ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

COMPATTEZZA DEBOLE IN SPAZI DI BANACH RIFLESSIVI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Giovanna Citti

Presentata da:
Martina Giacobbe

II Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è dare la nozione di topologia debole in spazi di Banach e fornire una caratterizzazione della compattezza debole in particolare per spazi riflessivi e separabili.

L'elaborato è suddiviso in tre capitoli.

Nel primo capitolo si descrive come costruire la topologia meno fine su uno spazio di Banach E che renda continue una famiglia assegnata di applicazioni $(\varphi_i)_{i\in I}$. Questa costruzione si applica in particolare alla famiglia dei funzionali lineari limitati su E e si ottiene la topologia debole $\sigma(E, E^*)$. Ne descriviamo gli intorni e mostriamo che in dimensione finita la topologia forte e la topologia debole coincidono, mentre in dimensione infinita ciò è falso.

Nel secondo capitolo si osserva che esiste un operatore canonico $J : E \longrightarrow E^{**}$ e si costruisce su E^* la topologia debole $\sigma(E^*, E)$, ovvero la topologia meno fine che rende continue le applicazioni di E^{**} del tipo $J(x)$, $x \in E$. Infine si mostra che la sfera unitaria in E^* è compatta in $\sigma(E^*, E)$ e si porta un esempio di costruzione di uno spazio di Banach nel quale un insieme compatto ha una successione limitata che non ammette alcuna sottosuccessione convergente.

Nell'ultimo capitolo vediamo che in spazi di Banach separabili e riflessivi la compattezza è equivalente alla compattezza sequenziale. Il capitolo è diviso in due sezioni principali: la prima riguardante gli spazi riflessivi, la seconda gli spazi separabili. Si dà inizialmente una caratterizzazione degli spazi riflessivi a partire dalla compattezza della sfera unitaria in $\sigma(E^*, E)$ e si danno diverse caratterizzazioni della riflessività di E ed E^*. Nella sezione seguente vediamo come le condizioni di separabiltà di E^* e di E sono necessarie e sufficienti affinché le topologie $\sigma(E, E^*)$ e $\sigma(E^*, E)$ siano metrizzabili sulle sfere unitarie. Queste condizioni permettono di provare il teorema centrale del capitolo, che garantisce che in uno spazio di Banach separabile e riflessivo è possibile estrarre da ogni successione limitata in E una sottosuccessione convergente in $\sigma(E, E^*)$. Si chiude mostrando che la condizione di uniforme convessità implica la riflessività.

Indice

Capitolo 1

La topologia debole

1.1 La topologia meno fine associata ad una famiglia di funzioni

Sia X un insieme, $(Y_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici. Sia poi $(\varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di applicazioni da X in Y_i, cioè

$$\varphi_i : X \longrightarrow Y_i \quad \forall i \in I. \tag{1.1}$$

Vogliamo costruire su X una topologia τ che sia la più "conveniente" possibile (cioè quella costituita dal minor numero di aperti) e che renda continue le φ_i $\forall i \in I$. Mostreremo in seguito che c'è un unico modo per trovare la topologia meno fine che renda continue un certo numero di applicazioni; denominiamo questa come la topologia più debole associata alla famiglia $(\varphi_i)_{i\in I}$.
Consideriamo ora $\omega_i \subset Y_i$ aperto, ovviamente dovremo richiedere che $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ sia un aperto di X. Al variare di ω_i nella famiglia degli aperti di Y_i e al variare di i in I otteniamo una famiglia di sottinsiemi di X che saranno necessariamente aperti per la topologia τ: indichiamola con $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Questa famiglia però non è ancora una topologia, poiché non è necessariamente stabile per $\bigcap_{finita}$ e per $\bigcup_{arbitraria}$. Cerchiamo quindi una famiglia τ di sottoinsiemi di X con queste proprietà. Anzitutto consideriamo le intersezioni finite degli

insiemi $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; in questo modo otteniamo

$$\phi = \Big\{ \bigcap_{finita} U_\lambda : \ U_\lambda = \varphi_i^{-1}(\omega_i), \ \omega_i \subseteq Y_i \text{ aperti}\Big\} \tag{1.2}$$

che contiene $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ed è stabile per $\bigcap_{finita}$. A questo punto prendiamo una nuova famiglia, ottenuta dalle unioni arbitrarie degli elementi di ϕ,

$$\tau = \Big\{ \bigcup_{arbitraria} H_i : \ H_i \in \phi\Big\}. \tag{1.3}$$

È chiaro che τ è stabile per $\bigcup_{arbitraria}$ ma non è banale che sia stabile per $\bigcap_{finita}$: mostriamolo con il seguente lemma.

Lemma 1.1.1. *Sia X un insieme, $(Y_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $(\varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di applicazioni definita come in* (1.1). *Allora la famiglia τ definita come in* (1.3) *è stabile per $\bigcap_{finita}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che se $K_1 \in \tau$, $K_2 \in \tau$ allora $K_1 \cap K_2 \in \tau$. Per definizione

$$K_1 = \bigcup_{i\in I_1} \left(\bigcap_{j\in J_1} \varphi_i^{-1}(\omega_{ij}) \right),$$

$$K_2 = \bigcup_{i\in I_2} \left(\bigcap_{j\in J_2} \varphi_i^{-1}(\omega_{ij}) \right),$$

con $\omega_{ij} \subset Y_i$ aperto, I_1, I_2 insiemi qualsiarsi e J_1, J_2 insiemi finiti di indici. Abbiamo che

$$K_1 \cap K_2 = \bigcup_{i\in I_1} \left(\bigcap_{j\in J_1} \left(\varphi_i^{-1}(\omega_{ij})\right) \right) \cap K_2.$$

Usando le proprietà distributive dell'insiemistica otteniamo

$$K_1 \cap K_2 = \bigcup_{i\in I_1} \left(\bigcap_{j\in J_1} \varphi_i^{-1}(\omega_{ij}) \cap K_2 \right).$$

Riapplicando nuovamente

$$K_1 \cap K_2 = \bigcup_{i\in I_1} \bigcup_{i\in I_2} \left(\left(\bigcap_{j\in J_1} \varphi_i^{-1}(\omega_{ij}) \right) \cap \left(\bigcap_{j\in J_2} \varphi_i^{-1}(\omega_{ij}) \right) \right).$$

Si puó concludere che $K_1 \cap K_2 \in \tau$. $\square$

Ricordiamo il concetto di base di intorni.

Definizione 1.1. Dato X spazio topologico, una base di intorni di $x \in X$ è una famiglia di intorni per x tale che ogni altro intorno del punto contiene un elemento della base.

Osservazione 1. Non è possibile invertire l'ordine delle operazioni nella costruzione di τ poiché non otterremmo la stabilità per $\bigcup_{arbitraria}$. Quindi abbiamo ottenuto gli aperti della topologia τ considerando prima $\bigcap_{finita}$ di insiemi della forma $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ e poi $\bigcup_{arbitraria}$ di questi; inoltre questa costruzione è unica per quanto detto. Segue che $\forall x \in X$, otteniamo una base di intorni di x per la topologia τ considerando insiemi della forma

$$\mathcal{F} = \Big\{ \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i) : V_i \text{ intorno di } \varphi_i(x) \text{ in } Y_i \Big\}.$$

Proposizione 1.1.2. *Sia X un insieme, $(Y_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $(\varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di applicazioni definita come in* (1.1)*. Sia poi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Si ha che*

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x) \quad \forall i \in I.$$

Dimostrazione. Se $x_n \to x$ allora $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x) \quad \forall i \in I$ poichè le φ_i sono continue.
Viceversa sia U intorno di x. Per l'osservazione 1 esiste $J \subset I$ finito tale che $U \supseteq \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$, dove V_i intorno di $\varphi_i(x)$.
Poiché $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ per ipotesi, allora

$$\forall i \in J \; \exists N_i \in \mathbb{N} : \; \varphi_i(x_n) \in V_i \quad \forall n \geq N_i.$$

Posto $N = max_{i\in J} N_i$, abbiamo che $x_n \in U \;\; \forall n \geq N$. □

Proposizione 1.1.3. *Sia X un insieme, $(Y_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici e $(\varphi_i)_{i\in I}$ una famiglia di applicazioni definita come in* (1.1)*. Sia poi Z uno spazio topologico e sia $\psi : Z \longrightarrow X$.*
ψ è continua $\Leftrightarrow$ $\varphi_i \circ \psi : Z \longrightarrow Y_i$ è continua $\quad \forall i \in I$.

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è immediata.
Viceversa dato U aperto di X, proviamo che $\psi^{-1}(U)$ è un aperto in Z. Grazie all'osservazione 1 sappiamo che U è della forma $\bigcup_{arbitraria}\bigcap_{finita}\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ dove ω_i aperto di Y_i. Si ha

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{arbitraria}\bigcap_{finita}\psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(\omega_i)) = \bigcup_{arbitraria}\bigcap_{finita}(\varphi_i\circ\psi)^{-1}(\omega_i).$$

Abbiamo che $\psi^{-1}(U)$ è aperto di Z poichè $\varphi_i\circ\psi$ è continua. $\square$

1.2 La topologia $\sigma(E, E^*)$

Sia E spazio di Banach, consideriamo

$$E^* = \{f \mid f : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lineari e continue}\}.$$

Definiamo su E una topologia usando quanto visto nella sezione 1.1.

Definizione 1.2. La topologia debole $\sigma(E, E^*)$ su E è la topologia meno fine che rende continue tutte le applicazioni di E^*.

