è trascurabile per ogni scelta delle funzioni $\tau(\xi)$ e $\sigma(\xi)$. Se si sceglie $\tau(\xi) = 0$ e si sostituisce nell'espressione precedente si ottiene che $\sigma(\xi)g(\xi)$ è trascurabile e analogamente se si sceglie $\sigma(\xi) = 0$ si ottiene che $f(\xi)\tau(\xi)$ è trascurabile sempre dalla relazione precedente segue che anche $\sigma(\xi)\tau(\xi)$ è trascurabile. Perciò la condizione data è anche necessaria. Vediamo un esempio per il quale non vale il principio di sostituzione:

Esempio 2.8 Sia data la neutrix N con dominio $\xi > b$, $b \in \mathbb{R}$, range \mathbb{R} e funzioni trascurabili del tipo $c\xi + o(1)$ dove $c \in \mathbb{R}$ e $o(1)$ indica una funzione che tende a 0 per $\xi \rightarrow \infty$. In questo caso il prodotto tra ξ e $\frac{1}{\xi}$, entrambe trascurabili, non è trascurabile. Infatti date le funzioni

$$f(\xi) = \xi, \quad g(\xi) = \frac{1}{\xi}, \quad h(\xi) = 0, \quad j(\xi) = 0,$$

si ha

$$f(N) = h(N), \quad g(N) = j(N), \quad f(N)g(N) = 1, \quad h(N)j(N) = 0.$$

Questo fenomeno è connesso al fatto che $f(N)g(N)$ non è definito come prodotto tra le distribuzioni $f(N)$ e $g(N)$, ma come distribuzione generata da $f(\xi)g(\xi)$.

Se la condizione necessaria e sufficiente ricavata precedentemente vale allora $f(N)g(N)$ è univocamente determinato dalle due distribuzioni $f(N)$ e $g(N)$ e si può chiamare $f(N)g(N)$ prodotto delle distribuzioni $f(N)$ e $g(N)$. Se la condizione non è soddisfatta allora $f(N)g(N)$ non è univocamente definito dalle distribuzioni $f(N)$ e $g(N)$ e non ha più senso chiamare $f(N)g(N)$ prodotto delle distribuzioni $f(N)$ e $g(N)$.

Perciò nell'analisi con le neutrix non sempre si può sostituire un'espressione o parte di essa con un'espressione equivalente. Questo fatto apparentemente strano in realtà è all'ordine del giorno nell'analisi standard infatti basti pensare alla teoria di Lebesgue degli integrali: due funzioni sono uguali in un dato intervallo se sono uguali q. d. perciò data $f(x) = g(x)$ in $a < x < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ si può avere $f(x_0) \neq g(x_0)$, $x_0 \in]a, b[$ e in questo caso non vale il principio di sostituzione.

2.4.4 Trasformazioni.

Cerchiamo ora di descrivere un formalismo generale che ci permetta di verificare l'applicabilità e l'azione di operatori lineari su distribuzioni per poi da questo far discendere operazioni più complesse come il limite o la differenziazione di una distribuzione.

Si consideri un gruppo commutativo additivo U e un operatore lineare λ . Si dice che λ può essere applicato a una funzione f se per ogni scelta possibile dell'argomento di f , $\lambda f \in U$.

Si vuole definire ora l'applicazione di un operatore lineare su una distribuzione; sia d distribuzione con s neutrices distinte N_1, \dots, N_s non necessariamente di base, si impone la seguente condizione:

Condizione A: Sia λ applicabile su una funzione $\nu(\xi_1, \dots, \xi_s)$ trascurabile in N_1, \dots, N_s allora anche $\lambda \nu(\xi_1, \dots, \xi_s)$ è trascurabile in N_1, \dots, N_s .

Con questa condizione se g è funzione generatrice sulla quale si può applicare l'operatore λ allora la funzione λg genera la distribuzione d^* con neutrices N_1, \dots, N_s che è indipendente dalla scelta della funzione generatrice g .

Si osservi come date la distribuzione d e l'operatore λ la distribuzione d^* non sia univocamente definita poiché di d possiamo conoscere solo le funzioni di base e le neutrici di base ma nelle nostre ipotesi abbiamo considerato la possibilità che l'insieme N_1, \dots, N_s possa contenere neutrici non di base. Se chiamiamo le eventuali neutrici non di base *ausiliarie* allora la distribuzione d^* è univocamente determinata se conosciamo d , l'operatore λ e le neutrici ausiliarie e la chiamiamo la " λ - trasformata" di d e la indichiamo con λd . Viceversa se l'operatore λ non può essere applicato a nessuna funzione generatrice di d allora non possiamo definire la trasformata λd .

Se esiste almeno una funzione generatrice g sulla quale si possa applicare l'operatore λ k volte ($k \in \mathbb{N}$) allora esiste $\lambda^k d$ e $\forall h, j \in \mathbb{N} : h + j \leq k$ vale $\lambda^h \lambda^j d = \lambda^{h+j}$.

Se vale la condizione A per due operatori λ e μ e se esiste almeno una funzione generatrice g tale per cui si ha $\lambda\mu g = \mu\lambda g$ allora $\lambda\mu d$ e $\mu\lambda d$ esistono e vale $\lambda\mu d = \mu\lambda d$.

Con queste definizioni le proprietà delle distribuzioni risultano particolarmente semplici poiché possono essere determinate a partire da funzioni generatrici semplici. Inoltre se la condizione A non vale si può operare una nuova scelta delle neutrici affinché valga.

2.4.5 Limite di distribuzioni.

Sia U gruppo commutativo additivo i cui elementi $\alpha(x)$ dipendono dalla variabile x definita su un certo insieme X ; sia λ operatore lineare che trasforma $\alpha(x) \in U$ in $\bar{\alpha} = \lambda\alpha(x) \in U$ indipendente da x . Si chiama $\alpha(x)$ *funzione convergente*, la sua immagine $\bar{\alpha}$ si chiama *limite di α* e si indica

$$\lim_x \alpha(x) = \bar{\alpha}.$$

La linearità dell'operatore garantisce la proprietà base per la quale la somma dei limiti è uguale al limite della somma.

Si considerino s neutrici N_σ i cui domini sono indipendenti da x ma le cui funzioni trascurabili $\nu(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ possono dipendere da x e i cui ranges sono sottogruppi di U . Per l'operatore lineare $\lambda\alpha(x) = \lim_x \alpha(x)$ la condizione A si riscrive come:

Condizione A: Se $\nu(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ è funzione trascurabile in N_1, \dots, N_s e ha la proprietà che $\lim_x \nu(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ esiste per ogni scelta di $\xi_\sigma \in N'_\sigma$ allora questo limite è trascurabile in N_1, \dots, N_s .

Sia $f(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ definita per ogni scelta di $\xi_\sigma \in N'_\sigma$ e $x \in X$ con la proprietà che $f(\xi_1, \dots, \xi_s, x) \in U$. Se la distribuzione $d(x)$ di neutrici N_1, \dots, N_s generata da $f(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ ammette almeno una funzione generatrice $g(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ tale che $\lambda g(\xi_1, \dots, \xi_s, x) = \lim_x g(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ esista,

allora questo limite genera, con le neutrices N_1, \dots, N_s , la distribuzione $\lim_x d(x)$ ch e  e univocamente determinata da d e dalle neutrices ausiliarie.

2.4.6 Differenziazione di una distribuzione.

Essendo l'operazione di derivazione un'operazione lineare possiamo applicare la teoria generale esposta precedentemente, partendo da funzioni derivabili rispetto a x definite su un certo dominio X e costruendo la derivata distribuzionale della distribuzione $D(x)$.

Sia U gruppo commutativo additivo i cui elementi $\alpha(x)$ sono funzioni di x ; si introduce l'operatore lineare λ che trasforma $\alpha(x)$ in $\bar{\alpha} = \lambda\alpha(x) \in U$. $\alpha(x)$  e detto *funzione differenziabile* e la sua immagine $\bar{\alpha}$ si indica con

$$\bar{\alpha} = \frac{d\alpha(x)}{dx}.$$

Si considerino s neutrices N_σ i cui domini sono indipendenti da x ma le cui funzioni trascurabili $\nu(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ possono dipendere da x e i cui ranges sono sottogruppi di U . Per l'operatore lineare $\lambda\alpha(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx}$ la condizione A assume la forma:

Condizione A: Se una funzione $\nu(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ trascurabile in N_1, \dots, N_s  e differenziabile per ogni scelta di $\xi_\sigma \in N_\sigma$ e $x \in X$ allora $\frac{\partial \nu}{\partial x}$  e trascurabile in N_1, \dots, N_s .

Sia $f(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ definita per ogni scelta di $\xi_\sigma \in N'_\sigma$ e $x \in U$ con la propriet a che $f(\xi_1, \dots, \xi_s, x) \in U$. Se la distribuzione $D(x)$ di neutrices N_1, \dots, N_s generata da $f(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ ammette almeno una funzione generatrice $g(\xi_1, \dots, \xi_s, x)$ differenziabile rispetto a x allora $\frac{\partial g}{\partial x}$ genera la distribuzione $\frac{dD(x)}{dx}$ univocamente determinata dalla distribuzione $D(x)$ e dalle neutrices ausiliarie.

2.5 Neutrix di Schwartz.

Si consideri l'intervallo chiuso $a \leq x \leq b$, una *Neutrix di Schwartz* in quest'intervallo  e una neutrix S con dominio i numeri interi positivi $\xi = 1, 2, \dots$, con range le funzioni di x definite nell'intervallo $[a, b]$ e dove una funzione $\nu(\xi, x)$  e trascurabile in S se e solo se esiste un intero $k \geq 0$ tale che $\nu(\xi, x)$ sia quasi dappertutto in $[a, b]$ derivata k -esima rispetto a x di una funzione continua $\nu^{-k}(\xi, x)$ con la propriet a che per ogni funzione smussante $s(x)$ su $[a, b]$ vale

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b \nu^{(-k)}(\xi, x) s^{(k)}(x) dx = 0 ,$$

dove una funzione smussante $s(x)$ su un intervallo $a \leq x \leq b$ è una funzione infinitamente differenziabile per $-\infty < x < \infty$ e nulla per $x \leq a$ e $x \geq b$.

