Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Gli spazi di Orlicz

Tesi di laurea in Istituzioni di analisi superiore

Relatore:
Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Anna Beatrice Guidi

II Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione **5**

1 Le funzioni di Young **7**

1.1 Uniforme integrabilità 7

1.2 Definizione ed esempi di funzioni di Young 11

1.3 Rappresentazione integrale delle funzioni di Young 15

1.4 Relazioni tra coppie complementari di funzioni di Young . . . 19

2 Gi spazi di funzione di Orlicz **21**

2.1 Lo spazio $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ 21

2.1.1 Le classi di Orlicz su generali spazi di misura 21

2.2 Lo spazio di Orlicz 25

2.2.1 Spazi di Orlicz e spazi di Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p > 1$ . . . 26

3 Lo spazio di Orlicz è uno spazio di Banach **33**

3.1 Le norme di Gauge e di Orlicz 33

3.1.1 Relazioni tra norme di Gauge e di Orlicz 42

3.2 Lo spazio di Orlicz è completo 45

Bibliografia **49**

Introduzione

In questa tesi si presenta la nozione di spazio di Orlicz che è uno spazio di Banach con le norme associate di Gauge e di Orlicz.

Il primo capitolo contiene le funzioni di Young, la cui convessità permette di definire gli spazi di Orlicz come una generalizzazione degli spazi di Lebesgue $\mathcal{L}^p$, $p > 1$. Inoltre, si evidenzia che ad ogni funzione di Young è possibile associare una funzione ad essa complementare, e che verifica una generalizzazione della disuguaglianza di Holder di $\mathcal{L}^p$, $p > 1$. Per questo sono introdotte la disuguaglianza di Young e la rappresentazione integrale delle funzioni in questione. Un'altra rilevante proprietà delle funzioni di Young è la condizione Δ_2 che ne descrive la rapidità di crescita.

Nel secondo capitolo, invece, è definito lo spazio $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ che è uno spazio vettoriale sotto l'ipotesi di $\Phi \in \Delta_2$, dove con Φ si denota una generica funzione di Young. Successivamente, è introdotto lo spazio di funzioni di Orlicz $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$, che è uno spazio vettoriale senza nessuna condizione specifica su Φ di Young. Vengono poi messe in luce significative relazioni tra gli spazi di Orlicz e gli spazi di Lebesgue $\mathcal{L}^p$, con $p > 1$, da cui si evince che $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ è una generalizzazione di $\mathcal{L}^p$.

Il terzo capitolo illustra le norme di Gauge e di Orlicz, che si denotano rispettivamente con N_Φ e $||\cdot||_\Phi$, di cui sono mostrate le proprietà fondamentali, le reciproche relazioni e la conseguente equivalenza tra le due. L'ultima parte della tattazione mostra la completezza dello spazio di Orlicz, da cui si deduce facilmente che è di Banach.

Capitolo 1

Le funzioni di Young

Questo capitolo introduce allo studio delle funzioni di Young, con lo scopo di illustrarne alcune significative proprietà alla base degli spazi di funzione di Orlicz.

1.1 Uniforme integrabilità

Sia $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ un finito spazio di misura, dove Ω è un'insieme, Σ è una σ-algebra dei sottoinsiemi di Ω, e $\mu : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}^+$ una funzione σ-additiva su Σ. Sia $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}, \alpha \in I\}$ un'arbitraria famiglia di funzioni reali e misurabili su Ω.

Definizione 1.
$\mathcal{F}$ è uniformemente integrabile se soddisfa le due seguenti condizioni:

$$(i)\ \sup_\alpha \int_\Omega |f_\alpha| d\mu = C < +\infty, \ \ e\ \ (ii)\ \lim_{\mu(A)\to 0} \int_A |f_\alpha| d\mu = 0, \tag{1.1}$$

uniformemente in $\alpha \in I$.

Il seguente teorema è un'alternativa caratterizzazione di tale condizione di integrabilità.

Teorema 1.1.1.
Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni scalari misurabili su un finito spazio di misura $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
(i) $\mathcal{F} = \{f_\alpha, \alpha \in I\}$ è uniformemente integrabile.

(ii) Posto $A_\alpha^\lambda = \{x \in \Omega : |f_\alpha(x)| > \lambda\}$*:*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{A_\alpha^\lambda} |f_\alpha| d\mu = 0, \quad \textit{uniformemente in } \alpha \in I. \tag{1.2}$$

(iii) Esistono funzioni convesse $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *tali che:* $\Phi(0) = 0$*,* $\Phi(-x) = \Phi(x)$*, e* $\frac{\Phi(x)}{x} \nearrow +\infty$ *per* $x \nearrow +\infty$*, in termini delle quali:*

$$C_1 = \sup_\alpha \int_\Omega \Phi(f_\alpha) d\mu < +\infty. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. (i)⇒(ii). Da (1.1):

$$\mu(A_\alpha^\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_{A_\alpha^\lambda} \lambda d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int_\Omega |f_\alpha| d\mu \leq \frac{C}{\lambda} \to 0,$$

per $\lambda \to +\infty$, uniformemente in α.
Sia $\epsilon > 0$, e si scelga $\delta_\epsilon > 0$ t.c. $\mu(A) < \delta_\epsilon \Rightarrow \int_A |f_\alpha| d\mu < \epsilon$, uniformemente in α dalla condizione (1.1). Quindi, $\forall \epsilon > 0$ se $\lambda = \frac{C}{\delta_\epsilon}$ e $A = A_\alpha^\lambda$, allora $\mu(A_\alpha^\lambda) < \delta_\epsilon$ e $\int_{A_\alpha^\lambda} |f_\alpha| d\mu < \epsilon$, uniformemente in α, e quindi vale (ii).

(ii)⇒(iii). Questa parte della dimostrazione permette di costruire le funzioni Φ desiderate.
Sia $\{\beta_n, n \geq 1\}$ una successione t.c. $\sum_n \beta_n < +\infty$. Dalla (ii) si possono scegliere $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$, in modo che:

$$\sup_\alpha \int_{A_\alpha^\lambda} |f_\alpha| d\mu < \beta_n, \qquad n \geq 1. \tag{1.4}$$

Questo è possibile per (1.2) e λ_n non dipende dall'individuale f_α, ma solo da $\mathcal{F}$.
Sia $a_0 = 0$ e, per $n \geq 1$, sia a_n il valore di λ_n di (1.4) che giace nell'intervallo $[n, n+1)$. Mentre, sia $a_n = 0$ se non ci sono λ_n come in (1.4).
Sia $\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$, allora $\varphi(n) \nearrow +\infty$ per $n \nearrow +\infty$. Si studi ora φ su tutto $\mathbb{R}$, ponendo $\varphi(t) = \varphi(n)$, per $n \leq t < n+1$. Si ponga ora:

$$\Phi(x) = \int_0^{|x|} \varphi(t) dt, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Allora $\Phi(x) = \Phi(-x)$ per com'è defininita Φ, ed essendo φ crescente, $\frac{\Phi(x)}{x} \geq \varphi(k)\frac{x-k}{x} \nearrow +\infty$ per $k < x$ e $k \to +\infty$. In aggiunta, Φ è una funzione convessa, infatti:
$\Phi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$. Questo segue dal fatto che φ è crescente e dall'uso un cambio di variabili.
Per verificare che Φ soddisfa la (iii), si consideri:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \Phi(f_\alpha)d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{n-1\leq|f_\alpha|<n\}} \Phi(|f_\alpha|)d\mu \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n)\mu(\{n-1 \leq |f_\alpha| < n\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n)\mu(\{|f_\alpha| \geq n-1\}) - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n)\mu(\{|f_\alpha| \geq n\}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \Phi(m+1)\mu(\{|f_\alpha| \geq m\}) - \sum_{m=0}^{\infty} \Phi(m+1)\mu(\{|f_\alpha| \geq m+1\}) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m+1)\mu(\{|f_\alpha| \geq m\})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Omega} \Phi(f_\alpha)d\mu \leq \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m+1)\mu(\{|f_\alpha| \geq m\}) \tag{1.6}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\int_{\{|f_\alpha|\geq\lambda_n|\}} |f_\alpha| d\mu &= \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} \int_{\{r\leq|f_\alpha|<r+1\}} |f_\alpha| d\mu \geq \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} r\mu(\{r \leq |f_\alpha| < r+1\}) \\
&= \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} r\mu(\{|f_\alpha| \geq r\}) - \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} r\mu(\{|f_\alpha| \geq r+1\}) \\
&= \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} r\mu(\{|f_\alpha| \geq r\}) - \sum_{s=\lambda_n+1}^{\infty} (s-1)\mu(\{|f_\alpha| \geq s\}) \\
&= \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} r\mu(\{|f_\alpha| \geq r\}) - \sum_{s=\lambda_n}^{\infty} (s-1)\mu(\{|f_\alpha| \geq s\}) \\
&+ \sum_{s=\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} (s-1)\mu(\{|f_\alpha| \geq s\}) \\
&\geq \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} (r-r+1)\mu(\{|f_\alpha| \geq r\}) \\
&= \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} \mu(\{|f_\alpha| > r\}).
\end{aligned}$$

Da questo, sommando su n, si ha che:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\mu(\{|f_\alpha| > n\}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=\lambda_n}^{\infty} \mu(\{|f_\alpha| > r\}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{|f_\alpha|>\lambda_n\}} |f_\alpha| d\mu \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Per cui (1.6) e (1.7) implicano (1.3).

(iii)$\Rightarrow$(ii). Dato $\epsilon > 0$, sia $k_\epsilon = \frac{C_1}{\epsilon}$, e si scelga λ_n tale che $x > \lambda_n$. Allora $\frac{\Phi(x)}{x} > k_\epsilon$, sapendo per ipotesi che $\frac{\Phi(x)}{x} \nearrow +\infty$ per $x \nearrow +\infty$. Da cui, scegliendo $x = f_\alpha$, $|f_\alpha| \leq \frac{\Phi(f_\alpha)}{k_\epsilon}$ sull'insieme $\{|f_\alpha| > \lambda_n\}$:

$$\int_{\{|f_\alpha|>\lambda_n\}} |f_\alpha| d\mu \leq \frac{1}{k_\epsilon} \int_{\{|f_\alpha|>\lambda_n\}} \Phi(f_\alpha) d\mu \leq \frac{C_1}{k_\epsilon} = \epsilon. \qquad (1.8)$$

Verificandosi questo uniformemente in α, e per la scelta arbitraria di $\epsilon > 0$, si ha (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Si verifiche la proprietà (i) della Definizione 1.
Preso un $\lambda > 0$, si ha:

$$\int\limits_{\Omega} |f_\alpha| d\mu = \int\limits_{\{|f_\alpha| \le \lambda\}} |f_\alpha| d\mu + \int\limits_{\{|f_\alpha| > \lambda\}} |f_\alpha| d\mu \le \lambda\mu(\Omega) + 1,$$

dove λ è scelto in modo che il secondo integrale sia al più 1 da (1.2), uniformemente in α. Quindi per $C = \lambda\mu(\Omega) + 1$ si ha la tesi.
Si dimostri ora la proprietà (ii) della Definizione 1. :

$$\begin{aligned} \int\limits_{A} |f_\alpha| d\mu &= \int\limits_{A \cap \{|f_\alpha| > \lambda\}} |f_\alpha| d\mu + \int\limits_{A \cap \{|f_\alpha| \le \lambda\}} |f_\alpha| d\mu \\ &\le \int\limits_{\{|f_\alpha| > \lambda\}} |f_\alpha| d\mu + \lambda\mu(A). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Così, dato $\epsilon > 0$, si scelga $\lambda_\epsilon > 0$ tale che, da (1.2), il primo integrale sulla destra di (1.9) sia $< \frac{\epsilon}{2}$ e per questo $\lambda_\epsilon > 0$, si prenda, inoltre, $\mu(A) < \delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2\lambda_\epsilon}$. Questo mostra che $\mu(A) < \epsilon \Rightarrow$ il membro destro di (1.9), è $< \epsilon$, uniformemente in α. Allora la condizione (ii) della Definizione 1. è verificata. $\square$

Osservazione 1.
Le funzioni convesse $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ introdotte nel precedente teorema, permettono di definire:

$$\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \ misurabili\ \ : \int\limits_{\Omega} \Phi(|f|) d\mu < +\infty\},$$

che sarà analizzato nel dettaglio nel capitolo successivo.