Osservazione 2. Ogni $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in E^*$, è continua per la topologia forte (ovvero la topologia indotta da $\|x\|_E$). Si ha quindi che la topologia debole è meno fine della topologia forte. Vedremo in seguito che le due topologie coincidono se E ha dimensione finita, mentre in dimensione infinita la topologia debole sarà sempre strettamente meno fine.

Vediamo ora qualche semplice proprietà di questa topologia.

Proposizione 1.2.1. *La topologia debole è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$. Mostriamo che esistono O_1 e O_2 intorni aperti per la topologia debole $\sigma(E, E^*)$ tali che $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Per la seconda forma geometrica del teorema di Hahn Banach esiste un iperpiano di equazione $f(x) = \alpha$ che separa i punti x_1 e x_2.
In altri termini, $\exists f \in E^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\langle f, x_1\rangle < \alpha < \langle f, x_2\rangle.$$

Definiamo

$$O_1 = \{x \in E : \langle f, x\rangle < \alpha\} = f^{-1}(-\infty, \alpha),$$

$$O_2 = \{x \in E : \langle f, x\rangle > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty).$$

Per costruzione O_1 e O_2 sono aperti per $\sigma(E, E^*)$; inoltre $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. □

Proposizione 1.2.2. *Sia $x_0 \in E$, $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{R}$ e $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset E^*$. Allora l'insieme*

$$V = V(x_0, f_1, \ldots, f_k, \epsilon) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k\}$$

è un intorno di x_0 per $\sigma(E, E^*)$.
Inoltre

$$\mathcal{F}(x_0) = \{V(x_0, f_1, \ldots, f_k, \epsilon) : \epsilon > 0,\ k \in \mathbb{N},\ f_1, \ldots f_k \in E^*\}$$

è una base di intorni di x_0 per $\sigma(E, E^*)$.

Dimostrazione. Si ha che

$$x \in V \iff |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Usando la linearità delle f_i si ottiene che

$$|\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Pertanto

$$f_i(x_0) - \epsilon < f_i(x) < f_i(x_0) + \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Ne segue che

$$f_i(x) \in \left]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon\right[\quad \forall i = 1, \ldots, k$$

e

$$x \in f_i^{-1}\big(\left]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon\right[\big) \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Infine

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}\big(\left]f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon\right[\big).$$

Sappiamo che $]f_i(x_0)-\epsilon, f_i(x_0)+\epsilon[$ è un intorno aperto di $f_i(x_0)$ in $\mathbb{R}$, ogni f_i è continua per definizione di $\sigma(E, E^*)$, quindi $f_i^{-1}\big(\,]f_i(x_0)-\epsilon, f_i(x_0)+\epsilon[\,\big)$ è un aperto che contiene x_0. Inoltre per definizione di topologia l'intersezione finita di aperti è un aperto. Quindi V è un aperto per la topologia debole $\sigma(E, E^*)$ che contiene x_0.

Mostriamo ora che $\mathcal{F}(x_0)$ è una base. Sia U un intorno di x_0 per la topologia debole $\sigma(E, E^*)$. Per quanto detto nell'osservazione 1 esiste un aperto W incluso in U contentente x_0 e della forma $W = \bigcap_{finita} f_i^{-1}(\omega_i)$, dove ω_i è un intorno di $f_i(x_0)$. Inoltre è possibile trovare un $\epsilon > 0$ tale che $(f_i(x_0) - \epsilon, f_i(x_0) + \epsilon) \subset \omega_i$ $\forall i$. Si ha quindi che $x_0 \in V \subset W \subset U$, dove V è un elemento della base. □

Notazione 1. Se la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x nella topologia debole $\sigma(E, E^*)$ scriveremo $x_n \rightharpoonup x$.

Osservazione 3. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in E. Diciamo che $x_n \rightharpoonup x$ in $\sigma(E, E^*)$

$\Leftrightarrow$ $\forall$ intorno U di x in $\sigma(E, E^*)$ $\exists \overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq \overline{n}\ \ x_n \in U$.

$\Leftrightarrow$ Dato U intorno di x, $\forall \epsilon > 0, \forall f_1, \ldots, f_k \in E^*$ $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq \overline{n}$

$x_n \in f_i^{-1}\big(\,]f_i(x) - \epsilon, f_i(x) + \epsilon[\,\big) \quad \forall i = 1, \ldots, k$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \forall f_1, \ldots, f_k \in E^*\ \ f_i(x_n) \in\,]f_i(x) - \epsilon, f_i(x) + \epsilon[\quad \forall i = 1, \ldots, k$.

$\Leftrightarrow$ $\forall f \in E^*\ f(x_n) \to f(x)$, cioè $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposizione 1.2.3. *$\forall x \in E$ si ha*

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|T\|<1\\ T\in E^*}} \langle T, x\rangle.$$

Dimostrazione. $|\langle T, x\rangle| = |T(x)| \leq \|T\|\|x\| \leq \|x\| \qquad \forall T \in E^*,\ \|T\| \leq 1$. Quindi passando al sup si mantiene la disuguaglianza

$$\sup_{\substack{\|T\|<1\\ T\in E^*}} |\langle T, x\rangle| \leq \|x\|.$$

Inoltre

$$\sup_{\substack{\|T\|<1\\ T\in E^*}} |\langle T, x\rangle| \geq \langle T, x\rangle \qquad \forall T \in E^*,\ \|T\| \leq 1.$$

Applicando la trasformazione $T = \frac{T_0}{\|x\|}$, dove $T_0 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare e tale che $\|T_0\| = \|x\|$, $T_0(x) = \|x\|^2$, otteniamo

$$\langle T, x \rangle = \frac{\langle T_0, x \rangle}{\|x\|} = \|x\| \text{ e } \|T\| = \left\| \frac{T_0}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Infine

$$\sup_{\substack{\|T\|<1 \\ T \in E^*}} |\langle T, x \rangle| \geq \|x\|.$$

□

Proposizione 1.2.4. *$\forall x \in E$ il funzionale $T_x : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da*

$$T_x(f) = \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E^*$$

è lineare, limitato e $\|T_x\| = \|x\|$.

Dimostrazione. Mostriamo la linearità

$$T_x(\lambda f + \mu g) = \langle \lambda f + \mu g, x \rangle = \lambda \langle f, x \rangle + \mu \langle g, x \rangle = \lambda T_x(f) + \mu T_x(g).$$

Infine la limitatezza

$$\sup_{\substack{\|T\|<1 \\ T \in E^*}} |T_x(f)| = \sup_{\substack{\|T\|<1 \\ T \in E^*}} |\langle f, x \rangle = \|x\|.$$

Si può concludere infine che $\|T_x\| = \|x\|$. □

Proposizione 1.2.5. *Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in E, allora valgono i seguenti fatti:*

(i) Se $x_n \to x$ in norma, allora $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(E, E^*)$.

(ii) Se $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(E, E^*)$, allora $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e $\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|$.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(E, E^*)$ e $f_n \to f$ in norma, allora $\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle \to 0$.

Dimostrazione. (i) Per l'osservazione 3 è sufficiente mostrare che

$$\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle \to 0 \quad \forall f \in E^*.$$

Pertanto

$$|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| = |\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f_n\| \|x_n - x\| \to 0$$

poichè f è limitata e $\|x_n - x\| \to 0$ per ipotesi.

(ii) Dall'osservazione 3 sappiamo che

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } \sigma(E, E^*) \ \Rightarrow \ \langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle \to 0 \quad \forall f \in E^*.$$

Inoltre grazie alla proposizione 1.2.4 $\exists T_{x_n} : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata, $\|T_{x_n}\| = \|x_n\|$ e tale che

$$T_{x_n}(f) = \langle f, x_n \rangle.$$

Allora $|T_{x_n}(f)| = |\langle f, x_n \rangle|$ e la successione $(\langle f, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata, cioè $\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_{x_n}(f)| < +\infty \ \ \forall f \in E^*$.
Per il teorema di uniforme limitatezza si ha che $\sup_{n \in \mathbb{N}} ||T_{x_n}|| < +\infty$.
Da $\|T_{x_n}\| = \|x_n\|$ possiamo dedurre che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$, cioè $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata.
Inoltre

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \|x_n\| \leq \|x_n\| \quad \forall f \in E^*, \ \ \|f\| \leq 1.$$

Passando al $\liminf$ per $n \to \infty$ viene

$$|\langle f, x \rangle| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

A questo punto passando al sup e usando la proposizione 1.2.3 possiamo concludere che

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

(iii) Si ha che

$$\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle = \langle f_n - f, x \rangle + \langle f_n, x_n - x \rangle.$$

Risulta
$$\langle f, x_n - x \rangle \to 0$$
per l'osservazione 3 e
$$|\langle f_n - f, x \rangle| \leq \|f_n - f\| \|x_n\| \to 0$$
poiché x_n è limitata e $\|f_n - f\| \to 0$ per ipotesi.

□

Proposizione 1.2.6. *Se E ha dimensione finita, la topologia debole $\sigma(E, E^*)$ e la topologia forte coincidono. In particolare $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente se e solo se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in norma.*

Dimostrazione. Grazie all'osservazione 2 sappiamo che in generale la topologia debole è meno fine della topologia forte, quindi ogni aperto debole necessariamente sarà un aperto forte. È sufficiente mostrare che un aperto forte è anche un aperto debole.
Sia $x_0 \in E$, sia U intorno di x_0 per la topologia forte. Dobbiamo trovare un intorno V di x_0 per la topologia debole $\sigma(E, E^*)$ tale che $V \subset U$. Fissiamo $r > 0$ in modo che $B(x_0, r) \subset U$.
Poiché E ha dimensione finita possiamo scegliere una base $e_1, \ldots, e_n$ di E, con $\|e_i\| = 1$ $\forall i$. Allora ogni $x \in E$ si puó rappresentare come combinazione lineare degli elementi della base, cioè $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
Inoltre le applicazioni $f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f_i(x) = x_i$ sono lineari, continue e $\|f_i\| \leq 1$. Quindi l'insieme
$$V = \{x \in E : \ |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, n\}$$
è un aperto, dove $\epsilon > 0$ verrà fissato in seguito. Segue che
$$\|x - x_0\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i - \sum_{i=1}^n x_{0_i} e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - x_{0_i}| = \sum_{i=1}^n |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < n\epsilon \quad \forall x \in V.$$
A questo punto mi è sufficiente scegliere $\epsilon = \frac{r}{n}$ per concludere. □

Osservazione 4. Gli aperti (rispettivamente i chiusi) della topologia debole sono anche gli aperti (rispettivamente i chiusi) della topologia forte. In dimensione infinita il viceversa è falso, vediamone alcuni controesempi.