La definizione di una neutrix di Schwartz su un intervallo non chiuso (a, b) dove $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ è analoga ma si ha la condizione

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \nu^{(-k)}(\xi, x) s^{(k)}(x) dx = 0$$

per ogni intervallo chiuso $[\alpha, \beta]$, $\alpha > -\infty$, $\beta < \infty$.

Per verificare che la condizione di neutrix sia soddisfatta si usa il seguente lemma:

Lemma: Sia $k \geq 0$ intero, se $u(x)$ funzione continua nell'intervallo $a \leq x \leq b$ e soddisfa per ogni funzione smussante $s(x)$ la relazione

$$\int_a^b u(x) s^{(k)}(x) dx = 0 ,$$

allora $u(x)$ è un polinomio di grado $\leq k - 1$.

Si consideri il caso della neutrix di Schwartz su un intervallo chiuso e si consideri una funzione trascurabile $\nu(\xi, x) = \nu(x)$ cioè indipendente da ξ : applicando il lemma precedente dalla condizione

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_a^b \nu^{(-k)}(\xi, x) s^{(k)}(x) dx = 0$$

si ottiene che $\nu^{(-k)}(x)$ è un polinomio di grado $\leq k - 1$. Essendo $\nu(x)$ derivata k -esima di $\nu^{(-k)}$ quasi dappertutto segue che $\nu(x)$ sia nulla quasi dappertutto.

Si consideri ora il caso della neutrix di Schwartz su un intervallo eventualmente illimitato e si consideri anche in questo caso una funzione trascurabile $\nu(\xi, x) = \nu(x)$ cioè indipendente da ξ : applicando il lemma precedente, con argomentazioni analoghe si dimostra che $\nu(x)$ è nulla quasi dappertutto per ogni intervallo chiuso $\alpha \leq x \leq \beta$ contenuto in (a, b) e dunque nulla quasi dappertutto in (a, b) . Abbiamo così verificato la condizione di neutrix in entrambi i casi.

2.5.1 Distribuzioni di Schwartz.

Una *distribuzione di Schwartz* è una distribuzione che ha per neutrix una neutrix di Schwartz. Due distribuzioni sull'intervallo chiuso $a \leq x \leq b$ generate dalle funzioni $f(\xi, x) = f(x)$ e $g(\xi, x) = g(x)$ sono uguali se e solo se esiste un intero $k \geq 0$ tale che $f(x) - g(x)$ è quasi dappertutto derivata k -esima di una funzione $(f(x) - g(x))^{(-k)}$ con la proprietà che per ogni funzione smussante $s(x)$ vale

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^{(-k)} s(x) dx = 0$$

e dunque $f(x) = g(x)$ q.d.

Questa definizione di uguaglianza è identica alla condizione ricavata da Schwartz nello studio delle distribuzioni come funzionali lineari, infatti, come lui stesso dimostrò, le sue distribuzioni sono caratterizzate da una funzione su $a \leq x \leq b$ e da un intero $k \geq 0$. Consideriamo due distribuzioni caratterizzate dallo stesso intero k e da due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, allora $f(x) - g(x)$ è quasi dappertutto derivata k -esima di una funzione $(f(x) - g(x))^{(-k)}$ e per ogni funzione smussante vale

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^{(-k)} s(x) dx = 0 .$$

Questo significa che su un intervallo chiuso $a \leq x \leq b$ c'è una corrispondenza 1-1 tra le distribuzioni introdotte da Schwartz e le distribuzioni introdotte col metodo delle neutrices generate da funzioni indipendenti dal parametro ξ . Allo stesso modo il discorso si può estendere considerando distribuzioni su un intervallo eventualmente non limitato col metodo delle neutrices ottenendo anche in questo caso una corrispondenza 1-1 con le distribuzioni introdotte da Schwartz.

Capitolo 3

Prodotto di distribuzioni.

3.1 Introduzione.

Il problema del prodotto tra funzioni generalizzate non è un problema risolto, non esiste perciò una teoria univoca che raccolga definizioni e teoremi consistenti e del tutto generali. Esistono piuttosto varie teorie o metodi di affrontare il problema, ognuno dei quali cerca di affrontare il problema in modo esaustivo.

In questo capitolo analizziamo due di questi metodi, il primo metodo, proposto da Fisher [3], affronta il prodotto tra distribuzioni partendo dal prodotto di funzioni adoperando poi un processo di limite; il secondo metodo, proposto da Güttinger [6], applica le distribuzioni su sottospazio “ad hoc” di \mathcal{D} per poi generalizzare i risultati su \mathcal{D} .

3.2 Metodo Fisher.

Si usa la notazione \mathcal{D}_m per indicare lo spazio funzionale \mathcal{D} introdotto nel primo capitolo di funzioni a m variabili e il suo duale \mathcal{D}'_m indica il relativo spazio di distribuzioni che agiscono su \mathcal{D}_m .

Cerchiamo ora di definire [3] [4] un prodotto commutativo tra distribuzioni in \mathcal{D}' , quindi in uno spazio 1-dimensionale. Si consideri innanzitutto una funzione $\rho \in C_0^\infty$ così definita:

$$\text{i) } \rho(x) = 0, \quad |x| \geq 1,$$

$$\text{ii) } \rho(x) \geq 0,$$

$$\text{iii) } \rho(x) = \rho(-x),$$

$$\text{iv) } \int_{-1}^1 \rho(x) dx = 1 .$$

La funzione δ_n definita come $\delta_n(x) = n\rho(nx)$ per $n \in \mathbb{N}$ identifica una successione di funzioni che converge alla distribuzione δ di Dirac come mostrato nell'esempio 1.1. Data una distribuzione generica $T \in \mathcal{D}'$ segue che la funzione T_n definita da

$$T_n(x) = (T * \delta_n)(x) = \langle T(x - y), \delta_n(y) \rangle$$

identifica una successione di funzioni che converge alla distribuzione T .

Si può a questo punto dare una prima definizione di prodotto tra due distribuzioni:

Def. 3.1: Siano T, P distribuzioni in \mathcal{D}' e siano $T_n = T * \delta_n$, $P_n = P * \delta_n$. Si dice che il *prodotto* $T \cdot P$ esiste ed è uguale alla distribuzione H sull'intervallo aperto (a, b) dove $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ se e solo se

$$\langle T \cdot P, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n P_n, \phi \rangle = \langle H, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b)$$

ed è un'operazione ovviamente commutativa.

La seguente definizione fa uso delle neutrices per dare una definizione più generica di quella appena data:

Def. 3.2: Siano T, P distribuzioni in \mathcal{D}' e siano $T_n = T * \delta_n$, $P_n = P * \delta_n$. Si dice che il *prodotto neutrix* $T \circ P$ esiste ed è uguale alla distribuzione H sull'intervallo aperto (a, b) se e solo se

$$N - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n P_n, \phi \rangle = \langle H, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b),$$

dove la neutrix N ha dominio $N' = \mathbb{N}$ e range $N'' = \mathbb{R}$ con funzioni trascurabili date da combinazioni lineari finite delle funzioni

$$n^\lambda \ln^{r-1} n, \quad \ln^r n$$

con $\lambda > 0$ e $r = 1, 2, \dots$ e tutte le funzioni che convergono a 0 nel senso normale con n che tende all'infinito. Anche questa definizione dà luogo a un prodotto ovviamente commutativo.

La neutrix N sembra non avere alcuna giustificazione ma in realtà è una scelta naturale che risulta ottimale nella discussione di questo tema.

Si osserva come nel caso in cui valga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n P_n, \phi \rangle = \langle H, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(a, b),$$

allora il prodotto neutrix $T \circ P$ si riduce al prodotto $T \cdot P$ della definizione 3.1, quindi la definizione 3.2 è una generalizzazione della definizione 3.1.

Vediamo adesso un primo teorema sul prodotto di distribuzioni che riproduce la comune regola di Leibnitz:

Teor. 3.1: Siano T e P distribuzioni in \mathcal{D}' e si suppongano i prodotti neutrix $T \circ P$ e $T \circ P'$ (o $T' \circ P$) esistere nell'intervallo aperto (a, b) , allora esiste anche il prodotto neutrix $T' \circ P$ (o $T \circ P'$) e vale sullo stesso intervallo

$$(T \circ P)' = T' \circ P + T \circ P' .$$

Dim. 3.1: Essendo T_n e P_n funzioni infinitamente differenziabili vale

$$T'_n P_n = (T_n P_n)' - T_n P'_n ,$$

da cui per funzioni test arbitrarie ϕ vale

$$\langle T'_n P_n, \phi \rangle = \langle (T_n P_n)' - T_n P'_n, \phi \rangle .$$

A questa relazione segue che

$$\begin{aligned} N - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T'_n P_n \rangle &= N - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (T_n P_n)', \phi \rangle - N - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n P'_n, \phi \rangle = \\ &= \langle (TP)', \phi \rangle - \langle TP', \phi \rangle , \end{aligned}$$

da cui segue il risultato.

Occupiamoci ora di estendere le definizioni date e il precedente teorema a distribuzioni in \mathcal{D}'_m : la funzione $\delta_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ è ora definita come

$$\delta_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = n_1 \rho(n_1 x_1) n_2 \rho(n_2 x_2) \dots n_m \rho(n_m x_m) ,$$

con $n_1, \dots, n_m = 1, 2, \dots$, e dove $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$. In questo caso la funzione $\delta_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ identifica una successione di funzioni che tende alla distribuzione δ di Dirac m -dimensionale nel senso che

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{n_m \rightarrow \infty} \langle \delta_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}) \rangle = \phi(\mathbf{0}) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_m$$

col risultato indipendente dall'ordine con cui si effettuano i limiti.

Per una distribuzione arbitraria T si definisce la funzione $T_{\mathbf{n}}$ come

$$T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (T * \delta_{\mathbf{n}})(\mathbf{x}) = \langle T(\mathbf{x} - \mathbf{t}), \delta_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \rangle$$

con $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$. Segue che $\{T_{\mathbf{n}}\}$ è una successione di funzioni infinitamente differenziabili che converge a T nel senso che

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{n_m \rightarrow \infty} \langle T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}) \rangle = \langle T(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}) \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}'_m .$$

Anche in questo caso col risultato indipendente dall'ordine in cui si estraggono i limiti.

