Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

LA MISURA DI MONGE-AMPÈRE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
ANNAMARIA
MONTANARI

Presentata da:
MICHELANGELO
CAVINA

II Sessione

Anno Accademico 2014/2015

A tutte le persone
che mi hanno aiutato a raggiungere
questo traguardo

Indice

Introduzione

In questa tesi studieremo come costruire una misura partendo da una funzione convessa continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto. Per costruire questa misura useremo la nozione di mappa normale ∂u di u, che permette di determinare una σ-algebra di sottoinsiemi di Ω su cui definire la misura di Monge-Ampère Mu, che è una misura finita sui compatti di Ω tale che, nel caso di funzioni u di regolarità C^2, la misura di un insieme A Mu-misurabile è uguale a

$$Mu(A) = \int_A \det D^2 u(x) \mathrm{d}x$$

dove con $D^2u(x)$ indichiamo la matrice hessiana di u nel punto x.
Tuttavia questa misura è definita anche nel caso di funzioni di regolarità minore. Nel caso di una funzione u continua e convessa, $u \notin C^2$, il calcolo della misura di Monge-Ampère $Mu(A)$ si riconduce al calcolo della misura della mappa normale calcolata sull'insieme A.

$$Mu(A) = |\partial u(A)|$$

Il concetto di misura di Monge-Ampère permette di risolvere l'equazione di Monge-Ampère, che risulta utile nello studio di importanti argomenti, come lo studio dell'equazione di assegnata curvatura di Gauss. Andremo a definire le soluzioni generalizzate e le soluzioni di viscosità dell'equazione di Monge-Ampère, arrivando infine a dimostrare che ogni soluzione generalizzata è soluzione di viscosità.
Infine andremo a dimostrare il principio di Aleksandrov-Bakelman-Pucci, che si basa sulla nozione di mappa normale e che è uno stumento di analisi molto utile per lo studio di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche a coefficienti misurabili.
Le notazioni di mappa normale e di soluzioni generalizzate dell'equazione di Monge-Ampère e le loro proprietà sono dovute a A.D.Aleksandrov, vedi [10] e [11]. Il concetto di soluzione di viscosità è dovuto a M.G.Crandall e P-L. Lions, vedi [6]. L'equivalenza tra la definizione di soluzione generalizzata e soluzione di viscosità è mostrata in [5, pgg. 137-139]. Il teorema 3.1.2 è dovuto a A.D.Aleksandrov, [2]. Il il principio di massimo del teorema 3.2.2 è stato scoperto indipendentemente da A.D.Aleksandrov, I.Bakelman e C. Pucci [1], [3], [4], [12]. Il teorema 3.3.1 è basata sullo scritto [13]. L'approccio adottato nella scrittura di questo documento si basa ampiamente sul primo capitolo del testo di C.E. Gutiérrez [8]. Data la grande importanza delle funzioni convesse per la trattazione di questi argomenti, enunceremo alcune proprietà basilari delle funzioni convesse nell'appendice.

Notazioni

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.
Diciamo che $f \in C^k$, $k \geq 1$ se f ammette derivate parziali continue di ordine i rispetto a tutte le variabili $\forall i = 1, 2, ..., k$.
Supposto che $k \geq 1$, dato $x_0 \in \Omega$, indichiamo il gradiente di f calcolato in x_0 con $\nabla f(x_0)$.
Supposto che $k \geq 2$, dato $x_0 \in \Omega$, indichiamo la matrice hessiana di f calcolata in x_0 con $D^2 f(x_0)$.
Data una matrice M $n \times n$ a coefficienti reali, scriviamo che $M \geq (\leq)\ 0$ se M è semidefinita positiva (rispettivamente semidefinita negativa), inoltre scriviamo che $M > (<)\ 0$ se M è definita positiva (rispettivamente definita negativa).
Dato $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $B_R(x_0)$ la palla aperta di centro x_0 e raggio R in $\mathbb{R}^n$.
Sia A un insieme. indichiamo con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $|\Omega|$ la misura di Lebesgue standard definita su $\mathbb{R}^n$ di Ω. Indichiamo inoltre con $\overline{\Omega}$ la chiusura di Ω.

Capitolo 1

La misura di Monge-Ampère

In questo capitolo mostreremo come, dato un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e data una funzione $u \in C(\Omega)$, si possa costrire una misura definita su una opportuna $\sigma - algebra \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ e ne studieremo alcune proprietà.

1.1 La mappa normale

Prima di tutto enunciamo una definizione che risulterà utile per la trattazione di questi argomenti:

Definizione 1.1.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \Omega$. Un Iperpiano di supporto per la funzione u nel punto $(x_0, u(x_0))$ è una funzione $\ell(x) = u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ tale che $u(x) \geq \ell(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Ora enunciamo il concetto di mappa normale, che sarà alla base della costruzione della misura di Monge-Ampère.

Definizione 1.1.2. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Si definisce come Mappa normale di u la funzione $\partial u : \Omega \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$$\partial u(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \colon u(x) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) \ \ \forall x \in \Omega\}$$

Dato $E \subseteq \Omega$, definiamo

$$\partial u(E) = \bigcup_{x \in E} \partial u(x)$$

In generale l'insieme $\partial u(x_0)$ potrebbe essere l'insieme vuoto, consideriamo $S = \{x \in \Omega \colon \partial u(x) \neq \emptyset\}$. Se $u \in C^1(\Omega)$ e $x \in S$, allora $\partial u(x) = \{\nabla u(x)\}$, ossia quando u è una funzione regolare la mappa normale ∂u corrisponde al gradiente di u. Inoltre , dato $x_0 \in \Omega$, supposto che $\partial u(x_0) \neq \emptyset$, abbiamo che $\partial u(x_0)$ è un insieme convesso.

Esempio 1. Risulta particolarmente utile calcolare la mappa normale di una funzione u avente come grafico un cono in $\mathbb{R}^{n+1}$. Sia $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\Omega = B_R(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$, sia $h > 0$. Considero $u(x) = h\frac{|x-x_0|}{R}$. Il grafico di u è un cono in $\mathbb{R}^{n+1}$ con il vertice rivolto verso il basso nel punto $(x_0, 0)$ e base giacente sull'iperpiano $x_{n+1} = h$. Ora mostriamo che

$$\partial u(x) = \begin{cases} \left\{\frac{h}{R}\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right\} & \text{per } 0 < |x - x_0| < R \\ \\ \overline{B_{\frac{h}{R}}(0)} & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

Infatti se $0 < |x - x_0| < R$, il valore di ∂u corrisponde al valore del gradiente di u, ossia $\partial u(x) = \{\nabla u(x)\} = \left\{\frac{h}{R}\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right\}$. Consideriamo ora il caso di $x = x_0$. $p \in \partial u(x_0) \iff \frac{h}{R}|x - x_0| \geq p \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in B_R(x_0)$. Sia $p \neq 0$, consideriamo $x = x_0 + R\frac{p}{|p|}$. Allora si ricava, sostituendo nell'equazione precedente, che $|p| \leq \frac{h}{R}$, ossia $\partial u(x_0) \subseteq \overline{B_{\frac{h}{R}}(0)}$. Inoltre, dato $p \in \overline{B_{\frac{h}{R}}(0)}$, si verifica banalmente che $p \in \partial u(x_0)$. Dunque $\partial u(x_0) = \overline{B_{\frac{h}{R}}(0)}$.