1.2 Definizione ed esempi di funzioni di Young

Definizione 2.
Siano $\Phi : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ funzioni convesse che soddisfano le seguenti condizioni: $\Phi(-x) = \Phi(x)$, $\Phi(0) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = +\infty$. Ad ogni Φ è possibile associare un'altra funzione $\Psi : \mathbb{R} \longmapsto \bar{\mathbb{R}}^+$, avente proprietà simili e definita da:

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \ge 0\}, \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Φ si dice funzione di Young, mentre Ψ funzione complementare a Φ.

Osservazione 2.
Segue dalla definizione che $\Psi(0) = 0$, $\Psi(-y) = \Phi(y)$ e Ψ è una funzione crescente tale che $\lim_{y\to+\infty} \Psi(y) = +\infty$.

Osservazione 3.
Da (1.10) è evidente che la coppia di funzioni (Φ,Ψ) soddisfa la disuguaglianza di Young:

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Osservazione 4.
Da (1.11) segue che la funzione complementare Ψ è la più piccola funzione Young che soddisfa tale disuguaglianza.

Esempio 1.
Sia $\Phi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$. Allora Φ è una funzione di Young continua tale che $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty$, mentre $\Phi(x) < +\infty$ per tutte le $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 2.
Sia:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq a < +\infty \\ \Phi_1(x) > 0, & \text{se } a < x < b \\ +\infty, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e Φ_1 è una funzione continua, crescente e convessa su (a,b).
Per esempio, sia $\Phi_1(x) = |x - a|^p$, $p \geq 1$, per $a \leq x < b$. Allora Φ è una funzione di Young poichè: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(-x) = \Phi(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = +\infty$, ed è convessa perchè lo sono le sue componenti.

Esempio 3.
Sia:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < a \\ +\infty, & \text{se } x > a \end{cases}$$

tale che $\Psi(-x) = \Psi(x)$. Allora Ψ è anch'essa una funzione di Young per com'è definita.
Si può anche verificare che questa Ψ è complementare a Φ data da $\Phi(x) = |x|$ con $a = 1$. Infatti:
$\Psi(y) = \sup\{x\,|y| - \Phi(x) : x \geq 0\} = \{x|y| - |x| : x \geq 0\}$, per definizione.

Posto $T(x) = x|y| - |x|$, sia (x_n) una successione in $\{x \geq 0\}$ tale che:

$$T(x) \to \sup_{\{x \geq 0\}} T$$

Si avrà:

$$c \leq \sup_{\{x \geq 0\}} T = \lim_{n \to +\infty} x_n|y| - |x_n|, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Se $x_n \to +\infty \Rightarrow T(x_n) \to -\infty$, che è assurdo. Quindi (x_n) è limitata $\Rightarrow \exists$ una sottosuccessione di (x_n) che converge verso un punto di massimo $\overline{x}$.
Dalla definizione di T si ha che $T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - |\overline{x}|$, e siccome si considerano le $x \geq 0$, è possibile assumere che $T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - \overline{x}$.
Inoltre, essendo $\overline{x}$ un punto di massimo, $T'(\overline{x}) = 0$. Questo si ha se e soltanto se $T'(\overline{x}) = |y| - 1 = 0 \Rightarrow |y| = 1$. Quindi $T(\overline{x}) = 0$, da cui $\Psi(y) = 0$.

Esempio 4.
Sia $\Phi(x) = \frac{|x|^p}{p}$. Allora $\Psi(y) = \frac{|y|^q}{q}$, dove $1 < p, q < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, infatti: $\Psi(y) = \sup\{x\,|y| - \Phi(x) : x \geq 0\} = \{x|y| - \frac{|x|^p}{p} : x \geq 0\}$, per definizione.
Posto $T(x) = x|y| - \frac{|x|^p}{p}$, sia (x_n) una successione in $\{x \geq 0\}$ tale che:

$$T(x) \to \sup_{\{x \geq 0\}} T$$

Si avrà:

$$c \leq \sup_{\{x \geq 0\}} T = \lim_{n \to +\infty} x_n|y| - \frac{|x_n|^p}{p}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Se $x_n \to +\infty \Rightarrow T(x_n) \to -\infty$, che è assurdo. Quindi (x_n) è limitata $\Rightarrow \exists$ una sottosuccessione di (x_n) che converge verso un punto di massimo $\overline{x}$.
Dalla definizione di T si ha che $T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - \frac{|\overline{x}|^p}{p}$, e siccome si considerano le $x \geq 0$, è possibile assumere che $T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - \frac{\overline{x}^p}{p}$. Inoltre, essendo $\overline{x}$ un punto di massimo, $T'(\overline{x}) = 0$. Quindi:

$$T'(\overline{x}) = |y| - \overline{x}^{p-1} = 0 \Leftrightarrow \overline{x}^{p-1} = |y| \Leftrightarrow \overline{x} = |y|^{\frac{1}{p-1}}$$

In aggiunta, dalla relazione di coniugio tra p e q si ha che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{q+p}{pq} = \frac{pq}{pq} \Leftrightarrow \frac{q+p}{p} = q \Leftrightarrow q(p-1) = p \Leftrightarrow (p-1) = \frac{p}{q}$$

Allora:

$\overline{x} = |y|^{\frac{q}{p}}$ e $T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - \frac{\overline{x}^p}{p} = |y|^{\frac{q}{p}}|y| - \frac{|y|^q}{p} = |y|^{\frac{q+p}{p}} - \frac{|y|^q}{p} = |y|^q - \frac{|y|^q}{p} = |y|^q(1-\frac{1}{p}) = \frac{|y|^q}{q}$

$$\Rightarrow \Psi(y) = \frac{|y|^q}{q}.$$

Esempio 5.
Sia $\Phi(x) = e^{|x|} - |x| - 1$. Allora $\Psi(y) = (1+|y|)log(1+|y|) - |y|$. Infatti: $\Psi(y) = \sup\{x\,|y| - \Phi(x) : x \geq 0\} = \{x|y| - e^{|x|} + |x| + 1 : x \geq 0\}$, per definizione. Posto $T(x) = x|y| - e^{|x|} + |x| + 1$, sia (x_n) una successione in $\{x \geq 0\}$ tale che:

$$T(x) \to \sup_{\{x\geq 0\}} T$$

Si avrà:

$$c \leq \sup_{\{x\geq 0\}} T = \lim_{n\to+\infty} x_n|y| - e^{|x_n|} + |x_n| + 1, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Se $x_n \to +\infty \Rightarrow T(x_n) \to -\infty$, che è assurdo. Quindi (x_n) è limitata $\Rightarrow \exists$ una sottosuccessione di (x_n) che converge verso un punto di massimo $\overline{x}$.
Dalla definizione di T si ha che $T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - e^{|\overline{x}|} + |\overline{x}| + 1$, e siccome si considerano le $x \geq 0$, è possibile assumere che $T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - e^{\overline{x}} + \overline{x} + 1$.Inoltre, essendo $\overline{x}$ un punto di massimo, $T'(\overline{x}) = 0$. Quindi:

$$T'(\overline{x}) = |y| - e^{\overline{x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\overline{x}} = |y| + 1 \Leftrightarrow \overline{x} = log(|y|+1)$$

Allora:

$$T(\overline{x}) = \overline{x}|y| - e^{\overline{x}} + \overline{x} + 1 = log(|y|+1)(|y|+1) - |y|$$

$$\Rightarrow \Psi(y) = (1+|y|)log(1+|y|) - |y|.$$

Si introduca ora una proprietà delle funzioni di Young, che ne caratterizza la rapidità di crescita e che gioca un ruolo fondamentale nella teoria di struttura degli spazi di Orlicz.

Definizione 3.
Si dice che una funzione di Young $\Phi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^+$ soddisfi la Δ_2-condizione, e si indica con $\Phi \in \Delta_2$, se $\exists x_0 \geq 0$:

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x), \qquad x \geq x_0 \tag{1.12}$$

per una qualche costante assoluta $K > 0$. La condizione Δ_2 è verificata globalmente se $x_0 = 0$.

Osservazione 5.
Nella definizione, il 2 può essere sostituito da $\alpha > 1$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, ottenendo una condizione equivalente a (1.12).

Esempio 1.
Si consideri $\Phi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$. Allora $\Phi \in \Delta_2$ per $K \geq 2$.

Esempio 2.
Tutte le funzioni $\Phi(x) = a|x|^p$, $p \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, appartengono a Δ_2. D'altra parte se $\Phi_0(x) = e^{|x|} - 1$, allora $\Phi_0(x) \notin \Delta_2$. Infatti non esiste un $K > 0$ tale che $\Phi_0(2x) = e^{|2x|} - 1 \leq K(e^{|x|} - 1)$.

Nel corso della trattazione verranno analizzate la struttura e le proprietà delle funzioni di Young Φ e Ψ, ponendo l'attenzione sulla loro rappresentazione integrale.

1.3 Rappresentazione integrale delle funzioni di Young

Teorema 1.3.1.
Sia $\Phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora Φ è convessa $\Leftrightarrow$ per ogni sottointervallo chiuso $[c,\ d] \subset (a,b)$ si ha:

$$\Phi(x) = \Phi(c) + \int_c^x \varphi(t)dt, \qquad c \leq x \leq d, \tag{1.13}$$

dove $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona crescente e continua a sinistra. Inoltre, Φ ammette derivata sinistra e destra in ogni punto di (a,b) ed esse sono uguali eccetto in al più in un numero numerabile di punti. In particolare, Φ è derivabile quasi dappertutto.

Dimostrazione. Sia $c \leq x_i \leq d$, $\forall i = 1,\ 2$, e, per usare l'ipotesi di convessità di Φ sia $c \leq x < y < z \leq d$.
Ponendo $\alpha = \frac{y-x}{z-x}$ e $\beta = \frac{z-y}{z-x}$, si ha che $0 < \alpha,\beta < 1$ e $\alpha + \beta = \frac{(y-x)(z-y)}{(z-x)} = 1$.
Inoltre, con $x_1 = z$ e $x_2 = x$, si ha:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \frac{y-x}{z-x} z + \frac{z-y}{z-x} x = \frac{yz - xz + zx - yx}{(z-x)} = \frac{y(z-x)}{(z-x)} = y,$$

da cui, per la convessità di Φ:

$$\Phi(y) = \Phi(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha\Phi(x_1) + \beta\Phi(x_2) = \alpha\Phi(z) + \beta\Phi(x). \tag{1.14}$$

Sostituendo α, β e ponendo $z - x = z - y + y - x$ in (1.14), si ottiene:

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} \leq \frac{\Phi(z) - \Phi(y)}{z - x}. \tag{1.15}$$

Questo implica che il quoziente della differenza per Φ è crescente in $[c,d]$. Da cui se $c < c_1 \leq x < y \leq d_1 < d$, allora (1.15) può essere esteso a:

$$\frac{\Phi(c_1) - \Phi(c)}{c_1 - c} \leq \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} \leq \frac{\Phi(d) - \Phi(c)}{d - c}. \tag{1.16}$$

Da questo si deduce immediatamente che:

$$|\Phi(y) - \Phi(x)| \leq K_1|x - y|,$$

dove K_1 è il massimo dei termini estremi in valore assoluto nella disuguaglianza (1.16).
Questo implica che Φ è di Lipschitz in $[c,d]$, per cui in particolre Φ è assolutamente continua. Infatti, $\forall\epsilon$ esiste un $\delta_\epsilon > 0$ tale che $\forall[a_i,\, b_i) \subset (a,\, b)$ si ha che $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\Phi(b_i) - \Phi(a_i)| < \epsilon$.
Quindi, per il teorema di Lebesgue-Vitali:

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^x \Phi'(t)dt, \qquad a \leq x \leq b. \tag{1.17}$$

Si verifichino ora le proprietà di Φ'.
Da (1.15), con $y = x + h$, $z = y + h'$, $h,h' \geq 0$, si ha:

$$(D^+\Phi)(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \leq \frac{\Phi(d) - \Phi(c)}{d - c} < +\infty$$

e

$$(D^-\Phi)(y) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi(y) - \Phi(y-h)}{h} > -\infty.$$