Per poter procedere alla generalizzazione delle definizioni date e del risultato ricavato dobbiamo premettere alcuni lemmi ricavati da Schwartz [5]

Lem. 3.2: Lo spazio vettoriale \mathcal{X}_m generato dalle funzioni $\phi_1(x_1) \dots \phi_m(x_m)$ con $\phi_1, \dots, \phi_m \in \mathcal{D}$ è denso in \mathcal{D}_m .

Lem. 3.3: Il prodotto di convoluzione di due prodotti diretti $f_1(\mathbf{x}) \times g_1(\mathbf{y})$ e $f_2(\mathbf{x}) \times g_2(\mathbf{y})$ è uguale al prodotto diretto dei prodotti di convoluzione $f_1 * f_2$ e $g_1 * g_2$, se i prodotti di convoluzione $f_1 * f_2$ e $g_1 * g_2$ esistono dove $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_m$ e $g_1, g_2 \in \mathcal{D}_r$, cioè

$$(f_1 \times g_1) * (f_2 \times g_2) = (f_1 * f_2) \times (g_1 * g_2) .$$

Lem. 3.4:

$$\int_t^{\frac{1}{n}} s^k \delta_n^{(q)}(s) ds = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k+i+1} k!}{i!} t^i \delta_n^{(q-k+i-1)}(t)$$

per $k = 0, 1, \dots, q-1$ e $q = 1, 2, \dots$ mentre

$$\int_t^{\frac{1}{n}} s^q \delta_n^{(q)}(s) ds = \sum_{i=1}^q \frac{(-1)^{q+i+1} q!}{i!} t^i \delta_n^{(i-1)}(t) + (-1)^q q! [1 - \Theta_n(t)]$$

per $q = 1, 2, \dots$, dove

$$\Theta_n(t) = \int_{-\frac{1}{n}}^t \delta_n(s) ds .$$

La seguente definizione generalizza la definizione 3.2:

Def. 3.3: Siano T e P distribuzioni in \mathcal{D}'_m , siano $T_{\mathbf{n}} = T * \delta_{\mathbf{n}}$ e $P_{\mathbf{n}} = P * \delta_{\mathbf{n}}$. Se H è una distribuzione in \mathcal{D}'_m tale che

$$N - \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \dots N - \lim_{n_m \rightarrow \infty} \langle T_{\mathbf{n}} P_{\mathbf{n}}, \phi \rangle = N - \lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \langle T_{\mathbf{n}} P_{\mathbf{n}}, \phi \rangle = \langle H, \phi \rangle$$

$\forall \phi \in \mathcal{X}_m$ con supporto contenuto nel poliintervallo aperto (\mathbf{a}, \mathbf{b}) dove $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ e H è indipendente dall'ordine con cui si prendono i limiti, allora si dice che il prodotto neutrix $T \circ P$ esiste ed è uguale ad H su (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .

Anche in questo caso se

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \langle T_{\mathbf{n}} P_{\mathbf{n}}, \phi \rangle = \langle H, \phi \rangle$$

$\forall \phi \in \mathcal{X}_m$ si dice semplicemente che il prodotto $T \cdot P = T \circ P$ esiste ed è uguale ad H .

Si osservi inoltre che la densità di \mathcal{X}_m in \mathcal{D}_m garantisca l'unicità di H .

In base a quest'ultima definizione si può generalizzare (con dimostrazione ovvia) il teorema 3.1 come segue:

Teor. 3.5: Siano T e P due distribuzioni in \mathcal{D}'_m e si suppongano esistere i prodotti neutrix $T \circ P$ e $T \circ \frac{\partial}{\partial x_i} P$ (o $\frac{\partial}{\partial x_i} T \circ P$) nel poliintervallo aperto (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Allora esiste anche il prodotto neutrix $\frac{\partial}{\partial x_i} T \circ P$ (o $T \circ \frac{\partial}{\partial x_i} P$) e vale

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (T \circ P) = \frac{\partial}{\partial x_i} T \circ P + T \circ \frac{\partial}{\partial x_i} P$$

sullo stesso intervallo.

Il seguente fondamentale teorema mostra come il prodotto neutrix di distribuzioni fattorizzabili sia anch'esso fattorizzabile e quindi permette di ricondurre il calcolo di prodotti complessi a calcoli di prodotti più semplici:

Teor. 3.6 (Teorema di scomposizione): Siano T e P distribuzioni in \mathcal{D}'_m tali che

$$T(\mathbf{x}) = T_1(x_1) \times \dots \times T_m(x_m), \quad P(\mathbf{x}) = P_1(x_1) \times \dots \times P_m(x_m),$$

con $T_1, \dots, T_m, P_1, \dots, P_m \in \mathcal{D}'$ e si suppongano esistere i prodotti neutrix $T_1 \circ P_1, \dots, T_m \circ P_m$ e siano uguali rispettivamente ad H_1, \dots, H_m . Allora il prodotto neutrix $T \circ P$ esiste e vale

$$T \circ P = H_1 \times \dots \times H_m.$$

In particolare, se esistono i prodotti $T_1 \cdot P_1, \dots, T_m \cdot P_m$, allora esiste il prodotto $T \cdot P$ e vale

$$T \cdot P = H_1 \times \dots \times H_m.$$

Dim. 3.6: Siano

$$T_{in_i}(x_i) = T_i(x_i) * \delta_{n_i}(x_i), \quad P_{in_i}(x_i) = P_i(x_i) * \delta_{n_i}(x_i) \quad i = 1, \dots, m$$

e siano

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= T(\mathbf{x}) * \delta_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = T_{1n_1}(x_1) \times \dots \times T_{mn_m}(x_m), \\ P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{x}) * \delta_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = P_{1n_1}(x_1) \times \dots \times P_{mn_m}(x_m). \end{aligned}$$

Applicando il lemma 3.3 si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\langle T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \phi_1(x_1) \dots \phi_m(x_m) \rangle = \prod_{i=1}^m \langle T_{in_i}(x_i) P_{in_i}(x_i), \phi_i(x_i) \rangle$$

$\forall \phi_1, \dots, \phi_m$. Essendo che i prodotti neutrix $T_i \circ P_i$ esistono e sono uguali ad H_i segue che:

$$\begin{aligned}
\langle T \circ P, \phi_1, \dots, \phi_m \rangle &= N - \lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \langle T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}), \phi_1(x_1) \dots, \phi_m(x_m) \rangle = \\
&= \prod_{i=1}^m N - \lim_{n_i \rightarrow \infty} \langle T_{in_i}(x_i) P_{in_i}(x_i), \phi_i(x_i) \rangle = \prod_{i=1}^m \langle H_i, \phi_i \rangle = \\
&= \langle H_1 \times \dots \times H_m, \phi_1 \dots \phi_m \rangle
\end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

Alla luce delle definizioni e dei risultati ottenuti occupiamoci ora di vedere alcuni esempi di prodotti tra distribuzioni.

3.2.1 Calcolo di prodotti.

Iniziamo con un prodotto di particolare interesse in campo fisico, il cui calcolo non richiede l'utilizzo del prodotto neutrix, limitandoci al caso unidimensionale per semplicità:

Teor. 3.7: Il prodotto $\delta(x)P\left(\frac{1}{x}\right)$ esiste in \mathcal{D}' e in particolare vale:

$$\delta(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\delta'(x).$$

Dim. 3.7: Si consideri la funzione $u_n(x)$ definita come segue:

$$u_n(x) = nu(nx) \text{ con } u(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)} \in L^1(\mathbb{R})$$

come visto nell'esempio 1.1 si ha $u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c\delta(x)$ dove $c = \int_{\mathbb{R}} dy u(y)$. In questo caso vale:

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} dy u(y) = \frac{1}{\pi} [\arctan(y)]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \implies u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \delta(x).$$

Sia ora $P\left(\frac{1}{x}\right)_n = P\left(\frac{1}{x}\right) * u_n$, vale:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{x}\right)_n &= P\left(\frac{1}{x}\right) * \frac{n}{\pi(x^2 n^2 + 1)} = \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{dy}{y} \frac{n}{\pi(n^2(x-y)^2 + 1)} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{dy}{y} \frac{n}{\pi(n^2(x-y)^2 + 1)^2} = I.
\end{aligned}$$

L'integrale I si calcola col metodo dei residui: complessificando $P\left(\frac{1}{x}\right)_n$ sostituendo la variabile reale x con $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e chiudendo il cammino

di integrazione con due semicirconferenze centrate nell'origine, una di raggio ϵ e l'altra di raggio R , nel limite $R \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ si ha:

$$I + I_\epsilon + I_R = 2\pi i \sum \text{Res } P \left(\frac{1}{z} \right)_n ,$$

dove I_ϵ e I_R sono gli integrali sulle semicirconferenze rispettivamente di raggi ϵ e R . Per il lemma del grande cerchio si ha $I_R = 0$; il calcolo dei residui è fatto sul polo $y = x + \frac{i}{n}$ e si ha

$$2\pi i \text{Res } P \left(\frac{1}{z} \right)_n = 2\pi i \frac{1}{x + \frac{i}{n}} \frac{n(y - x - \frac{i}{n})}{((x - y)n + i)((x - y)n - i)} = \frac{n}{nx + i} .$$

Infine vale:

$$I_\epsilon = -i\pi \frac{n}{\pi(x^2 n^2 + 1)} = \frac{-in}{x^2 n^2 + 1} .$$

A questo punto si ha il seguente risultato:

$$P \left(\frac{1}{z} \right)_n = I = \frac{n}{nx + i} + \frac{in}{x^2 n^2 + 1} = \frac{n^2 x}{n^2 x^2 + 1} .$$

Si consideri ora la funzione $v_n(x) = u'_n(x) = \frac{-2n^3 x}{\pi(n^2 x^2 + 1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta'(x)$, poiché $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta(x)$. Con questi risultati si può calcolare il prodotto delle due distribuzioni:

$$\begin{aligned} \delta(x) P \left(\frac{1}{x} \right) (x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) P \left(\frac{1}{x} \right)_n (x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 x}{\pi(n^2 x^2 + 1)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{-2n^3 x}{\pi(n^2 x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2} \delta'(x) , \end{aligned}$$

dimostrando così la tesi.