1.2 Proprietà della Mappa Normale

Enunciamo ora alcune proprietà della mappa normale che saranno utili per dimostrare i successivi risultati riguardanti la misura di Monge-Ampère.

Lemma 1.2.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Sia $u \in C(\Omega)$,*
sia $K \subseteq \Omega$ compatto.
Allora $\partial u(K)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $\{p_k\} \in \partial u(K)$ una successione. Verifichiamo che p_k è limitata. $p_k \in \partial u(K)$, dunque $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in K$ tale che $p_k \in \partial u(x_k)$, ossia $u(x) \geq u(x_k) + p_k \cdot (x - x_k) \quad \forall x \in \Omega$. Visto che K è compatto e Ω è aperto, allora $\exists \delta > 0$ tale che $K_\delta := \{x \in \Omega \colon \operatorname{dist}(x, K) \leq \delta\}$ è compatto e contenuto in Ω. Essendo K compatto, possiamo assumere (eventualmente a meno di una sottosuccessione) che $x_k \to x_0 \in K$. Dunque $x_k + \delta\omega \in K_\delta$, e inoltre

$$u(x_k + \delta\omega) \geq u(x_k) + \delta p_k \cdot \omega \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n, |\omega| = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se $p_k \neq 0$, considero $\omega = \frac{p_k}{|p_k|}$. Allora $u(x_k + \delta\frac{p_k}{|p_k|}) \geq u(x_k) + \delta|p_k|$. Dunque, essendo u continua e K, K_δ compatti, maggioriamo il membro a sinistra e minoriamo il membro a destra ottenendo

$$\max_{x \in K_\delta}(u(x)) \geq \min_{x \in K}(u(x)) + \delta|p_k| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dunque p_k è limitata. Allora $\exists\{p_{k_m}\}$ sottosuccessione di $\{p_k\}$ tale che
$p_{k_m} \xrightarrow{m\to+\infty} p_0$. Mostriamo che $p_0 \in \partial u(K)$. Vale che

$$u(x) \geq u(x_{k_m}) + p_{k_m} \cdot (x - x_{k_m}) \quad \forall x \in \Omega$$

Visto che u è continua, per $m \to +\infty$, otteniamo

$$u(x) \geq u(x_0) + p_0 \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in \Omega$$

Ossia $p_0 \in \partial u(K)$. Abbiamo dunque mostrato che data una arbitraria successione $\{p_k\} \in \partial u(K)$, allora essa ammette una sottosuccessione convergente a $p_0 \in \partial u(K)$. Allora $\partial u(K)$ è compatto. $\square$

Lemma 1.2.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa, sia $K \subseteq \Omega$ compatto. Allora u è uniformemente Lipschitziana in K, ossia $\exists\, C = C(u, K) \in \mathbb{R}$ costante tale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\, |x - y| \quad \forall x, y \in K$$

Dimostrazione. u è convessa, dunque ammette un iperpiano di supporto nel punto $(x, u(x)) \quad \forall x \in \Omega$, dunque la mappa normale $\partial u(K) \neq \emptyset$. Consideriamo dunque $C = \sup\{|p| \colon p \in \partial u(K)\}$. Per il lemma 1.2.1, $C \in \mathbb{R}$. Sia $x, y \in K$. Allora

$$\begin{aligned} u(y) &\geq u(x) + p \cdot (y - x) \quad \forall p \in \partial u(x) \\ u(y) - u(x) &\geq \cos(\theta)|p||y - x| \\ u(y) - u(x) &\geq -C|y - x| \end{aligned}$$

Ora, i ruoli di x e di y sono invertibili, dunque

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &\geq -C|y - x| \\ u(y) - u(x) &\leq C|y - x| \end{aligned}$$

Allora ricaviamo che

$$|u(y) - u(x)| \leq C|y - x| \quad \forall x, y \in K$$

□

Si possono inoltre dimostrare i seguenti lemmi

Lemma 1.2.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, lipschitziana in Ω. Allora u è differenziabile quasi dappertutto in Ω.*

Dimostrazione. Citiamo la dimostrazione nel testo [7, pg.81] □

Lemma 1.2.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa (o concava) in Ω. Allora u è differenziabile quasi dappertutto in Ω.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dai due lemmi precedenti. □

Enunciamo ora la definizione di trasformata di Legendre, che sarà utile per dimostrare un lemma importante.

Definizione 1.2.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$. La Trasformata di Legendre di u è la funzione $u^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$u^*(p) = \sup_{x \in \Omega}(x \cdot p - u(x))$$

Osserviamo che se Ω è limitato e u è limitata in Ω, allora u^* è limitata e convessa in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.2.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, sia $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$.*
Considero $S = \{p \in \mathbb{R}^n \colon \exists\, x, y \in \Omega,\ x \neq y \ \text{t.c.}\ p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)\}$
Allora S ha misura nulla.

Dimostrazione. Cominciamo scrivendo Ω come $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ con $\overline{\Omega}_k$ compatti, con $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$. Sia $p \in S$. Allora

$$\exists x, y \in \Omega,\ x \neq y \ \text{ tali che } \ p \in \partial u(x) \cap \partial u(y)$$

ossia $u(z) \geq u(x) + p \cdot (z - x), \quad u(z) \geq u(y) + p \cdot (z - y) \quad \forall z \in \Omega$. Ora, $x, y \in \Omega$, dunque $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tali che $x \in \Omega_{k_1}$, $y \in \Omega_{k_2}$. Preso $\overline{k} = \max\{k_1, k_2\}$, visto che $\Omega_k \subseteq \Omega_j \quad \forall k \leq j$, allora $x, y \in \Omega_{\overline{k}}$, e le disuguaglianze precedenti valgono per $z \in \Omega_{\overline{k}}$. Ora, dato $m \in \mathbb{N}$, indichiamo con $u_m = u|_{\Omega_m}$ la restrizione di u all'insieme limitato Ω_m, indichiamo con $u_m^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la trasformata di Legendre di u_m. Ora, posto

$$S_m = \{p \in \mathbb{R}^n \colon \exists x, y \in \Omega_m,\ x \neq y \ \text{ tali che } \ p \in \partial u_m(x) \cap \partial u_m(y)\}$$

