

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**LA SUPERFICIE DI BOY:
UNA IMMERSIONE DEL PIANO PROIETTIVO
NELLO SPAZIO ORDINARIO**

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MIRELLA MANARESI

Presentata da:
ANDREA GENITONI

Seconda Sessione
Anno Accademico 2014-15

A chi non smette di sognare.

A chi non si arrende.

A chi lotta per la vita.

Indice

Introduzione	III
1 Varietà differenziabili	1
1.1 Varietà e differenziabilità	1
1.2 Spazi tangenti	5
1.3 Orientabilità	7
1.4 Embedding e immersioni	11
2 Il piano proiettivo reale	17
2.1 Lo spazio proiettivo	17
2.2 Modelli di \mathbb{P}^n	19
2.3 Il nastro di Möbius	21
3 La superficie di Boy	27
3.1 La superficie romana e la cross-cap	27
3.2 La superficie di Boy	32
3.3 La superficie di Boy come deformazione della superficie romana	36
Bibliografia	41
Ringraziamenti	43

Introduzione

Un'*immersione* di una varietà differenziabile M in \mathbb{R}^N è una mappa differenziabile $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ il cui differenziale è iniettivo. L'immersione si dice *regolare*, o *embedding*, se è un omeomorfismo tra M e la sua immagine in \mathbb{R}^N .

È ben noto che le superfici lisce e compatte di \mathbb{R}^3 sono orientabili, pertanto non è possibile definire un embedding dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^3 .

Per lungo tempo si è cercato, allora, di costruire delle immersioni di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}^3 con il minor numero possibile di auto-intersezioni.

Nel 1844 Steiner aveva costruito una superficie S , detta superficie romana di Steiner, che è una realizzazione di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 nel senso che la mappa che definisce S è una immersione al di fuori di un numero finito di punti, le cui immagini sono 6 punti singolari di S detti *pinch points*. In queste singolarità i piani tangenti alle falde della superficie che passano per il punto sono coincidenti.

La superficie romana di Steiner è una superficie di grado 4 con tre rette di punti doppi che si incontrano in un punto triplo. Tali rette contengono ognuna due pinch points.

Un'altra realizzazione del piano proiettivo in \mathbb{R}^3 è la superficie cross-cap, che è una superficie di grado 4 con una retta di punti doppi, sulla quale giace un punto triplo. Anche tale superficie non è un'immersione di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 in quanto contiene un pinch point.

Nel 1900 David Hilbert ipotizzò che qualunque rappresentazione del piano proiettivo reale in \mathbb{R}^3 dovesse presentare delle singolarità di tipo pinch point e lasciò a uno dei suoi studenti, Werner Boy, il compito di dimostrarlo: ciò avrebbe implicato l'impossibilità di immergere \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 .

Contrariamente alle intuizioni di Hilbert, Boy nel 1901 teorizzò una superficie che prende il suo nome, che presenta come luogo di auto-intersezione una curva di punti

doppi priva di pinch points.

Grazie a successivi lavori di Bernard Morin (1978), Jean-Pierre Pétit e Jérôme Souriau (1981) e Francois Apéry (1986) fu trovata una parametrizzazione della superficie di Boy e ne furono studiate le principali proprietà.

Nel primo capitolo di questa tesi vengono richiamate le principali definizioni e proprietà delle varietà differenziabili e vengono definiti i concetti di embedding ed immersione.

Nel secondo capitolo viene richiamata la definizione di piano proiettivo. Una volta studiate le proprietà principali del piano proiettivo, vengono descritti alcuni suoi modelli topologici. Attraverso una di tali costruzioni equivalenti, viene mostrato che il piano proiettivo contiene un nastro di Möbius.

Il capitolo si conclude con la caratterizzazione delle superfici compatte di \mathbb{R}^3 , implicando perciò l'impossibilità di immergere regolarmente una qualunque varietà compatta contenente un nastro di Möbius nello spazio ordinario.

Nel terzo e ultimo capitolo vengono studiate la superficie romana di Steiner e la superficie cross-cap come esempi di "immersioni auto-intersecanti" di \mathbb{P}^2 , che risultano non essere delle immersioni, per via delle loro singolarità.

Per l'esistenza di un'immersione viene sviluppata l'idea principale di Souriau e Pétit sulla costruzione della superficie di Boy a partire da un fascio di ellissi; il lavoro si conclude con due parametrizzazioni celebri della superficie trovate da Apéry. La prima di tali parametrizzazioni permette di vedere la superficie di Boy come deformazione della superficie romana; dalla seconda discende che la superficie di Boy è una superficie algebrica di sesto grado.

Capitolo 1

Varietà differenziabili

1.1 Varietà e differenziabilità

Definizione 1.1. Siano $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ insiemi aperti. Diciamo che X e Y sono *diffeomorfi di classe C^k* (risp. C^∞) se esiste una biezione $F : X \rightarrow Y$ tale per cui sia F che F^{-1} siano di classe C^k (risp. C^∞).

Definizione 1.2. Sia X uno spazio topologico. Diremo che la coppia (U, φ_U) è una *n-carta locale* di X o un sistema di n-carte locali per X se $U \subset X$ è aperto e φ_U è un omeomorfismo con $\varphi_U(U)$ aperto di \mathbb{R}^n . Chiameremo coordinate locali di φ_U le sue componenti.

Due n-carte locali (U, φ_U) e (V, φ_V) in X si dicono *differenzialmente compatibili* di classe C^k se $U \cap V = \emptyset$ oppure se $U \cap V \neq \emptyset$ e l'applicazione:

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \rightarrow \varphi_V(U \cap V) \quad (1.1)$$

è un diffeomorfismo di classe C^k . Questa applicazione viene detta *cambiamento di coordinate*. Se x_1, \dots, x_n sono le coordinate locali di φ_U e y_1, \dots, y_n quelle di φ_V , allora le componenti di $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ sono funzioni a valori reali sull'aperto $\varphi_U(U \cap V)$ e sono dette funzioni di transizione dalle coordinate x_1, \dots, x_n alle coordinate y_1, \dots, y_n .

Definizione 1.3. Un *n-atlante differenziabile di classe C^k* nello spazio topologico X è una famiglia di n-carte locali $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sia un ricoprimento di X e le carte locali $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ siano a due a due C^k -compatibili.

Uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile in cui sia assegnato un n -atlante differenziabile di classe C^k per qualche intero $n \neq 0$ si dice *varietà differenziabile di classe C^k* , se $k > 0$ oppure $k = \infty$ e si dice *varietà topologica* (o di classe C^0) se $k = 0$. L'intero n è la *dimensione* della varietà X e si scrive $\dim X = n$.

D'ora in poi parleremo di diffeomorfismi, varietà e applicazioni differenziabili sottintendendo che esse siano di classe C^∞ , anche se la maggior parte dei risultati valgono anche per varietà di classe C^k .

Due n -atlanti differenziabili

$$\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda} \quad \mathcal{B} = \{(V_\mu, \psi_\mu)\}_{\mu \in M}$$

sono detti *equivalenti* (o *compatibili*) o definiscono la stessa struttura di varietà differenziabile su X se e sole se la loro unione

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda), (V_\mu, \psi_\mu) : \lambda \in \Lambda, \mu \in M\}$$

è ancora un atlante differenziabile. In questo senso ogni carta locale $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ è differenziabilmente compatibile con ogni carta locale (V_μ, ψ_μ) . Con questa struttura si capisce che data una struttura di varietà differenziabile su X allora esiste un atlante massimale dato dall'unione di tutti gli atlanti che definiscono quella struttura.

Proposizione 1.1.1. *Ogni atlante di dimensione n su una varietà M è contenuto in una e una sola struttura differenziabile di dimensione n e due atlanti compatibili sono contenuti nella stessa struttura differenziabile.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [1] Proposizione 2.1.7. □

Osservazione 1. Ogni aperto U di \mathbb{R}^n è una varietà differenziabile di dimensione n . Infatti un atlante è costituito dalla singola carta $\{(U, i)\}$ dove $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è l'inclusione. Più in generale ogni aperto A di una varietà differenziabile è ancora una varietà differenziabile della stessa dimensione e si dice *sottovarietà aperta* di X . Infatti, la famiglia

$$\left\{ \left(U_\lambda \cap A, \varphi_\lambda|_{(U_\lambda \cap A)} \right) \right\}_{\lambda \in \Lambda^*}$$

dove $\Lambda^* \subset \Lambda$ è l'insieme degli indici λ per cui $U_\lambda \cap A \neq \emptyset$, è un n -atlante differenziabile.

Una varietà differenziabile (topologica) di dimensione 2 è detta *superficie differenziabile (topologica)*.

L'importanza delle varietà differenziabili sta nel fatto che a esse possono essere applicate le regole del calcolo infinitesimale in più variabili, riconducendosi allo spazio euclideo tramite le carte locali. In questo senso una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ dove A è un aperto di una varietà differenziabile X si dice *differenziabile* se per ogni carta locale (U, φ_U) tale che $U \cap A \neq \emptyset$, la funzione

$$F \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap A) \rightarrow \mathbb{R}$$

è differenziabile.

Più in generale se X e Y sono varietà differenziabili, con $\dim X = n$, $\dim Y = m$, una funzione $F : X \rightarrow Y$ si dice *differenziabile* oppure un *morfismo* se per ogni carta locale (U, φ_U) di X e per ogni carta locale (V, ψ_V) di Y , la funzione

$$\psi_V \circ F \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

è differenziabile in senso classico. F si dice *diffeomorfismo* se è omeomorfismo e sia F e F^{-1} sono differenziabili. Analogamente diciamo che due varietà X e Y sono *diffeomorfe* se esiste $F : X \rightarrow Y$ diffeomorfismo.

Un modo per assegnare sottovarietà di \mathbb{R}^N è mediante parametrizzazioni.

Definizione 1.4. Una *parametrizzazione* in \mathbb{R}^N è una applicazione differenziabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita su A aperto di \mathbb{R}^n che è un diffeomorfismo sull'immagine. In particolare quindi $f(A)$ è una sottovarietà di \mathbb{R}^N di dimensione n .

Sostanzialmente una parametrizzazione non è altro che l'inversa di una carta locale per varietà di \mathbb{R}^N .

Esempio 1. Siano $p, v \in \mathbb{R}^N, v \neq 0$ due vettori. Allora l'applicazione

$$f(t) = p + tv = (p_1 + tv_1, \dots, p_N + tv_N)$$

è una parametrizzazione $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ della retta passante per p con direzione v ed è quindi sottovarietà di \mathbb{R}^N di dimensione 1.