Consideriamo adesso un caso più complesso: sia $x_+^\lambda(x)$ la funzione così definita:

$$x_+^\lambda(x) = \begin{cases} x^\lambda & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} = x^\lambda \Theta(x)$$

avendo ridefinito la funzione di Heaviside spostando il caso $x = 0$ ottenendo

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} . \text{ Siano date ora le seguenti definizioni:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (r_1, \dots, r_m) , \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) , \\ (-1)^{\mathbf{r}} &= (-1)^{r_1 + \dots + r_m} , \quad \mathbf{r}! = r_1! \dots r_m! , \\ \mathbf{x}_+^{\mathbf{r}} &= (x_1)_+^{r_1} \times \dots \times (x_m)_+^{r_m} , \quad \mathbf{x}_-^{\mathbf{r}} = (-\mathbf{x})_+^{\mathbf{r}} , \\ \mathbf{x}_+^{\mathbf{p}} &= (x_1)_+^{p_1} \times \dots \times (x_m)_+^{p_m} , \quad \mathbf{x}_-^{\mathbf{p}} = (-\mathbf{x})_+^{\mathbf{p}} , \\ \delta^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}) &= \delta^{(r_1)}(x_1) \times \dots \times \delta^{(r_m)}(x_m) , \end{aligned}$$

allora vale il seguente risultato:

Teor. 3.8: Il prodotto neutrix $\mathbf{x}_+^{\mathbf{r}} \circ \delta^{(\mathbf{r}+\mathbf{p})}$ esiste in \mathcal{D}'_m per $r_1, p_1, \dots, r_m, p_m = 0, 1, 2, \dots$ e vale:

$$\mathbf{x}_+^{\mathbf{r}} \circ \delta^{(\mathbf{r}+\mathbf{p})} = \frac{(-1)^{\mathbf{r}} (\mathbf{r} + \mathbf{p})!}{2^m \mathbf{p}!} \delta^{(\mathbf{p})}(\mathbf{x}) .$$

Dim. 3.8: Si consideri innanzitutto il caso unidimensionale definendo

$$(x_+^r)_n = \int_{-\frac{1}{n}}^x (x-t)^r \delta_n(t) dt .$$

In base alle definizioni date segue che il supporto di $(x_+^r)_n \delta_n^{(r+p)}$ è contenuto nell'intervallo $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ e da ciò segue:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (x_+^r)_n \delta_n^{r+p}(x) x^k dx &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t) \int_t^{\frac{1}{n}} x^k (x-t)^r \delta_n^{(r+p)}(x) dx dt = \\ &= n^{p-k} \int_{-1}^1 \rho(u) \int_u^1 v^k (v-u)^r \rho^{(r+p)}(v) dv du , \end{aligned}$$

avendo effettuato i cambi di variabile $nt = u$ e $nx = v$. Essendo l'integrale una combinazione lineare di termini che tendono a 0 per $n \rightarrow \infty$ segue che:

$$N - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (x_+^r)_n \delta_n^{r+p}(x) x^k dx = 0$$

per $k = 0, 1, \dots, p-1$ e anche

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left| (x_+^r)_n \delta_n^{r+p}(x) x^k \right| dx = 0 .$$

Nel caso particolare in cui $k = p$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (x_+^r)_n \delta_n^{r+p}(x) x^p dx &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t) \int_t^{\frac{1}{n}} x^p (x-t)^r \delta_n^{(r+p)}(x) dx dt = \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t) \int_t^{\frac{1}{n}} x^{r+p} \delta_n^{(r+p)}(x) dx dt , \end{aligned}$$

essendo che gli altri integrali ottenuti sviluppando $(x-t)^r$ secondo la formula di Newton si annullano secondo il lemma 3.4. A questo punto applicando nuovamente il lemma 3.4 si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (x_+^r)_n \delta_n^{r+p}(x) x^p dx &= (-1)^{r+p} (r+p)! \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_n(t) (1 - \Theta_n(t)) dt = \\ &= \frac{(-1)^{r+p} (r+p)!}{2}. \end{aligned}$$

Sia adesso $\phi \in \mathcal{D}$ una funzione arbitraria, la possiamo espandere secondo:

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\phi^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{\phi^{(r)}(\xi x)}{r!} x^r,$$

dove $0 \leq \xi \leq 1$ e sfruttando quest'espansione insieme ai risultati ottenuti si ricava:

$$N - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle (x_+^r)_n \delta_n^{(r+p)}(x), \phi(x) \right\rangle = \frac{(-1)^{r+p} (r+p)!}{2p!} \phi^{(p)}(0)$$

da cui segue, sfruttando la definizione di derivata distribuzionale:

$$x_+^r \circ \delta^{(r+p)}(x) = \frac{(-1)^r (r+p)!}{2p!} \delta^{(p)}(x)$$

per $r, p = 0, 1, \dots$. La generalizzazione del teorema al caso multidimensionale avviene semplicemente applicando il teorema 3.6, così si è dimostrata la tesi.

Come corollario a questo teorema si ha il seguente risultato:

Coroll. 3.9: Il prodotto neutrix $\mathbf{x}_-^{\mathbf{r}} \circ \delta^{(\mathbf{r}+\mathbf{p})}$ esiste in \mathcal{D}'_m per $r_1, p_1, \dots, r_m, p_m = 0, 1, 2, \dots$ e vale:

$$\mathbf{x}_-^{\mathbf{r}} \circ \delta^{(\mathbf{r}+\mathbf{p})}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{r}+\mathbf{p})!}{2^m \mathbf{p}!} \delta^{(\mathbf{p})}(\mathbf{x}).$$

La dimostrazione segue direttamente sostituendo x con $-x$ nel risultato precedente.

Vediamo adesso un altro risultato:

Teor. 3.10: Il prodotto neutrix $\delta^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}) \circ \delta^{(\mathbf{p})}(\mathbf{x})$ esiste in \mathcal{D}'_m e vale:

$$\delta^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x}) \circ \delta^{(\mathbf{p})}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

per $r_1, p_1, \dots, r_m, p_m = 0, 1, \dots$

Dim. 3.10: Si consideri innanzitutto il caso unidimensionale $m = 1$; dal teorema 3.8 segue, ponendo $r = 0$:

$$x_+^0 \circ \delta^{(p)}(x) = \Theta(x) \circ \delta^{(p)}(x) = \frac{1}{2} \delta^{(p)}(x)$$

con $p = 1, 2, \dots$. Derivando entrambi i membri utilizzando il teorema 3.1 si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta(x) \delta^{(p)}(x) + \Theta(x) \delta^{(p+1)}(x) &= \frac{1}{2} \delta^{(p+1)}(x) \implies \\ \implies \delta(x) \delta^{(p)}(x) &= \frac{1}{2} \delta^{(p+1)}(x) - \Theta(x) \delta^{(p+1)}(x) = 0, \end{aligned}$$

per quanto visto preliminarmente.

A questo punto si procede usando il metodo dell'induzione matematica avendo già verificato il primo passo: si assuma valido

$$\delta^{(r)}(x) \delta^{(p)}(x) = 0$$

per un qualche r e per $p = 0, 1, \dots$. Usando ancora la stessa tecnica di prima, cioè derivando e usando il teorema 3.1 si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta^{(r+1)}(x) \delta^{(p)}(x) + \delta^{(r)}(x) \delta^{(p+1)}(x) &= 0 \implies \\ \implies \delta^{(r+1)}(x) \delta^{(p)}(x) &= 0 - \delta^{(r)}(x) \delta^{(p+1)}(x) = 0 \end{aligned}$$

per $p = 0, 1, \dots$. Perciò visto che assumendo valida la tesi per un certo r essa risulta valida anche per $r + 1$ la tesi risulta confermata. A questo punto il risultato si generalizza a più dimensioni sfruttando il teorema 3.6.

3.3 Metodo Güttinger.

Nella teoria delle distribuzioni abbiamo già trattato il caso del prodotto di una distribuzione T con una funzione infinitamente differenziabile α (si ricordi Def. 1.13):

$$\langle T\alpha, \phi \rangle = \langle T, \alpha\phi \rangle$$

e come mostrato questa definizione mantiene le usuali proprietà matematiche come l'associatività, la commutatività e la regola di Leibnitz per la differenziazione.

Come mostreremo più avanti non è possibile invece creare una teoria esatta sul prodotto tra distribuzioni che conservi tutte queste proprietà ma si può provare a costruire una teoria "massimale" che contenga un numero più alto possibile di proprietà di base [6]. Nella sezione precedente abbiamo introdotto il prodotto tra distribuzioni utilizzando un processo di limite, abbiamo cioè definito il prodotto tra particolari funzioni e poi con un passaggio al limite definito il relativo prodotto distribuzionale. Questa costruzione può non avere senso poichè facciamo uso del prodotto di oggetti in un determinato spazio per definirne altri in un altro spazio. Il problema perciò diventa la costruzione algebrica di uno spazio delle distribuzioni prodotto.

Verifichiamo intanto come la sola presenza della distribuzione δ di Dirac renda impossibile la costruzione di un prodotto associativo: si indichi con \circ l'operazione di prodotto e si considerino

$$x^{-1} \circ (x \circ \delta) \quad \text{e} \quad (x^{-1} \circ x) \circ \delta .$$

Essendo che $\delta \circ f(x) = \delta \circ f(0)$ si ha $\delta \circ x = \delta \circ 0 = 0$ da cui $x^{-1} \circ (x \circ \delta) = 0$ mentre invece $(x^{-1} \circ x) \circ \delta = 1 \circ \delta = \delta$. Si può dimostrare più in generale come la presenza di oggetti del tipo δ e la proprietà associativa siano mutuamente escludentesi e la richiesta di associatività corrisponderebbe a mappare la distribuzione δ in 0.

Un altro problema cardine nella definizione del prodotto di distribuzioni è che si può dimostrare [7] che in generale il prodotto di due distribuzioni arbitrarie di \mathcal{D}' non appartiene a \mathcal{D}' ma a uno spazio più generico che denominiamo “spazio prodotto”. Si può però dimostrare [7] che lo spazio prodotto è mappabile nello spazio delle distribuzioni dando luogo a un prodotto che contiene costanti complesse arbitrarie finite perciò si può fare l'associazione $A \circ B \sim A \cdot B$.

Adesso ci occupiamo di mostrare questo approccio al problema del prodotto a partire da un esempio.