Risulta che, dato $p \in S$, allora $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $p \in S_m$, dunque

$$S \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m$$

Ora mostriamo che S_m ha misura nulla. Considero la trasformata di Legendre u_m^*. Essendo Ω_m limitato, allora, per il lemma 1.2.4, u_m^* è differenziabile quasi dappertutto. Sia

$$E_m = \{p \in \mathbb{R}^n \colon u_m^* \text{ non è differenziabile in } p\}$$

mostriamo che

$$S_m = \{p \in \mathbb{R}^n \colon \exists x, y \in \Omega_m,\ x \neq y \ \text{ tali che } \ p \in \partial u_m(x) \cap \partial u_m(y)\} \subseteq E_m$$

Infatti dato $p \in \partial u_m(x_1) \cap \partial u_m(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$, allora

$$u_m^*(p) = x_i \cdot p - u(x_i) \quad \text{per } i = 1, 2$$
$$u_m^*(z) \geq x_i \cdot z - u(x_i) \quad \forall z \in \Omega_m,\ i = 1, 2$$

allora

$$u_m^*(z) \geq u_m^*(p) + x_i \cdot (z - p) \quad \forall z \in \Omega_m,\ i = 1, 2$$

Se u_m^* fosse differenziabile in p, allora il differenziale $\mathrm{d}u_m^*(p) = x_i \quad i = 1, 2$. Ciò è assurdo essendo $x_1 \neq x_2$. Dunque $S_m \subseteq E_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Ma u_m^* è differenziabile quasi dappertutto, dunque E_m ed S_m hanno misura nulla, dunque $S \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ ha misura nulla per via della subadditività della misura di Lebesgue. □

1.3 La misura di Monge-Ampère

Enunciamo ora la definizione di misura di Monge-Ampère.

Teorema 1.3.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $u \in C(\Omega)$.*
Allora la classe

$$S = \{E \subseteq \Omega \colon \partial u(E) \text{ è Lebesgue-misurabile}\}$$

è una σ-algebra. La funzione $Mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ definita da

$$Mu(E) = |\partial u(E)|$$

è una misura, chiamata Misura di Monge-Ampère associata alla funzione u.

Dimostrazione. Per il lemma 1.2.1, la classe S contiene tutti i compatti di Ω. Sia $\{E_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di Ω, allora $\partial u(\bigcup_m E_m) = \bigcup_m \partial u(E_m)$. Dunque se $E_m \in S \quad m = 1, 2, ...$, allora $\bigcup_m E_m \in S$. Ora, scrivendo $\Omega = \bigcup_m K_m$ con K_m compatto, otteniamo che $\Omega \in S$. Dunque per mostrare che S è una σ-algebra è rimasto da provare che se $E \in S$, allora $\Omega \setminus E \in S$. Per dimostrarlo usiamo la seguente formula valida per ogni sottoinsieme E di S.

$$\partial u(\Omega \setminus E) = (\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)) \cup (\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E))$$

Per il lemma 1.2.5, $|\partial u(\Omega \setminus E) \cap \partial u(E)| = 0 \quad \forall E \in S$. Questo prova che $\partial u(\Omega \setminus E)$ è Lebesgue-misurabile visto che è uguale all'unione di un insieme di misura nulla e dell'insieme $\partial u(\Omega) \setminus \partial u(E)$ che misurabile in quanto è la differenza di due insiemi misurabili, visto che $\Omega, E \in S$. Pertanto, $\Omega \setminus E \in S$, dunque S è una σ-algebra. Resta da provare che Mu è una misura. Mu è una funzione a valori reali maggiori o uguali a 0, definita su una σ-algebra, finita su almeno un insieme (è infatti finita su ogni compatto di Ω), dunque resta da provare che Mu è σ-additiva. Sia $\{E_i\}_{i=1}^{+\infty}$ una successione di elementi di S tra di loro disgiunti a due a due. Sia $\partial u(E_i) = H_i$. Dobbiamo mostrare che

$$|\partial u(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i)| = \sum_{i=1}^{+\infty} |H_i|$$

ora, visto che $\partial u(\bigcup_i E_i) = \bigcup_i \partial u(E_i) = \bigcup_i H_i$, basta dimostrare che

$$|\bigcup_{i=1}^{+\infty} H_i| = \sum_{i=1}^{+\infty} |H_i|$$

Abbiamo che $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall j \neq i$, allora per il lemma 1.2.5 $|H_i \cap H_j| = 0 \quad \forall i \neq j$. Consideriamo

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} H_i = H_1 \cup (H_2 \setminus H_1) \cup (H_3 \setminus (H_2 \cup H_1)) \cup ...$$

dove tali insiemi sono disgiunti. Ora considero

$$H_n = (H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)) \cup (H_n \setminus (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1))$$

Per il lemma 1.2.5, $|H_n \cap (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)| = 0$, dunque $|H_n| = |H_n \setminus (H_{n-1} \cup H_{n-2} \cup ... \cup H_1)|$. Ne segue che

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{+\infty} H_i| &= |H_1| + |H_2 \setminus H_1| + ... + |H_n \setminus (H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_{n-1})| + ... \\
&= |H_1| + |H_2| + ... + |H_n| + ... \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |H_i|
\end{aligned}$$

Ossia Mu è σ-additiva. □

Osserviamo che Mu è finita sui compatti, infatti per il lemma 1.2.1, $\partial u(K)$ è compatto $\quad \forall K$ compatto $\subseteq \Omega$. Inoltre possiamo caratterizzare la misura di Monge-Ampère associata a funzioni convesse di classe C^2 tramite la seguente osservazione.

Osservazione 1.3.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $u \in C^2(\Omega)$ una funzione convessa. Allora la misura di Monge-Ampère Mu associata ad u soddisfa

$$Mu(E) = \int_E \det D^2u(x)dx \quad \forall \textit{ Boreliano } E \subseteq \Omega$$

Premettiamo alla dimostrazione il seguente risultato

Teorema 1.3.2. ***(Lemma di Sard)*** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1. Sia $x \in \Omega$, sia $\mathscr{I}_\phi(x)$ la matrice jacobiana di ϕ calcolata in x, sia $S_0 = \{x \in \Omega \colon \det(\mathscr{I}_\phi(x)) = 0\}$*
Allora $|\phi(S_0)| = 0$