Da cui le derivate destra e sinistra di Φ esistono in ogni punto di $[c,d]$ e per $x < y$,

$$(D^+\Phi)(x) \leq \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} \leq (D^-\Phi)(y).$$

Sapendo che $(D^-\Phi)(y) \le (D^+\Phi)(x)$ da (1.16), $(D^\pm\Phi)$ è crescente e l'insieme dei punti di discontinuità di questa funzione è al più numerabile. Allora $(D^+\Phi)(x) = (D^-\Phi)(y)$ in ogni punto di continuità di queste funzioni, e tale valore comune è esattamente Φ' di (1.17). Per cui vale (1.13) con $\varphi = \Phi'$.
Per dimostrare il viceversa, si consideri vera la (1.13). Per $c < x < d$, sia $L(x)$ la corda passante per $(c, \Phi(c))$, e $(d, \Phi(d))$ che è data da:

$$L(x) = \Phi(c) + \frac{\Phi(c) - \Phi(d)}{c - d}(x - c).$$

Per verificare che Φ è convessa, ovvero che la corda è al di sopra dell'arco $(L(x) \ge \Phi(x))$, occorre far vedere che:

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(c)}{x - c} \le \frac{\Phi(d) - \Phi(c)}{d - c}, \qquad c < x < d. \tag{1.18}$$

Tale disequazione è verificata sostituendo (1.13) in Φ. Inoltre, si ha sempre che:

$$\frac{1}{x-c}\int_c^x \varphi(t)dt \le \varphi(x) \le \frac{1}{d-x}\int_x^d \varphi(u)du,$$

da $\varphi(c) \le \varphi(t) \le \varphi(x) \le \varphi(d)$, per $c < t < x < d$. In aggiunta, il membro destro di (1.18) può essere espresso nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\frac{\int_c^x \varphi(t)dt + \int_x^d \varphi(u)du}{(d-x)+(x-c)} &\ge \min\left(\frac{1}{x-c}\int_c^x \varphi(t)dt, \frac{1}{d-x}\int_x^d \varphi(u)du\right)\\ &= \frac{1}{x-c}\int_c^x \varphi(t)dt.\end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è una diretta conseguenza della relazione:

$$\min\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right) \le \left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right) \le \max\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right),$$

per ogni numero reale a_1, a_2 e numero positivo b_1, b_2. Allora la (1.18) si conserva e Φ data da (1.13) è convessa in (a, b). □

Corollario 1.3.2.
Sia $\Phi : \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}^+$ una funzione di Young. Allora può essere rappresentata come:

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt, \qquad x \in \bar{\mathbb{R}}^+. \tag{1.19}$$

dove $\varphi(0) = 0$, $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *è monotona crescente, continua a sinistra e se* $\varphi(x) = +\infty$ *per* $x \geq a$ *allora* $\Phi(x) = +\infty$, $x \geq a \geq 0$.

Dimostrazione. Sapendo che una funzione di Young $\Phi : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ è convessa e che $\Phi(0) = 0$, ma $\Phi(x) \nearrow +\infty$ per $x \nearrow +\infty$, è chiaro che se $\Phi(a) = +\infty$ per un qualche $a > 0$, allora $\Phi(x) = +\infty$ per tutti gli $x > a$. Considerando che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x) = +\infty$ per $x \geq a$ in questo caso, (1.13) è verificata. Allora è possibile esprimere la rappresentazione (1.13) per ogni funzione di Young Φ nella forma (1.19). □

Osservazione 6.
La rappresentazione (1.19) e la funzione complementare Ψ motivano una definizione equivalente di quest'ultima, quando la derivata φ di Φ è continua. Sia, infatti, ψ l'inversa della funzione monotona φ di (1.19). Perchè ψ sia continua a sinistra occorre definirla nel modo seguente:

$$\psi(u) = \inf\{t : \varphi(t) > u\}, \qquad u \geq 0. \tag{1.20}$$

Allora $\psi(0) = 0$, ψ è crescente ed univocamente determinata. Inoltre, per la continuità a sinistra di φ, $\{t : \varphi(t) > u\}$ è l'intervallo $(\psi(u), +\infty]$ e $\psi(u) < t \Leftrightarrow \varphi(t) > u$.
Si definisca ora:

$$\Psi(y) = \int_0^y \psi(u)du, \qquad y \geq 0. \tag{1.21}$$

Allora $\Psi(0) = 0$, Ψ è convessa per il Teorema (1.3.1) e quindi si tratta di una funzione di Young.

Teorema 1.3.3.
Sia $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \bar{\mathbb{R}}^+$ *una funzione di Young e sia* Ψ *definita da (1.21). Allora queste soddisfano la disuguaglianza di Young:*

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y), \qquad x, y \geq 0, \tag{1.22}$$

con l'uguaglianza in (1.22) se $y = \varphi(x)$ *o* $x = \psi(y)$, *per* $x, y \geq 0$.

Dimostrazione. Se per qualche x_0, y_0, o $\Phi(x_0) = +\infty$ o $\Psi(y_0) = +\infty$, allora vale la (1.22).
Quindi, occorre solo esaminare il caso di $\Phi(x) < +\infty$ e $\Psi(y) < +\infty$ per tutti

gli $0 \leq x < +\infty$ e $0 \leq y < +\infty$. Allora:

$$\begin{aligned}
0 \leq xy &= \int_0^x du + \int_0^y dv \\
&\iint\limits_{\{u \leq x, v \leq y : 0 \leq u \leq \varphi(v), 0 \leq \psi(u) < v\}} dudv \\
&+ \iint\limits_{\{u \leq x, v \leq y : u > \varphi(v) \geq 0, 0 \leq v \leq \psi(u)\}} dudv \\
&= \int_0^x du \int_0^{y \wedge \varphi(u)} dv + \int_0^y dv \int_0^{x \wedge \psi(v)} du, \\
&\text{dove } \ u \wedge u = \min(u,v), \ \text{ ed è stato utilizzato il teorema di Fubini-Tonelli} \\
&\leq \int_0^x \varphi(u) du + \int_0^y \psi(v) dv \\
&= \Phi(x) + \Psi(y),
\end{aligned}$$

dove l'uguaglianza occorre nel penultimo passaggio se e soltanto se $y \geq \varphi(u)$, e così dalla (1.20) $\psi(v) = x$, o $y = \varphi(x)$ e $x \geq \psi(y)$.

□

1.4 Relazioni tra coppie complementari di funzioni di Young

Definizione 4.
Una funzione di Young $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continua si dice N-funzione se:
$\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$ e $\Phi(\mathbb{R}) \subset (\mathbb{R}^+)$.

Il seguente risultato è un'immediata conseguenza del Teorema (1.3.1)

Proposizione 1.4.1.
Sia (Φ,Ψ) una coppia complementare di N-funzioni. Allora Φ e Ψ sono strettamente crescenti e quindi le loro inverse Φ^{-1}, Ψ^{-1} sono univocamente determinate e vale:

$$a < \Phi^{-1}(a)\Psi^{-1}(a) \leq 2a, \qquad a > 0.$$

Dimostrazione. Si noti che per ogni $a > 0$:

$$\frac{\Phi(a)}{a} = \frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt = \varphi(t^*), \qquad \text{per un qualche} \quad 0 < t^* < a,$$

per il Corollario (1.3.2) ed il teorema del valor medio per gli integrali di Lebesgue. Da cui, per l'Osservazione 5 ed il teorema del valor medio per gli integrali di Lebesgue:

$$\Psi(\frac{\Phi(a)}{a}) = \int_0^{\frac{\Phi(a)}{a}} \psi(t)dt = \frac{\Phi(a)}{a}\psi(\tilde{t}), \qquad 0 < \tilde{t} < \frac{\Phi(a)}{a} = \varphi(t^*),$$

$$< \frac{\Phi(a)}{a} \cdot \psi(\varphi(a)) \leq \frac{\Phi(a)}{a} \cdot a = \Phi(a), \tag{1.23}$$

essendo le funzioni φ e ψ l'una l'inversa dell'altra.
Ponendo $\Phi(a) = \alpha$ in (1.23) si ha che:

$$\frac{\alpha}{\Phi^{-1}(\alpha)} < \Psi(a) \Leftrightarrow \alpha < \Phi^{-1}(\alpha)\Psi^{-1}(\alpha).$$

D'altra parte, per la disuguaglianza di Young se $\alpha = \Phi(a)$ e $\beta = \Psi(b)$:

$$\Phi^{-1}(\alpha)\Psi^{-1}(\beta) \leq \alpha + \beta. \tag{1.24}$$

Ponendo $\alpha = \beta$ in (1.24), si ha:

$$\Phi^{-1}(\alpha) + \Psi^{-1}(\alpha) \leq 2\alpha. \tag{1.25}$$

Quindi vale il risultato. □

Capitolo 2

Gi spazi di funzione di Orlicz

2.1 Lo spazio $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$

2.1.1 Le classi di Orlicz su generali spazi di misura

In questo capitolo sono presentati gli spazi di funzione di Orlicz su arbitrari spazi di misura. L'analisi qui proposta ne mette in luce alcune rilevanti proprietà, ponendo l'attenzione sulle possibili similitudini con gli spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p > 1$.

Osservazione 7.
Sia $\Phi : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ una funzione di Young, quindi misurabile. Se $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ è anch'essa misurabile, allora $\Phi(f) : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$ lo è a sua volta, poichè composta di due funzioni misurabili.

Definizione 5.
$\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ è l'insieme di tutte le funzioni $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, misurabili per Σ, tali che $\int\limits_{\Omega} \Phi(|f|)d\mu < +\infty$.

Osservazione 8.
Si assumi che la misura μ abbia la seguente proprietà:

$$\forall \text{ E} \in \Sigma \text{ t.c. } \mu(E) > 0 \Rightarrow \exists \text{ F} \in \Sigma \text{ t.c. F} \subset \text{E e } 0 < \mu(F) < +\infty.$$

Questo elimina misure come $\mu(A) = 0$ se $A = \emptyset$, e $\mu(A) = +\infty$ se $A \neq \emptyset$.

Definizione 6.
Un insieme $A \in \Sigma$ è un atomo per μ (o è un μ-atomo) se $\mu(A) > 0$ e $\forall B \subset A$, $B \in \Sigma$, allora $\mu(B) = 0$ o $\mu(A - B) = 0$.

Definizione 7.
Un insieme $D \in \Sigma$ si dice diffuso per μ se non contiene μ-atomi. Questo implica che $\forall \lambda$, $0 \leq \lambda \leq \mu(D)$, è possibile trovare un insieme $D_1 \subset D$, $D_1 \in \Sigma$ t.c. $\mu(D_1) = \lambda$. In questo caso D è detto non atomico per μ.

Osservazione 9.
Lo spazio di funzioni $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ non è generalmente lineare, come si può evincere dal seguente risultato.

Teorema 2.1.1.
1. (i) Lo spazio $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ è assolutamente convesso, cioè:
se $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ t.c. $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, allora $\alpha f + \beta g \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$.
(ii) Inoltre, sia f misurabile, se $\exists\, h \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ t.c. $|f| \leq |h|$, allora $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$.
2. Se $\Phi \in \Delta_2$ globalmente quando $\mu(\Omega) = +\infty$, e localmente se $\mu(\Omega) < +\infty$, $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ è lineare. Viceversa, se $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ è lineare e μ è diffusa su uno spazio di misura positiva, la condizione Δ_2 (in questi due casi) è necessaria.

Osservazione 10.
Si dice che la condizione Δ_2 è regolare, se è verificata per Φ localmente quando la misura in $\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ è finita, mentre globalmente se la misura dello spazio è infinita.