Non tutte le varietà differenziabili X di \mathbb{R}^N ammettono una parametrizzazione, poiché non è detto che queste posseggano un atlante formato da una sola carta locale. Tuttavia esistono parametrizzazioni locali $f_\lambda : A_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \Lambda$ tali che $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(A_\lambda) = X$ e gli insiemi $f_\lambda(A_\lambda)$ sono aperti coordinati di X .

Una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione n è detta *ipersuperficie differenziabile*. Per costruire ipersuperfici differenziabili si usa spesso la seguente:

Proposizione 1.1.2. *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile. Allora*

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\varphi(x) = (x, f(x))$$

è una parametrizzazione e ha quindi per immagine una ipersuperficie differenziabile di \mathbb{R}^{n+1} .

Dimostrazione. φ è differenziabile perché le sue componenti lo sono; inoltre è biunivoca con inversa

$$\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$$

$$\varphi(x, y) = x$$

che è differenziabile perché restrizione della proiezione canonica π sulle prime n componenti. □

$\text{Im}(\varphi)$ è detta *grafico della funzione f* .

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

Allora $\text{Im}f$ è la circonferenza di centro 0 e raggio r , denotata con $S^1(0, r)$ che è una sottovarietà di \mathbb{R}^2 di dimensione 1, ma f non ne è una parametrizzazione poiché f non è iniettiva. Tuttavia è possibile determinare un atlante di $S^1(0, r)$ con 4 carte locali. Siano $\varphi_i, \psi_i : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ le funzioni:

$$\varphi_i(t) = (t, i\sqrt{1-t^2}) \quad \psi_i(t) = (i\sqrt{1-t^2}, t) \quad i \in \{-1, 1\}$$

Esse rappresentano parametrizzazioni locali di S^1 .

Infatti

$$A_i = \text{Im}(\varphi_i) = \{(x, y) \in S^1, iy > 0\}$$

e analogamente

$$B_i = \text{Im}(\psi_i) = \{(x, y) \in S^1, ix > 0\}$$

φ_i^{-1} e ψ_i^{-1} sono la proiezione sulla prima e rispettivamente sulla seconda componente. L'unione delle immagini di φ_i e ψ_i coincide con S^1 e quindi $\{(A_i, \varphi_i^{-1}) \cup (B_i, \psi_i^{-1})\}$ è un atlante di S^1 formato da 4 carte locali.

1.2 Spazi tangenti

Sia X varietà differenziabile e $p \in X$. Denotiamo con $\mathcal{E}(X, p)$ l'insieme di tutte le funzioni a valori reali che sono definite in un intorno di $p \in X$.

Definizione 1.5. Sia X una varietà differenziabile e $p \in X$. Un vettore tangente in p a X è una funzione

$$v : \mathcal{E}(X, p) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall F, G \in \mathcal{E}(X, p)$:

$$(1) \quad v(aF + bG) = av(F) + bv(G)$$

$$(2) \quad v(FG) = v(F)G(p) + v(G)F(p)$$

L'insieme di tutti i vettori tangenti in p a X si dice *spazio tangente a X in p* e si denota $T_p(X)$.

In questo modo si definisce per $T_p(X)$ una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} e dimensione $\dim T_p(X) = \dim X$.

Proposizione 1.2.1. *Valgono i seguenti fatti:*

$$(i) \quad \text{Se } c : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ è una funzione costante allora } v(c) = 0 \quad \forall v \in T_p(X)$$

$$(ii) \quad \text{Se } F, G \in \mathcal{E}(X, p) \text{ coincidono in un intorno } U \text{ di } p \text{ allora } v(F) = v(G) \quad \forall v \in T_p(X)$$

Dimostrazione. Sia $1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione identica a 1.

(i) Si ha che $cv(1) = v(c1) = v(c)1 + cv(1) = v(c) + cv(1)$ da cui $v(c) = 0$

(ii) Sia 1_U la restrizione della funzione 1 su U . Per ipotesi si ha che $1_U F = 1_U G$. Pertanto $v(1_U F) = v(1_U)F(p) + v(F) = v(1_U G) = v(1_U)G(p) + v(G)$. Dato che $F(p) = G(p)$ in U si ha che $v(F) = v(G)$

□

Sia X una varietà topologica di dimensione n e sia $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta locale definita in un intorno U di p di componenti (o coordinate locali) x_1, \dots, x_n . Definiamo i vettori tangenti

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \in T_p(X)$$

ponendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (F) = \left(\frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}\right)(\varphi(p)) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove u_1, u_2, \dots, u_n sono le funzioni coordinate in \mathbb{R}^n . Per comodità scriveremo $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_p$ invece di $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p (F)$. Si osservi che $F \circ \varphi^{-1}$ è definita in un aperto contenuto in $\varphi(U)$ contenente $\varphi(p)$. Si verifica che per ogni i , $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ soddisfa le condizioni (1) e (2) della definizione di vettore tangente e possiamo caratterizzarli come le generalizzazioni alla varietà X dei vettori tangenti in \mathbb{R}^n definiti dalle derivate parziali. Dalla definizione segue subito che $\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p = \delta_{ij}$

Osservazione 2. $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \forall i = 1, \dots, n \right\}$ è una base per $T_p(X)$

Si può dimostrare che se x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n sono due sistemi di coordinate locali in un intorno di $p \in X$, allora

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$

La matrice

$$\left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right)_p \right)$$

è detta *matrice di transizione* dalle coordinate x_1, \dots, x_n alle coordinate y_1, \dots, y_m nel punto p ed è la matrice di cambio di base da $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}$ a $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p \right\}$.

Definizione 1.6. Sia $f : X \rightarrow Y$ un morfismo di varietà differenziabili. Per ogni $F \in \mathcal{E}(Y, f(p))$ si ha che $F \circ f \in \mathcal{E}(X, p)$, pertanto è definita una applicazione

$$f_{*p} : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$$

ponendo

$$f_{*p}(v)(F) = v(F \circ f)$$

f_{*p} è una applicazione lineare detta *differenziale di f in p* .

Supponiamo che $f : X \rightarrow Y$ sia un morfismo di varietà differenziabili e sia $p \in X$. Consideriamo coordinate locali $\{x_1, \dots, x_n\}$ in un intorno di p e coordinate locali $\{y_1, \dots, y_m\}$ in un intorno di $f(p)$ dove $\dim X = n$ e $\dim Y = m$. Vogliamo determinare la matrice che rappresenta $f_{*p} : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$ rispetto alle basi $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$ di $T_p(X)$ e $\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m} \right)_{f(p)}$ di $T_{f(p)}(Y)$.

Si ha:

$$f_* \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) = \sum_{i=1}^m \left(\left(\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j} \right)_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{f(p)}$$

Allora il differenziale $f_{*p} : T_p(X) \rightarrow T_{f(p)}(Y)$ è rappresentato dalla matrice:

$$Jf(p) := \left(\left(\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j} \right)_p \right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_1} \right)_p & \left(\frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_2} \right)_p & \dots & \left(\frac{\partial(y_1 \circ f)}{\partial x_n} \right)_p \\ \left(\frac{\partial(y_2 \circ f)}{\partial x_1} \right)_p & \left(\frac{\partial(y_2 \circ f)}{\partial x_2} \right)_p & \dots & \left(\frac{\partial(y_2 \circ f)}{\partial x_n} \right)_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial(y_m \circ f)}{\partial x_1} \right)_p & \left(\frac{\partial(y_m \circ f)}{\partial x_2} \right)_p & \dots & \left(\frac{\partial(y_m \circ f)}{\partial x_n} \right)_p \end{pmatrix}$$

detta *matrice Jacobiana $Jf(p)$* rispetto alla base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$ di $T_p(X)$ e alla base $\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{f(p)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m} \right)_{f(p)}$ di $T_{f(p)}(Y)$.

1.3 Orientabilità

Dalla definizione delle varietà differenziabili, si ha che *localmente* la struttura della varietà è la stessa di uno spazio euclideo (perché ogni punto p ammette un intorno diffeomorfo a

un aperto di \mathbb{R}^n per qualche n). Ciò che distingue quindi le varietà differenziabili sono le cosiddette *proprietà globali*: trovare un diffeomorfismo $F : X \rightarrow Y$ tra le varietà X e Y significa stabilire che esse siano globalmente identiche dal punto di vista della proprietà differenziabile; una diversità globale quindi implica la non esistenza di un eventuale diffeomorfismo. Una di queste proprietà globali è l'orientabilità.

Sia X una varietà differenziabile e siano x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n coordinate locali rispettivamente negli aperti U e V . Questi due sistemi si dicono *ordinati concordamente* (*discordamente*) se per ogni $p \in U \cap V$ la matrice di transizione M tra le due coordinate ha determinante positivo (negativo), ovvero $\det M = \det \left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_p \right) > 0$ (< 0) per ogni $f \in U \cap V$.

Osservazione 3. Se $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ e $\psi(p) = (y_1(p), \dots, y_n(p))$, allora la matrice di passaggio M dalle coordinate $\{x_1, \dots, x_n\}$ alle coordinate $\{y_1, \dots, y_n\}$ si può esprimere utilizzando le carte locali. In particolare:

$$\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) (p) = \left(\frac{\partial (x_j \circ \psi^{-1})}{\partial u_i} \right) (\psi(p))$$

e

$$M = \left(\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)_p \right)_{j,i} = \left(\left(\frac{\partial (\varphi \circ \psi^{-1})}{\partial u_i} \right) (\psi(p)) \right)_i$$

Per comodità scriviamo $\det M$ nella forma:

$$[D(\varphi \circ \psi^{-1})u]$$

$\forall p \in U \cap V, u = \psi(p)$.

Essendo M matrice di cambio di base, essa ha determinante non nullo. Per concludere si noti che la matrice di passaggio dalle coordinate $\{y_1, \dots, y_n\}$ alle coordinate $\{x_1, \dots, x_n\}$ non è altro che l'inversa di M . In particolare la proprietà per due sistemi di coordinate di essere concordamente orientati è consistente, essendo

$$\operatorname{sgn}(\det(M)) = \operatorname{sgn}(\det(M^{-1}))$$

Essendo $\det M$ una funzione continua, il suo segno si preserva su ogni componente connessa di $U \cap V$ quindi in una componente connessa i due sistemi di coordinate sono ovunque concordamente (o discordamente) orientati. Si noti che se $U \cap V$ non è connesso,

su ciascuna componente il determinante mantiene lo stesso segno ma il segno non è detto sia costante su tutto $U \cap V$. Vedremo che se il segno non si preserva su tutto $U \cap V$ la varietà sarà non orientabile.