Dimostrazione. Per dimostrare questo risultato, facciamo riferimento alla dimostrazione nel testo di Ermanno Lanconelli [9, pgg. 47-48]. Sia $\varepsilon > 0$, definiamo $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\psi(u) = (\phi(u), \varepsilon u)$. ψ è una funzione iniettiva di classe C^1. Sia $\mathscr{I}_\psi$ la matrice jacobiana di ψ. Allora $\mathscr{I}_\psi$ può essere espressa nella seguente forma a blocchi

$$\mathscr{I}_\psi = \begin{pmatrix} \mathscr{I}_\phi \\ \varepsilon I_n \end{pmatrix}, \quad I_n = \text{matrice unità } n \times n$$

Allora il quadrato dello jacobiano di ψ

$$(J_\psi)^2 := \det((\mathscr{I}_\psi)^t \cdot \mathscr{I}_\psi) = \det((\mathscr{I}_\phi)^t \cdot \mathscr{I}_\phi + \varepsilon^2 I_p)$$

quindi $J^2_\psi(u) \neq 0 \quad \forall u \in \Omega$. Sia

$$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ \pi(x, u) = x$$

risulta che $\phi = \pi \circ \psi$. Allora, essendo π una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$, ne segue che

$$H_n(\phi(A)) \leq L\, H_n(\psi(A)) = H_n(\psi(A)) \quad \forall A \subseteq \Omega \tag{1.1}$$

dove con $H_n(A)$ indichiamo la n-esima misura di Hausdorff di A.
Ora S_0 è chiuso, dunque $S_0 \cap C$ è compatto per ogni cubo compatto $C \subseteq \Omega$. Dunque per il lemma 6.9 [9, pg. 45] e per l'equazione precedente

$$\begin{aligned} H_n(\phi(S_0 \cap C)) &\leq H_n(\psi(S_0 \cap C)) \\ &= \int_{S_0 \cap C} J_\psi(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{S_0 \cap C} \sqrt{\det((\mathscr{I}_\phi)^t \cdot \mathscr{I}_\phi + \varepsilon^2 I_p)}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Dunque visto che $H_n(\phi(S_0 \cap C))$ non dipende da ε, allora

$$\begin{aligned} H_n(\phi(S_0 \cap C)) &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_0 \cap C} \sqrt{\det((\mathscr{I}_\phi)^t \cdot \mathscr{I}_\phi + \varepsilon^2 I_p)}\mathrm{d}u \\ &= \int_{S_0 \cap C} \sqrt{\det((\mathscr{I}_\phi)^t \cdot \mathscr{I}_\phi)}\mathrm{d}u \\ &= \int_{S_0 \cap C} J_\phi(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Ma $J_\phi(u) = 0 \quad \forall u \in S_0$, dunque la misura $H_n(\phi(S_0 \cap C)) = 0$ per ogni cubo compatto $C \subseteq \Omega$. Dunque, scrivendo $\Omega = \bigcup_k C_k$ con C_k una famiglia numerabile di cubi compatti, per la subadditività numerabile di H_n otteniamo

$$H_n(\phi(S_0)) \leq \sum_k H_n(\phi(S_0 \cap C_k)) = 0$$

quindi $H_n(\phi(S_0)) = 0$. Ora, dall'equivalenza tra la n-esima misura di Husdorff e la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ segue la tesi. $\square$

Ora dimostriamo l'osservazione 1.3.1

Dimostrazione. u è convessa di classe C^2, dunque l'applicazione gradiente di u
$\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva sull'insieme $A = \{x \in \Omega \colon D^2 u(x) > 0\}$. Infatti, dati $x_1, x_2 \in A$, con $\nabla u(x_1) = \nabla u(x_2)$, per convessità abbiamo che

$$u(z) \geq u(x_i) + \nabla u(x_i) \cdot (z - x_i) \quad \forall z \in \Omega, \quad i = 1, 2$$

dunque, ne segue che

$$u(x_1) - u(x_2) = \nabla u(x_1) \cdot (x_1 - x_2) = \nabla u(x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

inoltre, per la formula di Taylor, otteniamo che

$$u(x_1) = u(x_2) + \nabla u(x_2) \cdot (x_1 - x_2) + \int_0^1 t\langle D^2 u(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2), x_1 - x_2\rangle \mathrm{d}t$$

Ora, il valore della funzione integranda è maggiore di 0 $\forall t,\ 0 \leq t \leq 1$, dunque la funzione integranda è uguale a 0 $\forall t,\ 0 \leq t \leq 1$ essendo l'integranda continua. Visto che $x_2 \in A$, allora $x_2 + \bar{t}(x_1 - x_2) \in A$ per $\bar{t}$ sufficientemente piccolo, $\bar{t} > 0$. Ora, $\bar{t}\langle D^2 u(x_2 + \bar{t}(x_1 - x_2))(x_1 - x_2), x_1 - x_2\rangle = 0$, inoltre $D^2 u(x_2 + \bar{t}(x_1 - x_2))$ è definita positiva in $x_2 + \bar{t}(x_1 - x_2) \in A$. Pertanto, $x_1 = x_2$, ossia ∇u è iniettiva su A. Visto che $u \in C^2(\Omega)$, allora $\nabla u \in C^1(\Omega)$. Notiamo inoltre che $\mathscr{I}_{\nabla u}(x) = D^2 u(x) \quad \forall x \in \Omega$. Ora $D^2 u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, dunque l'insieme $\Omega \setminus A$ è l'insieme su cui $\mathscr{I}_{\nabla u}(x)$ ha determinante nullo. Pongo $S_0 = \Omega \setminus A$. Sia $E \subseteq \Omega$ un boreliano, allora abbiamo che $Mu(E) = |\nabla u(E)|$, inoltre

$$\nabla u(E) = \nabla u(E \cap S_0) \cup \nabla u(E \setminus S_0)$$

essendo E, S_0 boreliani, allora $E \cap S_0, E \setminus S_0$ sono boreliani. Dunque, sfruttando il fatto che il gradiente di u è invertibile ed è un diffeomorfismo su $E \setminus S_0$, e ricordando che $\det D^2 u(x) = 0 \quad \forall x \in S_0$, applichiamo il lemma di Sard e la formula del cambiamento di variabile, ottenendo

$$\begin{aligned}
Mu(E) &= Mu(E \cap S_0) + Mu(E \setminus S_0) \\
&= |\nabla u(E \cap S_0)| \ + |\nabla u(E \setminus S_0)| \\
&= 0 + \int_{\nabla u(E \setminus S_0)} \mathrm{d}x \\
&= \int_{E \cap S_0} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{E \setminus S_0} \det D^2 u(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{E \cap S_0} \det D^2 u(x) \mathrm{d}x + \int_{E \setminus S_0} \det D^2 u(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_E \det D^2 u(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$\square$

Capitolo 2

L'equazione di Monge-Ampère

In questo capitolo studieremo l'equazione di Monge-Ampère. Daremo una nozione di soluzioni generalizzate e una nozione di soluzioni di viscosità dell'equazione di Monge-Ampère, e dimostreremo che tutte le soluzioni generalizzate sono soluzioni di viscosità

2.1 Soluzioni Generalizzate

Cominciamo con la definizione di soluzione generalizzata.