Dimostrazione. 1. (i) Siano $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ e $0 < \gamma = |\alpha| + |\beta| \leq 1$. Per la monotonia e la covessità di Φ:

$$\Phi(|\alpha f + \beta g|) \leq \Phi(|\alpha||f| + |\beta||g|) \leq \gamma\Phi(\frac{|\alpha|}{\gamma} f + \frac{|\beta|}{\gamma} g) \leq |\alpha|\Phi(|f|) + |\beta|\Phi(|g|).$$

Quindi:

$$\int_{\Omega} \Phi(|\alpha f + \beta g|) d\mu \leq \int_{\Omega} |\alpha|\Phi(|f|) d\mu + \int_{\Omega} |\beta|\Phi(|g|) d\mu < +\infty,$$

per cui $\alpha f + \beta g \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$.
(ii) Per ipotesi $|f| \leq |h|$, con $h \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ e f misurabile. Pertanto:

$$\int_{\Omega} \Phi(|f|) d\mu \leq \int_{\Omega} \Phi(|h|) d\mu < +\infty,$$

allora $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$.
2. Per dimostrare la linearità, è sufficiente verificare che $\forall f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ si ha che $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$, da cui $nf \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ed anche $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, con

$\alpha > 0$, $\alpha f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, per l'ultima parte di 1. Conseguentemente, $af_1 + bf_2 = \gamma(\frac{a}{\gamma}f_1 + \frac{b}{\gamma}f_2) \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, con $\gamma = |a| + |b| > 0$ e per $f_1, f_2 \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, per 1.(i).
Quindi, occorre solo dimostrare che $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, $\forall f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$.
Nel caso in cui $\mu(\Omega) = +\infty$, se Φ è Δ_2-regolare allora:

$$\Phi(2|f|) \leq K\Phi(|f|),$$

per una qualche costante assoluta $K > 0$. Da cui:

$$\int_\Omega \Phi(|2f|)d\mu \leq K \int_\Omega \Phi(|f|)d\mu < +\infty,$$

allora $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$.
Invece, se $\mu(\Omega) < +\infty$, $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$, per $x \geq x_0 \geq 0$. Sia ora $f_1 = f$ se $|f| \leq x_0$, mentre $f_1 = 0$ nei restanti casi. Posto $f_2 = f - f_1$, sia ha che $f = f_1 + f_2$ e

$$\Phi(2|f|) = \Phi(2|f_1|) + \Phi(2|f_2|) \leq \Phi(2|f_1|) + K\Phi(2|f_2|),$$

da cui:

$$\int_\Omega \Phi(2|f|)d\mu \leq \Phi(2x_0)\mu(\Omega) + K \int_\Omega \Phi(|f|)d\mu < +\infty,$$

allora $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ e, per quanto detto precedentemente, ciò mostra che $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ è lineare quando Φ è Δ_2-regolare.
Si dimostri ora il viceversa del teorema. Sia $E \in \Sigma$ un insieme di misura positiva su cui è diffusa μ, e si suppunga per assurdo che Φ non sia Δ_2-regolare.
Sia $0 < \alpha < \mu(E) < +\infty$, allora per le ipotesi su μ, $\exists F \subset E$, $F \in \Sigma$ con $\mu(F) = \alpha < +\infty$. Inoltre, si assuma che $\Phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+$, per non cadere nel caso banale
Siccome $\Phi \notin \Delta_2$, allora esiste una successione (x_n) t.c. $\Phi(2x_n) > n\Phi(x_n)$, $n \geq 1$. Sia $n_o \in \mathbb{Z}$ t.c.:

$$\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^2} < \alpha, \ \textit{e } \Phi(x_n) \geq 1 \textit{ per tutti gli } n \geq n_0.$$

Essendo μ diffusa su F, esiste un insieme misurabile $F_0 \subset F$ t.c. $\mu(F_0) = \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^2} < \alpha$. Allo stesso modo, è possibile trovare un insieme $D_1 \in \Sigma$, $D_1 \subset F_0$ t.c. $\mu(D_1) = \frac{1}{n_0^2}$. Inoltre, sapendo che $\mu(F_0 - D_1) > 0$, $\exists D_2 \in \Sigma$,

$D_2 \subset F_0 - D_1$ t.c. $\mu(D_2) = \frac{1}{(n_0+1)^2}$. Ripetendo tale procedimento, si possono trovare $D_n \in \Sigma$ insiemi disgiunti t.c. $\mu(D_n) = \frac{1}{(n_0+n-1)^2}$, $n \geq 1$.
Si scelga ora $F_k \subset D_k$, $F_k \in \Sigma$, t.c. $\mu(F_k) = \frac{\mu(D_k)}{\Phi(x_n)}$.
Sia, inoltre, $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{F_n}$. Allora, f è misurabile e:

$$\int_\Omega \Phi(f) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(x_n)\mu(F_n) = \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

così $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$. Comunque:

$$\int_\Omega \Phi(2f) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2x_n)\mu(F_n) \geq \sum_{n \geq n_0} n\Phi(x_n)\mu(F_n) = \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n} = +\infty,$$

per cui $2f \notin \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, che è assurdo. □

Osservazione 11.
Ogni spazio di funzioni, con la proprietà del punto 1. del teorema precedente, è detto circolare e solido. In effetti, se $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ allora $hf \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ per ogni scalare h di valore assoluto 1 (per esempio $h(\theta) = e^{i\theta}$), e la condizione: $|g| \leq |f|$, con g misurabile, implica che $g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$.

Corollario 2.1.2.
L'insieme $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ è una classe circolare e solida di funzioni scalari ed è lineare se e soltanto se è chiusa rispetto al prodotto di numeri positivi.

Osservazione 12.
Per la condizione necessaria del punto 2. del Teorema (2.2.1), è essenziale che μ sia diffusa su un insieme di misura positiva. Il seguente esmpio illustra tale osservazione.

Esempio 1.
Siano $\Omega = \{1, 2, ...\}$, Σ una σ-algebra di Ω e μ una misura t.c. $\mu(\{i\}) \geq 1$, $\forall i \geq 1$. Sia, inoltre, $\Phi(x) = e^{x^2} - 1$. Quindi, la misura del contare μ risulta atomica, mentre Φ è una N-funzione e $\Phi \notin \Delta_2$. Infatti, non esiste un $K > 0$ t.c.:

$$\Phi(2x) = e^{4x^2} - 1 \leq K(e^{x^2} - 1).$$

Con queste condizioni si può asserire che $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ è lineare.
Infatti, se $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$:

$$\int_\Omega \Phi(f)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}(exp(|f(n)|^2) - 1) < +\infty,$$

quindi il termine sulla destra risulta limitato.
Si supponga ora che $\sum_{n=1}^{\infty}(\exp(|f(n)|^2) - 1) \leq K$ per $K > 0$,
così $\exp(|f(n)|^2) \leq K + 1$, $n \geq 1$. Allora:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(2f)d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}(\exp(|4f(n)|^2) - 1) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(\exp(|f(n)|^2) - 1)(K+2)((K+1)^2+1) \\ &= (K+2)((K+1)^2+1)\int_\Omega \Phi(f)d\mu < +\infty, \end{aligned}$$

da cui $2f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ e lo spazio è lineare.

2.2 Lo spazio di Orlicz

Definizione 8.
Sia $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ definito su un arbitrario spazio di misura. Lo spazio $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ di tutte le funzioni misurabili $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, t.c. $\alpha f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$, per un qualche $\alpha > 0$, è chiamato spazio di Orlicz.
Quindi:

$$\mathcal{L}^\Phi(\mu) = \{f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}},\ \textit{misurabili}\ : \int_\Omega \Phi(\alpha f)d\mu < +\infty,\ \textit{per un qualche}\ \alpha > 0\}.$$

Proposizione 2.2.1.
L'insieme $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ è uno spazio vettoriale. Inoltre, $\forall f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, $\exists \alpha > 0$ t.c.:

$$\alpha f \in B_\Phi = \{g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \int_\Omega \Phi(g)d\mu \leq 1\},$$

e B_Φ è un sottoinsieme circolare solido di $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$.

Dimostrazione. Si dimostri che $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ è uno spazio vettoriale.
Siano $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, allora $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0$ tali che $\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, dalla definizione. Posto $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, si ha che $\alpha > 0$ e per la monotonia e la convessità di Φ:

$$\int_\Omega \Phi(\frac{\alpha}{2}(f_1 + f_2))d\mu \leq \frac{1}{2}(\int_\Omega \Phi(\alpha_1 f_1)d\mu + \int_\Omega \Phi(\alpha_2 f_2)d\mu) < +\infty, \tag{2.1}$$

essendo $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$.
Da $\frac{\alpha}{2} > 0$ e (2.1) segue che $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$. In particolare, $\forall f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, allora $2f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, quindi $nf \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, con $n > 1$, e conseguentemente $\alpha f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Da cui $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$ è uno spazio vettoriale ed è anche, ovviamente, solido e circolare.
Sia ora (a_n) un'arbitraria successione tale che $a_n \searrow 0$ e $\alpha_n = \min(\alpha, a_n)$. Allora $\alpha_n \searrow 0$, $\Phi(\alpha_n f) \leq \Phi(\alpha f)$ e $\Phi(\alpha_n f) \to 0$ per la continuità e la monotonia di Φ, quale funzione di Young. Quindi, per il teorema della convergenza dominata, $\int_\Omega \Phi(\alpha_n)d\mu \to 0$, per cui $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\int_\Omega \Phi(\alpha_{n_0} f)d\mu \leq 1$. Allora $\alpha_{n_0} f \in B_\Phi$.
Mentre se $\Phi(x) = +\infty$ per $x > x_0 > 0$, allora tutte le $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ devono essere limitate. □

2.2.1 Spazi di Orlicz e spazi di Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p > 1$

Proposizione 2.2.2.
1. Sia (Ω, Σ, μ) un finito spazio di misura. Allora:
(i) $\mathcal{L}^1(\mu) = \cup\{\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi$ sia una N-funzione$\}$;
(ii)$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \cap\{\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi$ sia una N-funzione$\}$.
2. Sia (Ω, Σ, μ) uno spazio di misura, se (Φ, Ψ) è una coppia di N-funzioni, allora:
$\mathcal{L}^1(\mu) = \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)\tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)$, dove $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)\tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu) = \{fg : f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu), g \in \tilde{\mathcal{L}}^\Psi(\mu)\}$.

Dimostrazione. 1.(i) Si dimostri che $\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$, per tutte le N-funzioni Φ. Per ogni $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$:

$$\int_\Omega (a|f| + b)d\mu \leq \int_\Omega \Phi(|f|)d\mu < +\infty,$$

sapendo che, per la convessità di Φ, $\Phi(x) \geq ax + b$, con a e b costanti. Esplicitando il membro sinistro della disuguaglianza, si ha che:

$$\int_\Omega (a|f| + b)d\mu = a\int_\Omega |f|d\mu + b\mu(\Omega) < +\infty,$$

Allora $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e vale l'inclusione: $\mathcal{L}^1(\mu) \supset \cup\{\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi$ *sia una N-funzione*$\}$. D'altra parte, se $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, allora è uniformemente integrabile e per il Teorema (1.1.1) , esiste una funzione convessa Φ, del tipo desiderato, t.c. $\int\limits_\Omega \Phi(|f|)d\mu < +\infty$, e quindi $f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$.
Questo implica che $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \{\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi$ *sia una N-funzione*$\}$ e quindi vale l'uguaglianza tra i due spazi.
(ii) Se $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) \Rightarrow |f(\omega)| \leq k < +\infty$ per tutti gli $\omega \in \Omega - \Omega_0$ con $\mu(\Omega_0) = 0$, allora per ogni N-funzione Φ si ha:

$$\int\limits_\Omega \Phi(|f|)d\mu \leq \int\limits_\Omega \Phi(k)d\mu = \Phi(k)\mu(\Omega) < +\infty.$$

Quindi $\mathcal{L}^\infty(\mu) \subset \cap\{\tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu) : \Phi$ *sia una N-funzione*$\}$.
Ora, si supponga per assurdo che $\exists f \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)$ t.c. $f \notin \mathcal{L}^\infty(\mu)$.
Sia $n_1 < n_2 < ...$ una successione di interi $(n_k \to +\infty)$:
$\Omega_k = \{\omega : n_k \leq |f(\omega)| < n_k + 1\}$ soddisfa $\mu(\Omega_k) \geq \mu(\Omega_{k+1}) > 0$. Questo è possibile perchè per ipotesi $f \notin \mathcal{L}^\infty(\mu)$ e quindi non è limitata. Inoltre, $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(\Omega_k) \leq \mu(\Omega) < +\infty$ con $\Omega_k \in \Sigma$ disgiunti. Così $\mu(\Omega_k) \to 0$ per $k \to +\infty$.
Si definisca ora:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{2t}{n_1\mu(\Omega_{n1})}, & \text{se } 0 \leq t < \frac{n_1}{2} \\ \frac{1}{\mu(\Omega_k)}, & \text{se } \frac{n_k}{2} \leq t < \frac{n_{k+1}}{2},\ k \geq 1 \end{cases}$$

quindi si ha che $\varphi_0(0) = 0$, φ_0 è crescente e $\varphi_0(t) \nearrow +\infty$ per $t \nearrow +\infty$. Da cui $\Phi_0(x) = \int\limits_0^{|x|} \varphi_0(t)dt$ definisce una N-funzione, e:

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \Phi_0(f)d\mu &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_k} \Phi_0(n_k)d\mu \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_0(n_k)\mu(\Omega_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{2}\varphi_0(\frac{n_k}{2})\mu(\Omega_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} n_k = +\infty. \end{aligned}$$

Allora $f \notin \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi_0}(\mu)$, che è assurdo. Quindi vale la (ii).
2. Sia $0 \leq h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e (Φ, Ψ) una coppia complementare di N-funzioni. Il caso generale di h, può essere ridotto a questo sapendo che $|h| = h\, sgn\, h$.
Presa Φ una N-funzione $\Rightarrow \exists \Phi^{-1}$, poichè Φ è strettamente monotona crescente.
Si definiscano ora le funzioni f, g nel modo seguente:

$$f(\omega) = \begin{cases} \Phi^{-1}(h(\omega)), & \text{se } \omega \in A_1 \\ 0, & \text{se } \omega \in A_2 \\ +\infty, & \text{se } \omega \in (A_1 \cup A_2)^c \end{cases}$$

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{h(\omega)}{\Phi^{-1}(h(\omega))}, & \text{se } \omega \in A_1 \\ 0, & \text{se } \omega \in A_2 \\ +\infty, & \text{se } \omega \in (A_1 \cup A_2)^c \end{cases}$$

dove $A_1 = \{\omega : 0 < h(\omega) < +\infty\}$ e $A_2 = \{\omega : h(\omega) = 0\}$.
Si noti che $h = fg$ e $\mu((A_1 \cup A_2)^c) = 0$. Inoltre:

$$\int_\Omega \Phi(f) d\mu = \int_{A_1} \Phi(f) d\mu = \int_\Omega h d\mu < +\infty, \; \textit{per com'è stata definita } f \textit{ e}$$

$$\int_\Omega \Psi(g) d\mu = \int_{A_1} \Psi\left(\frac{h}{\Phi^{-1}(h)}\right) d\mu \leq \int_{A_1} \Psi(\Psi^{-1}(h)) d\mu = \int_\Omega h d\mu < +\infty$$

per la Proposizione (1.4.1).
Quindi $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ e $g \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Psi}(\mu)$, per cui si ha che $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)\tilde{\mathcal{L}}^{\Psi}(\mu)$.
L'inclusione opposta è un'immediata conseguenza della disuguaglianza di Young. Infatti, sia $h \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)\tilde{\mathcal{L}}^{\Psi}(\mu)$ t.c. $h = fg$ con $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$ e $g \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Psi}(\mu)$.
Allora:

$$\int_\Omega |h| d\mu = \int_\Omega |fg| d\mu \leq \int_\Omega \Phi(f) d\mu + \int_\Omega \Psi(g) d\mu < +\infty,$$

e quindi $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$. $\square$

Osservazione 13.
Lo spazio di Orlicz è una generalizzazione degli spazi di Lebesgue $\mathcal{L}^p$, $p > 1$.

Infatti, $\mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ e $\mathcal{L}^{p}(\mu)$ è che $\mathcal{L}^{\Phi}(\mu) = \mathcal{L}^{p}(\mu)$ se $\Phi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$, ed inoltre, se $\Phi_0(x) = 0$ per $0 \leq x \leq 1$, e $\Phi_0(x) = +\infty$ per $x > 1$ ($\Phi_0(-x) = \Phi_0(x)$), allora $\mathcal{L}^{\Phi_0}(\mu) = \mathcal{L}^{\infty}(\mu)$. Pertanto, tutti gli spazi $\mathcal{L}^{p}(\mu)$ sono inclusi in $\mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ con Φ funzione di Young.

Definizione 9.
Per ogni $f \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)$, siano:

- $I_{\Phi}^{f}(\tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)) = I_{\Phi}^{f} = \Big\{k \geq 0 : kf \in \tilde{\mathcal{L}}^{\Phi}(\mu)\Big\}$;
- $k_f = sup I_{\Phi}^{f} (\in \bar{\mathbb{R}}^{+})$;
- $\ell_f : k \longmapsto \int\limits_{\Omega} \Phi(kf) d\mu$, $k \in I_{\Phi}^{f}$.

Proposizione 2.2.3.
Sia $0 \neq f \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$, *allora* $\ell_f : I_{\Phi}^{f} \longmapsto \bar{\mathbb{R}}^{+}$ *è una funzione crescente e continua su* $[0, k_f)$ *e* $\lim\limits_{k \to k_f} \ell_f(k) \leq +\infty$.
Se μ *è diffusa su un insieme* $E \in \Sigma$ *di misura positiva e sono dati arbitrariamente* $0 < \alpha$, $\beta < +\infty$, *allora esistono una funzione di Young* Φ *ed* $f \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ *t.c.* $k_f = \alpha$ *e* $\ell_f(k_f) = \beta$. *Inoltre,* $\exists g \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ *t.c.* $k_g = \alpha$ *e* $\ell_f(k_g) = +\infty$.

Dimostrazione. Per definizione:

$$\ell_f(k) = \int\limits_{\Omega} \Phi(kf) d\mu, \qquad f \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu), \tag{2.2}$$

per cui, essendo Φ crescente su $[0, k_f)$, anche ℓ_f lo è.
Inoltre, se $k_n \to k_0 \in [0, k_f]$, con $k_0 < k_f$, per (2.2) e per il teorema di covergenza monotona si ha che $\ell_f(k_n) \nearrow \ell_f(k_0)$. Quindi il funzionale ℓ_f è crescente.
Se $k_0 = k_f$, allora $\ell_f(k_n) \leq \ell_f(k_0)$ e $\limsup\limits_{n \to +\infty} \ell_f(k_n) \leq \ell_f(k_0)$. Sapendo che $\Phi(k_n f) \geq 0$ e $\Phi(k_n f) \to \Phi(k_0 f)$ per il risultato precedente, allora $\liminf\limits_{n \to +\infty} \ell_f(k_n) \geq \ell_f(k_0)$ per il lemma di Fatou.
Pertanto, $\lim\limits_{k_n \to k_0} \ell_f(k_n) \to \ell_f(k_0)$ e quindi ℓ_f è continua. Si noti che se Φ fosse strettamente crescente e continua, allora anche ℓ_f lo sarebbe, essendo $f \neq 0$ su un insieme di misura positiva.

Per dimostrare l'ultima parte del teorema, si considerino $0 < \alpha$, $\beta < +\infty$. Sia, inoltre, Φ una funzione di Young t.c. $\Phi(x) = e^{|x|} - 1$, per cui $\Phi \notin \Delta_2$.

Per ipotesi esiste un $E \in \Sigma$, con $\mu(E) > 0$ e su cui è diffusa μ. Allora esiste $F \subset E$, $0 < \mu(F) < +\infty$, su cui μ è ancora diffusa.
Data $\Sigma(F)$, la restrizione della σ-algebra Σ a F, per i risultati nella teoria della misura, $\mathcal{L}^\Phi(F, \Sigma(F), \mu)$ si può identificare con $\mathcal{L}^\Phi(\mathcal{I}, \mathcal{B}, \lambda)$ dove $\mathcal{I} = [0, \mu(F))$ e $\lambda : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ è σ-additiva.
Si prendano ora arbitrariamente $0 \leq x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$, da $\mathcal{I}$ t.c.: $x_{n+1} - x_n = \frac{\beta}{n(n+1)(2^{n+1}-1)}$, $n \geq 1$, allora $x_n \to \tilde{x}_\beta < +\infty$. Inoltre, si definisca:

$$f = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (\log 2^{n+1}) \chi_{[x_n, x_{n+1})}. \tag{2.3}$$

Da questo si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}} \Phi(\alpha f) d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\exp(\log 2^{n+1}) - 1) d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 1) \frac{\beta}{n(n+1)(2^{n+1}-1)} = \beta.
\end{aligned}$$

D'altra parte $\forall \epsilon \in (0,1)$, perturbando di $1+\epsilon$ l'argomento del precedente integrale, questo diverge:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}} \Phi((1+\epsilon)\alpha f) d\lambda &= \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{(1+\epsilon)(n+1)} - 1)}{n(n+1)(2^{n+1}-1)} \\
&> \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\epsilon(n+1)}}{n(n+1)} = +\infty.
\end{aligned}$$

In questo caso, $\alpha = k_f$ e $\beta = \ell_f(k_f)$.
Sia ora g come f in (2.3), dove $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{n(2^{n+1}-1)}$, $n \geq 1$, si ha che:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}} \Phi(\alpha g) d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (\exp(\log 2^{n+1}) - 1) d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{n(2^{n+1}-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.
\end{aligned}$$

Ma per ogni $0 < \epsilon < 1$, si ha:

$$\int_{\mathcal{I}} \Phi((1-\epsilon)\alpha g)d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(1-\epsilon)(n+1)} - 1}{n(2^{n+1}-1)} < \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2^{-(n+1)\epsilon}}{n}) < +\infty. \tag{2.4}$$

Da cui, $k_g = \alpha$ e $\ell_g(k_g) = +\infty$. □

Osservazione 14.
Questa proposizione verrà utilizzata per dimostrare la continuità di un funzionale nel capitolo successivo.

Capitolo 3

Lo spazio di Orlicz è uno spazio di Banach

3.1 Le norme di Gauge e di Orlicz

Nell'ultima parte della trattazione sono introdotte le norme di Orlicz e di Gauge, di cui vengono messe in evidenza alcune significative relazioni. Successivamente, si dimostra che gli spazi di Orlicz, associati alle norme equivalenti di Orlicz e di Gauge, sono spazi di Banach.

Osservazione 15.
Considerando lo spazio B_Φ, si può ora introdurre una norma funzionale su $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$.

Definizione 10.
Sia N_Φ il funzionale:

$$N_\Phi(f) = \inf\{k > 0 : \frac{1}{k} f \in B_\Phi\} = \inf\{k > 0 : \int_\Omega \Phi(\frac{f}{k}) d\mu \leq 1\} \tag{3.1}$$

In seguito, saranno enunciate alcune importanti proprietà di $N_\Phi(f)$.

Teorema 3.1.1.
$(\mathcal{L}^\Phi(\mu), N_\Phi)$ è uno spazio lineare normato dove le funzioni che hanno la stessa norma si identificano.
Inoltre, $N_\Phi(f) \leq 1 \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(f) d\mu \leq 1$.