Definizione 1.7. Una varietà differenziabile si dice *orientabile* se ammette un atlante differenziabile $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ tale che i sistemi di coordinate locali definiti da φ_λ e $\varphi_{\lambda'}$ siano orientati concordamente in ogni $p \in U_\lambda \cap U_{\lambda'}$ e per ogni coppia di indici $\lambda, \lambda' \in \Lambda$. Un atlante siffatto si dice *orientato*. Se X non ammette un atlante orientato, X viene detta *non orientabile*.

Si noti quindi che una varietà è sempre localmente orientabile ma non è detto che questa proprietà si possa estendere globalmente.

Due atlanti si dicono *concordamente orientati* o *concordi* se la loro unione è ancora un atlante orientato, altrimenti si dicono *discordamente orientati* o *discordi*. Due atlanti orientati sono discordi se ogni sistema di coordinate definito dal primo atlante è discordamente orientato con ogni sistema di coordinate definito dal secondo atlante. È ovvio quindi che l'essere concordamente orientati è una relazione di equivalenza sull'insieme degli atlanti di X che definisce due classi di equivalenza disgiunte, ognuna contenente atlanti tra loro concordanti. Queste due classi vengono dette *orientazioni* di X . Assegnare un atlante orientato a X equivale ad assegnarne una orientazione. Se a X è assegnato un atlante orientato diremo che X è una *varietà orientata*. In pratica la scelta di una orientazione di una varietà X corrisponde alla scelta di una orientazione in tutti i suoi spazi tangenti in modo "coerente"; una volta assegnata una orientazione alla varietà si assegna una orientazione nello spazio tangente $T_p(X)$, che varia con continuità al variare di p e che è definita dalla base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$, dove x_1, \dots, x_n sono coordinate locali in un intorno di p definite da una carta locale appartenente ad un atlante orientato che definisce l'orientazione di X .

Osservazione 4. Ovviamente se una varietà è orientabile, anche ogni sua sottovarietà lo è. Quindi, per dimostrare che una varietà non è orientabile basta trovare una sua sottovarietà che non sia orientabile. In particolare, dato che due atlanti di una varietà ne definiscono la stessa struttura differenziabile, basta verificare questa proprietà per un singolo atlante.

Osservazione 5. Poiché ogni carta locale è concordamente orientata con se stessa, ogni varietà che possiede un atlante che sia costituito da una sola carta locale è orientabile. È il caso degli aperti di \mathbb{R}^n e delle sottovarietà che sono immagini di una parametrizzazione.

Proposizione 1.3.1. *Sia X una varietà orientabile e sia $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ un arbitrario atlante di X e siano infine $\lambda, \mu \in \Lambda$ indici tali che $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$. Allora il segno di $[D(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda)u]$ rimane costante per ogni $u \in U_\lambda \cap U_\mu$. In particolare X non è orientabile se il segno di $[D(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda)u]$ non è lo stesso tra le componenti connesse di $U_\lambda \cap U_\mu$*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{(V_\gamma, \psi_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ un atlante orientato di X .

Primo passo. Sia $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ una carta fissata di \mathcal{A} .

Mostriamo che $\forall (V_\gamma, \psi_\gamma) \in \mathcal{B}, \forall u \in U_\lambda \cap V_\gamma, [D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})u]$ non cambia segno. Sia $p \in U_\lambda$ fissato e supponiamo $[D(\varphi_\lambda \circ \psi_\alpha^{-1})p] < 0$ per una opportuna carta $(V_\alpha, \psi_\alpha) \in \mathcal{B}$. Si tratta di dimostrare che l'insieme

$$A = \{u \in U_\lambda \mid \text{per ogni carta } (V_\gamma, \psi_\gamma) \in \mathcal{B} \text{ con } u \in V_\gamma, \text{ si ha } [D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})u] < 0\}$$

invade tutto U_λ . Innanzitutto si ha

$$A = \{u \in U_\lambda \mid \exists (V_\gamma, \psi_\gamma) \in \mathcal{B} \text{ con } u \in V_\gamma, \text{ per cui } [D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})u] < 0\}$$

Infatti se esiste una carta siffatta, allora per ogni altra carta $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathcal{B}$, con $u \in V_\beta$, si ha che:

$$[D(\varphi_\lambda \circ \psi_\beta^{-1})u] = [D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})u] [D(\psi_\gamma \circ \psi_\beta^{-1})u] < 0$$

perché $[D(\psi_\gamma \circ \psi_\beta^{-1})u] > 0$, essendo \mathcal{B} un atlante orientato. Inoltre $p \in A$. Certamente A è aperto perché per ogni u esiste un intorno di punti in cui il determinante non cambia segno, essendo una funzione continua. Inoltre possiamo supporre che \mathcal{A} sia un atlante di aperti connessi (se non lo fosse basta prendere l'atlante \mathcal{A}' definito sulle componenti connesse). Mostriamo che A è chiuso in U_λ . Sia $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di punti di A convergente a $u \in U_\lambda$ e sia $(V_\gamma, \psi_\gamma) \in \mathcal{B}$ una carta locale definita su un intorno di u . Per quanto detto sopra possiamo supporre V_γ aperto connesso. Quindi esisterà $m \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > m, u_n \in V_\gamma$. Poiché $u_n \in A$, allora esiste $(V_\alpha, \psi_\alpha) \in \mathcal{B}$ tale che $[D(\varphi_\lambda \circ \psi_\alpha^{-1})u_n] < 0$. Allora in un intorno di u_n in U_λ vale:

$$[D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})z] = [D(\varphi_\lambda \circ \psi_\alpha^{-1})z] [D(\psi_\alpha \circ \psi_\gamma^{-1})z] < 0$$

Poichè V_γ è connesso e la funzione determinante è continua, $[D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})z] < 0$
 $\forall z \in V_\gamma$, quindi in particolare anche per $z = u$. Allora $u \in A$ e quindi A è chiuso. Allora
essendo A aperto e chiuso in un connesso si ha $A = U_\lambda$.

Secondo passo. Siano $(U_\lambda, \varphi_\lambda), (U_\mu, \varphi_\mu)$. Abbiamo appena dimostrato che il segno di

$$[D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})z]$$

è costante per ogni $z \in U_\lambda$ e per ogni carta $(V_\gamma, \psi_\gamma) \in \mathcal{B}, z \in V_\gamma$ e il segno di

$$[D(\psi_\gamma \circ \varphi_\mu^{-1})z]$$

è costante per ogni $z \in U_\mu$ e per ogni carta $(V_\gamma, \psi_\gamma) \in \mathcal{B}, z \in V_\gamma$. Allora il segno di

$$[D(\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1})z] = [D(\varphi_\lambda \circ \psi_\gamma^{-1})z][D(\psi_\gamma \circ \varphi_\mu^{-1})z]$$

è costante su $U_\lambda \cap U_\mu$. □

Osservazione 6. Se una varietà differenziabile X di dimensione n possiede un atlante formato da due carte locali $(U, \varphi), (V, \psi)$ e $[D(\varphi \circ \psi^{-1})u] < 0$ per ogni $p \in U \cap V$, tale che $u = \psi(p)$, allora cambiando il segno di una coordinata locale è possibile orientare la varietà. Sia infatti $\tilde{\psi}(p) = (-\psi_1(p), \psi_2(p), \dots, \psi_n(p))$. Allora si ha che

$$[D(\varphi \circ \tilde{\psi}^{-1})u] = [D(\varphi \circ \psi^{-1})u][D(\psi \circ \tilde{\psi}^{-1})u] > 0 \quad \forall p \in U \cap V, \text{ con } u = \tilde{\psi}(p)$$

L'atlante che definisce l'orientazione di X è $\{(U, \varphi), (V, \tilde{\psi})\}$. Con questo procedimento se una varietà differenziabile X di dimensione n possiede un atlante formato da due sole carte locali $(U, \varphi), (V, \psi)$ e $U \cap V$ risulta connesso, ciò è sufficiente per dire che X è orientabile. Infatti per quanto visto in precedenza $[D(\varphi \circ \psi^{-1})u]$ non cambia segno sulle componenti connesse di X .

1.4 Embedding e immersioni

Definizione 1.8. Sia X una varietà differenziabile. Un sottospazio $Z \subset X$ si dice *sottovarietà differenziabile di dimensione m di X* se per ogni $z \in Z$ esiste un intorno aperto U_z di z in X e un'applicazione differenziabile $\bar{F}_x : U_z \rightarrow \mathbb{R}^m$ che induce una

biezione F_z di $U_z \cap Z$ su un aperto V di \mathbb{R}^m tale che la biezione inversa $F_z^{-1} : V \rightarrow U_z \cap Z$ sia differenziabile come applicazione da V in X . Se $\dim X = n$ l'intero $n - m$ si dice *codimensione* di Z in X .

Se Z è una sottovarietà di dimensione m di X , allora ogni coppia $(U_z \cap Z, F_z)$ è una carta locale in Z . La condizione che F_z e la sua inversa siano differenziabili implica che due qualsiasi di queste carte locali sono differenziabilmente compatibili. Pertanto $\{(U_z \cap Z, F_z)\}_{z \in Z}$ costituisce un m -atlante differenziabile in Z e quindi Z è una varietà differenziabile di dimensione m .

Definizione 1.9. Un morfismo di varietà differenziabili $f : X \rightarrow Y$ è un'*immersione* nel punto $x \in X$ se $f_{*x} : T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$ risulta iniettivo. f è un'*immersione* se è un'*immersione* in ogni $x \in X$.

L'*immersione* f si dice *in posizione generale* se per ogni successione finita di punti x_1, \dots, x_p aventi la stessa immagine $y \in Y$, l'intersezione delle immagini degli spazi tangenti $T_{x_i}(M)$ di M mediante f_* ha dimensione minima in Y .

Per il teorema della dimensione f è un'*immersione* se la matrice $Jf(p)$ ha rango massimo.

Un morfismo di varietà differenziabili $F : X \rightarrow Y$ è un'*immersione regolare* o *embedding* se induce un diffeomorfismo di X su una sottovarietà di Y , cioè se $f(X)$ è una sottovarietà di Y e $f : X \rightarrow f(X)$ è un diffeomorfismo. Se X è una sottovarietà di Y , l'applicazione $i : Y \supset X \rightarrow Y$ che manda X in se stesso è un embedding e i viene detta *inclusione naturale* della sottovarietà X in Y . Ogni embedding è un'*immersione*. Il viceversa non è sempre vero, perché in generale non è detto che f sia un diffeomorfismo. Tuttavia localmente un'*immersione* è un embedding.