Definizione 2.1.1. Sia ν una misura definita sui boreliani di Ω, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto e convesso. La funzione convessa $u \in C(\Omega)$ è una soluzione generalizzata dell'equazione di Monge-Ampère

$$\det(D^2 u) = \nu$$

se la misura di Monge-Ampère Mu associata a u è uguale a ν.

Enunciamo ora un lemma che permette di caratterizzare la nozione di soluzione generalizzata, mostrando che è chiusa dentro limiti uniformi.

Lemma 2.1.1. *Siano $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C(\Omega)$ funzioni convesse tali che $u_k \xrightarrow{k\to+\infty} u$ uniformemente sui compatti di Ω.*
Allora:

1. *Se $K \subseteq \Omega$ è compatto, allora*

$$\limsup_{k\to+\infty} \partial u_k(K) \subseteq \partial u(K)$$

inoltre, per il lemma di Fatou

$$\limsup_{k\to+\infty} |\partial u_k(K)| \leq |\partial u(K)|$$

2. *Se K è compatto e U è aperto e limitato tale che $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$, allora*

$$\partial u(K) \subseteq \liminf_{k\to+\infty} \partial u_k(U)$$

dove l'inclusione vale per quasi ogni punto dell'insieme a sinistra. Inoltre, per il lemma di Fatou

$$|\partial u(K)| \leq \liminf_{k\to+\infty} |\partial u_k(U)|$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo risultato citiamo la dimostrazione del testo di Gutiérrez [8, pgg.6-8]. □

Da questo risultato segue che, data $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione di soluzioni generalizzate di $\det D^2u = \nu$ in Ω e $u_k \xrightarrow{k\to+\infty} u$ uniformemente sui compatti di Ω, allora anche u è una soluzione generalizzata di $\det D^2u = \nu$ in Ω.
Inoltre, si può dimostrare il seguente lemma

Lemma 2.1.2. *Se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sono funzioni convesse in Ω tali che $u_k \xrightarrow{k\to+\infty} u$ uniformemente sui compatti di Ω, allora le misure di Monge-Ampère Mu_k associate a u_k convergono debolmente a Mu, ossia*

$$\int_\Omega f(x)dMu_k(x) \xrightarrow{k\to+\infty} \int_\Omega f(x)dMu(x)$$

$\forall f$ continua a supporto compatto in Ω.

2.2 Soluzioni di viscosità

Ora enunciamo la definizione di soluzione di viscosità.

Definizione 2.2.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, sia $u \in C(\Omega)$ una funzione convessa e sia $f \in C(\Omega)$, $f \geq 0$. La funzione u è una subsoluzione di viscosità (risp. supersoluzione) dell'equazione $\det(D^2u) = f$ in Ω se $\forall \phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, ϕ convessa, $\forall x_0 \in \Omega$ tale che

$$(u-\phi)(x) \underset{(\geq)}{\leq} (u-\phi)(x_0) \quad \forall x \textit{ in un intorno di } x_0$$

vale che

$$\det D^2\phi(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x_0)$$

Se u è contemporaneamente subsoluzione e supersoluzione di viscosità dell'equazione $\det(D^2u) = f$, diciamo che u è soluzione di viscosità dell'equazione $\det(D^2u) = f$.

Osservazione 2.2.1. Nella definizione di subsoluzione di viscosità (o supersoluzione) possiamo restringere la classe delle funzioni test alla classe dei polinomi quadratici strettamente convessi.

Dimostrazione. Sia $\phi \in C^2(\Omega)$ convessa tale che $u-\phi$ ha un massimo locale $x_0 \in \Omega$. Allora

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi(x_0) + \nabla\phi(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0)\cdot(x-x_0), x-x_0\rangle + o(|x-x_0|^2)\\ &= P(x) + o(|x-x_0|^2) \quad \text{per } x \to x_0\end{aligned}$$

Dove $P(x) = \phi(x_0) + \nabla\phi(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\langle D^2\phi(x_0) \cdot (x - x_0), x - x_0\rangle$ è un polinomio quadratico convesso. Ora consideriamo

$$P_\varepsilon(x) = P(x) + \varepsilon(|x - x_0|^2)$$

allora la matrice hessiana di P è

$$D^2 P_\varepsilon(x) = D^2 P(x) + 2\varepsilon I_n$$

Dunque, essendo $D^2 P_\varepsilon(x)$ uguale alla somma di $D^2 P(x)$, che è semidefinita positiva, e di $2\varepsilon I_n$ che è definita positiva, allora è definita positiva, dunque P_ε è strettamente convesso. Abbiamo

$$\phi(x) - P_\varepsilon(x) = o(|x - x_0|^2) - \varepsilon|x - x_0|^2 \quad \text{per } x \to x_0$$

ma $o(|x - x_0|^2) - \varepsilon|x - x_0|^2 \leq 0$ per x sufficientemente vicino a x_0. Visto che $\phi(x_0) - P_\varepsilon(x_0) = 0$, allora $\phi - P_\varepsilon$ ha un massimo locale in x_0. Dunque $u - P_\varepsilon$ ha un massimo locale in x_0. Infatti, $\forall x \in$ un intorno di x_0 opportunamente piccolo

$$\phi(x_0) - P_\varepsilon(x_0) \geq \phi(x) - P_\varepsilon(x)$$
$$u(x_0) - \phi(x_0) \geq u(x) - \phi(x)$$

dunque

$$u(x_0) - P_\varepsilon(x_0) \geq u(x) - P_\varepsilon(x)$$

Ora, per ipotesi, dato Q polinomio strettamente convesso tale che $(u - Q)(x) \leq (u-Q)(x_0) \quad \forall x$ in un opportuno intorno di x_0, allora vale che $\det D^2Q(x_0) \geq f(x_0)$. Nel nostro caso, P_ε è strettamente convesso, dunque vale che

$$\det(D^2\phi(x_0) + 2\varepsilon I_n) = \det(D^2 P_\varepsilon(x_0)) \geq f(x_0)$$

Ora, per $\varepsilon \to 0$, ricaviamo che

$$\det(D^2\phi(x_0)) \geq f(x_0)$$

Abbiamo dunque mostrato che $\forall \phi \in C^2(\Omega)$ convessa, $\forall x_0 \in \Omega$ tali che $u - \phi$ ha un massimo locale in x_0, allora $\det(D^2\phi(x_0)) \geq f(x_0)$, ossia u è una subsoluzione di viscosità dell'equazione $\det D^2 u = f$.
Per il caso delle supersoluzioni di viscosità il procedimento è analogo, citiamo il testo di Gutiérrez [8, pgg. 8-10]. □

Infine, enunciamo il teorema che mostra la relazione tra soluzioni di viscosità e soluzioni generalizzate.