Si considerino le distribuzioni $\delta(x)$ e $S(x) = \text{sgn}(x)$; S non è definita sull'origine ma resta comunque una funzione ben definita. Se proviamo ad applicare una formula del tipo

$$\langle T\alpha, \psi \rangle = \langle T, \alpha\psi \rangle$$

con le sostituzioni $T = \delta$, $\alpha = S$, e quindi a definire il prodotto tra distribuzioni “banalmente”, otteniamo:

$$\langle \delta \cdot S, \psi \rangle = \langle \delta, S \cdot \psi \rangle = S(0)\psi(0) ,$$

che non ha molto senso visto che S non è definita sull'origine. Se però si opera una scelta di ψ tale per cui si abbia $\psi(0) = 0$ si ottiene un risultato accettabile, vale a dire $\langle \delta \cdot S, \psi \rangle = 0$. Le funzioni $\psi \in \mathcal{D}$ tali che $\psi(0) = 0$ formano un sottospazio \mathcal{U} di \mathcal{D} e su questo sottospazio il prodotto $\delta \cdot S$ è conosciuto. Perciò $\delta \circ S \sim \delta \cdot S$ è una distribuzione conosciuta su \mathcal{U} . Per poter definire il prodotto sull'intero spazio \mathcal{D} si deve sfruttare la continuità del funzionale poiché se il prodotto è conosciuto su un elemento $\phi_0 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{U}$ allora è conosciuto sull'intero spazio \mathcal{D} . Si sceglie ad esempio $\phi_0(x)$ tale che $\phi_0(0) = 1$ e a questo punto $\forall \phi(x) \in \mathcal{D}$ si ha la decomposizione unica $\phi(x) = \phi(0)\phi_0(x) + \psi(x)$. Da ciò si ottiene:

$$\langle \delta \cdot S, \phi \rangle = \phi(0) \langle \delta \cdot S, \phi_0 \rangle ,$$

visto che $\langle \delta \cdot S, \psi \rangle = 0$. Essendo $\phi_0(x)$ una funzione arbitraria, col solo requisito $\phi_0(0) = 1$, si ha che $\langle \delta \cdot S, \phi_0 \rangle$ è una costante arbitraria, perciò si pone $\langle \delta \cdot S, \phi_0 \rangle = c$, da cui:

$$\langle \delta \cdot S, \phi \rangle = c\phi(0) = c\langle \delta, \phi \rangle \implies \delta \cdot S = c\delta .$$

Con l'appoggio dell'esempio precedente mostriamo adesso un'idea intuitiva di come il prodotto tra distribuzioni possa essere mappato nello spazio delle distribuzioni: per ogni coppia di distribuzioni A, B si considera l'insieme di distribuzioni $\mathcal{M}(A, B)$ a partire dall'ipotesi: una distribuzione S è un elemento di \mathcal{M} se $\forall \psi(x) \in \mathcal{D}$ per cui anche il prodotto $\psi \cdot B$ è un elemento di \mathcal{D} , vale

$$\langle S, \psi \rangle = \langle A, \psi B \rangle .$$

L'insieme \mathcal{M} si può interpretare come l'immagine del prodotto $A \circ B$ nello spazio delle distribuzioni \mathcal{D}' e si pone $S = A \circ B$. Si può perciò scrivere:

$$\langle S, \psi \rangle = \langle A \circ B, \psi \rangle = \langle A, \psi \cdot B \rangle$$

e come si vede quest'espressione è un'estensione della definizione del prodotto distribuzione-funzione con la sostituzione $\phi \rightarrow \psi$ dove ψ è scelta in modo che $\psi \cdot B \in \mathcal{D}$, richiesta necessaria come appare evidente nell'esempio mostrato precedentemente.

In base a questa definizione S è una distribuzione ben nota nel sottospazio $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ e col processo di continuazione mostrato nell'esempio precedente S è conosciuta su tutto \mathcal{D} . Sia adesso $f(x)$ una funzione indefinitamente differenziabile e sia $\chi \in \mathcal{D}$, dalla definizione appena data, sostituendo ψ con $f \cdot \chi$, si ottiene:

$$\langle S, f\chi \rangle = \langle A \circ (Bf), \chi \rangle ,$$

ma dalla definizione di prodotto tra funzione e distribuzione si ha

$$\langle f \cdot S, \chi \rangle = \langle A \circ (Bf), \chi \rangle ,$$

da cui abbiamo ottenuto

$$f \cdot (A \circ B) = A \circ (B \cdot f) .$$

Si può ora utilizzare la formula appena ricavata per descrivere diversamente la mappa che sta tra lo spazio dei prodotti con lo spazio delle distribuzioni: a ogni coppia di distribuzioni A, B si attribuisce l'insieme di distribuzioni $\mathcal{M}(A, B)$ a partire dall'ipotesi: una distribuzione S è un elemento di \mathcal{M} se per ogni funzione indefinitamente differenziabile $f(x)$ vale la relazione

$$f \cdot S = f \cdot (A \circ B) = A \circ (B \cdot f) .$$

Vediamo adesso un esempio: si consideri il prodotto $A \circ B = \delta \circ x^{-1}$. In base alla formula appena data dobbiamo garantire che per ogni $f(x)$ indefinitamente differenziabile $\delta \circ \left(\frac{f}{x}\right)$ sia una distribuzione e questo può avvenire solo se $\left(\frac{f}{x}\right)$ è una funzione continua, quindi solo se $f(0) = 0$. A questo punto sfruttando la formula $\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta$ otteniamo

$$\delta \circ \left(\frac{f}{x}\right) = \delta \cdot \left(\frac{f}{x}\right) = \left[\frac{f}{x}\right]_{x=0} \cdot \delta = f'(0)\delta$$

giungendo così all'equazione distribuzionale

$$f \cdot S = f'(0)\delta$$

che ha soluzione data da

$$S = -\delta' + c\delta,$$

dove c è una costante complessa arbitraria.

La teoria appena proposta è però ancora incompleta e presenta alcuni problemi, ad esempio in base alle definizioni date si può arrivare a risultati senza senso, ad esempio si ha $\delta_{x-a} \circ \delta_x = c\delta_x$, con c costante arbitraria, che chiaramente non ha senso. Ci occupiamo perciò adesso di proporre una versione più rigorosa e più generale della teoria appena proposta.

Introduciamo innanzitutto alcune notazioni: si indica con \mathcal{D}^m lo spazio delle distribuzioni m volte differenziabili e il suo duale \mathcal{D}'^m indica lo spazio delle funzioni a supporto compatto m volte differenziabili; si indica con \mathcal{E}^m lo spazio delle funzioni m volte differenziabili con continuità. Si considerino due distribuzioni A e B , si definisce il sottospazio $\mathcal{U}(A, B) \subset \mathcal{D}$ in base alla seguente definizione: una funzione $\psi(x) \in \mathcal{D}$ è un elemento di $\mathcal{U}(A, B)$ se $\forall x$ si verifica

$$i) \quad A \in \mathcal{D}'^m \quad e \quad \psi \cdot B \in \mathcal{E}^m$$

oppure

$$ii) \quad A \in \mathcal{E}^m \quad e \quad \psi \cdot B \in \mathcal{D}'^m$$

In base a questa definizione in un intorno di ogni punto x si può definire il funzionale (adottando una notazione che fa a meno delle funzioni di prova ϕ) $A[\psi \cdot B]$ o il funzionale $\psi \cdot B[A]$ e si ha che il funzionale $(A, \psi \cdot B)$ è definito in ogni punto x secondo

$$(A, \psi \cdot B) = \begin{cases} A[\psi \cdot B] & \text{se } A \in \mathcal{D}'^m \text{ e } \psi \cdot B \in \mathcal{E}^m \\ (\psi \cdot B)[A] & \text{se } \psi \cdot B \in \mathcal{D}'^m \text{ e } A \in \mathcal{E}^m \end{cases}.$$

A questo punto possiamo definire il prodotto di due distribuzioni $A \circ B$ come segue: a ogni coppia di distribuzioni A e B si associa l'insieme di distribuzioni $\mathcal{M}(A, B)$ a partire dal postulato che S è un elemento di \mathcal{M} se

$$S[\psi] = (A, \psi \cdot B)$$

per tutte le funzioni $\psi \in \mathcal{U}(A, B)$. Il sottospazio \mathcal{U} è determinato dalle condizioni che si pongono su ψ affinché valga $\psi \cdot B \in \mathcal{E}^m$ o $\psi \cdot B \in \mathcal{D}^m$ e in generale ψ e parte delle sue derivate saranno nulle nei punti singolari x_i di B . A questo punto S è conosciuta nello spazio $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ e si può estendere a tutto \mathcal{D} con i soliti ragionamenti di continuità, vediamo come: una funzione generica $\phi \in \mathcal{D}$ si può scomporre nell'intorno di un punto x_i secondo

$$\phi(x) = \sum_{r=0}^{m_0} \phi^{(r)}(x_i) \phi_{ri}(x) + \psi(x) = \sum_{r=0}^{m_0} (-1)^r \langle \delta_{x-x_i}^{(r)}, \phi \rangle \phi_{ri}(x) + \psi(x) ,$$

dove ϕ_{ri} sono funzioni arbitrarie $\phi_{ri} \in (\mathcal{D} \setminus \mathcal{U})$. Ricordando che $\langle S, \phi_{ri} \rangle$ sono costanti arbitrarie, visto che lo sono le ϕ_{ri} , ponendo $\langle S, \phi_{ri} \rangle = c_r^i$ si ottiene

$$\langle S, \phi \rangle = (A, \psi \cdot B) + \sum_{i=1}^N \sum_{r=0}^{n_0(i)} c_r^i \langle \delta_{x-x_i}^{(r)}, \phi \rangle = (A, \psi \cdot B) + R ,$$

avendo supposto che i punti singolari di B fossero N . Da quest'espressione ricaviamo la definizione di prodotto di distribuzioni:

$$S = A \circ B = (A, \psi \cdot B) + R ,$$

dove perciò S è la distribuzione immagine del prodotto $A \circ B$. Il prodotto risulta perciò espresso come somma di due termini, il termine $(A, \psi \cdot B)$ è detto "*parte unica*" di $A \circ B$, mentre il termine R costituisce la "*parte indeterminata*" di $A \circ B$. Questa assumerà un ruolo fondamentale nell'applicazione alla procedura di Rinormalizzazione nella teoria dei campi quantistici. La parte indeterminata scompare nei casi particolari in cui il prodotto $A \circ B$ esista nella teoria delle distribuzioni ordinaria (cioè se $A \in \mathcal{D}^n$ e $B \in \mathcal{E}^n$ o se $A \in \mathcal{E}^n$ e $B \in \mathcal{D}^n$) e si ha perciò $A \circ B = B \circ A = A \cdot B = B \cdot A$. In tutti gli altri casi invece il prodotto tra distribuzioni non è né unico, né associativo, né commutativo.