Teorema 1.4.1 (della funzione inversa). *Sia $U \in \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 . Supponiamo che esista $p \in U$ tale che il differenziale $F_{*p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia un isomorfismo. Allora esiste un aperto $V \subset U$ contenente p tale che $F(V)$ è aperto e la restrizione $F|_V : V \rightarrow F(V)$ è un diffeomorfismo di classe C^1 .*

Per la dimostrazione rimandiamo a un testo di Analisi Matematica.

Proposizione 1.4.2. *Se $f : X \rightarrow Y$ è un'immersione, allora ogni punto $x \in X$ possiede un intorno V tale che la restrizione $f|_V : V \rightarrow Y$ di f a V sia un embedding.*

Dimostrazione. Poniamo $y = f(x)$ e supponiamo $\dim X = n$, $\dim Y = n + m$. Siano $\varphi : A \rightarrow X$ l'inversa di una carta locale in un intorno di x e $\psi : B \rightarrow Y$ l'inversa di una carta locale in un intorno di y con $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aperti. Siano $a \in A$ e $b \in B$ con $\varphi(a) = x$, $\psi(b) = y$ e supponiamo che si abbia $f(\varphi(A)) \subset \psi(B)$.

Si ha un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ A & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

in cui $H = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Per costruzione $H(a) = b$. Per ipotesi H_{*a} è iniettiva pertanto la matrice $JH(a)$ ha rango massimo n e salvo riordinare variabili possiamo supporre sia della forma:

$$JH(a) = \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}$$

dove $N \in GL_n(\mathbb{R})$, $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Definiamo $K : A \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ nel modo seguente:

$$K(v, w) = H(v) + (0, w)$$

Allora $K(a, 0) = H(a) = b$ e

$$JK(a, 0) = \begin{pmatrix} N & 0 \\ M & I_m \end{pmatrix}$$

dove 0 è la matrice nulla $n \times m$. $\det(JK(a, 0)) = \det N \neq 0$. Allora per il teorema della funzione inversa si ha che K è un diffeomorfismo locale in $(a, 0)$. Anche $\psi \circ K$ è un diffeomorfismo locale in $(a, 0)$, perciò esiste un aperto $W \subset A \times \mathbb{R}^m$ tale che la restrizione $(\psi \circ K)|_W : W \rightarrow Y$ sia una carta locale relativa a un intorno di Y . Ponendo $U = W \cap (A \times \{0\})$. Allora $j : U \rightarrow W$ è una immersione regolare e quindi anche $(\psi \circ K)|_W \circ j$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi|_U \uparrow & & \uparrow (\psi \circ K)|_W \\ U & \xrightarrow{j} & W \end{array}$$

Sia $V = \text{Im}(\varphi|_U)$. Dalla commutatività del diagramma precedente, allora V è un intorno di x tale per cui $f|_V$ è una immersione regolare. \square

Data una sottovarietà X di \mathbb{R}^N è possibile trovare una immersione $f : U \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ con U aperto di \mathbb{R}^n tale che $f(U) = X$ e tale che localmente sia un embedding nonché una parametrizzazione, detta *parametrizzazione locale*. Le immagini di queste parametrizzazioni ricoprono X e quindi le relative funzioni inverse formano un atlante di X . Una tale immersione f viene spesso detta *rappresentazione parametrica* e le sue componenti vengono dette *equazioni parametriche* di X .

Concludiamo ora il capitolo ricordando qualche nozione di topologia generale utile per determinare qualche altra condizione di esistenza di una immersione regolare.

Definizione 1.10. Uno spazio topologico X si dice compatto se è di Hausdorff e se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sotto-ricoprimento finito.

Osservazione 7. Ogni sottospazio compatto A di uno spazio X di Hausdorff è chiuso. Infatti sia $x \in X \setminus A$. $\forall a \in A$, $\exists U_a, V_a$ intorni aperti rispettivamente di x e a disgiunti. Essendo X di Hausdorff, anche A è di Hausdorff e quindi $\exists a_1, \dots, a_n \in A$ con $A = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$.

Definendo:

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$$

Allora U è un aperto di X contenuto in $X \setminus A$. Allora $X \setminus A$ è aperto e quindi A è chiuso.

Definizione 1.11. Siano X, Y spazi topologici. Un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ si dice *propria* se per ogni sottoinsieme compatto $K \subset Y$ l'insieme $f^{-1}(K) \subset X$ è compatto.

Osservazione 8. Ogni funzione continua $f : X \rightarrow Y$ di uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff Y è propria: infatti dato un compatto K di Y , esso è chiuso perché Y di Hausdorff, $f^{-1}(K)$ è chiuso perché f continua ed essendo X di Hausdorff allora è anche compatto.

Proposizione 1.4.3. Se $f : X \rightarrow Y$ è un diffeomorfismo locale e un'applicazione biunivoca, allora f è un diffeomorfismo

Per la dimostrazione si veda [11], Proposizione 24.4.

Proposizione 1.4.4. *Sia $f : X \rightarrow Y$ un'immersione iniettiva. Se f è un'applicazione propria allora è un'immersione regolare. In particolare se X è compatta e Y di Hausdorff, f è un'immersione regolare.*

Dimostrazione. La seconda affermazione segue dalla proposizione precedente. Dimostriamo la prima. Sia $U \subset X$ aperto e supponiamo $f(U)$ non aperto in $f(X)$; allora esiste una successione $\{y_i\}_{i \geq 1}$ di punti di $f(X) \setminus f(U)$ che converge ad un punto $y \in f(U)$; Siano $x = f^{-1}(y)$, $x_i = f^{-1}(y_i)$, $\forall i \geq 1$. Poiché $\{y\} \cup \{y_i\}_{i \geq 1}$ è compatto anche $\{x\} \cup \{x_i\}_{i \geq 1}$ è compatto, quindi a meno di considerare una sottosuccessione di $\{x_i\}$ si ha che esiste $\hat{x} = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i$. Ma allora:

$$y = f(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(x_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(x_i) = f(\hat{x})$$

Essendo f iniettiva, $x = \hat{x} = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i$.

Ma $x \in U$ mentre $x_i \notin U$ e ciò contraddice l'ipotesi che U sia aperto. Allora $f(U)$ è aperto. Dunque $X \rightarrow f(X)$ è un omeomorfismo. Ma localmente f è una immersione regolare, pertanto $f(X)$ è una varietà e $X \rightarrow f(X)$ è un diffeomorfismo locale biunivoco. Per proposizione precedente $X \rightarrow f(X)$ è un diffeomorfismo. \square

Capitolo 2

Il piano proiettivo reale

2.1 Lo spazio proiettivo

Definizione 2.1. Sia \mathbb{K} campo, $n \geq 0$. Consideriamo su $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ la seguente relazione:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0, y = \lambda x$$

Si dimostra facilmente che \sim è una relazione di equivalenza. È utile riscrivere :

$$x = (x_0, \dots, x_n), y = (y_0, \dots, y_n), \quad x \sim y \iff \exists \lambda : \forall i = 0, \dots, n \quad y_i = \lambda x_i$$

Lo spazio quoziente:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

viene detto *spazio proiettivo* di dimensione n su \mathbb{K} . Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lo spazio proiettivo si indica semplicemente con \mathbb{P}^n . Nel caso $n = 2$ si parla di *piano proiettivo*. Poiché vettori appartenenti a una stessa retta vengono identificati tra loro, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ può essere identificato con l'insieme delle direzioni, ovvero come l'insieme delle rette di \mathbb{R}^{n+1} passanti per l'origine.

Proposizione 2.1.1. Per ogni n , \mathbb{P}^n è una varietà differenziabile.

Dimostrazione. Sia π la mappa quoziente definita da \sim . Per ogni $i = 0, \dots, n$ sia:

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$$

Poiché $\pi^{-1}(U_i) = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, perché complementare di un chiuso, allora per ogni i anche U_i è aperto per la definizione di topologia quoziente e $\{U_i\}_{i=0, \dots, n}$ forma un ricoprimento aperto finito di \mathbb{P}^n .

Sia $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione continua:

$$\psi_i(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Allora per passaggio al quoziente, ψ_i induce su U_i una applicazione:

$$\varphi_i = \psi_i \circ \pi^{-1} : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi_i([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Inoltre definendo l'applicazione continua:

$$\lambda_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\lambda_i(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Si vede che φ_i ammette inversa $\varphi_i^{-1} = \pi \circ \lambda_i$ che è continua perché composizione di continue. Allora ogni U_i è omeomorfo a \mathbb{R}^n . Definiamo *iperpiano proiettivo* il chiuso $H_i = \mathbb{P}^n \setminus U_i$.

Mostriamo infine che due carte $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ sono compatibili, e che quindi $\{(U_i, \varphi_i)\}$ è un atlante differenziabile di \mathbb{P}^n costituito da $n + 1$ carte.

Supponiamo senza perdita di generalità che sia $i < j$.

Allora $U_i \cap U_j = \{[y_0, \dots, y_n] \in \mathbb{P}^n : y_i \neq 0, y_j \neq 0\}$. L'applicazione:

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

$$(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \longmapsto \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)$$

è un diffeomorfismo, pertanto le carte (U_i, φ_i) costituiscono un atlante differenziabile di \mathbb{P}^n .

Proposizione 2.1.2. *Lo spazio topologico \mathbb{P}^n è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $P = [a_0, \dots, a_n], Q = [b_0, \dots, b_n]$ due punti proiettivi distinti. Allora:

$$rk \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} = 2$$

altrimenti le due righe sarebbero linearmente dipendenti. Supponiamo sia ad esempio $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$. Segue allora che i punti P, Q non appartengono all'iperpiano di equazione:

$$H : (a_1 + b_1)x_0 - (a_0 + b_0)x_1 = 0$$

$\mathbb{P}^n \setminus H$ è un aperto omeomorfo a \mathbb{R}^n quindi ammette due intorni disgiunti rispettivamente di P e Q , definiti come controimmagini di due aperti disgiunti su \mathbb{R}^n . \square

Proposizione 2.1.3. *Lo spazio proiettivo \mathbb{P}^n è compatto.*

Dimostrazione. Data S^n la sfera n -dimensionale si ha che $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n$. Essendo S^n compatta e π continua, allora \mathbb{P}^n è quasi-compatto. Essendo anche uno spazio di Hausdorff allora è compatto.