Teorema 2.2.1. *Sia u una soluzione generalizzata di $Mu = f$ con f continua. Allora u è una soluzione di viscosità*

Dimostrazione. Sia $\phi \in C^2(\Omega)$ una funzione strettamente convessa tale che $u - \phi$ abbia un massimo locale in $x_0 \in \Omega$. Possiamo assumere $u(x_0) = \phi(x_0)$ (eventualmente modificando ϕ tramite l'aggiunta di una costante). Possiamo anche assumere che $u(x) < \phi(x) \quad \forall 0 < |x - x_0| \leq \delta$, per δ opportunamente piccolo (eventualmente aggiungendo $r|x - x_0|^2$ a ϕ per r sufficientemente piccolo). Sia

$$m = \min_{\frac{\delta}{2} \leq |x - x_0| \leq \delta} \{\phi(x) - u(x)\}$$

Allora $m > 0$. Sia $0 < \varepsilon < m$, considero l'insieme

$$S_\varepsilon = \{x \in B_\delta(x_0) \colon u(x) + \varepsilon > \phi(x)\}$$

se $\frac{\delta}{2} \leq |x - x_0| \leq \delta$, allora $\phi(x) - u(x) \geq m$, dunque $x \notin S_\varepsilon$. Dunque $S_\varepsilon \subseteq B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$. Sia $z \in \partial S_\varepsilon$. Allora $\exists\, x_n \in S_\varepsilon$, $\exists\, \overline{x}_n \notin S_\varepsilon$ tali che

$$x_n \xrightarrow{n \to +\infty} z \quad e \quad \overline{x}_n \xrightarrow{n \to +\infty} z$$

Allora $u + \varepsilon = \phi$ su $\partial\Omega$. Visto che entrambe le funzioni sono convesse in S_ε, per il lemma 3.1.1 che dimostreremo in seguito

$$\partial(u + \varepsilon)(S_\varepsilon) \subseteq \partial\phi(S_\varepsilon)$$

Visto che u è soluzione generalizzata, abbiamo inoltre

$$\int_{S_\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = Mu(S_\varepsilon)$$

Inoltre notiamo che $\partial u(S_\varepsilon) = \partial(u + \varepsilon)(S_\varepsilon)$ essendo la mappa normale di u uguale alla mappa normale di $u + c \quad \forall c$ costante. Infine, sappiamo che

$$|\partial\phi(S_\varepsilon)| = \int_{S_\varepsilon} \det D^2\phi(x)\mathrm{d}x$$

perché ϕ è di classe C^2. Dunque, mettendo insieme questi risultati otteniamo

$$\int_{S_\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = |\partial(u + \varepsilon)(S_\varepsilon)| \leq |\partial\phi(S_\varepsilon)| = \int_{S_\varepsilon} \det D^2\phi(x)\mathrm{d}x$$

Per la continuità di f, si ricava che

$$f(x_0) \leq D^2\phi(x_0)$$

Ossia u è una subsoluzione di viscosità. Un argomento simile mostra che u è una supersoluzione di viscosità. [8, pg. 10] $\square$

Capitolo 3

Principi di massimo

In questo capitolo utilizzeremo la nozione di mappa normale per enunciare due principi di massimo e un principio di confronto che sono strumenti di analisi molto utili allo studio di equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche a coefficienti misurabili.

3.1 Principio del massimo di Aleksandrov

Cominciamo enunciando un lemma

Lemma 3.1.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto e limitato, siano $u, v \in C(\overline{\Omega})$. Se $u = v$ su $\partial\Omega$ e $v \geq u$, allora*

$$\partial v(\Omega) \subseteq \partial u(\Omega)$$

Dimostrazione. Sia $p \in \partial v(\Omega)$. Allora $\exists x_0 \in \Omega$ tale che

$$v(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in \Omega$$

Sia

$$a = \sup_{x \in \Omega}\{v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - u(x)\}$$

visto che $v(x_0) \geq u(x_0)$, allora $a \geq 0$. Mostriamo che $v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - a$ è un iperpiano di supporto per u in un qualche punto di Ω. Visto che Ω è limitato, $\exists x_1 \in \overline{\Omega}$ tale che

$$a = v(x_0) + p \cdot (x_1 - x_0) - u(x_1)$$

dunque

$$u(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) - a = u(x_1) + p \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in \Omega$$

pertanto otteniamo

$$v(x_1) \geq v(x_0) + p \cdot (x_1 - x_0) = u(x_1) + a$$

Dunque, se $a > 0$, allora $x_1 \notin \partial\Omega$, dunque il teorema è valido. Se $a = 0$, allora

$$u(x) \geq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) \geq u(x_0) + p \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in \Omega$$

dunque $u(x_0) + p \cdot (x - x_0)$ è un iperpiano di supporto per u in x_0. $\square$

Ora enunciamo il principio di massimo di Aleksandrov

Teorema 3.1.2. ***Principio del massimo di Aleksandrov***
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω *aperto, limitato, convesso e di diametro* Δ, *sia* $u \in C(\overline{\Omega})$ *una funzione convessa con* $u = 0$ *su* $\partial\Omega$. *Allora*

$$|u(x_0)|^n \leq C_n \Delta^{n-1} dist(x_0, \partial\Omega) |\partial u(\Omega)|$$

$\forall x_0 \in \Omega$ *con* C_n *costante dipendente solo da* n.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \Omega$, sia v la funzione convessa avente come grafico un cono, con la punta rivolta verso il basso, di vertice $(x_0, u(x_0))$ e base Ω, con $v = 0$ su $\partial\Omega$. Visto che u è convessa, allora $v \geq u$ in Ω. Per il lemma 3.1.1, $\partial v(\Omega) \subseteq \partial u(\Omega)$. Ora useremo una opportuna stima dal basso della misura di $\partial v(\Omega)$ per mostrare il teorema. Notiamo che $\forall x_1 \in \Omega\ \forall p \in \partial v(x_1)$, l'iperpiano di supporto $v(x_1)+p\cdot(x-x_1)$ è un iperpiano di supporto per v in x_1, ma anche in x_0, essendo il grafico di v un cono con la punta rivolta verso il basso di vertice $(x_0, u(x_0))$. Dunque questo mostra che $\partial v(\Omega) = \partial v(x_0)$. Ma la mappa normale di una funzione calcolata su un punto è un insieme convesso, dunque $\partial v(\Omega)$ è convesso.
Ora, mostriamo che $\exists p_0 \in \partial v(\Omega)$ tale che

$$|p_0| = \frac{-u(x_0)}{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)}$$