Occupiamoci adesso di mostrare il metodo pratico di calcolo di prodotti.

3.3.1 Calcolo di prodotti.

Enunciamo adesso la regola generale di calcolo del prodotto di due distribuzioni ripercorrendo la teoria appena esposta: per determinare il prodotto $A \circ B$ ci si riferisce alla formula

$$(A, \psi \cdot B) = \begin{cases} A[\psi \cdot B] & \text{se } A \in \mathcal{D}'^m \text{ e } \psi \cdot B \in \mathcal{E}^m \\ (\psi \cdot B)[A] & \text{se } \psi \cdot B \in \mathcal{D}'^m \text{ e } A \in \mathcal{E}^m \end{cases},$$

determinando le proprietà di $\psi(x)$ nei punti singolari x_i di B ottenendo $\psi^{(r)}(x_i) = 0$, $r = 0, 1, \dots, n_0(i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Fissata ψ si calcola il funzionale $A[\psi \cdot B]$ o il funzionale $(\psi \cdot B)[A]$ a seconda dei casi ottenendo una distribuzione $S_0[\psi]$. Il risultato finale è dato da

$$A \circ B = S[\phi] = S_0[\phi] + \sum_{i=1}^N \sum_{r=0}^{n_0(i)} c_r^i \delta_{x-x_i}^{(r)}[\phi]$$

con c_r^i le solite costanti complesse arbitrarie.

Per chiarire questo metodo di calcolo apparentemente complicato vediamo alcuni esempi di particolare interesse fisico, partendo dal problema del quadrato della δ di Dirac $\delta^2 = \delta \circ \delta$. In questo caso si ha $A = B = \delta$, dove $\delta \in \mathcal{D}'^0$ (in generale $\delta^{(k)} \in \mathcal{D}'^k$). In base alle definizioni date si ha:

$$S_0[\psi] = (\delta, \psi \cdot \delta) = \delta[\psi(x) \cdot \delta]$$

con la richiesta $\psi(x) \cdot \delta = \psi(0) \cdot \delta \in \mathcal{E}$ che implica $\psi(0) = 0$ affinché $\psi \cdot \delta$ sia funzione continua. Perciò si ha

$$S_0[\psi] = \delta[\psi(0) \cdot \delta] = \delta[0] = 0.$$

Applicando l'espansione per ϕ , $\phi(x) = \phi(0)\phi_0(x) + \psi(x)$, con $\phi_0(0) = 1$ o applicando la formula generica si ottiene $S[\phi_0] = c$, costante arbitraria e dalla formula generale si arriva a

$$\delta^2 = \delta \circ \delta = c\delta.$$

Allo stesso modo si ottiene che per ogni distribuzione T singolare nell'origine vale

$$T \circ \delta = c\delta$$

e in particolare valgono

$$\delta^{(k)} \circ \delta = c_k \delta, \quad \delta^{(k)} \circ \delta^{(n)} = c_{kn} \delta, \quad P\left(\frac{1}{x}\right) \circ \delta = c\delta$$

con c, c_k, c_{kn} costanti arbitrarie.

Calcoliamo ora il prodotto $\delta \circ P\left(\frac{1}{x}\right)$. Valutiamo innanzitutto $S_0[\psi] = (\delta, \psi \cdot P\left(\frac{1}{x}\right))$: la richiesta che $\psi \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$ sia continuo da luogo alla condizione $\psi(0) = 0$ e inoltre si ha:

$$S_0[\psi] = \delta \left[\psi \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \left[\frac{\psi}{x} \right]_{x=0} = \psi'(0),$$

ottenendo perciò

$$S_0[\psi] = -\delta'[\psi]$$

e secondo la formula generale si ricava il risultato

$$\delta \circ P\left(\frac{1}{x}\right) = -\delta' + c\delta$$

dove c è la solita costante arbitraria.

Calcoliamo infine un altro prodotto di interesse fisico, ovvero $\left(P\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$:

$$S_0[\psi] = P\left(\frac{1}{x}\right) \left[\psi \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \right] = P\left(\frac{1}{x^2}\right) [\psi]$$

e utilizzando la formula generale si ottiene il risultato completo

$$\left(P\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = P\left(\frac{1}{x}\right) \circ P\left(\frac{1}{x}\right) = P\left(\frac{1}{x^2}\right) + c\delta$$

con c costante arbitraria.

Come ultimo argomento studiamo l'applicabilità della formula di Leibnitz nel caso del prodotto tra distribuzioni; si può dimostrare che nello spazio prodotto una tale regola vale perciò si ha

$$(A \circ B)' = A' \circ B + A \circ B' ,$$

ma questa proprietà viene persa nell'operazione di mappa dallo spazio prodotto allo spazio delle distribuzioni. Per poter usufruire di questa proprietà dobbiamo perciò postularne la validità ma questa imposizione limita l'arbitrarietà delle costanti che compaiono. Negli spazi generati a partire da questa supposizione si può dimostrare la validità della relazione

$$\delta^{(m)} \circ \Theta = - \sum_{r=0}^m c_r \delta^{(m-r)} ,$$

dimostrabile semplicemente con le regole di calcolo generale dei prodotti. Dalle relazioni

$$\Theta^2 = \Theta \circ \Theta = \Theta \quad \Theta' = \delta \quad \delta \circ \Theta = -c_0\delta$$

e applicando la regola di Leibnitz segue

$$\Theta \circ \delta = (1 + c_0)\delta$$

e per differenziazione si ottiene la formula

$$\delta^2 = \delta \circ \delta = c_1\delta ,$$

coerente con i risultati della teoria generale. Con la validità della regola di Leibnitz abbiamo costruito lo spazio "massimale", ovvero con il maggior numero di proprietà, possibile.

3.4 Considerazioni finali.

Come già detto nell'introduzione del capitolo il problema del prodotto tra funzioni generalizzate non è un problema chiuso, ovvero non esiste un metodo univoco di definire e calcolare i prodotti. Nel presente elaborato ne abbiamo studiati due: il primo fa uso delle neutrices per sfruttare un concetto di limite di funzioni più generale di quello dell'analisi, il secondo è un metodo esatto che aggira il problema dello spazio di appartenenza del prodotto di distribuzioni mappandolo nello spazio delle distribuzioni stesso. Esistono anche altri approcci che si appoggiano ad apparati matematici ancora differenti come all'analisi non-standard [8] [9] o alle algebre di Colombeau [10] e arrivano a definizioni del prodotto ulteriormente differenti. La non univocità non risiede soltanto nell'apparato matematico in uso, ma anche nelle proprietà che si vuole che il prodotto abbia (commutatività, associatività, regola di Leibnitz ecc.); una definizione di un prodotto "buono", cioè ricco di proprietà, può portare facilmente a paradossi (come quello mostrato per la proprietà associativa in cui la δ risultava mappata in 0).

Confrontiamo i metodi proposti in quest'elaborato: l' "approccio Fisher", che fa uso del concetto di limite, è quello analiticamente più intuitivo poiché aggira il problema passando per il prodotto di funzioni, sempre definibile e ricco di proprietà algebriche, e poi applica un processo di limite neutrix, anch'esso sempre definibile con una scelta accurata della neutrix di lavoro. Il problema di questo metodo sta nella superficialità con cui si definisce il prodotto di due oggetti usando oggetti che non appartengono allo stesso spazio (e quindi con determinate proprietà che possono essere incompatibili nel nuovo spazio) e nella supposizione che il processo di limite garantisca sempre una consistenza. Questa consistenza può non essere valida, come discusso nella sezione 'Prodotto di distribuzioni' del capitolo 2 e può portare a risultati paradossali. L' "approccio Güttinger" propone invece un metodo esatto per definire il prodotto di funzioni generalizzate, costruendo una mappa tra lo spazio dei prodotti e lo spazio delle distribuzioni. Tale processo può sembrare ambiguo poiché la mappa è costruita a partire da un sistema ad hoc che aggira il problema della non esistenza di alcuni elementi (si ricordi l'esempio di $\delta(x) \circ \text{sign}(x)$); però la successiva generalizzazione del prodotto sull'intero spazio delle funzioni di prova non solo garantisce la validità generale della definizione ma fornisce anche un metodo costruttivo per il calcolo di prodotti. Il prezzo di questo approccio è la comparsa della 'parte indeterminata' nei prodotti, ovvero dei termini regolati da costanti arbitrarie.

La differenza tra questi due metodi (ma anche tra gli altri) è evidente nell'apparente incompatibilità dei risultati, infatti negli esempi proposti si arriva a risultati diversi applicando metodi diversi. Questo fatto, a parere mio, non è da imputarsi alla formulazione errata delle teorie quanto piuttosto alle proprietà che sono attribuite al prodotto. Propongo adesso un esempio

di questa incompatibilità e un'idea per superarla: si consideri il prodotto $\delta(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{array}{ll} \text{Fisher} & \delta(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\delta'(x) \\ \text{Güttinger} & \delta(x) \circ P\left(\frac{1}{x}\right) = -\delta'(x) + c\delta(x) \end{array}$$

con c costante arbitraria. La diversità dei risultati è da imputare alle diverse proprietà che i due prodotti hanno, infatti il prodotto che fa uso del limite è commutativo mentre il prodotto definito per via esatta non lo è. Introduco un prodotto commutativo che chiamo “prodotto anticommutatore” che indico col simbolo \odot e definisco come

$$T \odot S = \frac{1}{2} (T \circ S + S \circ T) .$$

Se il prodotto \circ è un prodotto commutativo allora \odot coincide con \circ , se invece \circ è un prodotto non commutativo allora \odot ne fornisce una versione commutativa.