2.2 Modelli di \mathbb{P}^n

- Definiamo una relazione \mathcal{A} su S^n detta *relazione antipodale*:

$$x\mathcal{A}y \iff x = y \vee x = -y \quad \forall x, y \in S^n$$

cioè una relazione che identifica i punti diametralmente opposti rispetto l'origine. Allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^n / \mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{array}$$

j passa al quoziente e induce un omeomorfismo $\tilde{j} : S^n / \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e si ha $x\mathcal{A}y \iff x \sim y$, ovvero la relazione antipodale è la relazione che definisce lo spazio proiettivo ristretto alla sfera S^n .

- Sia $B^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1, x_n \geq 0\}$ la semisfera superiore di S^n . Su B^n definisco una relazione di equivalenza \mathcal{A}' che è restrizione su B^n della relazione antipodale \mathcal{A} :

$$x\mathcal{A}'y \iff \begin{cases} x = y \text{ se } x_n > 0 \\ x = y \vee x = -y \text{ se } x_n = 0 \end{cases}$$

Dato il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} B^n & \xrightarrow{j'} & S^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^n / \mathcal{A}' & \xrightarrow{\psi} & S^n / \mathcal{A} \end{array}$$

Allora j' passa al quoziente e induce omeomorfismo $\psi : B^n / \mathcal{A}' \rightarrow S^n / \mathcal{A}$.

- La proiezione p della semisfera superiore sull'iperpiano $x_n = 0$ è un omeomorfismo tra B^n e il disco $\overline{D}^n = \{(x_0, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1\}$ con inversa:

$$\begin{aligned} p^{-1} : \overline{D}^n &\longrightarrow B^n \\ (y_0, \dots, y_{n-1}, 0) &\mapsto \left(y_0, \dots, y_{n-1}, \sqrt{1 - \sum y_i^2} \right) \end{aligned}$$

Su \overline{D}^n definisco la relazione di equivalenza \mathcal{A}'' :

$$x\mathcal{A}''y \iff \begin{cases} x = y \text{ se } \|x\| < 1 \\ x = y \vee x = -y \text{ se } \|x\| = 1 \end{cases}$$

Allora vale $x\mathcal{A}'y \iff x\mathcal{A}''y$ e perciò p passa al quoziente e induce omeomorfismo $\tilde{p} : B^n / \mathcal{A}' \rightarrow \overline{D}^n / \mathcal{A}''$:

$$\begin{array}{ccc} B^n & \xrightarrow{p} & \overline{D}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^n / \mathcal{A}' & \xrightarrow{\tilde{p}} & \overline{D}^n / \mathcal{A}'' \end{array}$$

Osservazione 9. Per $n = 2$ l'ultima relazione di equivalenza identifica i punti diametralmente opposti del bordo di un disco. Essendo un disco omeomorfo a un quadrato, possiamo costruire \mathbb{P}^2 introducendo una relazione di equivalenza \sim su $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$(0, t) \sim (1, 1 - t) \quad (s, 0) \sim (1 - s, 1) \quad \forall s, t \in [0, 1]$$

2.3 Il nastro di Möbius

Definizione 2.2. Un nastro di Möbius è lo spazio topologico che si ottiene dal quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ identificando ogni punto di un solo lato con il suo diametralmente opposto. Ovvero

$$(0, t) \sim (1, 1 - t) \forall t \in [0, 1]$$

Un nastro di Möbius aperto si ottiene dalla restrizione di \sim a $[0, 1] \times (0, 1)$, ossia

$$(0, t) \sim (1, 1 - t) \forall t \in (0, 1)$$

Considerando l'ultimo modello del piano proiettivo introdotto, essendo un disco chiuso omeomorfo a un quadrato, si può vedere che la striscia $\{(x, y) \in \overline{D^n} | y^2 \leq \frac{1}{4}\}$ è omeomorfa a un nastro di Möbius, mentre la striscia $\{(x, y) \in \overline{D^n} | y^2 < \frac{1}{4}\}$ è omeomorfa a un nastro di Möbius aperto.

Un nastro di Möbius può essere costruito a partire da una striscia (omeomorfa al quadrato) in cui due lati opposti vengono incollati ruotandone uno di mezzo giro, in modo tale quindi che i due vertici diametralmente opposti combacino. Consideriamo in \mathbb{R}^3 la circonferenza Γ sul piano xy e il segmento \mathcal{J} di equazioni:

$$\Gamma : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \mathcal{J} : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$$

\mathcal{J} ha estremi $A = (2, 0, 1), B = (2, 0, -1)$ e centro $O' = (2, 0, 0) \in \Gamma$. Allora il nastro di Möbius \mathcal{M} è il luogo dei punti che si ottiene muovendo O' lungo Γ mentre \mathcal{J} ruota in modo tale che a un giro completo di O , \mathcal{J} abbia fatto solo mezzo giro.

Detto O l'origine delle coordinate, se u rappresenta l'angolo spazzato dal vettore OO' a partire dal semiasse positivo delle ascisse (rotazione in senso antiorario nel piano xy), $\frac{u}{2}$ rappresenta l'angolo di rotazione di \mathcal{J} attorno al suo centro (localmente anche \mathcal{J} ruota in senso antiorario).

Per ogni punto P di \mathcal{J} definiamo infine il parametro v come: $v = d(P, B) - 1 \in [-1, 1]$ Sia $P = (x, y, z) \in \mathcal{M}$ e P' la sua proiezione sul piano xy . Allora $|OP'| = |OO'| - |O'P'| = 2 - v \cdot \sin \frac{u}{2}$ e infine $P = (|OP'| \cos u, |OP'| \sin u, v \cos \frac{u}{2})$.

Una parametrizzazione del nastro di Möbius è quindi data da:

$$\mathcal{M} : \begin{cases} x = (2 - v \cdot \sin \frac{u}{2}) \cos u \\ y = (2 - v \cdot \sin \frac{u}{2}) \sin u \\ z = v \cdot \cos \frac{u}{2} \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi], v \in [-1, 1] \quad (2.1)$$

Osservazione 10. Da questa parametrizzazione di \mathcal{M} si ricava la parametrizzazione $F(u, v)$ di un nastro di Möbius aperto $\tilde{\mathcal{M}}$ semplicemente considerando $v \in (-1, 1)$.

L'omeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : [0, 1] \times (0, 1) &\longrightarrow [0, 2\pi] \times (-1, 1) \\ (s, t) &\mapsto (2\pi s, 2t - 1) \end{aligned}$$

trasforma la parametrizzazione di $\tilde{\mathcal{M}}$ in:

$$\tilde{F}(s, t) = F \circ \psi((s, t)) : \begin{cases} x = (2 - (2t - 1) \cdot \sin(\pi s)) \cos(2\pi s) \\ y = (2 - (2t - 1) \cdot \sin(\pi s)) \sin(2\pi s) \\ z = (2t - 1) \cdot \cos(\pi s) \end{cases} \quad s \in [0, 1], t \in (0, 1)$$

Lemma 2.3.1. *Il nastro di Möbius aperto è una varietà non orientabile.*

Dimostrazione. Mostriamo che il nastro di Möbius aperto ammette un atlante di due carte che nell'intersezione non hanno la stessa orientazione (ci sono due componenti connesse con orientazione opposta). Sia $F(u, v)$ la parametrizzazione del nastro di Möbius aperto $\tilde{\mathcal{M}}$ definita in (2.1). Allora $F|_{(0, 2\pi) \times (0, 1)}$ descrive un diffeomorfismo da $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ a un sottoinsieme $U \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Precisamente $U = \tilde{\mathcal{M}} \setminus \text{Im}(F(0, v))$. Consideriamo ora una nuova parametrizzazione $\bar{F}(\bar{u}, \bar{v})$ semplicemente prendendo come origine degli angoli il semiasse negativo delle ascisse. Applichiamo cioè la trasformazione $\bar{u} = u + \pi$:

$$\bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) : \begin{cases} \bar{x} = (2 - \bar{v} \cdot \cos(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{\pi}{2})) \cos(\bar{u} - \pi) \\ \bar{y} = (2 - \bar{v} \cdot \sin(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{\pi}{2})) \sin(\bar{u} - \pi) \\ \bar{z} = \bar{v} \cdot \cos(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \bar{u} \in (0, 2\pi), \bar{v} \in (-1, 1)$$

Stavolta $F|_{(0, 2\pi) \times (0, 1)}$ è diffeomorfo al sottoinsieme

$$V = \tilde{\mathcal{M}} \setminus \text{Im}(\bar{F}(0, \bar{v})) = \tilde{\mathcal{M}} \setminus \text{Im}(F(\pi, v))$$

$U \cup V = \tilde{\mathcal{M}}$ e $U \cap V$ consta di due componenti connesse, precisamente gli aperti:

$$W_1 : \{F(u, v) : 0 < u < \pi\} \quad e \quad W_2 : \{F(u, v) : \pi < u < 2\pi\}$$

Notiamo che in W_1 è dato il cambio di coordinate: $\bar{u} = u + \pi$. Questo corrisponde a un cambio di coordinate $\bar{v} = v$. Infatti ponendo $z = \bar{z}$:

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \cos\left(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{\pi}{2}\right) &= v \cdot \cos\frac{u}{2} \\ \bar{v} \cdot \cos\frac{u}{2} &= v \cdot \cos\frac{u}{2} \\ \bar{v} &= v \end{aligned}$$

Mentre in W_2 è dato il cambio di coordinate: $\bar{u} = u - \pi$. Questo corrisponde a un cambio di coordinate $\bar{v} = -v$. Infatti ponendo $z = \bar{z}$:

$$\begin{aligned} \bar{v} \cdot \cos\left(\frac{\bar{u}}{2} - \frac{\pi}{2}\right) &= v \cdot \cos\frac{u}{2} \\ \bar{v} \cdot \cos\left(\frac{u}{2} - \pi\right) &= v \cdot \cos\frac{u}{2} \\ -\bar{v} \cdot \cos\frac{u}{2} &= v \cdot \cos\frac{u}{2} \\ \bar{v} &= -v \end{aligned}$$

Quindi in W_1 si ha che

$$\det\left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Mentre in W_2 si ha che

$$\det\left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Il determinante su $U \cap V$ non preserva il segno quindi $\tilde{\mathcal{M}}$ non è orientabile. \square

Proposizione 2.3.2. *Il piano proiettivo è una superficie differenziabile non orientabile.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che lo spazio proiettivo generico è una superficie differenziabile. La non orientabilità si ottiene poiché esiste una sottovarietà del piano proiettivo omeomorfa a un nastro di Möbius che sappiamo essere non orientabile. \square

Teorema 2.3.3. *Ogni superficie compatta di \mathbb{R}^3 è orientabile.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione rimandiamo a [8]. \square