Infatti, consideriamo $x_1 \in \partial\Omega$ tale che $|x_1 - x_0| = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Essendo Ω convesso, allora ammette un iperpiano di supporto H in $\mathbb{R}^n$ per Ω in x_1. Allora, si può dimostrare che l'iperpiano in $\mathbb{R}^{n+1}$ generato da H e dal punto $(x_0, u(x_0))$ è un iperpiano di supporto per v con inclinazione p_0 tale che

$$|p_0| = \frac{-u(x_0)}{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)}$$

Ora, risulta che la palla B in $\mathbb{R}^n$ di centro l'origine e raggio $\frac{-u(x_0)}{\Delta}$ è contenuta in $\partial v(\Omega)$, e $|p_0| \geq \frac{-u(x_0)}{\Delta}$. Dunque l'inviluppo convesso di B e p_0 è contenuto in $\partial v(\Omega)$, e si può mostrare che ha misura

$$K_n \left(\frac{-u(x_0)}{\Delta} \right)^{n-1} |p_0|$$

con $K_n > 0$ costante dipendente solo da n. Allora abbiamo che

$$K_n \left(\frac{-u(x_0)}{\Delta} \right)^{n-1} |p_0| \leq |\partial v(\Omega)| \leq |\partial u(\Omega)|$$

$$K_n \left(\frac{-u(x_0)}{\Delta} \right)^{n-1} \frac{-u(x_0)}{\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)} \leq |\partial u(\Omega)|$$

$$|u(x_0)|^n \leq \frac{1}{K_n} \Delta^{n-1} \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega) |\partial u(\Omega)|$$

Ponendo $C_n = \frac{1}{K_n}$ si ottiene la tesi. □

3.2 Principio del massimo di Aleksandrov-Bakelman-Pucci

Ora enunciamo alcune definizioni che serviranno per formulare il principio di massimo di Aleksandrov-Bakelman-Pucci.

Definizione 3.2.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, sia $u \in C(\Omega)$. Considero le classi di funzioni

$$\mathscr{F}(u) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \colon v(x) \le u(x) \quad \forall x \in \Omega,\ v \textit{ convessa in } \Omega\}$$

$$\mathscr{G}(u) = \{w : \Omega \to \mathbb{R} \colon w(x) \ge u(x) \quad \forall x \in \Omega,\ w \textit{ concava in } \Omega\}$$

Siano $u_* : \Omega \to \mathbb{R}$, $u^* : \Omega \to \mathbb{R}$ definite da

$$u_*(x) = \sup_{v \in \mathscr{F}(u)} v(x) \qquad u^*(x) = \inf_{w \in \mathscr{G}(u)} w(x)$$

Risulta che u_* è convessa, u^* è concava (in Ω). Chiamiamo queste funzioni rispettivamente l'inviluppo convesso di u in Ω e l'inviluppo concavo di u in Ω.

Osservazione 3.2.1. Nelle notazioni precedenti, risulta che $u_*(x) \le u(x) \le u^*(x) \quad \forall x \in \Omega$. Inoltre, $\mathscr{F}(-u) = \mathscr{G}(u)$. Dunque $-(u^*)(x) = (-u)_*(x) \quad \forall x \in \Omega$. Consideriamo l'insieme dei punti di contatto

$$C_*(u) = \{x \in \Omega \colon u_*(x) = u(x)\}$$

$$C^*(u) = \{x \in \Omega \colon u^*(x) = u(x)\}$$

Allora $C_*(u) = C^*(-u)$.
Visto che u_* è convessa, u_* ha un iperpiano di supporto in $x_0 \quad \forall x_0 \in C_*(u)$. Dato che $u_*(x_0) = u(x_0)$, allora tale iperpiano è un iperpiano di supporto per u in x_0. Dunque

$$\partial u_*(x_0) \subseteq \partial u(x_0) \quad \forall x_0 \in C_*(u)$$

$$\partial u_*(C_*(u)) \subseteq \partial u(C_*(u))$$

Inoltre abbiamo che, dato $x_0 \notin C_*(u)$, allora $\partial u(x_0) = \emptyset$. Consideriamo ora $\Omega = C_*(u) \cup (\Omega \setminus C_*(u))$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\partial u(\Omega) &= \partial u(C_*(u) \cup (\Omega \setminus C_*(u))) \\ &= \partial u(C_*(u)) \cup \partial u(\Omega \setminus C_*(u)) \\ &= \partial u(C_*(u))\end{aligned}$$

Per la definizione di u_* risulta che

$$\partial u(C_*(u)) \subseteq \partial u_*(C_*(u))$$

Dunque, mettendo insieme i risultati precedenti, otteniamo

$$\partial u(\Omega) = \partial u(C_*(u)) = \partial u_*(C_*(u))$$

Sia

$$\Phi_u(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \colon u(x) \le u(x_0) + p \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in \Omega\}$$

Notiamo che $\Phi_{-u}(x_0) = -\partial u(x_0)$.

Lemma 3.2.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, convesso e limitato. Sia $u \in C(\overline{\Omega})$ tale che $u(x) \leq 0$ su $\partial\Omega$, e sia $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) > 0$. Allora*

$$\Omega(x_0, u(x_0)) \subseteq \Phi_{u^*}(C^*(u))$$

con $\Omega(x,t) = \{y \colon y \cdot (\xi - x) + t > 0 \quad \forall \xi \in \overline{\Omega}\}$. Inoltre, vale la stima

$$|\Omega(x_0), t)| \geq \frac{\omega_n t^n}{(diam(\Omega))^n}$$

con

$$\omega_n = \int_{B_1(0) \in \mathbb{R}^n} dx$$

Dimostrazione. Citiamo la dimostrazione nel testo di Gutiérrez [8, pg. 14-15] □

Enunciamo ora il principio del massimo di Aleksandrov-Bakelman-Pucci.

Teorema 3.2.2. ***Principio del massimo di Aleksandrov-Bakelman-Pucci*** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto, convesso e limitato. Sia $u \in C(\overline{\Omega})$, $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Allora*

$$\max_{x \in \Omega} u(x) \leq \omega_n^{-\frac{1}{n}} \; diam(\Omega) \; |\partial((-u)_*)(C_*(-u))|^{\frac{1}{n}}$$

Se inoltre $u \in C^2(\Omega)$ (senza alcuna ipotesi sul segno di u su $\partial\Omega$), allora

$$\max_{x \in \Omega} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x) + \omega_n^{-\frac{1}{n}} \; diam(\Omega) \left(\int_{C_*(-u)} |\det D^2 u(x)| dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza segue immediatamente mettendo insieme i risultati precedenti. Rimane da provare l'ultima disuguaglianza. Possiamo considerare la funzione ottenuta sottraendo a u la costante $\max_{\partial\Omega} u(x)$, dunque possiamo assumere che $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Dai risultati precedenti otteniamo che

$$\partial((-u)_*)(C_*(-u)) = -\partial(-u)(C_*(-u))$$

Se $u \in C^2$ e $z \in C_*(-u)$, allora $D^2(-u)(z) \geq 0$. Pertanto, per la formula del cambiamento di variabile, otteniamo

$$|\partial(-u)(C_*(-u))| \leq \int_{C_*(-u)} |\det D^2 u(x)| \mathrm{d}x$$

da cui segue la tesi. □

3.3 Principio di confronto

Enunciamo ora un principio di confronto per funzioni convesse aventi le rispettive misure di Monge-Ampère associate uguali sui boreliani del dominio.