Dimostrazione. Per dimostrare che N_Φ è una norma, è necessario verificare le seguenti condizioni:
(i) $N_\Phi(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
(ii) $N_\Phi(\alpha f) = |\alpha| N_\Phi(\alpha f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
(iii) $N_\Phi(f + g) \leq N_\Phi(f) + N_\Phi(g)$.
Si dimostrino ora tali proprietà:
(i) Se $f = 0$ allora banalmente $N_\Phi(\alpha f) = 0$.
Se, invece, $N_\Phi(\alpha f) = 0$ si supponga per assurdo che $|f| > 0$ su un insieme di misura positiva. Allora, esiste un $\delta > 0$ tale che $A = \{\omega : |f(\omega)| \geq \delta\}$ con $\mu(A) > 0$. Ma da (3.1), si ha che $\frac{f}{k} \in B_\Phi$ per tutti i $k > 0$, e quindi $nf \in B_\Phi$ per tutti $n \geq 1$. Sapendo inoltre che $\mu(A) > 0$ e $\Phi(n\delta) \nearrow +\infty$ per $n \to +\infty$:

$$\Phi(n\delta)\mu(A) = \int\limits_A \Phi(n\delta) d\mu \leq \int\limits_A \Phi(nf) d\mu \leq \int\limits_\Omega \Phi(nf) d\mu \leq 1, \qquad n \geq 1.$$

Allora $\mu(A) = 0$ e $f = 0$;
(ii) Si consideri il caso non banale $\alpha \neq 0$:

$$\begin{aligned} N_\Phi(\alpha f) = \inf\{k > 0 : \int\limits_\Omega \Phi(\frac{\alpha f}{k}) d\mu \leq 1\} &= |\alpha| \inf\{\frac{k}{|\alpha|} > 0 : \int\limits_\Omega \Phi(\frac{f}{k/|\alpha|}) d\mu \leq 1\} \\ &= |\alpha| \inf\{\beta > 0 : \int\limits_\Omega \Phi(\frac{f}{\beta}) d\mu \leq 1\} \\ &= |\alpha| N_\Phi(\alpha f). \end{aligned}$$

(iii) Per dimostare la disuguaglianza triangolare, sia $a_i > N_\Phi(f_i)$, $\forall i = 1, 2$. Allora $0 < a_i < +\infty$, e posto $b = a_1 + a_2 \Rightarrow b > 0$. Inoltre, essendo $\mathcal{L}^\Phi$ lineare, $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^\Phi$, da cui si ha che $N_\Phi(f_1 + f_2) < +\infty$. Quindi sapendo che Φ è convessa e che $\frac{f_i}{a_i} \in B_\Phi$, $\forall i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \Phi(\frac{f_1 + f_2}{b}) d\mu &= \int\limits_\Omega \Phi(\frac{f_1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{b} + \frac{f_2}{a_2} \cdot \frac{a_2}{b}) d\mu \\ &\leq \frac{a_1}{b} \int\limits_\Omega \Phi(\frac{f_1}{a_1}) d\mu + \frac{a_2}{b} \int\limits_\Omega \Phi(\frac{f_2}{a_2}) d\mu \\ &\leq \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} = 1 \end{aligned}$$

Allora $\frac{1}{b}(f_1 + f_2) \in B_\Phi$ e quindi $N_\Phi(f_1 + f_2) \leq b = a_1 + a_2$, ovvero $N_\Phi(f_1 + f_2) \leq N_\Phi(f_1) + N_\Phi(f_2)$. Questo mostra che $(\mathcal{L}^\Phi(\mu), N_\Phi)$ è uno spazio lineare normato.

Per dimostrare l'ultima parte dell'enunciato, sia $a = N_\Phi(f)$, $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ e si esami il caso non banale in cui $a > 0$. Per definizione, $\frac{1}{a}f \in B_\Phi$.
Se $a \leq 1$, allora:

$$\int_\Omega \Phi(f)d\mu \leq \int_\Omega \Phi(\frac{f}{a})d\mu \leq 1$$

per la monotonia di Φ e la definizione di $N_\Phi(f)$. Quindi:

$$\int_\Omega \Phi(f)d\mu \leq 1.$$

Viceversa, se $\int_\Omega \Phi(f)d\mu \leq 1$, ovvero $f \in B_\Phi$, dalla definizione di $N_\Phi(f)$ si ha che $N_\Phi(f) \leq 1$.
Si noti che, se $a > 1$, $\int_\Omega \Phi(\frac{f}{a})d\mu \leq 1$, ma è possibile che $\int_\Omega \Phi(f)d\mu = +\infty$ per la proposizione precedente. Quindi solo il caso $0 \leq a \leq 1$ risulta rilevante qui. □

Osservazione 16.
Il Teorema (3.1.1) e la Proposizione (2.2.1) possono essere sintetizzati come segue: B_Φ è un sottoinsieme convesso, circolare e solido di $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$.

Osservazione 17.
Un funzionale reale e positivo p su B_Φ definito come:

$$p_{B_\Phi}(f) = \inf\{k > 0 : \frac{f}{k} \in B_\Phi\} \tag{3.2}$$

è chiamato *funzionale di Minkowski o di Gauge*.
Da (3.2) si deduce che p_{B_Φ} coincide con N_Φ, e quindi N_Φ non è altro che una notazione specifica di tale funzionale negli spazi di Orlicz. Per questo motivo N_Φ verrà nominata la *norma di Gauge* dello spazio di Orlicz $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$.

Osservazione 18.
Sia (Φ, Ψ) una coppia di funzioni di Young normalizzata, ovvero:

$$\Phi(1) + \Psi(1) = 1, \tag{3.3}$$

allora la Definizione (10) può essere riscritta nel modo seguente:

$$N_\Phi(f) = \inf\{k > 0 : \int_\Omega \Phi(\frac{f}{k})d\mu \leq \Phi(1)\},$$

sapendo che $0 < \Phi(1) \leq 1$ da (3.3).
Si noti che, ponendo $k_0 = N_\Phi(f) < +\infty$
$\Rightarrow \exists(k_n)$ t.c. $\lim_{k_n \to k_0} \Phi(\frac{f}{k_n}) \to \Phi(\frac{f}{k_0}) \geq 0$, e così per il lemma di Fatou $\int_\Omega \Phi(\frac{f}{k_0}) \leq 1$ (o $\leq \Phi(1)$).
Inoltre, se $f \not\equiv 0$, $\int_\Omega \Phi(\frac{f}{N_\Phi(f)})d\mu < 1 \Leftrightarrow (k_f < +\infty$ e $\int_\Omega \Phi(k_f f)d\mu < 1)$, da cui $k_f N_\Phi(f) = 1$.
Altre importanti proprietà di N_Φ sono illustrate nel seguente teorema.

Proposizione 3.1.2.
Sia $(f_n) \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, $n \geq 1$ una successione t.c. $f_n \to f$, con $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ e $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Allora $N_\Phi(f) \leq \liminf_{n\to+\infty} N_\Phi(f_n)$, cioè la successione $(f_n) \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ è uniformemente semicontinua.

Dimostrazione. Si dimostri il caso non banale $k_0 = \liminf_{n\to+\infty} N_\Phi(f_n) < +\infty$ e$f \neq 0$. Quindi, $N_\Phi(f) > 0$ e per un n sufficientemente grande $N_\Phi(f_n) > 0$.
Si supponga ora per assurdo che $0 \leq k_0 < +\infty$.
Se $k_0 = 0$ allora esiste una sottosuccessione (f_{n_i}) tale che $\lim_{i\to+\infty} N_\Phi(f_{n_i}) = 0$.
Conseguentemente, fissato un qualche i_0, $N_\Phi(f_{n_i}) \leq 1$, $\forall i \geq i_0$ e

$$\frac{1}{N_\Phi(f_{n_i})} \int_\Omega \Phi(|f_{n_i}|)d\mu \leq \int_\Omega \Phi(\frac{|f_{n_i}|}{N_\Phi(f_{n_i})})d\mu \leq 1,$$

usando la convessità di Φ. Da cui:

$$\int_\Omega \Phi(|f_{n_i}|)d\mu \leq N_\Phi(f_{n_i}) \to 0, \tag{3.4}$$

per $i \to +\infty$. Dalla (3.4), sapendo che $|f_{n_i}| \to |f|$ e che $\Phi(x) > 0$ per $|x| > 0$, per il lemma di Fatou allora si ha:

$$0 < \int_\Omega \Phi(|f|)d\mu = \int_\Omega \lim_{i\to+\infty} \Phi(|f_{n_i}|)d\mu \leq \liminf_{i\to+\infty} \int_\Omega \Phi(|f_{n_i}|)d\mu = 0,$$

che è assurdo. Quindi, $0 < k_0 < +\infty$.
Sia $0 < k_0 < t$, allora $k_0 < k_i < t$ per un qualche i tale che:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\left(\frac{f}{t}\right) d\mu &= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{t}\right) d\mu \\ &\leq \liminf_{i\to+\infty} \int_\Omega \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{t}\right) d\mu \\ &\leq \liminf_{i\to+\infty} \int_\Omega \Phi\left(\frac{f_{n_i}}{k_i}\right) d\mu \leq 1,\end{aligned}$$

per la convessità di Φ ed il lemma di Fatou. Allora, $N_\Phi(f) \leq t$. Inoltre, essendo $t > k_0$, si ha che $N_\Phi(f) \leq k_0 = \liminf_{n\to+\infty} N_\Phi(f_n)$, per cui (f_n) è uniformemente semicontinua. □

Osservazione 19.
Si può facilmente verificare che N_Φ gode anche delle seguenti proprietà:
(i) Siano f_1 e f_2 misurabili. Se $|f_1| \leq |f_2| \Rightarrow N_\Phi(f_1) \leq N_\Phi(f_2)$;
(ii) Sia (f_n) una successione di funzioni misurabili tale che $0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow N_\Phi(f_n) \nearrow N_\Phi(f) \leq +\infty$.
La (i) è la monotonia di N_Φ, mentre la (ii) è chiamata *proprietà forte di Fatou* della norma N_Φ.

Per motivare ulteriori analisi della norma di Orlicz, si introduca ora un'estensione della *disuguaglianza di Hölder*. Sia quindi (Φ, Ψ) una coppia di normalizzate funzioni di Young e siano $\mathcal{L}^\Phi(\mu)$, $\mathcal{L}^\Psi(\mu)$ i corrispondenti spazi di Orlicz con le norme di Gauge N_Φ e N_Ψ rispettivamente. Allora si ha:

Proposizione 3.1.3.
Se $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^\Psi(\mu)$, con (Φ, Ψ) una coppia di normalizzate funzioni di Young, allora:

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq N_\Phi(f) N_\Psi(g). \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Se $N_\Phi(f) = 0$ o $N_\Psi(g) = 0$ (ovvero $f = 0$ o $g = 0$), allora si deduce banalmente il risultato.
Se, invece, $N_\Phi(f) > 0$ e $N_\Psi(g) > 0$, per la disuguaglianza di Young:

$$\frac{|fg|(\omega)}{N_\Phi(f)N_\Psi(g)} \leq \Phi\left(\frac{|f|}{N_\Phi(f)}\right)(\omega) + \Phi\left(\frac{|g|}{N_\Psi(g)}\right)(\omega), \qquad \omega \in \Omega \tag{3.6}$$

Integrando su Ω l'espressione (3.5) si ottiene:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \frac{|fg|}{N_{\Phi}(f)N_{\Psi}(g)}d\mu &\leq \int\limits_{\Omega} \Phi\bigg(\frac{|f|}{N_{\Phi}(f)}\bigg)(\omega)d\mu + \int\limits_{\Omega} \Phi\bigg(\frac{|g|}{N_{\Psi}(g)}\bigg)(\omega)d\mu \\ &\leq \Phi(1) + \Psi(1) = 1 \\ &\Rightarrow \int\limits_{\Omega} |fg|d\mu \leq N_{\Phi}(f)N_{\Psi}(g).\end{aligned}$$

□

Osservazione 20.
Se le funzioni(Φ, Ψ) non sono normalizzate, allora $\Phi(1)$ e $\Psi(1)$ sono sostituite ciascuna da 1, ottenendo così:

$$\int\limits_{\Omega} |fg|d\mu \leq 2N_{\Phi}(f)N_{\Psi}(g) \tag{3.7}$$

Per una più profonda analisi di $\mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$, è utile introdurre un'altra norma che è equivalente a N_{Φ}. Questa sarà analizzata nella seguete sezione.

Definizione 11.
Se (Ω, Σ, μ) è uno spazio di misura (definito su sottoinsiemi di misura finita), $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è misurabile per Σ, e (Φ, Ψ) è una coppia complementare di funzioni di Young allora la norma di Orlicz $\|\cdot\|_{\Phi} : f \longmapsto \|f\|_{\Phi}$ è definita nel seguente modo:

$$\|f\|_{\Phi} = \sup\{\int\limits_{\Omega} |fg|d\mu : \int\limits_{\Omega} \Psi(|g|)d\mu \leq 1\}. \tag{3.8}$$

Per dimostrare che il funzionale $||\cdot||$ sia una norma, occorre verificare le seguenti condizioni:
(i) $||f||_{\Phi} = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
(ii) $||cf||_{\Phi} = |c|||f||_{\Phi}$, $c \in \mathbb{R}$;
(iii) $||f_1 + f_2||_{\Phi} \leq ||f_1||_{\Phi} + ||f_2||_{\Phi}$.
Si dimostrino ora le proprietà:
(i) Sia $||f||_{\Phi} = 0$ e si supponga per assurdo che $f \neq 0$.
Posto $E = \{\omega \in \Omega\ t.c.\ |f(\omega)| > 0\}$, allora $\mu(E) > 0$. Considerando lo spazio (Ω, Σ, μ) su sottoinsiemi di misura finita, allora $\exists F \subset E$, $F \in \Sigma$, t.c.