Corollario 2.3.4. *Non esiste un embedding di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 .*

Dimostrazione. Dal teorema 2.3.3 si avrebbe che se esistesse un embedding $\mu : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, allora \mathbb{P}^2 come superficie compatta di \mathbb{R}^3 sarebbe orientabile. Siccome abbiamo dimostrato che \mathbb{P}^2 non è orientabile, allora μ non può esistere. \square

Proposizione 2.3.5. *Il piano proiettivo reale ammette un embedding in \mathbb{R}^4 .*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da:

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ si ha $F(v) = F(-v)$ e la restrizione di F alla sfera unitaria S^2 assume gli stessi valori sui punti antipodali. Così $f = F|_{S^2}$ induce un'applicazione:

$$\tilde{f} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$\tilde{f}([p]) = f(p)$$

Mostriamo che f (e quindi \tilde{f}) è un'immersione. Consideriamo la parametrizzazione di S^2 data da $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, dove $x^2 + y^2 \leq 1$. Allora:

$$f \circ \varphi(x, y) = (x^2 - y^2, xy, x\sqrt{1 - x^2 - y^2}, y\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

Supponiamo $x^2 + y^2 < 1$. La matrice

$$J(f \circ \varphi) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & & \\ y & x & & \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & -\frac{xy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & & \\ -\frac{xy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & & \end{pmatrix}$$

ha rango 2: infatti se una tra x e y è diversa da 0,

$$\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2 \neq 0$$

nel caso $x = y = 0$, si ha invece

$$\begin{vmatrix} \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \sqrt{1-x^2-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi f è una immersione. Nel caso $x^2 + y^2 = 1$ si procede analogamente ricordando che $f \circ \varphi(x, y) = (x^2 - y^2, xy, 0, 0)$ e la matrice Jacobiana è:

$$J(f \circ \varphi) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mostriamo che \tilde{f} è anche un embedding.

- Primo Passo. \tilde{f} è iniettiva. Infatti dal sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ a = x^2 - y^2 \\ b = xy \\ c = xz \\ d = yz \end{cases}$$

si ricavano le equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ a = x^2 - y^2 \\ z^2 b = cd \\ y^2 c = db \\ x^2 d = bc \end{cases}$$

Se almeno una tra $b, c, d \neq 0$ allora è possibile ricavare z^2, y^2, x^2 rispettivamente e utilizzando

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ a = x^2 - y^2 \end{cases}$$

si ricavano le incognite quadratiche rimanenti (quindi le soluzioni sono esattamente due, una l'opposta dell'altra). Nel caso $b = c = d = 0$ allora due tra x, y, z sono uguali a 0 e la rimanente, per le condizioni al problema, è ± 1 . Anche queste sono coppie di soluzioni opposte.

- Secondo Passo. A questo punto dalla compattezza di \mathbb{P}^2 , segue che \tilde{f} è un'immersione regolare, infatti un'applicazione continua e biunivoca tra uno spazio topologico compatto e uno spazio topologico di Hausdorff è un omeomorfismo.

□

Capitolo 3

La superficie di Boy

3.1 La superficie romana e la cross-cap

La *superficie di Steiner*, nota anche come *superficie romana* fu scoperta dal matematico svizzero Jakob Steiner ed è una rappresentazione con autointersezioni del piano proiettivo reale nello spazio 3-dimensionale.

Data la sfera S^2 , definita dai punti (x, y, z) per cui $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, applichiamo la trasformazione:

$$T : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

$$(x, y, z) \mapsto (yz, xz, xy) := (u, v, w)$$

Allora si ha che:

$$\begin{aligned} u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 &= z^4x^2y^2 + y^4x^2z^2 + x^4y^2z^2 \\ &= (x^2y^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) = x^2y^2z^2 = uvw \end{aligned}$$

ossia $Im(T)$ è contenuta nella superficie S di \mathbb{R}^3 di equazione

$$S : u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 - uvw = 0 \quad (3.2)$$

Tale superficie è detta *superficie di Steiner*.

Viceversa mostriamo che $\forall q \in S, \exists p \in S^2$ tale che $T(p) = q$, ossia $Im(T) = S$.

- Se $q = (u, v, w)$, $u, v, w \neq 0$, Allora definendo:

$$x = \sqrt{\frac{vw}{u}} \quad y = \sqrt{\frac{uw}{v}} \quad z = \sqrt{\frac{uv}{w}}$$

si ha che:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{v^2w^2 + u^2w^2 + u^2v^2}{uvw} = \frac{uvw}{uvw} = 1$$

Quindi $(x, y, z) \in S^2$

- Se una tra u, v, w è 0, ad esempio u , per la condizione 3.2 si ha che anche una tra v e w è 0.
- Se due tra u, v, w sono 0, ad esempio u e v , allora si ha $z = 0$. Supponendo $|w| \leq \frac{1}{2}$, dalle condizioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = w \end{cases}$$

si trova facilmente la soluzione (x, y, z) , essendo:

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4w^2}}{2} \quad y^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4w^2}}{2}$$

Non può essere d'altronde $(u, v, w) \in ImT$ con $|w| > \frac{1}{2}$, poiché si avrebbe:

$$\frac{1}{2} < |w| = |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2}$$

- Se infine $u = v = w = 0$, due coordinate tra x, y e z del punto p sono 0 e l'ultima è ± 1 . In ogni caso $p \in S^2$.

Abbiamo mostrato che $T(S^2) = S$, e dato che $T(p) = T(-p) \forall p \in S^2$, allora data la relazione antipodale su S^2 , è indotta una applicazione $\bar{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\bar{T}([p]) = T(p) \in S$ e $\bar{T}(\mathbb{P}^2) = S$

Osservazione 11. L'applicazione \bar{T} non è una immersione. Consideriamo infatti la parametrizzazione di S^2 data da:

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases} \quad (u, v) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

Una parametrizzazione della superficie romana è data da:

$$F(u, v) = (\sin u \cos u \sin v, \sin u \cos u \cos v, \cos^2 u \sin v \cos v)$$

Si ha infine che:

$$JF(u, v) = \begin{pmatrix} \cos 2u \sin v & \sin u \cos u \cos v \\ \cos 2u \cos v & -\sin u \cos u \sin v \\ -\sin 2u & \cos^2 u \cos 2v \end{pmatrix}$$

non ha rango 2 $\forall (u, v) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$: infatti ad esempio:

$$JF\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 3.1. Sia S una superficie algebrica e sia f una sua equazione nelle variabili x_1, \dots, x_n . Un punto $P \in S$ è detto *punto doppio* se $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_P = 0 \forall i = 1, \dots, n$. P è detto *punto triplo* se $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_P = 0 \forall i, j = 1, \dots, n$.

Definiamo *gradiente* o *Jacobiano* di f il vettore:

$$Jf = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

e definiamo *Hessiana* di f la matrice:

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Allora P è un punto doppio (rispettivamente triplo) di f se $Jf(P) = 0$ ($Hf(P) = 0$).

Si può verificare che la superficie romana contiene 3 rette di punti doppi (gli assi coordinati) che si incontrano in un unico punto triplo coincidente con l'origine. Infatti sia $f : y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2 - xyz$.

$$Jf = (2xy^2 + 2xz^2 - yz, 2yx^2 + 2yz^2 - xz, 2zx^2 + 2zy^2 - xy)$$

$$Jf = 0 \Rightarrow x = y = 0 \vee x = z = 0 \vee x = y = 0$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2z^2 & 4xy - z & 4xz - y \\ 4xy - z & 2x^2 + 2z^2 & 4yz - x \\ 4xz - y & 4yz - x & 2x^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$$

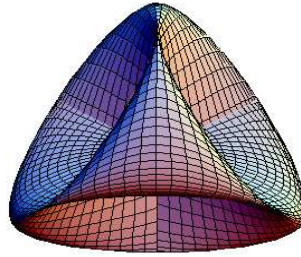


Figura 3.1: La superficie romana

Un altro tipo di rappresentazione con auto-intersezioni di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 è la *superficie cross-cap*.

Sia data l'applicazione:

$$G : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (2xz, 2yz, x^2 - z^2) := (u, v, w)$$

Allora in modo analogo a quanto fatto per la superficie romana, si può vedere che per ogni $p \in S^2$, $G(p) = G(-p)$ e quindi induce una applicazione $\hat{G} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{G}([p]) = G(p)$.

$Im(\hat{G})$ è la superficie cross-cap. Si dimostra che una sua parametrizzazione è data da:

$$g(u, v) = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin u \sin 2v \\ y = \sin 2u \cos^2 v \\ z = \cos 2u \cos^2 v \end{cases} \quad (u, v) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$$

Osservazione 12. La superficie cross-cap non è un'immersione. Infatti

$$Jg = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \cos v & \sin u \cos 2v \\ 2 \cos u \cos^2 v & -\sin 2u \sin 2v \\ -2 \sin 2u \cos^2 v & -\cos 2u \sin 2v \end{pmatrix}$$

non ha rango 2 $\forall (u, v) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$: infatti ad esempio:

$$Jg\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una equazione per la superficie cross-cap è data da:

$$R: 4x^2(x^2 + y^2 + z^2 + z) + y^2(y^2 + z^2 - 1) = 0$$

La superficie cross-cap contiene $x = y = 0$ come retta di punti doppi. Infatti

$$JR = (8x(2x^2 + y^2 + z^2 + z), y(8x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 2), 4x^2(2x + 1) + 2zy^2)$$

e

$$JR = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

Per concludere la superficie ammette un unico punto triplo $P = (0, 0, -1)$. Infatti:

$$HR = \begin{pmatrix} 8(34x^2 + y^2 + zx^2 + z) & 16xy & 8x(2z + 1) \\ 16xy & 12y^2 + 2z^2 - 2 & 4yz \\ 8x(2z + 1) & 4yz & 8x^2 + 8y^2 \end{pmatrix}$$

$$HR = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0, z = -1$$

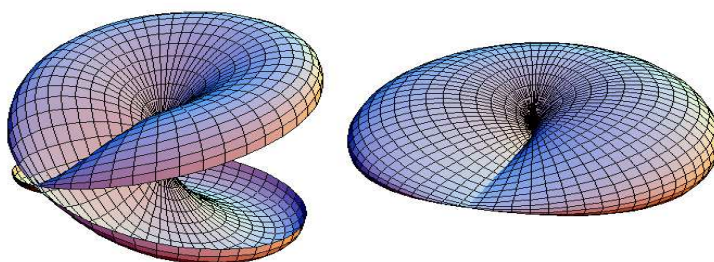


Figura 3.2: Superficie cross-cap

3.2 La superficie di Boy

Agli inizi del '900 D. Hilbert, studiando le proprietà del piano proiettivo, chiese a un suo studente, Werner Boy, di dimostrare la congettura che non fosse possibile immergere \mathbb{P}^2 nello spazio ordinario. W.Boy d'altro canto nel suo lavoro di tesi del 1901, *Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen*, scoprì la prima immersione di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 . Per derivarla aveva utilizzato strumenti dell'analisi, studiando le curve di livello della superficie tramite una funzione *altezza* ma non ne aveva ricavato una forma esplicita.