Teorema 3.3.1. ***Principio di confronto*** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto e limitato, siano $u, v \in C(\overline{\Omega})$ delle funzioni convesse tali che*

$$|\partial u(E)| \leq |\partial v(E)| \quad \forall \text{ boreliano } E \subseteq \Omega$$

Allora

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} (u(x) - v(x)) = \min_{x \in \partial\Omega} (u(x) - v(x))$$

Dimostrazione. Il teorema si dimostra per assurdo. Sia

$$a = \min_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x) - v(x)\} \quad b = \min_{x \in \partial\Omega} \{u(x) - v(x)\}$$

Vale che $a \leq b$. Supponiamo per assurdo che $a < b$. Ora $\exists x_0 \in \Omega$ tale che $a = u(x_0) - v(x_0)$. Sia $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\delta(\operatorname{diam}(\Omega))^2 < \frac{b-a}{2}$, e sia

$$w(x) = v(x) + \delta|x - x_0|^2 + \frac{b-a}{2}$$

Considero l'insieme $G = \{x \in \overline{\Omega} \colon u(x) < w(x)\}$. Abbiamo che $x_0 \in G$. Inoltre, $G \cap \partial\Omega = \emptyset$. Infatti, se $x \in G \cap \partial\Omega$, allora $u(x) - v(x) \geq b$, dunque

$$\begin{aligned} w(x) &\leq u(x) + \delta|x - x_0|^2 - \frac{b-a}{2} \\ &\leq u(x) + \delta(\operatorname{diam}(\Omega))^2 - \frac{b-a}{2} \\ &\leq u(x) \end{aligned}$$

Dunque otteniamo che $w(x) < u(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$. Ma allora ne segue che $\partial G = \{x \in \Omega \colon u(x) = w(x)\}$. Per il lemma 3.1.1, otteniamo che $\partial w(G) \subseteq \partial u(G)$. Inoltre $\partial w = \partial(v + \delta|x - x_0|^2)$, dunque otteniamo che

$$|\partial(v + \delta|x - x_0|^2)(G)| \geq |\partial(\delta|x - x_0|^2)(G)|$$

Infatti, per provare questa disuguaglianza, notiamo che, date A, B matrici simmetriche semidefinite positive, allora

$$\det(A + B) \geq \det A + \det B$$

Dunque se v è di classe C^2, allora la disuguaglianza è dimostrata. Per il caso in cui v non è di classe C^2, consigliamo di consultare [8, pgg 16-17]. Dunque otteniamo che

$$|\partial u(G)| \geq |\partial w(G)| \geq |\partial v(G)| + |\partial(\delta|x - x_0|^2)(G)| = |\partial v(G)| + (2\delta)^n |G|$$

che contraddice l'ipotesi che

$$|\partial u(E)| \leq |\partial v(E)| \quad \forall \textit{ boreliano } E \subseteq \Omega$$

Dunque $a = b$, ossia

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \{u(x) - v(x)\} = \min_{x \in \partial\Omega} \{u(x) - v(x)\}$$

□

Appendice

Definizione 3.3.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω convesso. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice convessa (risp. concava) se, $\forall x, y \in \Omega$

$$f(t\,x + (1-t)y) \leq t\,f(x) + (1-t)f(y) \quad \forall 0 < t < 1$$
$$(\geq)$$

Richiamiamo inoltre alcuni risultati sulle funzioni convesse

Teorema 3.3.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω aperto convesso. Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ convesse. Allora*

1. $\max(f, g)$ *è convessa.*
2. $h = f + g$ *è convessa.*
3. $-f$ *è concava.*
4. *Se f è di classe C^1, allora $f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$ è un iperpiano di supporto per f in $(x_0, f(x_0))$*
5. *Se f è di classe C^2, allora $D^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$*
6. *Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona crescente. Allora $h(f(x))$ è convessa.*
7. *Un risultato di Busemann-Feller-Aleksandrov mostra che f ammette derivate seconde quasi dappertutto.*

Per la dimostrazione dei punti 1., 2., 3., 4., 5., 6. si consiglia di consultare un generico testo di analisi. Per la dimostrazione di 7. si consiglia di consultare [7, pg. 242], [14, pgg. 31-32].

Bibliografia

[1] A. D. Aleksandrov. Certain estimates for the Dirichlet problem. *Soviet Math. Dokl.*,1:115-1154, 1961.

[2] A. D. Aleksandrov. Majorization of solutions of second-order linear equations. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 2(68):120-143, 1968.

[3] I. J. Bakelman. On the theory of quasilinear elliptic equations. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 2:179-186, 1961.

[4] I. J. Bakelman. *Convex analysis and nonlinear geometric elliptic equations.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[5] L. A. Caffarelli. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear elliptic equations. *Ann. of Math.*, 131:135-150, 1990.

[6] M. G. Crandall, H.Ishii, e P-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull., Amer. Math. Soc. (N.S.)*,27(1):1-67, 1992.

[7] L. C. Evans e R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, Boca Raton, 1992.

[8] Cristian E. Gutiérrez. *The Monge-Ampère Equation.* Birkhäuser Boston, 2001.

[9] Ermanno Lanconelli. *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda Parte.* Pitagora Editrice Bologna, 1997.

[10] A. V. Pogorelov. *Monge-Ampère equations of elliptic type.* P.Noorhoff, Ltd, Groningen, 1964.

[11] A. V. Pogorelov. *On the regularity of generalized solutions of the equation* $\det(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}) = \phi(x^1, ..., x^n) > 0$. *Soviet Math, Dokl.,* 12(5):1436-1440, 1971.

[12] C. Pucci. Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche. *Ann. Mat. Pura Appl.*,4(74): 15-30, 1966.

[13] J. Rauch e B. A. Taylor. The Dirichlet problem for the multidimensional Monge-Ampère equation. *Rocky Mountain J.Math.*, 7(2):345-364, 1977.

[14] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* Volume 44 di *Encyclopedia of Math. and its Appl.* Cambridge U.Press, Cambridge, 1993.