Ricordando il risultato $P\left(\frac{1}{x}\right) \circ \delta(x) = c\delta(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \delta(x) \odot P\left(\frac{1}{x}\right) &= P\left(\frac{1}{x}\right) \odot \delta(x) = \frac{1}{2} \left(\delta(x) \circ P\left(\frac{1}{x}\right) + P\left(\frac{1}{x}\right) \circ \delta(x) \right) = \\ &= -\frac{1}{2}\delta'(x) + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\delta(x) \end{aligned}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Una scelta appropriata delle costanti arbitrarie ($c_1 = -c_2$) porta al risultato $\delta(x) \odot P\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\delta'(x)$ in accordo col risultato ottenuto col metodo Fisher.

Si può estendere il risultato ottenuto dimostrando che il prodotto definito da Güttinger, implementato col prodotto anticommutatore, fornisce una versione generalizzata del prodotto definito col procedimento di limite.

A parere mio il secondo metodo proposto può risultare più valido per svariati motivi: innanzitutto fornisce una definizione esatta di un prodotto non dotato a priori di alcuna proprietà (commutativa, associativa ecc.) che può eventualmente essere implementata, se possibile, con definizioni successive; inoltre non è da sottovalutare che il metodo di calcolo risulta molto spesso snello e rapido, come risulta dagli esempi.

Capitolo 4

Applicazioni Fisiche.

4.1 Introduzione.

Nei capitoli precedenti abbiamo studiato le funzioni generalizzate presentandole dalla loro definizione fino ad arrivare alla definizione del prodotto tra esse considerando due modi diversi di affrontare il problema. Nel presente capitolo ci occupiamo invece di investigare i campi della fisica in cui le funzioni generalizzate compaiono e il loro utilizzo, concentrandoci sui temi di Relatività Generale, Fluidodinamica e Teoria dei Campi Quantistici, prestando attenzione alla tecnica matematica della Rinormalizzazione delle divergenze ultraviolette che trova il suo fondamento proprio sull'apparato sviluppato nel capitolo 3.

4.2 Relatività Generale.

Nello studio della relatività generale non è data a priori la conoscenza del grado di smussamento delle componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e ipotesi troppo generiche, come ad esempio $g_{\mu\nu} \in C^0$, possono portare a difficoltà nella determinazione di grandezze tipiche come

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu\sigma} &= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}) , \\ R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} , \\ R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R &= -k T^{\mu\nu} , \\ T_{;\nu}^{\mu\nu} &= 0 .\end{aligned}$$

Infatti con ipotesi “deboli” si deve ricorrere all’uso delle funzioni generalizzate per dare una soluzione che non richieda di modificare la teoria. Il problema che sorge è appunto che in queste formule possono comparire le funzioni generalizzate, ad esempio se si suppone $g_{\mu\nu}$ essere continua ma non differenziabile, nella determinazione del tensore di curvatura si arriva ad avere termini nella forma δ [11].

Per aggirare il problema si è studiato [10] quale possa essere lo spazio funzionale con minori restrizioni possibili che contenga metriche che non portino a prodotti di distribuzioni nel calcolo del tensore di curvatura e si è ottenuta la seguente definizione:

Def. 4.1(metriche gt-regolari): Un campo tensoriale simmetrico g_{ab} su una varietà quadridimensionale M è una *metrica gt-regolare* se g_{ab} , $g^{ab} \in L_{loc}^\infty \cap H_{loc}^1$, dove con H_{loc}^1 si indica lo spazio delle funzioni localmente quadrato-sommabili con anche quadrato-sommabili le derivate prime.

Se si considerano metriche gt-regolari (si noti che le metriche di C^1 soddisfano i requisiti) si ottiene una teoria che fa uso delle distribuzioni senza arrivare a termini che ne implicino il prodotto. L'apparato matematico avanzato nel capitolo 3 supporta casistiche anche più generali; infatti essendo possibile il calcolo di prodotti di distribuzioni si possono imporre restrizioni minori sullo spazio di appartenenza della metrica.

4.3 Fluidodinamica.

Nel modello di fluido come continuo deformabile le equazioni che regolano l'evoluzione del sistema sono le equazioni di Navier-Stokes. Le prime due esprimono rispettivamente la conservazione della massa e della quantità di moto e sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla P - \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathcal{S}_v, \end{aligned}$$

dove ρ indica la densità del fluido, \mathbf{v} la velocità, P la pressione, \mathbf{F} la forza esterna per unità di massa, \mathcal{S}_v è il tensore degli sforzi viscosi e con $\operatorname{div} \mathcal{S}_v$ si intende, usando la notazione indiciale, $\operatorname{div} \mathcal{S}_v^j = \nabla_i \mathcal{S}_v^{ij}$.

Se si suppone che la densità, la velocità o la pressione siano discontinue (ed è il caso della modellizzazione delle onde d'urto) si incorre nuovamente nel solito problema matematico che richiede l'introduzione delle funzioni generalizzate.

Si consideri il caso in cui valgano le più semplici equazioni di Eulero, ovvero il caso di un fluido con viscosità trascurabile. Queste equazioni descrivono l'evolversi del fluido ma come verificheremo più avanti non sono valide nel caso di discontinuità. In questo caso si usano le equazioni di Rankine - Hugoniot [9] che ricaviamo grazie all'utilizzo dell'apparato matematico proposto nei capitoli precedenti.

Si supponga che l'ipersuperficie di discontinuità sia data dall'equazione

$$y = \bar{y}(t) = Ut \quad , \quad U = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} = \text{cost.}$$

cioè si suppone la velocità dell'onda d'urto essere costante.

Siano poi date densità, velocità e pressione del fluido come segue:

$$\rho = \rho^- \chi_- + \rho^+ \chi_+ \quad , \quad u_i = u_i^- \chi_- + u_i^+ \chi_+ \quad i = 1, 2 \quad , \quad P = P^- \chi_- + P^+ \chi_+ \\ \chi_+ = \chi_{(\bar{y}(t), \infty)}(x) = \Theta(x - \bar{y}(t)) \quad , \quad \chi_- = 1 - \chi_+ \quad ,$$

dove apici e pedici + e - indicano i due semispazi separati dall'onda d'urto e il pedice $i = 1, 2$ indica le due direzioni spaziali della velocità. Osserviamo che:

$$\frac{\partial \chi_+}{\partial x} = \delta(x - \bar{y}(t)) \quad , \quad \frac{\partial \chi_-}{\partial x} = -\delta(x - \bar{y}(t)) \quad , \\ \frac{\partial \chi_+}{\partial t} = -U \delta(x - \bar{y}(t)) \quad , \quad \frac{\partial \chi_-}{\partial t} = U \delta(x - \bar{y}(t)) \quad .$$

L'equazione di continuità in due dimensioni è data da

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial y} = 0$$

e sostituendo le espressioni per densità e velocità si ottiene

$$\rho^- \frac{\partial \chi_-}{\partial t} + \rho^+ \frac{\partial \chi_+}{\partial t} + \rho^- u_1^- \frac{\partial \chi_-}{\partial x} + \rho^+ u_1^+ \frac{\partial \chi_+}{\partial x} = 0$$

e sostituendo le espressioni per le derivate ricavate in precedenza si ottiene

$$-(\rho^- - \rho^+)U \delta(x - \bar{y}(t)) = (\rho^+ u_1^+ - \rho^- u_1^-) \delta(x - \bar{y}(t)) \quad .$$

Utilizzando risultati noti delle equazioni distribuzionali possiamo uguagliare i due termini moltiplicativi delle δ e riaggiustando gli altri termini giungiamo all'equazione

$$\rho^+(U - u_1^+) = \rho^-(U - u_1^-) \quad ,$$

che è la prima delle equazioni di Rankine - Hugoniot e si può scrivere in forma più chiara con la notazione $\rho^+ = \rho_0$, $\rho^- = \rho$, $u_1^+ = u_0$, $u_1^- = u$ dove perciò il pedice 0 indica il fluido indisturbato davanti al fronte d'onda

$$\rho_0(U - u_0) = \rho(U - u) \quad .$$

L'equazione della conservazione del momento è

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e sostituendo ancora le espressioni per densità, velocità e pressione e le relative espressioni per le derivate si ottiene

$$-(U u_1^+ - U u_1^-)(\rho^- \chi_- + \rho^+ \chi_+) \delta(x - \bar{y}(t)) + (\rho^+ u_1^+ \chi_+ + \rho^- u_1^- \chi_-)(u_1^+ - u_1^-) \delta(x - \bar{y}(t)) = (P^- - P^+) \delta(x - \bar{y}(t)) \quad .$$

Utilizzando il risultato $\Theta \cdot \delta = \frac{1}{2} \delta$ ricavato nel capitolo 3 e sfruttando lo stesso risultato usato in precedenza per le equazioni distribuzionali si ottiene

$$\frac{1}{2}(u_1^+ - u_1^-)(\rho^+ u_1^+ + \rho^- u_1^- - \rho^+ U - \rho^- U) = P^- - P^+ .$$

Applicando il risultato ottenuto per la prima equazione si può riscrivere quella appena ottenuta come

$$\rho^+(U - u_1^+)(u_1^- - u_1^+) = P^- - P^+ ,$$

che è la seconda equazione di Rankine - Hugoniot e si può scrivere in forma più chiara utilizzando la notazione introdotta in precedenza

$$\rho_0(U - u_0)(u - u_0) = P - P_0 .$$

Come mostrato nella dimostrazione perciò le equazioni di Eulero non sono più valide nel caso di discontinuità semplice sulla superficie dell'onda d'urto ma valgono le equazioni di Rankine - Hugoniot sopra ricavate.

4.4 Teoria dei Campi Quantistici.

Il concetto di “campo” è ben noto nella fisica classica e trova il suo apice nelle equazioni di Maxwell che descrivono compiutamente il campo elettromagnetico fornendone una teoria completamente ondulatoria. Gli studi di Planck sul corpo nero e di Einstein sull'effetto fotoelettrico misero in luce come il campo elettromagnetico classico ondulatorio fosse composto da enti discreti, detti *quanti*, con proprietà corpuscolari. Questa doppia interpretazione spinge a pensare che particelle microscopiche, anch'esse dotate di proprietà sia corpuscolari che ondulatorie, e quanti del campo possano essere in realtà la stessa cosa e questa è l'idea alla base della teoria dei campi quantistici.