Definizione 3.2. Chiamiamo *immersione di Boy* ogni immersione in posizione generale di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 e chiamiamo *superficie di Boy* l'immagine di una tale immersione.

La prima parametrizzazione della superficie di Boy fu realizzata da B. Morin nel 1978: questa parametrizzazione è definita da tre funzioni razionali e costituisce una immersione in posizione generale.

Proposizione 3.2.1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita da:

$$f(x, y, z) = r^{-1}(x, y, z) \cdot \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ s^{-1}(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^3 \cdot f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

dove:

$$r(x, y, z) = (x^2 + y^2)(3x^4 - 6x^2y^2 - y^4 + 2zx^3 + 2zxy^2)$$

$$s(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2)^3 + y(y^2 - 3x^2)(z^3 + zx^2 + zy^2 + x^3 - 3xy^2)$$

$$f_1(x, y, z) = 8y(x^2 + y^2)(4xy^2 - x^2z - y^2z)$$

$$f_2(x, y, z) = -5x^6 + 57x^4y^2 - 63x^2y^4 + 3y^6 - 12x^5z + 24x^3y^2z + \\ + 36xy^4z - 4x^4z^2 - 8x^2y^2z^2 - 4y^4z^2$$

$$f_3(x, y, z) = 2(13x^6 - 33x^4y^2 + 87x^2y^4 + 5y^6 + 12x^5z - 24x^3y^2z - 36xy^4z + \\ + 4x^4z^2 + 8x^2y^2z^2 + 4y^4z^2)$$

Allora f induce una applicazione $\bar{f} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\bar{f}([p]) = f(p)$ e \bar{f} è una immersione in posizione generale.

La dimostrazione è data da B.Morin nel suo testo *Equations de retournement de la sphère*, Paris, 1978, 887-892.

Nel 1981 grazie a Jean-Pierre Petit e Jerome Souriau venne trovata una parametrizzazione che si basava su un modello costruito insieme allo scultore Max Sauze, in cui la superficie viene generata da ovali passanti per un unico punto. Anche se il modello trovato era soddisfacente dal punto di vista grafico, gli autori non diedero alcuna indicazione su come mostrare che questa fosse una immersione di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 .

Apéry mostrò nel 1986 che la superficie di Boy si può parametrizzare in \mathbb{R}^3 attraverso tre polinomi omogenei di quarto grado definiti sulla sfera S^2 .

Proposizione 3.2.2. *L'applicazione $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:*

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(2x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz(y^2 - z^2) + xz(x^2 - z^2) + xy(y^2 - x^2)] \\ \frac{\sqrt{3}}{2}[(y^2 - x^2)(x^2 + y^2 + z^2) + zx(z^2 - x^2) + xy(y^2 - x^2)] \\ (x + y + z)[(x + y + z)^3 - 4(y - x)(z - y)(x - z)] \end{bmatrix}$$

induce una applicazione $\bar{F} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\bar{F}([p]) = F(p)$ e \bar{F} è un' immersione in posizione generale.

Per la dimostrazione si veda [2], Paragrafo VII.

Una parametrizzazione della superficie di Boy si ottiene sostituendo:

$$\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \end{cases} \quad u, v \in [0, \pi]$$

Robert Bryant e Rob Kusner trovarono nel 1988 una immersione di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 , la cui immagine era una *superficie minima*, ovvero una superficie la cui curvatura media fosse 0. La relativa parametrizzazione è data da $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$f(z) = \left(\frac{g_1(z)}{g(z)}, \frac{g_2(z)}{g(z)}, \frac{g_3(z)}{g(z)} \right)$$

dove:

$$\begin{aligned}
 g_1(z) &= \frac{3}{2} \Im \left(\frac{z(1-z^4)}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1} \right) \\
 g_2(z) &= \frac{3}{2} \Re \left(\frac{z(1+z^4)}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1} \right) \\
 g_3(z) &= \Im \left(\frac{1+z^6}{z^6 + \sqrt{5}z^3 - 1} \right) - \frac{1}{2} \\
 g &= g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \quad |z| \leq 1
 \end{aligned}$$

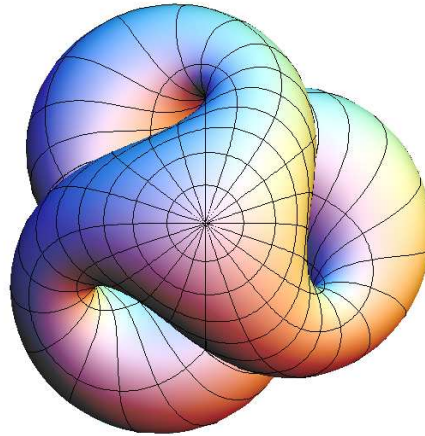


Figura 3.3: La superficie di Boy

Mostriamo ora qualche risultato sulle auto-intersezioni della superficie di Boy.

Proposizione 3.2.3. *Data un'immersione in posizione generale di una superficie chiusa $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ che ammette un numero finito n di punti tripli, allora $n \equiv \chi(S) \pmod{2}$ dove χ è la caratteristica di Eulero.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda [4]. □

Osservazione 13. Essendo la caratteristica di Eulero del piano proiettivo $\chi(\mathbb{P}^2) = 1$, allora una qualunque immersione in posizione generale di \mathbb{P}^2 in \mathbb{R}^3 avrà un numero dispari di punti tripli.

Definizione 3.3. Sia $f : M \rightarrow N$ una applicazione continua localmente iniettiva (immersione topologica) da uno spazio compatto a uno spazio separabile. Denotiamo con N_p l'insieme dei punti di N che hanno almeno $p > 1$ controimmagini attraverso f . Ovviamente si ha $N_1 = f(M) \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_p$.

Sia

$$\bar{M}_p = \{(x_1, \dots, x_p) \in M^p, \text{ per ogni } i \neq j \text{ si ha } x_i \neq x_j\}$$

e sia \bar{f}_p la restrizione a \bar{M}_p dell'applicazione prodotto $f \times \dots \times f : M^p \rightarrow N^p$. Sia infine

$$S_p = \{(x_1, \dots, x_p) \in \bar{M}_p, f(x_1) = \dots = f(x_p)\}$$

la controimmagine della diagonale di N^p attraverso \bar{f}_p . Se $(x^n) = (x_1^n, \dots, x_p^n)$ è il termine generale di una successione di S^p convergente a $(x) = (x_1, \dots, x_p)$ in M^p , allora $f(x_1) = \dots = f(x_p)$ ed essendo f localmente iniettiva, i punti x_i sono due a due distinti. Allora $(x) \in S_p$ e quindi S_p è compatta. Se π è la proiezione canonica sul primo fattore, si ha che $\pi(S_p) = f^{-1}(N_p)$ da cui N_p è compatta. Allora $f \circ \pi$ si restringe a una immersione topologica di S_p su N_p .

Proposizione 3.2.4. *Sia data una C^1 -immersione in posizione generale $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che ammetta un unico punto triplo P . Allora P è situato su una C^1 -sottovarietà compatta immersa di dimensione 1 che rappresenta l'insieme dei punti doppi.*

Per l'immersione di Boy, l'insieme dei punti doppi rappresenta la curva di auto-intersezione della superficie: questa curva è nota come *elica tripale*.

La dimostrazione è data in [2].

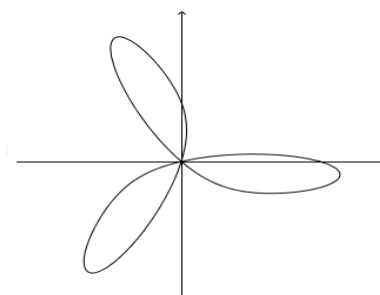


Figura 3.4: Elica tripale

3.3 La superficie di Boy come deformazione della superficie romana

Definizione 3.4. Siano X, Y varietà differenziabili e siano $F: X \rightarrow Y$, $G: X \rightarrow Y$ due funzioni differenziabili. Siano infine $S = F(X)$ e $S' = G(X)$. Si dice che S viene *deformata* in S' se esiste una funzione continua

$$H: [0, 1] \times X \rightarrow Y$$

tale che per ogni $x \in X$ si ha che $H(0, x) = F(x)$, $H(1, x) = G(x)$ e per ogni $b \in [0, 1]$ si ha che $H(b, x)$ è differenziabile. Denotiamo per comodità $H_b(x) := H(b, x)$

Vogliamo costruire la superficie di Boy attraverso una deformazione della superficie romana. Questa idea è dovuta a B. Morin che notò un certo numero di somiglianze nella geometria delle due superfici.

Proprietà della superficie romana.

Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^3 \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{T} & \\ \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

dove T è l'applicazione definita in 3.1, π è la mappa quoziente definita dalla relazione antipodale su S^2 e \bar{T} è l'applicazione indotta da T su \mathbb{P}^2 . Studiando l'equazione 3.2 si nota che la superficie romana ha la simmetria del tetraedro regolare; in totale ci sono quindi quattro assi di simmetria tripli che si intersecano nel punto triplo $(0,0,0)$ e che incontrano la superficie in quattro altri punti detti *poli* della superficie romana. Iscriviamo la superficie in un tetraedro regolare. Fissato un polo Q , la faccia del tetraedro opposta a Q è tangente alla superficie lungo un cerchio Γ il cui asse è un asse di simmetria triplo. La controimmagine di Q tramite T è costituita da due punti P, P' antipodali della sfera. La superficie romana può essere generata da un fascio di ellissi passanti per P e tangenti a Γ . Ogni ellisse è l'immagine tramite T di un meridiano della sfera S^2 che colleghi P con P' : infatti il fascio di ellissi è l'immagine tramite \bar{T} di un fascio di rette proiettive in \mathbb{P}^2 passanti per un punto fissato e queste ultime sono immagini di meridiani da P a P' tramite la mappa quoziente π .