Esempio 1. Verifichiamo che

$$S = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : \ \|f\|_{L^p} = 1\}$$

non è chiuso in $\sigma(E, E^*)$.

Sia $f \in C_0^\infty$ tale che $\|f\|_{L^p} = 1$. Prendiamo poi la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da $f_n(x) = f(x-n) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Ovviamente segue che $\|f_n\|_{L^p} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $f(x-n) \to 0$ puntualmente ed in modo dominato.

Inoltre $\int_{supp\varphi} f_n\varphi \to 0 \quad \forall \varphi \in C_0 \Rightarrow f_n \rightharpoonup 0$ debolmente in L^p.

Quindi si ottiene che $f_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ma S non è chiuso nella topologia $\sigma(E, E^*)$ poiché $0 \notin S$.

Esempio 2. Più in generale mostriamo che l'affermazione dell'esempio 1 è valida in ogni spazio di Banach di dimensione infinita.

Consideriamo

$$S = \{x \in E : \ \|x\| = 1\}$$

e mostriamo che non è un chiuso per la topologia debole, anzi

$$\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\} = B_E.$$

Sia $x_0 \in E$, $\|x_0\| < 1$. Mostriamo che x_0 è un punto di chiusura di S. In altre parole, se prendiamo V intorno arbitrario di x_0 in $\sigma(E, E^*)$ dobbiamo provare che $V \cap S \neq \emptyset$. Senza ledere di generalità possiamo supporre che $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists \epsilon > 0$, $\exists f_1, \ldots, f_k \in E^*$ tali che

$$V = \{x \in E : \ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Consideriamo $y_0 \in E$, $y_0 \neq 0$ tale che $\langle f_i, y_0\rangle = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k$. Notiamo che un y_0 che abbia queste proprietà esiste. Se per assurdo non esistesse, la mappa

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto (\langle f_i, x\rangle)_{1\leq i\leq k} \end{aligned}$$

sarebbe iniettiva, e quindi ci sarebbe un isomorfismo tra E e $\varphi(E)$. Ma ciò è assurdo poiché $\varphi(E)$ ha dimensione finita, quindi necessariamente anche E dovrebbe avere dimensione finita.
Prendiamo ora la funzione $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$ continua su $[0, +\infty)$ con $g(0) < 1$ e $\lim_{t\to\infty} g(t) = +\infty$. Per la continuità $\exists t_0 > 0$ tale che $g(t_0) = \|x_0 + t_0 y_0\| = 1$. Banalmente $x_0 + t_0 y_0 \in S$, mostriamo che $x_0 + t_0 y_0 \in V$. Viene

$$|\langle f_i, x_0 + t_0 y_0 - x_0 \rangle| = |\langle f_i, t_0 y_0 \rangle| = t_0 |\langle f_i, y_0 \rangle| = 0.$$

$$\Rightarrow \ \forall \epsilon > 0 \quad |\langle f_i, t_0 y_0 \rangle| < \epsilon.$$

$$\Rightarrow x_0 + t_0 y_0 \in S \cap V. \quad \Rightarrow \quad S \cap V \neq \emptyset.$$

A questo punto per concludere che $\overline{S}^{\sigma(E,E^*)} = B_E$ è sufficiente mostrare che B_E è chiuso per la topologia debole. In effetti

$$B_E = \bigcap_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} \{x \in E : \ |\langle f, x \rangle| \leq 1\}$$

è un intersezione arbitraria di insiemi debolmente chiusi e quindi è un chiuso per la topologia debole.

Esempio 3. Se E è uno spazio di Banach di dimensione infinita, allora l'insieme

$$U = \{x \in E : \ \|x\| < 1\}$$

non è aperto per la topologia debole. Supponiamo per assurdo che U sia aperto debole, allora $U^C = \{x \in E : \ \|x\| \geq 1\}$ è un chiuso debole, ma

$$\{x \in E : \ \|x\| \leq 1\} \cap \{x \in E : \ \|x\| \geq 1\} = \{x \in E : \ \|x\| = 1\}$$

non è un chiuso debole per quanto mostrato nell'esempio 2, quindi siamo giunti ad un assurdo.

Capitolo 2

La topologia debole *

2.1 La topologia $\sigma(E^*, E)$

Vogliamo ora provare a costruire, similmente a quanto fatto su E, una topologia su E^*. Per analogia possiamo ottenere la topologia forte associata alla norma di E^* e la topologia $\sigma(E^*, E^{**})$. Inoltre è possibile costruirne una terza, detta topologia debole * e denotata con $\sigma(E^*, E)$. Per farlo consideriamo, $\forall x \in E$, le seguenti applicazioni:

$$\begin{aligned} T_x : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \langle f, x \rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Al variare di x in E otteniamo una famiglia $(T_x)_{x \in E}$ di applicazioni da E^* in $\mathbb{R}$.

Se definiamo

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E^{**} \\ x &\longmapsto T_x \end{aligned}$$

si ha chiaramente che $J(E) = (T_x)_{x \in E}$.

Definizione 2.1. La topologia debole * è la topologia meno fine su E^* che rende continue le applicazioni $(T_x)_{x \in E}$ definite come in (2.1).

Osservazione 5. È chiaro che se in E^{**} le applicazioni T_x hanno tutte la forma descritta in (2.1) allora la topologia $\sigma(E^*, E)$ coincide con $\sigma(E^*, E^{**})$.

In generale però $\sigma(E^*, E)$ è strettamente meno fine di $\sigma(E^*, E^{**})$ poiché deve rendere continue meno applicazioni.

Osservazione 6. La ricerca di topologie con il minor numero possibile di aperti è giustificata dal fatto che una topologia con meno aperti ha più compatti. Nel corso di questo capitolo, in effetti, mostreremo alcuni importanti risultati sulla compattezza, come ad esempio il fatto che la sfera unitaria B_{E^*} in E^* non è compatta con la topologia forte ma lo è con la topologia debole *.

Proposizione 2.1.1. *La topologia debole * è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano $f_1,\ f_2 \in E^*$ tali che $f_1 \neq f_2$. Allora necessariamente $\exists\, x \in E$ tale che $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$.
Assumiamo che $\langle f_1, x\rangle < \langle f_2, x\rangle$ e scegliamo α tale che

$$\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle.$$

A questo punto è sufficiente scegliere

$$O_1 = \{f \in E^* :\ \langle f, x\rangle < \alpha\} = T_x^{-1}(-\infty, \alpha),$$

$$O_2 = \{f \in E^* :\ \langle f, x\rangle > \alpha\} = T_x^{-1}(\alpha, +\infty).$$

Per costruzione O_1 e O_2 sono aperti di $\sigma(E^*, E)$; inoltre $f_1 \in O_1,\ f_2 \in O_2$ e $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. □

Proposizione 2.1.2. *Sia $f_0 \in E^*$, $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $\{x_1, \dots, x_k\} \subset E$. Allora l'insieme*

$$V = V(f_0, x_1, \dots, x_k, \epsilon) = \{f \in E^* :\ |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, k\}$$

è un intorno di f_0 nella topologia $\sigma(E^*, E)$. Inoltre

$$\mathcal{F}(f_0) = \{V(f_0, x_1, \dots, x_k, \epsilon) :\ k \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_k \in E,\ \epsilon > 0\}$$

è una base di intorni di f_0 per $\sigma(E^*, E)$.

Dimostrazione. Si ha che

$$f \in V \;\Leftrightarrow\; |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Usando la linearità di f e f_0 si ha

$$|\langle f, x_i \rangle - \langle f_0, x_i \rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Per definizione di T_x

$$|T_{x_i}(f) - T_{x_i}(f_0)| < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Pertanto

$$T_{x_i}(f_0) - \epsilon < T_{x_i}(f) < T_{x_i}(f_0) + \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Ne segue che

$$T_{x_i}(f) \in \,]T_{x_i}(f_0) - \epsilon, T_{x_i}(f_0) + \epsilon[\quad \forall i = 1, \dots, k$$

e

$$f \in \; T_{x_i}^{-1}\big(\,]T_{x_i}(f_0) - \epsilon, T_{x_i}(f_0) + \epsilon[\,\big) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Concludendo si ha

$$f \in \bigcap_{i=1}^{k} T_{x_i}^{-1}\big(\,]T_{x_i}(f_0) - \epsilon, T_{x_i}(f_0) + \epsilon[\,\big).$$

Dal fatto che $]T_{x_i}(f_0)-\epsilon, T_{x_i}(f_0)+\epsilon[$ è un intorno aperto di $T_{x_i}(f_0)$ in $\mathbb{R}$ e T_{x_i} è continua per definizione di $\sigma(E^*, E)$ segue che $T_{x_i}^{-1}\big(\,]T_{x_i}(f_0)-\epsilon, T_{x_i}(f_0)+\epsilon[\,\big)$ è un aperto che contiene f_0, $\forall i = 1, \dots, k$. Inoltre per definizione di topologia l'intersezione finita di aperti è un aperto. Quindi V è un aperto per la topologia debole * che contiene f_0.