$0 < \mu(F) < +\infty$. Sia, inoltre, $g = k\chi_F$ dove $k > 0$ e tale che $\int\limits_{\Omega} \Psi(|g|)d\mu \leq 1$.
Allora per la definizione (3.8):

$$0 = ||f||_\Phi \geq \int\limits_{\Omega} |fg|d\mu \geq \int\limits_{F} k|f|d\mu.$$

Quindi $f = 0$ su F che è una contraddizione per la scelta di F. Dunque, se $||f||_\Phi = 0 \Rightarrow f = 0$.
Viceversa, se $f = 0 \Rightarrow ||f||_\Phi = 0$, direttamente dalla definizione (3.8).
(ii)

$$\begin{aligned} ||cf||_\Phi &= \sup\{\int\limits_{\Omega} |cfg|d\mu : \int\limits_{\Omega} \Psi(|g|)d\mu \leq 1\} \\ &= |c|\sup\{\int\limits_{\Omega} |fg|d\mu : \int\limits_{\Omega} \Psi(|g|)d\mu \leq 1\} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} ||f_1 + f_2||_\Phi &= \sup\{\int\limits_{\Omega} |(f_1 + f_2)g|d\mu : \int\limits_{\Omega} \Psi(|g|)d\mu \leq 1\} \\ &= \sup\{\int\limits_{\Omega} |f_1 g + f_2 g|d\mu : \int\limits_{\Omega} \Psi(|g|)d\mu \leq 1\} \\ &= \sup\{\int\limits_{\Omega} |f_1 g|d\mu + \int\limits_{\Omega} |f_2 g|d\mu : \int\limits_{\Omega} \Psi(|g|)d\mu \leq 1\} \\ &= ||f_1||_\Phi + ||f_1||_\Phi. \end{aligned}$$

Per cui il funzionale $||f||_\Phi$ è una norma.

Osservazione 21.
Se lo spazio $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ non fosse definito su sottoinsiemi di misura finita, allora la condizione $||f||_\Phi = 0$ non implicherebbe necessariamente che la funzione f sia nulla. Per cui, in questo caso, $||f||_\Phi$ è una seminorma.

Osservazione 22.
Si noti che $\int\limits_{\Omega} |fg|d\mu$ può essere sostituito da $|\int\limits_{\Omega} fgd\mu|$ per $g \in B_\Psi$. Infatti:

$$|\int\limits_{\Omega} fgd\mu| \leq \int\limits_{\Omega} |f||g|d\mu = \int\limits_{\Omega} f\tilde{g}d\mu, \tag{3.9}$$

dove $\tilde{g} = |g| sgn f$. Allora $\tilde{g} \in B_\Phi$ osservando che $\int\limits_\Omega \Psi(|\tilde{g}|)d\mu = \int\limits_\Omega \Psi(|g|)d\mu$ ed i membri esterni di (3.9) hanno lo stesso estremo superiore, da cui:

$$\|f\|_\Phi = \sup\{|\int\limits_\Omega fg d\mu| : g \in B_\Psi\} = \sup\{\int\limits_\Omega |fg| d\mu : g \in B_\Psi\}.$$

Per verificare che le norme $|| \cdot ||_\Phi$ e N_Φ sono equivalenti, è necessario dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 3.1.4.
Se $0 \neq f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$, *allora si ha:*

$$\int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{f}{||f||_\Phi}\right) d\mu \leq 1. \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Siano $\rho_\Psi(g) = \int\limits_\Omega \Psi(|g|)d\mu$ e $\rho'_\Psi(g) = \max(1, \rho_\Psi(g))$. Allora:

$$\int\limits_\Omega |fg| d\mu \leq \rho'_\Psi(g)||f||_\Phi, \qquad g \in \mathcal{L}^\Phi(\mu). \tag{3.11}$$

Infatti, se $\rho_\Psi(g) \leq 1 \Rightarrow \rho'_\Psi(g) = 1$ e (3.11) segue dalla definizione di $||f||_\Phi$. Mentre, se $\rho_\Psi(g) > 1 \Rightarrow \rho'_\Psi(g) = \rho_\Psi(g)$ e (3.11) si ottiene sostituendo $\frac{g}{\rho_\Psi(g)}$ a g.
Si noti anche che da (3.7), si ha sempre che $||f||_\Phi \leq 2N_\Phi(f)$, per cui se $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu) \Rightarrow ||f||_\Phi < +\infty$. Da questo segue che $\nu_f : E \mapsto \int\limits_E \Phi\left(\frac{f}{||f||_\Phi}\right) d\mu$, con $E \in \Sigma$, è una misura su sottoinsiemi finiti.
Infatti, $\nu_f : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}^+$ è σ-additiva e se $\nu_f(E) > 0 \Rightarrow \mu(E) > 0$ cosicchè $\int\limits_E \Phi(\frac{f}{k||f||_\Phi})d\mu \leq 1$ per un qualche $k > 0$. Da cui $\nu_f(E) < +\infty$.
Per la proposizione (2.2.3), il funzionale ν_f è continuo su $(\frac{1}{k_0}, +\infty)$ dove $k_0 = inf\{k > 0 : \frac{f}{k} \in \tilde{\mathcal{L}}^\Phi(\mu)\}$. Pertanto, si possono trovare $k_0 < k < +\infty$ t.c. $F = \{\omega \in E : \Phi(\frac{|f(\omega)|}{k||f||_\Phi}) > 0\}$ e $0 < \nu_f(F) < +\infty$.
Si richieda ora che (3.10) sia verificata $\forall A \in \Sigma$ t.c. $\mu(A) < +\infty$, Questo si ha sostituendo a f, la funzione semplice $f\chi_A$.
Posta $g = \varphi(\frac{f}{||f||_\Phi})$, allora g è ancora una funzione semplice e $g \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$. Inoltre, per il Teorema (1.3.3), con $\Omega = A$:

$$|\int\limits_\Omega (\frac{f}{||f||_\Phi}) g d\mu| = \int\limits_\Omega \Phi(\frac{f}{||f||_\Phi})d\mu + \rho_\Psi(g). \tag{3.12}$$

Per (3.11) il membro sinistro di (3.12) è al più $\rho'_\Psi(g)$, dove $\rho'_\Psi(g) = \rho_\Psi(g)$ se $\rho_\Psi(g) > 1$. Quindi, in tal caso, per (3.12) $\int_\Omega \Phi(\frac{f}{||f||_\Phi})d\mu = 0$.
Se, invece, $\rho_\Psi(g) \leq 1 \Rightarrow \rho'_\Psi(g) = 1$.
Pertanto, sia nel caso in cui $\rho'_\Psi(g) = \rho_\Psi(g)$ che in quello in cui $\rho'_\Psi(g) = 1$ (3.10) è verificata se f è una funzione semplice.
Si consideri ora il caso generale. Sia f una funzione $\Rightarrow \exists$ una successione (f_n) di funzioni semplici t.c. $0 \leq f_n \uparrow |f|$, puntualmente. Così, $||f_n||_\Phi \leq ||f||_\Phi$ e si ha:

$$\int_\Omega \Phi(\frac{f_n}{||f||_\Phi})d\mu \leq \int_\Omega \Phi(\frac{f_n}{||f_n||_\Phi})d\mu \leq 1,$$

per la convessità di Φ e quanto detto sopra nel caso di f semplice. Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi(\frac{f_n}{||f||_\Phi})d\mu = \int_\Omega \Phi(\frac{f}{||f||_\Phi})d\mu \leq 1,$$

per il teorema di convergenza monotona. Quindi, (3.10) è verificata se $\mu(\Omega) < +\infty$.
Si esami ora il caso in cui $\mu(\Omega) = +\infty$.
Sia $\Sigma_1 = \{A \in \Sigma : \mu(A) < +\infty\}$, allora per quanto detto precedentemente $sup\{\nu_f(A) : A \in \Sigma_1\} = \alpha \leq 1$. Essendo Σ_1 chiuso rispetto all'unione dei suoi elementi, $\exists$ una successione $(A_n) \in \Sigma_1$ con $A_n \subset A_{n+1}$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} \nu_f(A_n) = \alpha$. Quindi se $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \nu_f(B) = \alpha$.
Si dimostri ora che $\nu_f(B^c) = 0$.
Posto $E_0 = \{\omega \in \Omega : \Phi(\frac{f}{||f||_\Phi}) > 0\}$ è necessario verificare che $\nu_f(E_0 \cap B^c) = 0$. Si supponga per assurdo che $\nu_f(E_0 \cap B^c) \neq 0$, allora $\exists F \subset E_0 \cap B^c$ t.c. $F \in \Sigma_1$, $\mu(F) > 0$. Conseguentemente.

$$\begin{aligned} \alpha < \nu_f(B) + \nu_f(F) = \nu_f(B \cup F) &= \lim_{n\to+\infty} \nu_f(A_n \cup F) \\ &\leq \sup\{\nu_f(D) : D \in \Sigma_1\} = \alpha, \end{aligned}$$

che è assurdo. Quindi $\nu_f(E_0 \cap B^c) = 0 \Rightarrow E_0 \in \Sigma_1$ e $\nu_f(B^c) = 0$.
Allora:

$$\nu_f(\Omega) = \nu_f(B) = \alpha \leq 1,$$

allora (3.10) è verificata in tutti i casi. □

3.1.1 Relazioni tra norme di Gauge e di Orlicz

Il risultato precedente dà un'utile relazione tra la norma di Orlicz e quella di Gauge.

Proposizione 3.1.5.
$\forall f \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$, data Φ una funzione di Young, si ha:

$$N_{\Phi}(f) \leq ||f||_{\Phi} \leq 2N_{\Phi}(f). \tag{3.13}$$

In particolare, se (Φ, Ψ) è una coppia normalizzata di funzioni di Young, la relazione diventa:

$$\Phi(1)N_{\Phi}(f) \leq ||f||_{\Phi} \leq 2N_{\Phi}(f). \tag{3.14}$$

Dimostrazione. La relazione (3.13) è una diretta conseguenza di (3.7), (3.10) e della definizione di N_{Φ}.
Si dimostri ora la (3.14). Posto $\alpha = \Phi(1)$, da cui $0 < \alpha \leq 1$, allora per (3.10) e la convessità di Φ:

$$\int_{\Omega} \Phi(\frac{\alpha f}{||f||_{\Phi}})d\mu \leq \alpha \int_{\Omega} \Phi(\frac{f}{||f||_{\Phi}})d\mu \leq \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow N_{\Phi}(f) \leq \frac{||f||_{\Phi}}{\alpha}.$$

Mentre per dimostrare il membro destro della disuaglianza, si usi la disuguaglianza di Young con $\rho_{\Psi}(g) \leq 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |fg|d\mu = \int_{\Omega} |f||g|d\mu = \beta \int_{\Omega} \frac{|f|}{\beta}|g|d\mu \\ \leq \beta(\int_{\Omega} \Phi(\frac{|f|}{\beta})d\mu + \int_{\Omega} \Psi(g)d\mu) \\ \leq \beta(\Phi(1) + 1) \leq 2\beta,\end{aligned}$$

con $\beta = N_{\Phi}(f)$. □

Osservazione 23.
Dalla precedente proposizione si evince facilmente che le norme N_{Φ} e $||\cdot||_{\Phi}$ sono tra loro equivalenti.

Osservazione 24.
Sia $||\cdot||_{\Phi}$ che N_{Φ} sono monotone crescenti. Infatti, $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ t.c. $0 \leq f_1 \leq f_2$, si ha $||f_1|| \leq ||f_2||$ dove $||\cdot||$ denota $||\cdot||_{\Phi}$ o N_{Φ}.