La trattazione delle teorie di campo a partire da presupposti di continuità delle grandezze in considerazione risulta fallimentare e si può provare che le soluzioni delle equazioni di campo non sono banali funzioni ma sono distribuzioni, cioè le grandezze di campo sono funzioni generalizzate. Il prodotto tra funzioni generalizzate compare quando si considerano le relazioni di commutazione e il concetto di interazione.

Occupiamoci adesso di studiare più dettagliatamente il problema : nello studio delle equazioni di campo [12] [13], la soluzione dell'equazione inomogenea con sorgenti puntiformi è data dalle *funzioni di Green* (o *propagatori*) $D(x)$ che hanno un ruolo cardine nella teoria delle interazioni tra campi. Tra queste funzioni di grandissima importanza è la *funzione di Green causale*

$D^C(x - y)$ che descrive le relazioni causali tra il processo di creazione e annichilazione di particelle locate in punti diversi dello spazio-tempo, x e y . Questo processo è soggetto infatti a restrizioni logiche: se una particella è creata nel punto x e annichilita nel punto y allora si deve avere $x^0 < y^0$, dove l'apice 0 indica la componente temporale dei quadrivettori. In prossimità del cono luce ($s^2 = (x^0)^2 - (\mathbf{x})^2 = 0$) le funzioni di Green (funzioni non sarebbe più un termine appropriato) possono avere diversi tipi di singolarità come $\delta(s)$, discontinuità come $\Theta(s)$, poli come $\frac{1}{s}$ ecc. Il problema di queste singolarità risulta evidente quando, come considereremo a breve, funzioni di questo tipo sono moltiplicate tra loro. La soluzione del problema avviene per mezzo di tecniche di *regolarizzazione* analoghe a quanto illustrato nella prima parte del capitolo 3, ovvero al posto delle funzioni di Green si considerano funzioni di Green regolarizzate, ovvero prive di singolarità, che hanno come limite distribuzionale le funzioni di Green esatte. Un esempio di queste tecniche [12] è la *regolarizzazione di Feynman*, secondo la quale alle funzioni di Green esatte si aggiungono dei termini detti di *massa ausiliaria* che regolarizzano il propagatore.

Consideriamo adesso in termini più quantitativi situazioni particolari in cui si deve affrontare il prodotto di distribuzioni.

4.4.1 Matrice S.

Nella teoria dei campi quantistici, così come nella meccanica quantistica non relativistica, il postulato di partenza è che l'equazione del moto sia l'equazione di Schroedinger:

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H \psi(t) ,$$

dove H è l'hamiltoniana completa che si può immaginare essere esprimibile con la somma

$$H = H_0 + H_I ,$$

dove H_0 è l'hamiltoniana libera e H_I è l'hamiltoniana di interazione. Essendo che la soluzione esatta al problema si può dare solo in pochi casi da prendere come modelli, è necessario ricorrere a tecniche perturbative che permettono di affrontare il problema anche in casi più prossimi alla realtà. Il primo passo dell'approccio perturbativo [14] consiste nel trascurare la componente di interazione e introdurla successivamente come un termine che si può "accendere" o "spegnere". Questo approccio tipico della teoria perturbativa della meccanica quantistica non è molto soddisfacente poiché la particella libera interagisce col campo generato da se stessa e quest'interazione è tanto più grande quanto più piccola è la particella in questione. In ogni caso per via della difficoltà matematica del problema la teoria perturbativa resta l'approccio più in uso.

Per studiare il problema si utilizza la cosiddetta *picture di Dirac* o *rappresentazione delle interazioni* ovvero si ridefinisce il sistema applicando un operatore unitario $V(t)$ (si ricordi che i valori medi non variano se vengono effettuate trasformazioni unitarie) tale che

$$\psi(t) = V^\dagger(t)\phi(t)$$

con la condizione su $V(t)$

$$i\frac{\partial V^\dagger(t)}{\partial t} = H_0 V^\dagger(t) .$$

Ponendo $H_I(t) = V(t)H_I V^\dagger(t)$ si ottiene l'equazione del moto nella rappresentazione delle interazioni:

$$i\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = H_I(t)\phi(t) .$$

Questa equazione è equivalente all'equazione integrale

$$\phi(t) = \phi(t_0) - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1)\phi(t_1)$$

che si risolve ricorrendo alla *serie di Dyson* ottenendo la soluzione

$$\phi(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2)\dots H_I(t_n) \right) \phi(t_0) ,$$

che si può riscrivere in forma più compatta notando che il termine tra parentesi è lo sviluppo in serie di Dyson dell'operatore evoluzione $U(t, t_0)$:

$$\phi(t) = U(t, t_0)\phi(t_0) .$$

L'operatore di evoluzione $U(t, t_0)$ si può riscrivere in una notazione più intuitiva sfruttando l'operatore *prodotto ordinato nel tempo* $\tau(H_I(t_1)H_I(t_2))$ [12] definito secondo

$$\tau(H_I(t_1)H_I(t_2)) = \begin{cases} H_I(t_1)H_I(t_2) , & \text{se } t_1 < t_2 \\ H_I(t_2)H_I(t_1) , & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases}$$

generalizzabile banalmente nel caso di prodotto tra più termini. Si ottiene così:

$$U(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \tau(H_I(t_1)H_I(t_2)\dots H_I(t_n)) .$$

Consideriamo adesso un processo di collisione di particelle, ovvero un processo nel quale le particelle allo stato iniziale e allo stato finale si possono considerare libere. Per calcolare le ampiezze di probabilità del processo di scattering si idealizza lo stato iniziale con il passato remoto ($t_0 = -\infty$) e il tempo finale col futuro remoto ($t = \infty$). In queste ipotesi si indica

$$U(\infty, -\infty) = S ,$$

dove S è la *matrice di scattering* e i suoi elementi codificano le ampiezze di probabilità di transizione da uno stato ad un altro, ovvero dato lo stato iniziale $|\alpha\rangle$ e lo stato finale $|\beta\rangle$ si ha che dato

$$S_{\alpha\beta} = \langle\alpha| S |\beta\rangle$$

il suo modulo quadro $|S_{\alpha\beta}|^2$ indica la probabilità della transizione dallo stato $\langle\alpha|$ allo stato $|\beta\rangle$.

Gli elementi di matrice possono però non esistere, nel senso che possono essere rappresentati da integrali divergenti. Queste divergenze degli integrali sono dette *divergenze ultraviolette* [13] e sono causate dalla presenza di termini del tipo $(D^C(x))^2$ che presentano singolarità sul cono luce come visto in precedenza ed è proprio in questi casi che risulta necessario avere una definizione del prodotto tra distribuzioni.

Senza approfondire ulteriormente la teoria fisica vediamo un'applicazione diretta dell'apparato matematico sviluppato, in particolare ora mostriamo come vi sia una relazione stretta tra il problema matematico del prodotto tra distribuzioni affrontato col metodo Güttinger e la teoria della rinormalizzazione. Nello studio delle *equazioni di Schwinger* per l'elettrone, equazioni che permettono la determinazione del propagatore della particella, compare un termine, spesso indicato con Σ [6], che rappresenta l'auto-energia dell'elettrone. Questo termine è direttamente proporzionale al prodotto di due termini singolari e compaiono prodotti del tipo

$$\delta(s^2) \circ P\left(\frac{1}{s^2}\right) \circ P\left(\frac{1}{s^2}\right) \circ \delta(s^2) \circ P\left(\frac{1}{s^2}\right) \circ P\left(\frac{1}{s^2}\right) .$$

Questi prodotti sono stati calcolati nel capitolo 3 e il termine di auto-energia può essere riscritto come

$$\Sigma = F + R ,$$

dove F è una distribuzione ben definita e R è la parte indeterminata del prodotto, regolata da costanti arbitrarie. Nel caso dell'elettrone la presenza di queste costanti arbitrarie ha come sola conseguenza l'arbitrarietà della massa a riposo dell'elettrone stesso. In generale l'arbitrarietà delle costanti ottenute dalla teoria matematica si riflette nella realtà fisica sotto forma dell'arbitrarietà delle costanti e delle scale tipiche di un sistema fisico, cioè non si può avere un valore unico per queste costanti. Quest'arbitrarietà può

essere ridotta imponendo risultati sperimentali (come rapporti o differenze tra masse delle particelle) ma l'impossibilità di avere un prodotto tra distribuzioni definito unicamente causa l'impossibilità in principio di avere valori unici delle costanti di un sistema fisico.

Bibliografia

- [1] F. Ortolani, *Appunti di metodi matematici*, 2007.
- [2] van der Corput J.G., *Introduction to the neutrix calculus*, J. Analyse Math. 7 (1959-60), 281-398.
- [3] Fisher B., *Neutrices and the product of distributions*, Studia Mathematica, T. LVII. (1976), 263-274.
- [4] Fisher B., Lin-Zhi C., *The product of distributions on \mathbb{R}^m* , Comment.Math.Univ.Carolin. 33,4 (1992), 605-614.
- [5] Schwartz L., *Théorie des distributions*, Vol. I, II, Paris, Hermann, (1957).
- [6] Güttinger W., *Products of Improper Operators and the Renormalisation Problem of Quantum Field Theory*, Progress of Theoretical Physics, Vol.13, No. 6, (June 1955), 612-626.
- [7] König H., Math. Annalen 128 (1954), 420.
- [8] Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J., *Introduction to the Theory of Infinitesimals*, Columbia University New York (1976).
- [9] Raju C. K., *Products and compositions with the Dirac delta function*, J. Phys. A:Math. Gen. 15 (1982), 381-396.
- [10] Steinbauer R. Vickers J. A., *The use of generalized functions and distributions in general relativity*, Class. Quantum Grav. 23 (2006), R91-R114.
- [11] L. Randall, R. Sundrum, *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. 83, 4690, 1999.
- [12] Bogoliubov N. N., Shirkov D. V., *INTRODUCTION TO THE THEORY OF QUANTIZED FIELDS*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 1980.

- [13] Bogoliubov N. N., Shirkov D. V., *QUANTUM FIELDS*, Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA, 1983.
- [14] Bilenky S. M., *INTRODUCTION TO FEYNMAN DIAGRAMS*, Pergamon Press Ltd., (1974).