Mostriamo ora che $\mathcal{F}(f_0)$ è una base. Consideriamo U intorno qualsiarsi di f_0 per $\sigma(E^*, E)$. Per quanto visto nell'osservazione 1 abbiamo che esiste un aperto W incluso in U contenente f_0 della forma $W = \bigcap_{finita} T_{x_i}^{-1}(\omega_i)$, dove ω_i è un intorno di $T_{x_i}(f_0)$. Inoltre è possibile trovare un $\epsilon > 0$ tale che $(T_{x_i}(f_0) - \epsilon, T_{x_i}(f_0) + \epsilon) \subset \omega_i \; \forall i$. Si ha quindi che $f_0 \in V \subset W \subset U$, dove V è un elemento della base. $\square$

Notazione 2. Se una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E^* converge a f nella topologia debole * scriveremo $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Osservazione 7. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in E^*. Diciamo che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $\sigma(E^*, E)$
$\Leftrightarrow$ $\forall$ intorno U di f in $\sigma(E^*, E)$ $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq \overline{n}\ \ f_n \in U$.
$\Leftrightarrow$ Dato U intorno di f, $\forall \epsilon > 0, \forall x_1, \ldots, x_k \in E \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq \overline{n}$
$f_n \in T_{x_i}^{-1}\big(\, \big]T_{x_i}(f) - \epsilon, T_{x_i}(f) + \epsilon\big[\,\big) \quad \forall i = 1, \ldots, k$.
$\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \forall x_1, \ldots, x_k \in E \quad T_{x_i}(f_n) \in \big]T_{x_i}(f) - \epsilon, T_{x_i}(f) + \epsilon\big[\quad \forall i = 1, \ldots, k$.
$\Leftrightarrow$ $\forall x \in E \quad T_x(f_n) \to T_x(f)$, cioè $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$.
Notiamo quindi che la topologia debole * è la topologia della convergenza puntuale della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposizione 2.1.3. *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in E^*, allora valgono i seguenti fatti:*

(i) Se $f_n \to f$ in norma, allora $f_n \rightharpoonup f$ in $\sigma(E^*, E^{**})$.
Inoltre se $f_n \rightharpoonup f$ in $\sigma(E^*, E^{**})$, allora $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $\sigma(E^*, E)$.

(ii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $\sigma(E^*, E)$, allora f_n è limitata e
$\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

(iii) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in $\sigma(E^*, E)$ e $x_n \to x$ in norma, allora
$\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle \to 0$.

Dimostrazione. (i) Grazie all'osservazione 7 abbiamo che è sufficiente mostrare che

$$\langle T_x, f_n\rangle - \langle T_x, f\rangle \to 0.$$

Si conclude direttamente con

$$|\langle T_x, f_n - f\rangle| \leq \|T_x\|\|f_n - f\| \to 0$$

grazie alla limitatezza di T_x e al fatto che $\|f_n - f\| \to 0$ per ipotesi.
Mostriamo ora il secondo fatto. Grazie all'osservazione 7 basta provare che

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \ \text{ o equivalentemente } \quad \langle T_x, f_n\rangle \to \langle T_x, f\rangle.$$

Ma ciò segue direttamente dalla definizione di $\sigma(E^*, E^{**})$.

(ii) Dall'osservazione 7 si ha che

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \;\Rightarrow\; \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle.$$

Inoltre grazie alla proposizione 1.2.4 $\exists \widetilde{T}_{f_n} : E^{**} \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata, $\|\widetilde{T}_{f_n}\| = \|f_n\|$ e tale che

$$\widetilde{T}_{f_n}(T_x) = \langle T_x, f_n\rangle.$$

Allora $|\widetilde{T}_{f_n}(T_x)| = |\langle f_n, x\rangle|$ e la successione $(\langle f_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, cioè $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\widetilde{T}_{f_n}(T_x)| < +\infty \;\; \forall x \in E$.
Per il teorema di uniforme limitatezza segue che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widetilde{T}_{f_n}\| < +\infty$.
Dal fatto che $\|\widetilde{T}_{f_n}\| = \|f_n\|$ si ha che f_n è limitata.
Inoltre

$$|\langle f_n, x\rangle| \le \|f_n\|\|x\| \le \|f_n\| \quad \forall x \in E, \; \|x\| \le 1.$$

Passando al liminf per $n \to +\infty$ si ottiene

$$|\langle f, x\rangle| \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|.$$

Passando al sup e usando la proposizione 1.2.3 possiamo concludere che

$$\|f\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|.$$

(iii) Si ha che

$$\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle = \langle f_n, x_n - x\rangle + \langle f_n - f, x\rangle$$

Risulta

$$\langle f_n - f, x\rangle \to 0$$

per l'osservazione 7 e

$$|\langle f_n, x_n - x\rangle| \le \|f_n\|\|x_n - x\| \to 0$$

poichè f_n è limitata e $\|x_n - x\| \to 0$ per ipotesi.

Osservazione 8. Quando E ha dimensione finita, le topologie $\sigma(E^*, E^{**})$, $\sigma(E^*, E)$ e la topologia forte coincidono.

Ora vediamo un primo importante risultato di compattezza nella topologia appena definita.

Teorema 2.1.4 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *La sfera*

$$B_{E^*} = \{f \in E^* : \ \|f\| \leq 1\}$$

è compatta per $\sigma(E^*, E)$.

Dimostrazione. Consideriamo il prodotto cartesiano $Y = \mathbb{R}^E = \{\omega \mid \omega : E \longrightarrow \mathbb{R}\}$, dove $\omega = (\omega_x)_{x \in E}$ con $\omega_x \in \mathbb{R}$.
Muniamo Y della topologia prodotto, ovvero la topologia meno fine che al variare di x in E rende continue tutte le mappe

$$\begin{aligned} p_x : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \omega_x \end{aligned} \tag{2.2}$$

e mostriamo che questa è equivalente alla topologia della convergenza puntuale.
Troviamo anzitutto com'è fatto il sistema fondamentale di intorni. Dato $\omega \in Y$ abbiamo che $]\ p_{x_i}(\omega) - \epsilon, p_{x_i}(\omega) + \epsilon\ [$ è un intorno aperto di $p_{x_i}(\omega)$ in $\mathbb{R}$ $\forall i = 1, \ldots, k$. Segue che $p_{x_i}^{-1}(\ ]\ p_{x_i}(\omega) - \epsilon, p_{x_i}(\omega) + \epsilon\ [\ )$ è un intorno aperto di ω in Y (per la continuitá delle p_{x_i} $\ \forall i = 1, \ldots, k$).
$\Rightarrow \omega \in \bigcap_{i=1}^k p_{x_i}^{-1}(\ ]\ p_{x_i}(\omega) - \epsilon, p_{x_i}(\omega) + \epsilon\ [\ )$ è un sistema fondamentale di intorni per ω in Y.
Diciamo che $\omega_n \to \omega$ su Y rispetto alla topologia prodotto
$\Leftrightarrow \forall U$ intorno di ω_0, $\forall x_1, \ldots, x_k$ $\exists n \geq \overline{n} :\ \omega_n \in U$.
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} :\ \ \forall n > \overline{n} \quad \omega_n \in \bigcap_{i=1}^k p_{x_i}^{-1}(\ ]p_{x_i}(\omega) - \epsilon, p_{x_i}(\omega) + \epsilon[\ )$.
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n > \overline{n} \quad p_{x_i}(\omega_n) \in \bigcap_{i=1}^k\ ]p_{x_i}(\omega) - \epsilon, p_{x_i}(\omega) + \epsilon[$.
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n > \overline{n} \quad p_{x_i}(\omega_n) \in\ ]p_{x_i}(\omega) - \epsilon, p_{x_i}(\omega) + \epsilon[\quad \forall x_1, \ldots, x_k \in E$.
$\Leftrightarrow \forall x \in E \quad p_x(\omega_n) \to p_x(\omega)$, cioè $\omega_n(x) \to \omega(x) \quad \forall i$.

Consideriamo poi E^* munito della topologia debole * $\sigma(E^*, E)$, abbiamo mostrato che nell'osservazione 7 che ciò equivale alla topologia della convergenza puntuale. Possiamo concludere che le due topologie sono equivalenti, poiché anche la topologia prodotto è la topologia della convergenza puntuale.
Ricordando che le applicazioni in E^* sono delle particolari applicazioni da E in $\mathbb{R}$ (cioè sono lineari e continue), si ha che $E^* \subset Y$.
Prendiamo ora l'iniezione canonica

$$\begin{aligned} \phi : E^* &\longrightarrow Y \\ f &\longmapsto (\omega_x)_{x \in E} \end{aligned}$$

con $\omega_x = \langle f, x \rangle$. Mostriamo che ϕ è continua.
Sia $x \in E$ fissato, per definizione di $\sigma(E^*, E)$ la mappa

$$\begin{aligned} p_x \circ \phi : E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto (\phi(f))_x = \langle f, x \rangle \end{aligned}$$

è continua. A questo punto la continuità di ϕ viene direttamente dalla proposizione 1.1.3.
Anche la mappa inversa

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \phi(E^*) &\longrightarrow E^* \\ \omega &\longmapsto \phi^{-1}(\omega), \end{aligned}$$

dove $\phi(E^*)$ è munito della topologia indotta da Y, è continua.
È sufficiente mostrare che, fissato x, la mappa

$$\begin{aligned} (p_x \circ \phi) \circ \phi^{-1} : \phi(E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \langle \phi^{-1}(\omega), x \rangle \end{aligned}$$