Osservazione 25.
Come conseguenza della definizione di $||\cdot||_\Phi$ e (3.13) è possibile sviluppare la disuguaglianza di Hölder (3.7) nel modo seguente:
se $f \in \mathcal{L}^\Phi(\mu)$ e $g \in \mathcal{L}^\Psi(\mu)$, allora:

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |fg| d\mu = \int\limits_\Omega |f||g| d\mu = N_\Psi(g) \int\limits_\Omega |f|| \frac{g}{N_\Psi(g)}| d\mu \\ \leq N_\Psi(g)||f||_\Phi,\end{aligned}$$

e (Φ, Ψ) possono essere scambiate qui. Da cui:

$$\int\limits_\Omega |fg| d\mu \leq \min(N_\Phi(f)||g||_\Psi, N_\Psi(g)||f||_\Phi).$$

Si presenti ora un interessante sviluppo della disuguaglianza di Hölder che estende la (3.7). Per fare questo, è necessario introdurre alcuni risultati preliminari.

Lemma 3.1.6.
Siano $\Phi_i : \mathbb{R}^+ \to \bar{\mathbb{R}}$, $\forall i = 1, 2, 3$, funzioni monotone crescenti, continue da sinistra tali che:

$$\Phi_1{}^{-1}(x)\Phi_2{}^{-1}(x) \leq \Phi_3{}^{-1}(x), \qquad x \geq 0 \tag{3.15}$$

dove $\Phi_i{}^{-1}(x) = \inf\{y : \Phi_i(y) > x\}$ con $\inf(\emptyset) = +\infty$. Allora:

$$\Phi_3(xy) \leq \Phi_1(x) + \Phi_2(y), \qquad x, y \geq 0. \tag{3.16}$$

Dimostrazione. Per com'è definito $\Phi_i{}^{-1}$, $\Phi_i(\Phi_i{}^{-1}(x)) \leq x \leq \Phi_i{}^{-1}(\Phi_i(x))$, $\forall i = 1, 1, 3$. Siano $x, y \geq 0$ t.c. $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(y)$. Allora:

$$\begin{aligned}xy &\leq \Phi_1{}^{-1}(\Phi_1(x))\Phi_2{}^{-1}(\Phi_2(y)) \leq \Phi_1{}^{-1}(\Phi_2(y))\Phi_2{}^{-1}(\Phi_2(y)) \\ &\leq \Phi_3{}^{-1}(\Phi_2(y)),\end{aligned}$$

da cui $\Phi_3(xy) \leq \Phi_3(\Phi_3{}^{-1}(\Phi_2(y))) \leq \Phi_2(y)$. Mentre, se $\Phi_1(x) > \Phi_2(y)$, si ha:

$$\begin{aligned}xy &\leq \Phi_1{}^{-1}(\Phi_1(x))\Phi_2{}^{-1}(\Phi_2(y)) \leq \Phi_1{}^{-1}(\Phi_1(x))\Phi_2{}^{-1}(\Phi_1(x)) \\ &\leq \Phi_3{}^{-1}(\Phi_1(x)),\end{aligned}$$

per cui $\Phi_3(xy) \leq \Phi_3(\Phi_3{}^{-1}(\Phi_1(x))) \leq \Phi_1(x)$. Allora:

$$\Phi_3(xy) \leq \max(\Phi_1(x), \Phi_2(y)) \leq \Phi_1(x) + \Phi_2(y),$$

che generalizza la disuguaglianza di Young. □

Si introduca ora una generalizzazione della disuguaglianza di Hölder.

Teorema 3.1.7.
Siano $\Phi_i : \mathbb{R}^+ \to \bar{\mathbb{R}}$, $\forall i = 1, 2, 3$, *funzioni monotone crescenti, continue da sinistra tali che:*

$$\Phi_1{}^{-1}(x)\Phi_2{}^{-1}(x) \leq \Phi_3{}^{-1}(x), \qquad x \geq 0$$

dove $\Phi_i{}^{-1}(x) = \inf\{y : \Phi_i(y) > x\}$ *con* $\inf(\emptyset) = +\infty$. *Sia, inoltre,* (Ω, Σ, μ) *uno spazio di misura. Se* $f_i \in \mathcal{L}^{\Phi_i}(\mu)$, $\forall i = 1, 2$, *allora* $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{L}^{\Phi_3}(\mu)$ *e:*

$$N_{\Phi_3}(f_1 f_2) \leq 2N_{\Phi_1}(f_1)N_{\Phi_2}(f_2).$$

Dimostrazione. Si assuma che $N_{\Phi_i} = 1$, $\forall i = 1, 2$ per semplicità. Allora per la convessità di $\Phi_i(\geq 0)$ ed il Lemma (3.1.6), si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_3\left(\frac{|f_1 f_2|}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi_3(|f_1||f_2|)d\mu \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \Phi_1(|f_1|)d\mu + \int_\Omega \Phi_2(|f_2|)d\mu\right) \\
&\leq \frac{1}{2}(1+1) = 1,
\end{aligned}$$

per cui $N_{\Phi_3}(f_1 f_2) \leq 2 \Rightarrow N_{\Phi_3}(f_1 f_2) \leq 2N_{\Phi_1}(f_1)N_{\Phi_2}(f_2)$, nel caso in cui $N_{\Phi_1} = 1$, per $i = 1, 2$. □

Si prendano $\Phi_1(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $\Phi_2(x) = \frac{|x|^q}{q}$, con $p, q, r \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, cosicchè $\Phi_3(x) = \frac{|x|^r}{r}$. Infatti:

$$\Phi_3(xy) = \frac{|xy|^r}{r} \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q},$$

e questo offre una forma meno diretta della disuguaglianza classica.

Corollario 3.1.8.
Siano $p, q, r \geq 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
Se $f_1 \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f_2 \in \mathcal{L}^q(\mu)$, *allora* $f_1 f_2 \in \mathcal{L}^r(\mu)$ *e:*

$$||f_1 f_2||_r \leq 2||f_1||_p||f_2||_q.$$

3.2 Lo spazio di Orlicz è completo

Teorema 3.2.1.
Lo spazio $(\mathcal{L}^{\Phi}(\mu), N_{\Phi})$ *è completo.*

Dimostrazione. Sia $(f_n) \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ successione di Cauchy, per cui:

$$\lim_{n,m\to+\infty} N_{\Phi}(f_n - f_m) = 0.$$

Per far vedere che $(\mathcal{L}^{\Phi}(\mu), N_{\Phi})$ è completo, occorre dimostrare che $\exists f \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ t.c. $\lim\limits_{n\to+\infty} N_{\Phi}(f_n - f) = 0$, ovvero che ogni successione $(f_n) \in \mathcal{L}^{\Phi}(\mu)$ converga verso un elemento dello spazio.
Sia $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi(x) = 0\}$, allora $0 \leq x_0 < +\infty$ per com'è definita la funzione di Young Φ. Per ipotesi, esistono $k_{mn} \geq 0$, con $N_{\Phi}(f_n - f_m) \geq \frac{1}{k_{mn}}$ e t.c.:

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(k_{mn}|f_n - f_m|)d\mu \leq 1, \tag{3.17}$$

direttamente dalla definizione N_{Φ}.
Si noti ora che $A_{mn} = \{\omega : k_{mn}|f_n - f_m|(\omega) > x_0\} \in \Sigma$ è σ-finito per μ, ovvero A_{mn} è l'unione numerabile di insiemi di misura finita. Infatti, se $B_k = {B_k}^{mn} = \{\omega : k_{mn}|f_n - f_m|(\omega) > x_0 + \frac{1}{k}\} \Rightarrow A_{mn} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k$ e $\mu(B_k) < +\infty$ per ogni k. Questo perchè:

$$\begin{aligned} \mu(B_k) = \int\limits_{B_k} d\mu &= \frac{1}{\Phi(k_{mn}|f_n - f_m|)} \int\limits_{B_k} \Phi(k_{mn}|f_n - f_m|)d\mu \\ &\leq \frac{1}{\Phi(x_0 + \frac{1}{k})} \int\limits_{B_k} \Phi(k_{mn}|f_n - f_m|)d\mu \leq 1, \end{aligned}$$

per (3.17). Inoltre, sia $A = \bigcup\limits_{m,n\geq 1} A_{mn}$. $A^c = \{\omega : k_{mn}|f_n - f_m|(\omega) \leq x_0\}$, quindi $\forall \omega \in A^c$, $|f_n(\omega) - f_m(\omega)| \to 0$ uniformemente. Allora esiste una funzione g_0 definita su A^c tale che $f_n(\omega) \to g_0(\omega)$ e $|g_0| \leq x_0$, con $\omega \in A^c$.
Si sostituisca Ω ad A temporaneamente. Allora (f_n) è una successione di

Cauchy su $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega, \mu)$, da cu $\forall B \in \Sigma$, $\mu(B) < +\infty$, si ha:

$$\begin{aligned}\mu(B \cap \{|f_n - f_m| \geq \epsilon\}) &= \mu(B \cap \{\Phi(k_{mn}|f_n - f_m|) \geq \Phi(k_{mn}\epsilon)\}) \\ &\leq \frac{1}{\Phi(k_{mn}\epsilon)} \int_B \Phi(kmn|f_n - f_m|)d\mu \\ &\leq \frac{1}{\Phi(k_{mn}\epsilon)},\end{aligned}$$

quindi per $k_{mn} \to +\infty$ e $\epsilon > 0$ fissato, questo mostra che (f_n) è di Cauchy su ciascuno degli insiemi B. Pertanto, per la σ-limitatezzza, (f_n) è di Cauchy su tutto lo spazio di misura.
Si supponga ora che $f_n \to \tilde{f}$ nello spazio, allora esiste una sottosuccessione (f_{n_i}) tale che $f_{n_i} \to \tilde{f}$. Posta $f = \tilde{f}\chi_A + g_0\chi_{A^c}$, si ha $f_{n_i} \to f$. Ma per (f_n), che è una successione di Cauchy in N_Φ, se $N_\Phi(f_n) \to \rho$, si ha anche che $N_\Phi(f_{n_i}) \to \rho$. Per cui per il lemma di Fatou:

$$\int_\Omega \Phi(\frac{|f|}{\rho})d\mu \leq \liminf_{i \to +\infty} \int_\Omega \Phi(\frac{f_{n_i}}{N_\Phi(f_{n_i})})d\mu \leq 1.$$

Allora $f \in \mathcal{L}^{\Phi}(\Omega, \mu)$.
Inoltre, se m è fissato e $k \geq 0$ è dato, allora $\Phi(|f_{n_i} - f_{n_j}|k) \to \Phi(|f - f_{n_j}|k)$ per $i \to +\infty$. Se $n_0 \geq 1$ è scelto in modo che $n_i, n_j \geq n_0$ implica che $k_{n_i n_j} \geq k$, allora:

$$\int_\Omega \Phi(k|f_{n_i} - f_{n_j}|)d\mu \leq \int_\Omega \Phi(k_{n_i n_j}|f_{n_i} - f_{n_j}|)d\mu \leq 1.$$

Per $n_i \to +\infty$ per il lemma di Fatou si ha che $N_\Phi(f - f_{n_j}) \leq \frac{1}{k}$. Quindi, per la scelta arbitraria di $k > 0$, $N_\Phi(f_{n_j} - f) \to 0$. Se (f_{n_j}) è un'altra sottosuccessione di limite f', allora si tratta di una sottosottosuccessione di (f_n) tale che $f = f'$ perchè $f_n \to f$.
Così per ogni sottosuccessione convergente e quindi per tutta la successione, $N_\Phi(f_n - f) \to 0$. Questo dimostra che ogni successione di Cauchy di $(\mathcal{L}^{\Phi}(\mu), N_\Phi)$ converge ad un elemento dello spazio. Quindi, $(\mathcal{L}^{\Phi}(\mu), N_\Phi)$ è uno spazio di Banach, essendo completo. $\square$

Un risultato simile si ha per la norma di Orlicz $||\cdot||_\Phi$. Occorre assumere che μ sia definita su sottoinsiemi di misura finita, essendo diversamente $||\cdot||_\Phi$ solo una seminorma. Con quest'ultima e non restrittiva condizione e la Proposizione (3.1.5) si ha la seguente proposizione come conseguenza del teorema precedente.

Proposizione 3.2.2.
L'insieme $(\mathcal{L}^{\Phi}(\mu), ||\cdot||_{\Phi})$ *è uno spazio di Banach quando* μ *è definita su insiemi di misura finita. In questo caso, nello spazio, si identifcano funzioni con la stessa norma.*

Bibliografia

[1] M.M. Rao, Z.D. Ren, *"Theory of Orlicz spaces"*, 1991, New York, Basel, Hong Kong.