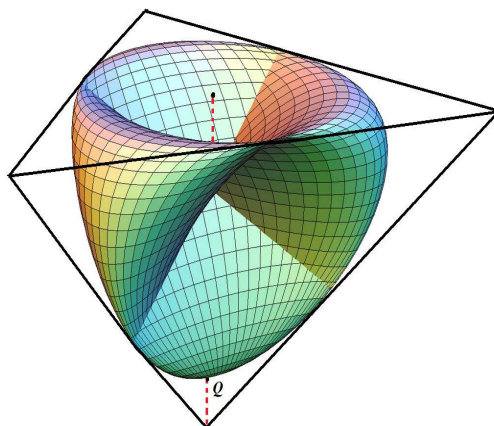


Figura 3.5: Proprietà della superficie romana

Grazie alle osservazioni di Hilbert e W.Boy, possiamo assumere che la superficie di Boy abbia un asse di simmetria *triplo*. Questo asse incontra la superficie nel suo punto triplo e in un secondo punto che chiamiamo *polo* della superficie di Boy.

Definizione 3.5. Data una superficie S diciamo che una retta r è un *asse di simmetria triplo* per S se le rotazioni di $\frac{2}{3}\pi$ attorno a r portano la superficie in sé.

Definizione 3.6. Dato un punto P e una varietà M , l'insieme dei punti di M il cui piano tangente passa per P è detto *contorno apparente* di M per P .

Il contorno apparente della superficie romana visto da un suo polo è un cono su un'ipocicloide a tre cuspidi; il contorno apparente della superficie di Boy visto da un suo polo è un cono su un'ipocicloide allungata.

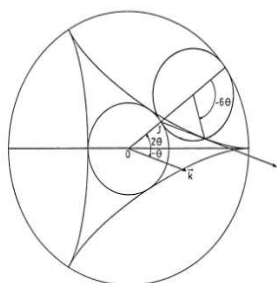


Figura 3.6: Ipocicloide a tre cuspidi

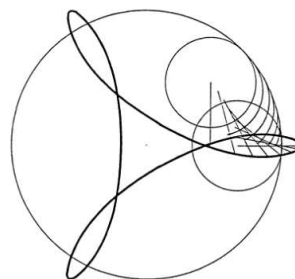


Figura 3.7: Ipocicloide allungata

L'idea di base è quella di perturbare ogni ellisse del fascio che definisce la superficie romana in modo che questa intersechi il piano contenente Γ in un altro punto Q' in modo che Q' descriva un'ipocicloide allungata.

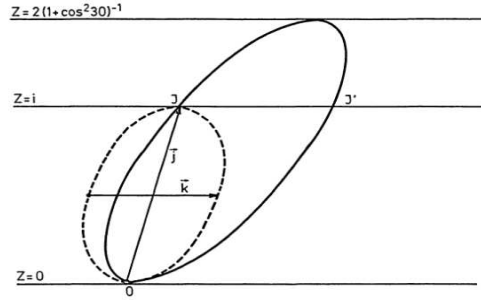


Figura 3.8: Perturbazione di un'ellisse

Queste considerazioni hanno permesso di costruire una mappa che deforma con continuità la superficie romana nella superficie di Boy.

Proposizione 3.3.1. *Sia S^2 parametrizzata dalle variabili (θ, t) , dove per ogni $p \in S^2$, $\theta(p)$ rappresenta la longitudine di p e $t(p)$ la tangente alla latitudine di p . Consideriamo la famiglia di mappe $(H_b)_{b \in [0,1]}$ di S^2 in \mathbb{R}^3 definite da:*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = H_b(\theta, t) = (1 - \sqrt{2}b \sin 3\theta + t^2)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \cos 2\theta + \frac{2}{3}t \cos \theta \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sin 2\theta - \frac{2}{3}t \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

per $\theta \in [0, \pi]$ e $t \in [-\infty, +\infty]$.

Allora H_0 è una parametrizzazione per la superficie romana e H_1 è una parametrizzazione per la superficie di Boy. Essendo inoltre H_b differenziabile per ogni $b \in [0, 1]$, allora la superficie di Boy è una deformazione della superficie romana.

La curva di auto-intersezione della superficie di Boy è l'elica tripale parametrizzata

da:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 2(3 - \cos 6\theta)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3\theta \right) \cos \theta \\ \frac{2}{3} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3\theta \right) \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

che è una curva di sesto grado.

Si può dimostrare che la superficie di Boy così ottenuta è il luogo degli zeri reali di un polinomio di sesto grado.

Proposizione 3.3.2. *La superficie di Boy è l'insieme degli zeri del polinomio:*

$$\begin{aligned} p(x, y, z) = & 64(1 - z)^3 z^3 - 48(1 - z)^2(3x^2 + 3y^2 + 2z^2) + \\ & + 12(1 - z)z(27(x^2 + y^2)^2 - 24z^2(x^2 + y^2) + 36\sqrt{2}yz(y^2 - 3x^2) + 4z^4) + \\ & + (9x^2 + 9y^2 - 2z^2)(-81(x^2 + y^2)^2 - 72z^2(x^2 + y^2) + 108\sqrt{2}xz(x^2 - 3y^2) + 4z^4) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per le dimostrazioni si veda [2]. □

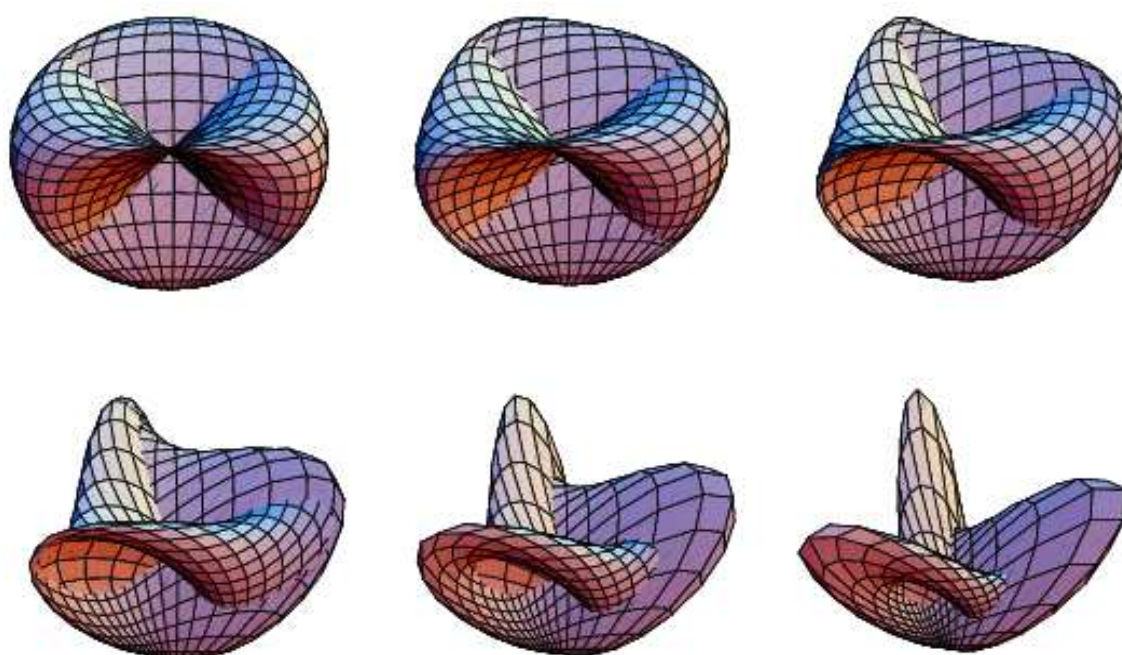


Figura 3.9: Dalla superficie romana alla superficie di Boy

Bibliografia

- [1] Abate, Marco; Tovena, Francesca Geometria differenziale. Unitext, 54. Springer, Milan, 2011.
- [2] Apéry, François La surface de Boy. Adv. in Math. 61 (1986), no. 3, 185–266.
- [3] Apéry, François Models of the real projective plane. Computer graphics of Steiner and Boy surfaces. With a preface by Egbert Brieskorn. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.
- [4] Banchoff, Thomas F. Triple points and surgery of immersed surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 46 (1974), 407–413.
- [5] Coxeter, H. S. M. The real projective plane. Third edition. With an appendix by George Beck . Springer-Verlag, New York, 1993.
- [6] Hilbert, D.; Cohn-Vossen, S. Geometry and the imagination. Translated by P. Neményi. Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1952.
- [7] Manetti, Marco Topologia, Unitext, 91. La Matematica per il 3+2. Springer, Cham, 2015.
- [8] Massey, William S. A basic course in algebraic topology, Springer, 2008.
- [9] Petit, Jean-Pierre Les Aventures d’Anselme Lanturlu : Le Topologicon, Belin, 1999.
- [10] Petit, Jean-Pierre; Souriau, Jérôme Une représentation analytique de la surface de Boy. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 293 (1981), no. 4, 269–272.
- [11] Sernesi, Edoardo Geometria 2. Bollati Boringhieri, 2001.

Ringraziamenti

Non saprei davvero da dove cominciare, ma in un qualche modo bisogna pur farlo.

Sono grato a tutte le persone che mi hanno sostenuto in questa fase finale del mio percorso accademico, che mi hanno supportato ma specialmente sopportato.

Credo tuttavia che sia necessario fare un salto all'indietro, ai giorni in cui ero solo una matricola alla ricerca della sua strada, o forse ancor prima, quando ero un liceale pieno di passioni e (forse fin troppi) impegni.

Non so bene quale sia il punto di partenza di questo percorso, perché in un modo o nell'altro, tutte le persone che ho avuto la possibilità di conoscere lungo la strada mi hanno donato qualcosa, mi hanno fatto crescere, mi hanno fatto conoscere la vita.

Vorrei quindi ringraziare tutti coloro che hanno condiviso una parte di loro con me, perché io la custodirò in futuro come un tesoro inestimabile. Non importa la distanza, non importa il tempo. Certe emozioni permangono nella realtà e sono destinate a durare per sempre. Per vivere ci vuole coraggio, ci vuole creatività e un giusto equilibrio tra razionalità e immaginazione.

La tesi qui proposta non ha il solo scopo di approfondire un tema che ritengo affascinante: no, c'è di più. Questo è solo uno dell'infinità di esempi in cui non basta ragionare su come le cose ci appaiono o ci si mostrano: servono fantasia, impegno e un pizzico di intuito, per avere diversi punti di vista dell'indagine che andiamo a condurre.

E così come in ogni altra questione di vita, non dobbiamo fermarci al primo ostacolo, perché tentare una volta in più è sempre meglio che rinunciare a lottare. Nessuno dice che ciò sia facile. È altrettanto vero che nessuno dice che ciò sia impossibile.