è continua. In effetti $\omega = \phi(f)$ per qualche $f \in E^*$, quindi $\langle \phi^{-1}(\omega), x \rangle = \langle f, x \rangle = \omega_x$ e le mappe definite come in (2.2) sono continue poiché su Y abbiamo la topologia prodotto. Si conclude, analogamente a prima, con la proposizione 1.1.3.
In definitiva ϕ è un omeomorfismo da E^* in $\phi(E^*)$.
Sia $K = \phi(B_{E^*})$, dove

$$K = \big\{ \omega \in Y : |\omega_x| \leq \|x\|,\ \omega_x + \omega_y = \omega_{x+y},\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E \big\}.$$

Per poter concludere è sufficiente mostrare che K è compatto, poiché un omeomorfismo manda compatti in compatti.
Osserviamo che è possibile scrivere $K = K_1 \cap K_2$, dove

$$K_1 = \big\{\omega \in Y : \ |\omega_x| \leq \|x\| \quad \forall x \in E\big\}, \tag{2.3}$$

$$K_2 = \big\{\omega \in Y : |\omega_x| \leq \|x\|, \ \omega_x + \omega_y = \omega_{x+y}, \ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\big\}. \tag{2.4}$$

La (2.3) si può scrivere in modo equivalente

$$K_1 = \prod_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|\,] \tag{2.5}$$

e applicando il teorema di Tychonoff alla (2.5) abbiamo che K_1 è compatto.
La (2.4) si può scrivere

$$K_2 = \left[\bigcap_{x,y \in E} A_{x,y}\right] \cap \left[\bigcap_{\substack{x \in E \\ \lambda \in \mathbb{R}}} B_{\lambda,x}\right],$$

dove

$$A_{x,y} = \{\omega \in Y : \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\},$$

$$B_{\lambda,x} = \{\omega \in Y : \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0\}.$$

$A_{x,y}$ e $B_{\lambda,x}$ sono entrambi chiusi in Y, e ciò segue dalla continuità delle applicazioni $\omega \longmapsto \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y$ e $\omega \longmapsto \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x$. Di conseguenza K_2 è chiuso.
Si può concludere che K è compatto, poiché è intersezione di un chiuso e di un compatto. $\square$

Corollario 2.1.5. *La sfera*

$$B_{E^{**}} = \{T \in E^{**} : \|T\| \leq 1\}$$

è compatta nella topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Ricordiamo ora le equivalenze per la compattezza negli spazi metrici.

Teorema 2.1.6. *Se X è uno spazio metrico sono equivalenti:*

1. *X è sequenzialmente compatto, cioè da ogni successione in X si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

2. *X è compatto, cioè da ogni ricoprimento di X si può estrarre un sottoricoprimento finito.*

3. *X è completo e totalmente limitato.*

Osservazione 9. Il problema della non metrizzabilità della topologia debole (che studieremo in modo più approfondito nel prossimo capitolo) esprime un'impossibilità nell'utilizzo dei concetti di compatezza per spazi metrici in ambito topologico. Come conseguenza diretta di questo fatto abbiamo, ad esempio, il fatto che è possibile trovare uno spazio topologico compatto E e una successione in E che non ammette alcuna sottosuccessione convergente. Viceversa se E è uno spazio topologico tale che ogni successione ammette una sottosuccessione convergente questo non implica che E sia compatto.

Esempio 4. Vogliamo costruire uno spazio di Banach E ed una successione $(\psi_h)_{h\in\mathbb{N}}$ in $X = B_{E^*}$ (che è compatto in $\sigma(E^*, E)$ grazie al teorema 2.1.4) che non ammetta alcuna sottosuccessione convergente in $\sigma(E^*, E)$.
Sia

$$E = \ell^\infty = \left\{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq c\right\},$$

mostriamo che $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ è una norma, dove $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e che tale norma rende E uno spazio di Banach. Infatti:

- $\|x\|_\infty \geq 0$ per definizione.

- $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0 \Leftrightarrow |x_n| = 0\, \forall n \Leftrightarrow x = 0$.

- $\|\lambda x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} = |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |\lambda| \|x\|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|x + y\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + |y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Ci rimane da provare che E è completo rispetto alla norma considerata. Consideriamo la successione di Cauchy $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $x^k \in E \; \forall k$, cioè

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \; \forall k, h \geq k_\epsilon \quad \|x^k - x^h\|_\infty < \epsilon.$$

Per le proprietà del sup segue che

$$|x^k - x^h| < \|x^k - x^h\|_\infty < \epsilon$$

Si ha che $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi è convergente. In altri termini $\exists x \in E$ tale che $x^k \to x$.
Dalla condizione di Cauchy in $\mathbb{R}$ passando al sup si ottiene

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists k_\epsilon > 0 : \; \forall k \geq k_\epsilon \quad \|x^k - x\|_\infty < \epsilon.$$

Se $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in E, $x^k \to x$ in norma ∞ allora x è limitata (cioè $x \in E$) , poiché convergenza uniforme conserva la limitatezza.
Consideriamo ora $\psi_h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\psi_h\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = x_h.$$

In tal caso si ha

$$\big|\psi_h\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big)\big| = |x_h| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\|_\infty.$$

Segue che

$$\|\psi_h\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \big|\psi_h\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big)\big| \leq \|x\|_\infty \leq 1.$$

Inoltre

$$\|\psi_h\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \big|\psi_h\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big)\big| \geq |x_h| = 1 \quad \text{se pongo} \quad x_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \\ 1 & \text{se } k = h. \end{cases}$$

Possiamo concludere quindi che $\|\psi_h\| = 1$.
Inoltre ψ_h è lineare e ciò segue dal fatto che $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\psi_h\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}} + (y_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \psi_h\big((x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = x_h + y_h = \psi_h\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) + \psi_h\big((y_k)_{k\in\mathbb{N}}\big),$$

$$\psi_h\big(\lambda(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \psi_h\big((\lambda x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \lambda x_h = \lambda\psi_h\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big).$$

Abbiamo quindi $\psi_h \in E^*$ e $\|\psi_h\| = 1$, vogliamo mostrare che $(\psi_h)_{h\in\mathbb{N}}$ non ammette sottosuccessioni convergenti in $\sigma(E^*, E)$. Supponiamo per assurdo che esista $(\psi_{h_j})_{j\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione di $(\psi_h)_{h\in\mathbb{N}}$ tale che $\psi_{h_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \psi$ in $\sigma(E^*, E)$. In altri termini

$$\langle \psi_{h_j}, x\rangle \to \langle \psi, x\rangle \quad \forall x \in E \quad \text{e} \quad \langle \psi_{h_j}, x\rangle = x_{h_j}. \tag{2.6}$$

Grazie a (2.6) è sufficiente scegliere x tale che $(x_{h_j})_{j\in\mathbb{N}}$ non converge.
Se prendiamo

$$x = (0, \dots, \underset{h_1}{-1}, \dots, 0, \dots, \underset{h_2}{1}, \dots, 0, \dots, \underset{h_3}{-1}, \dots, 0, \dots, \underset{h_4}{1}, \dots, 0)$$

si ottiene $\psi_{h_j}(x) = x_{h_j} = (-1)^j$ che non è una sottosuccessione convergente.

Osservazione 10. La scelta dello spazio ℓ^∞ nell'esempio 4 non è casuale. In effetti abbiamo preso uno spazio non riflessivo e non separabile poiché, come vedremo in modo più approfondito nel prossimo capitolo, queste condizioni sotto delle specifiche ipotesi inducono la metrizzabilità sulle sfere unitarie.

Capitolo 3

Spazi riflessivi e spazi separabili

3.1 Spazi riflessivi

Per definire il concetto di riflessività, ovvero la relazione che intercorre tra E spazio di Banach e il suo biduale, ricordiamo che

$$\exists\, J : E \longrightarrow E^{**}$$
$$x \longmapsto T_x$$

con T_x definito come in (2.1). Segue direttamente, usando quanto visto nella proposizione 1.2.4, che $\|J(x)\|_{E^{**}} = \|x\|_E$.
Osserviamo anzitutto che J è iniettiva, in effetti: $\|x-y\|_E = \|J(x-y)\|_{E^{**}} = \|J(x) - J(y)\|_{E^{**}}$. Pertanto se $x \neq y$ allora $J(x) \neq J(y)$.
Quindi, in generale, E^{**} contiene una "copia" di E, ma non è affatto detto che $J(E) = E^{**}$. Se accade questo, in altri termini se J è suriettiva, diciamo che lo spazio E è riflessivo.
Se E è riflessivo l'applicazione J è un isomorfismo: diremo quindi che E è identificato con E^{**}, in simboli $E \cong E^{**}$.

Lemma 3.1.1 (Helly)**.** *Sia E spazio di Banach, siano poi $f_1, \dots, f_k \in E^*$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

(i) $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, x_\epsilon \in E$ *tale che* $\|x_\epsilon\|_E \leq 1$ *e* $|\langle f_i, x_\epsilon\rangle - \gamma_i| < \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, k.$

(ii) $|\sum_{i=1}^k \beta_i\gamma_i| \leq \| \sum_{i=1}^k \beta_i f_i\|_{E^*} \quad \forall \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fissiamo $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ e sia $S = \sum_{i=1}^k |\beta_i|$. Da (i), moltiplicando per β_i e sommando in i a destra e sinistra otteniamo

$$|\sum_{i=1}^k \beta_i\langle f_i, x_\epsilon\rangle - \sum_{i=1}^k \beta_i\gamma_i| \leq \epsilon S.$$

$\forall \epsilon > 0$ segue che

$$|\sum_{i=1}^k \beta_i\gamma_i| \leq \|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\|_{E^*}\|x_\epsilon\|_E + \epsilon S \leq \|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\|_{E^*} + \epsilon S.$$

$$\Rightarrow |\sum_{i=1}^k \beta_i\gamma_i| \leq \|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\|_{E^*}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sia $\gamma = (\gamma_i, \gamma_2, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$, consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \ell : E &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto (\langle f_1, x\rangle, \dots, \langle f_k, x\rangle) \end{aligned}$$

La proprietà $(i) \Leftrightarrow \gamma \in \overline{\ell(B_E)}$.
Supponiamo per assurdo che $\gamma \notin \overline{\ell(B_E)}$. In tal caso, poiché siamo in dimensione finita, la sfera è convessa e $\{\gamma\}$ e $\overline{\ell(B_E)}$ possono essere separati strettamente da un iperpiano in $\mathbb{R}^k$, cioè $\exists \beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che

$$\beta \cdot \ell(x) < \alpha < \beta \cdot \gamma \quad \forall x \in B_E.$$

Segue che

$$\langle\sum_{i=1}^k \beta_i f_i, x\rangle < \alpha < \sum_{i=1}^k \beta_i\gamma_i \quad \forall x \in B_E,$$

da cui passando al sup

$$\sup_{\|x\|_{E\leq 1}} |\langle\sum_{i=1}^k \beta_i f_i, x\rangle| = \|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\|_{E^*} \leq \alpha < \sum_{i=1}^k \beta_i\gamma_i.$$

Osserviamo che questo contraddice (ii), quindi $\gamma \in \overline{\ell(B_E)}$. $\square$

Lemma 3.1.2 (Goldstine)**.** *Sia E spazio di Banach, allora $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{**}}$ rispetto alla topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$ e quindi anche $J(E)$ è denso in E^{**} rispetto alla topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$.*

Dimostrazione. Sia $\xi \in B_{E^{**}}$ e sia V un intorno di ξ nella topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$, mostriamo che $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Possiamo assumere che $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists \epsilon > 0$, $\exists f_1, \ldots, f_k \in E^*$ tali che

$$V = \{\eta \in E^{**} : |\langle \eta - \xi, f_i \rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k\}.$$

Si vuole mostrare che esiste almeno un $x \in B_E$ tale che $J(x) \in V$, cioè tale che valga

$$|\langle f_i, x \rangle - \langle \xi, f_i \rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Poniamo $\gamma_i = \langle \xi, f_i \rangle$. Grazie al lemma 3.1.1 è sufficiente mostrare che

$$\Big|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i\Big| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\Big\|_{E^*}.$$

Si ha, $\forall \xi$ tale che $\|\xi\| \leq 1$, che

$$\Big|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{k} \beta_i \langle \xi, f_i \rangle\Big| = \Big|\langle \xi, \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i \rangle\Big| \leq \|\xi\|_{E^{**}} \Big\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\Big\|_{E^*} \leq \Big\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i\Big\|_{E^*}.$$

□

Teorema 3.1.3 (Kakutani)**.** *Sia E spazio di Banach. Allora*

$$E \text{ è riflessivo} \Leftrightarrow B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \text{ è compatto in } \sigma(E, E^*).$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Supponiamo E riflessivo, quindi $J(B_E) = B_{E^{**}}$. Grazie al corollario 2.1.5 si ha che $B_{E^{**}}$ è compatto in $\sigma(E^{**}, E^*)$. Per concludere è sufficiente mostrare che J^{-1} è continua da E^{**} munito della topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$ in E munito della topologia $\sigma(E, E^*)$. Fissato $f \in E^*$, se l'applicazione

$$\begin{aligned} f \circ J^{-1} : E^{**} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \langle f, J^{-1}(\xi) \rangle \end{aligned}$$

è continua su E^{**} con $\sigma(E^{**}, E^*)$, poi si otterrà il risultato grazie alla proposizione 1.1.3.
Si ha che $\langle f, J^{-1}(\xi)\rangle = \langle f, x\rangle = \langle \xi, f\rangle$ e la mappa $\xi \longmapsto \langle \xi, f\rangle$ è continua su E^{**} munito di $\sigma(E^{**}, E^*)$.
Segue che J^{-1} è continua, quindi B_E è compatto in E munito di $\sigma(E, E^*)$.
Concludiamo con l'implicazione $\Leftarrow$.
L'iniezione canonica $J : E \longrightarrow E^{**}$ è continua, con E munito di $\sigma(E, E^*)$ ed E^{**} munito di $\sigma(E^{**}, E^*)$. Ciò segue direttamente dal fatto che, fissato $f \in E^*$, la mappa $x \longmapsto \langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle$ è continua rispetto alla topologia $\sigma(E, E^*)$. Inoltre, per ipotesi, B_E è compatta in $\sigma(E, E^*)$; dalla continuità di J segue che $J(B_E)$ è compatta in E^{**}, in particolare è chiusa in E^{**} rispetto alla topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$.
Grazie al lemma 3.1.2 si ha che $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{**}}$ nella topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$. Dai fatti precedenti si ottiene che $J(B_E) = B_{E^{**}}$ e quindi che $J(E) = E^{**}$. $\square$

Osservazione 11. $J(B_E)$ è chiuso in $B_{E^{**}}$ nella topologia forte. Inoltre $J(B_E)$ è denso in E^{**} nella topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$ ma non nella topologia forte.
In effetti se $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $B_{E^{**}}$ tale che $\xi_n = J(x_n) \to \xi$ allora, usando il fatto che J è un isometria, si ha che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in B_E, cioè $x_n \to x$ e $\xi = J(x)$. Supponiamo per assurdo che $J(B_E)$ sia denso in $B_{E^{**}}$; dal fatto che è chiuso si ottiene che $J(B_E) = B_{E^{**}}$, cioè E è riflessivo. Ma ciò è ovviamente assurdo.

Proposizione 3.1.4. *Sia E spazio di Banach riflessivo, sia $M \subset E$ un sottospazio lineare chiuso; allora M è riflessivo.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che su M possiamo trovare due diverse topologie: la topologia indotta da $\sigma(E, E^*)$ oppure la topologia $\sigma(M, M^*)$.
In realtà le due topologie coincidono: questo fatto è conseguenza diretta del teorema di Hahn Banach, secondo cui ogni funzionale lineare continuo su M è la restrizione a M di un funzionale lineare continuo definito su E.
Grazie al teorema 3.1.3 basta provare che B_M è compatto in $\sigma(M, M^*)$, o

equivalentemente in $\sigma(E, E^*)$. Per ipotesi B_E è compatto in $\sigma(E, E^*)$ e M è banalmente chiuso in $\sigma(E, E^*)$ (poiché è lineare). Si conclude quindi che B_M è compatto in $\sigma(E, E^*)$. $\square$

Corollario 3.1.5. *Sia E spazio di Banach. Si ha che*

$$E \text{ è riflessivo} \Leftrightarrow E^* \text{ è riflessivo.}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Dobbiamo provare che se $E \cong E^{**}$ allora $E^* \cong E^{***}$.
Sia J l'isomorfismo canonico da E in E^{**}, prendiamo $\varphi \in E^{***}$. La mappa

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \langle \varphi, Jx \rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

è un funzionale lineare continuo su E. Linearità e continuità seguono dal fatto che φ e J sono lineari e continue. Quindi $f \in E^*$ e perció si ha

$$\langle \varphi, Jx \rangle = \langle f, x \rangle \tag{3.2}$$

e per definizione di J

$$\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E. \tag{3.3}$$

Da (3.2) e (3.3) risulta

$$\langle \varphi, Jx \rangle = \langle Jx, f \rangle.$$

Dalla suriettività di J si ottiene che

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \langle \xi, f \rangle \quad \forall \xi \in E^{**},$$

cioè $J' : E^* \longrightarrow E^{***}$ è suriettiva.
$\Leftarrow$ In modo analogo a quanto appena mostrato si mostra che E^{**} è riflessivo. Inoltre grazie all'osservazione 11 $J(E)$ è un sottospazio chiuso di E^{**} per la topologia forte, quindi grazie alla proposizione 3.1.4 possiamo concludere che $J(E)$ è riflessivo. Segue che E è riflessivo. $\square$

3.2 Spazi separabili

Definizione 3.1. Uno spazio metrico E è separabile se $\exists D \subset E$ numerabile tale che $\overline{D} = E$.

Proposizione 3.2.1. *Sia E uno spazio metrico separabile e $F \subset E$ un sottoinsieme qualsiarsi. Allora F è separabile.*

Dimostrazione. Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso di E (esiste per l'ipotesi di separabilità su E). Sia poi $(r_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi tali che $r_m \to 0$; a questo punto è sufficiente scegliere infiniti punti $a_{m,n} \in B(u_n, r_m) \cap F$. L'insieme $(a_{m,n})_{n,m\in\mathbb{N}}$ è numerabile e denso in F. $\square$

Teorema 3.2.2. *Sia E spazio di Banach tale che E^* è separabile, allora E è separabile.*

Dimostrazione. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile e denso in E^*.
Sappiamo che

$$\|f_n\| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \langle f_n, x\rangle.$$

Da ciò segue che è possibile trovare almeno un $x_n \in E$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$.
Sia L_0 lo spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ generato da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L_0 contiene tutte e sole le combinazioni lineari finite a coefficienti in $\mathbb{Q}$ degli elementi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Consideriamo poi, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ generato da $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ e denotiamolo con Λ_n. Inoltre $L_0 = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$ e quindi è numerabile.
Infine denotiamo con L lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si ha che L_0 è un sottoinsieme numerabile denso di L. A questo punto basta mostrare che L è un sottospazio denso di E; da ciò, infatti, segue direttamente che L_0 è un sottoinsieme numerabile denso di E e quindi E è separabile.
Sia $f \in E^*$ tale che $f_{|_L} \equiv 0$. Applicando un corollario di Hahn Banach ci basta provare che $f \equiv 0$.
Usando l'ipotesi di separabilità abbiamo che $\forall \epsilon > 0 \; \exists \, N \in \mathbb{N} : \|f - f_N\| < \epsilon$.

Inoltre da $\langle f, x_N \rangle = 0$ segue che

$$\frac{1}{2}\|f_N\| \leq \langle f_N, x_N \rangle = \langle f_N - f, x_N \rangle \leq \|f_N - f\|\|x_N\| = \|f_N - f\| < \epsilon.$$

Usando $\begin{cases} \frac{1}{2}\|f_N\| < \epsilon \\ \|f_N - f\| < \epsilon \end{cases}$ otteniamo

$$\|f\| \leq \|f - f_N\| + \|f_N\| < 3\epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

$$\Rightarrow f = 0.$$

□

Corollario 3.2.3. *Sia E spazio di Banach. Allora*

$$E \text{ è riflessivo e separabile } \Leftrightarrow \; E^* \text{ è riflessivo e separabile.}$$

Dimostrazione. Grazie al teorema 3.2.2 e al corollario 3.1.5 possiamo dire che

$$E^* \text{ riflessivo e separabile } \Rightarrow E \text{ riflessivo e separabile.}$$

Per il viceversa usando nuovamente il corollario 3.1.5 abbiamo

$$E \text{ riflessivo } \Rightarrow E^* \text{ riflessivo.}$$

Per ipotesi $E^{**} = J(E)$ e questo implica che

$$E \text{ separabile } \Rightarrow E^{**} \text{ separabile.}$$

Si conclude con il teorema 3.2.2 che E^* è separabile. □

Definizione 3.2. Dato X spazio topologico diciamo che X è metrizzabile se esiste una metrica che induce la topologia di X.

Vediamo ora come le proprietà di separabilità e metrizzabilità sono strettamente collegate tra loro.

Teorema 3.2.4. *Sia E spazio di Banach, si ha che*

$$E \text{ è separabile} \Leftrightarrow B_{E^*} \text{ è metrizzabile nella topologia debole } \sigma(E^*, E).$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso di B_E.
$\forall f \in E^*$ definiamo $[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle|$. Mostriamo che $[\ ]$ è una norma su E^*:

- $[f] \geq 0$ è ovvio.
- $[f] = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle| = 0 \;\Leftrightarrow\; |\langle f, x_n\rangle| = 0 \quad \forall n \;\Leftrightarrow\; \langle f, x_n\rangle = 0 \quad \forall n \;\Leftrightarrow\; f = 0$.
- $[\lambda f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle \lambda f, x_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\lambda\langle f, x_n\rangle| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle| = |\lambda|[f]$.
- $[f+g] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f+g, x_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle + \langle g, x_n\rangle| \leq$
  $\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\big(\,|\langle f, x_n\rangle| + |\langle g, x_n\rangle|\,\big) = [f] + [g]$.

Inoltre $[f] \leq \|f\|$, infatti

$$[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\langle f, x_n\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|f\|\|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|f\| = \|f\|\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \|f\|.$$

Sia poi $d(f,g) = [f-g]$ la distanza indotta dalla norma.
Vogliamo mostrare che la topologia indotta da d su B_{E^*} è uguale a $\sigma(E^*, E)$.
Sia $f_0 \in B_{E^*}$ e V un intorno di f_0 in $\sigma(E^*, E)$. Dobbiamo provare che $\exists r > 0$ tale che

$$U = \{f \in B_{E^*} : d(f, f_0) < r\} \subset V,$$

dove

$$V = \{f \in B_{E^*} : |\langle f - f_0, y_i\rangle| < \epsilon \quad \forall i = 1, \ldots, k\},$$

con $\epsilon > 0$ e $y_1, \ldots, y_k \in E$.
Senza ledere di generalità possiamo scegliere $\|y_i\| \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, k$. Dalla densità di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B_E si ha che

$$\forall i\; \exists\, n_i \in \mathbb{N} : \; \|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Scegliamo poi r in modo tale che $2^{n_i} r < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall i = 1, \ldots, k$. Per questa scelta di r, se $f \in U$, abbiamo

$$d(f, f_0) < r \;\Rightarrow\; \frac{1}{2^{n_i}}|\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| < r \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

Segue che

$$\begin{aligned}|\langle f-f_0,y_i\rangle| &= |\langle f-f_0,y_i-x_{n_i}\rangle+\langle f-f_0,x_{n_i}\rangle|\leq\\ &\leq |\langle f-f_0,y_i-x_{n_i}\rangle|+|\langle f-f_0,x_{n_i}\rangle|\leq\\ &\leq \|f-f_0\|\|y_i-x_{n_i}\|+2^{n_i}r\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\quad\forall i=1,\ldots,k,\end{aligned}$$

quindi $f\in V$.

Sia $f_0\in B_{E^*}$. Dato $r>0$, dobbiamo mostrare che $\exists V$ intorno di f_0 in $\sigma(E^*,E)$, con ϵ e k scelti in modo tale che

$$V\subset U=\{f\in B_{E^*}:\ d(f,f_0)<r\},$$

dove

$$V=\{f\in B_{E^*}:|\langle f-f_0,x_i\rangle|<\epsilon\quad\forall i=1,\ldots,k\}.$$

Sia ora $f\in V$, si ha

$$\begin{aligned}d(f,f_0)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f-f_0,x_n\rangle|=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}|\langle f-f_0,x_n\rangle|+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\langle f-f_0,x_n\rangle|<\\ &<\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}\epsilon+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\|f-f_0\|\|x_n\|.\end{aligned}$$

Da f,$f_0\in B_{E^*}$ e $x_n\in B_E$ segue direttamente che $\|f-f_0\|<2$ e $\|x_n\|<1$; quindi si ottiene

$$d(f,f_0)<\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}\epsilon+2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\epsilon\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+2\frac{1}{2^k}<\epsilon+\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Nei passaggi precedenti abbiamo usato

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^k},$$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2^n}-1=1-\frac{1}{2^k}.$$

A questo punto per concludere è sufficiente scegliere $\epsilon = \frac{r}{2}$ e k tale che $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$.
$\Leftarrow$ Sia

$$U_n = \left\{ f \in B_{E^*} : \ d(f,0) < \frac{1}{n} \right\}$$

intorno di 0 per la topologia indotta dalla metrica d.
Sia poi

$$V_n = \{ f \in B_{E^*} : \ |\langle f, x \rangle| < \epsilon_n \quad \forall x \in \phi_n \}$$

intorno di 0 in $\sigma(E^*, E)$ tale che $V_n \subset U_n$, dove $\epsilon_n > 0$ e $\phi_n \subset E$ finito.
Denotiamo con $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n$. Ovviamente D è numerabile, poiché unione numerabile di insiemi finiti.
Si può concludere se si mostra che D è denso in E.
Sia $f \in E^*$ tale che $\langle f, x \rangle = 0 \quad \forall x \in D$. Segue che $f \in V_n \, \forall n$, quindi $f \in U_n \, \forall n$, cioè $f \equiv 0$. Si ottiene che ogni funzionale lineare che si annulla su D, si annulla anche su E. Ciò implica, utilizzando un corollario di Hahn Banach, che D è denso in E, cioè E è separabile. □

Teorema 3.2.5. *Sia E spazio di Banach, si ha che*

$$B_E \text{ è metrizzabile nella topologia } \sigma(E, E^*) \ \Leftrightarrow \ E^* \text{separabile.}$$

Dimostrazione. $\Leftarrow$ Si mostra analogamente a quanto mostrato per il teorema 3.2.4, invertendo i ruoli di E ed E^*.
$\Rightarrow$ Sia E spazio di Banach e sia B_E metrizzabile in $\sigma(E, E^*)$. Chiamiamo $d(x, y)$ la metrica su B_E che induce la stessa topologia di $\sigma(E, E^*)$ su B_E.
Prendiamo

$$U_n = \left\{ x \in B_E : \ d(x, 0) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Sia V_n un intorno di 0 in $\sigma(E, E^*)$ tale che $V_n \subset U_n$, dove

$$V_n = \{ x \in B_E : \ |\langle f, x \rangle| < \epsilon_n \quad \forall f \in \phi_n \},$$

con $\epsilon > 0$ e $\phi_n \subset E^*$ finito.
Consideriamo ora $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n$ e F lo spazio vettoriale generato da D.

Vogliamo mostrare che $\overline{F} = E^*$. Supponiamo per assurdo che $\overline{F} \neq E^*$. Per un corollario di Hahn Banach sappiamo che

$$\exists\, \xi \in E^{**},\ \xi \neq 0 :\ \langle \xi, f\rangle = 0 \quad \forall f \in F. \tag{3.4}$$

Eventualmente normalizzando possiamo supporre che $\|\xi\| = 1$. Infine da $\xi \neq 0$ possiamo affermare, senza ledere di generalità, che $\exists f_0 \in E^*$ tale che $\langle \xi, f_0\rangle \neq 0$ e in particolare $\langle \xi, f_0\rangle > 1$.
Definiamo

$$W = \left\{ x \in B_E :\ |\langle f_0, x\rangle| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Vogliamo mostrare che $\exists\, n_0 \geq 1$ tale che $V_{n_0} \subset W$. Supponiamo per assurdo che $\nexists n_0$ tale che $V_{n_0} \subset W$. Segue che $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in B_E$ tale che $x_n \in V_n$ e $x_n \notin W$.
Abbiamo che

$$x_n \in V_n \ \Rightarrow x_n \in U_n \ \Rightarrow \ \|x_n\| \to 0, \tag{3.5}$$

$$x_n \notin W \ \Rightarrow \ |\langle f_0, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Da (3.5) e (3.6) si ha

$$\begin{cases} |\langle f_0, x_n\rangle| \to 0 \\ |\langle f_0, x_n\rangle| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ma ciò è assurdo, quindi $V_{n_0} \subset W$.
Inoltre sappiamo che $J(B_E)$ è denso in E^{**} rispetto a $\sigma(E^{**}, E^*)$, cioè

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists\, x_1 \in B_E :\ |\langle J(x_1), f\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \epsilon \quad \forall f \in \phi_n,$$

dove $\phi_n \subset E^*$ finito. Segue direttamente che

$$\begin{cases} |\langle f, x_1\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \epsilon_{n_0} \quad \forall f \in \phi_{n_0} \\ |\langle f_0, x_1\rangle - \langle \xi, f_0\rangle| < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Dalla prima equazione in (3.7) usando la (3.4) viene

$$|\langle f, x_1\rangle| < \epsilon_{n_0} \quad \forall f \in \phi_{n_0},$$

cioè $x_1 \in V_{n_0}$.
Dalla seconda equazione in (3.7) usando il fatto che $\langle \xi, f_0 \rangle > 1$ si ha

$$\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} + \langle \xi, f_0 \rangle < \langle f_0, x_1 \rangle < \frac{1}{2} + \langle \xi, f_0 \rangle,$$

cioè $\langle f_0, x_1 \rangle > \frac{1}{2}$. Ciò è assurdo, infatti sapendo che $x_1 \in V_{n_0} \subset W$ possiamo dedurre che $|\langle f_0, x_1 \rangle| < \frac{1}{2}$. $\square$

Osservazione 12. In dimensione infinita la topologia $\sigma(E, E^*)$ (rispettivamente $\sigma(E^*, E)$) non è metrizzabile su tutto lo spazio, ma solo sulla palla unitaria. In altri termini la topologia indotta dalla norma su E (rispettivamente su E^*) non coincide con la topologia debole (rispettivamente la topologia debole *).

Corollario 3.2.6. *Sia E spazio di Banach separabile, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata in E^*. Allora esiste una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ che converge nella topologia $\sigma(E^*, E)$.*

Dimostrazione. Senza ledere di generalità possiamo supporre che $\|f_n\| \leq 1 \quad \forall n$. Grazie teorema 2.1.4 e al teorema 3.2.4 possiamo dire che B_{E^*} è compatta e metrizzabile in $\sigma(E^*, E)$. Quindi possiamo utilizzare le equivalenze viste nel teorema 2.1.6 e concludere. $\square$

Teorema 3.2.7. *Sia E spazio di Banach riflessivo, sia poi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata in E. Allora esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ che converge nella topologia $\sigma(E, E^*)$.*

Dimostrazione. Sia M_0 lo spazio vettoriale generato dagli x_n e sia $M = \overline{M_0}$. Segue che, analogamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema 3.2.4, M è separabile. Inoltre grazie alla proposizione 3.1.4 si ha che M è riflessivo. Usando il teorema 3.1.3 e il teorema 3.2.5 si ha che B_M è compatta e inoltre, utilizzando anche il corollario 3.2.3, metrizzabile nella topologia $\sigma(M, M^*)$. Quindi, grazie alle equivalenze nel teorema 2.1.6, possiamo trovare una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $x_{n_k} \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(M, M^*)$. Infine $x_{n_k} \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(E, E^*)$ poiché le due topologie sono equivalenti. $\square$

Esempio 5. A questo punto fare un esempio di spazio non riflessivo risulta estremamente semplice. Nell'esempio 4 abbiamo costruito uno spazio di Banach $E = \ell^\infty$, un insieme $X = B_{E^*}$ compatto in $\sigma(E^*, E)$ ed abbiamo mostrato che esiste almeno una successione di X dalla quale non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione convergente in $\sigma(E^*, E)$. Mostriamo ora che questo spazio non è riflessivo. Se per assurdo lo fosse grazie al corollario 3.1.5, alla proposizione 3.1.4 e al teorema 3.2.7 otterremmo che da ogni successione in X sarebbe possibile estrarre una sottosuccessione convergente, ma ciò è ovviamente in contraddizione con quanto mostrato in precedenza.

3.3 Spazi uniformemente convessi

Definizione 3.3. Diciamo che uno spazio di Banach E è uniformemente convesso se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x, y \in E, \ \|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1 \text{ e } \|x-y\| > \epsilon \ \Rightarrow \ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1-\delta.$$

Osservazione 13. L'uniforme convessità è una proprietà geometrica della sfera unitaria che esprime il seguente concetto: se tracciamo un segmento di lunghezza $\epsilon > 0$ nella sfera unitaria, allora il punto medio necessariamente è contenuto nella sfera di raggio $1 - \delta$ per qualche δ.

Esempio 6. Consideriamo $E = \mathbb{R}^2$. Osserviamo che la norma

$$\|x\|_2 = \left[\ |x_1|^2 + |x_2|^2 \ \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

è uniformemente convessa.

Invece le norme

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \tag{3.9}$$

$$\|x\|_\infty = \max \left(\ |x_1|, |x_2| \ \right) \tag{3.10}$$

non sono uniformemente convesse.

Essendo l'uniforme convessità una proprietà geometrica ciò è ovviamente deducibile dalle rappresentazioni delle sfere unitarie nel piano.

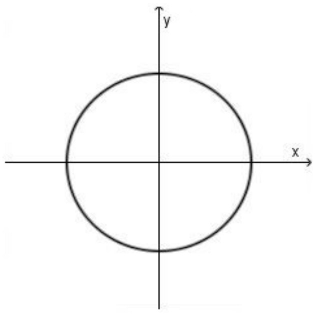

Figura 3.1: Sfera unitaria in $\| \|_2$

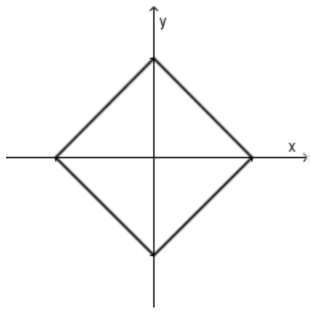

Figura 3.2: Sfera unitaria in $\| \|_1$

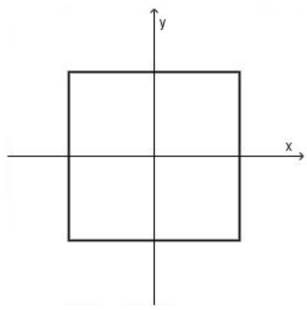

Figura 3.3: Sfera unitaria in $\| \|_\infty$

Mostriamolo ora in modo più formale.
(3.8) Siano $\|x\|_2 \leq 1, \leq \|y\|_2 \leq 1$ tali che

$$\|x-y\|_2 = \left[\ |x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2\ \right]^{\frac{1}{2}} > \epsilon.$$

$$\Rightarrow\ |x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 > \epsilon^2\ \Rightarrow\ x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 > \epsilon^2.$$

$$\Rightarrow\ 2x_1y_1 + 2x_2y_2 < \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \epsilon^2.$$

Completando i quadrati a sinistra otteniamo

$$\frac{|x_1+y_1|^2 + |x_2+y_2|^2}{2} < \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \frac{\epsilon^2}{2}.$$

Estraendo la radice quadrata abbiamo

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 < \left(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \frac{\epsilon^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponendo $1-\delta = (\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - \frac{\epsilon^2}{2})^{\frac{1}{2}}$ si ottiene l'uniforme convessità.
(3.9) Ci è sufficiente prendere $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ e si ha che $\|x\|_1 = 1$ e $\|y\|_1 = 1$. Inoltre

$$\|x-y\|_1 = \|(1,-1)\|_1 = |1| + |-1| = 2 > \epsilon \quad \forall \epsilon \leq 1,$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1 = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\|_1 = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| = 1 > 1-\delta \quad \forall \delta > 0.$$

(3.10) Anche in questo caso basta scegliere $x = (1, 1)$, $y = (1, 0)$ e avremo $\|x\|_\infty = 1$ e $\|y\|_\infty = 1$. Segue che

$$\|x - y\|_\infty = 1 > \epsilon \quad \forall \epsilon \leq 1,$$
$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_\infty = \left\| \left(1,\ \frac{1}{2}\right) \right\|_\infty = 1 > 1 - \delta \quad \forall \delta > 0.$$

Teorema 3.3.1 (Milman-Pettis)**.** *Se uno spazio di Banach è uniformemente convesso allora è riflessivo.*

Dimostrazione. Prendiamo $\xi \in E^{**}$ tale che $\|\xi\| = 1$, vogliamo mostrare che $\xi \in J(B_E)$. Dall'osservazione 11 si ha che $J(B_E)$ è chiuso in $B_{E^{**}}$ per la topologia forte, quindi è sufficiente mostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists x \in B_E : \ \|\xi - J(x)\| \leq \epsilon. \tag{3.11}$$

Fissiamo ora $\epsilon > 0$ e prendiamo come $\delta > 0$ lo stesso che troviamo nell'uniforme convessità. Scegliamo poi $f \in E^*$ con $\|f\| \leq 1$ e in modo che

$$1 > \langle \xi, f \rangle > 1 - \frac{\delta}{2}. \tag{3.12}$$

Consideriamo

$$V = \left\{ \eta \in E^{**} : \ |\langle \eta - \xi, f \rangle| < \frac{\delta}{2} \right\}$$

intorno di ξ per la topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$.
Grazie al Lemma 3.1.2 $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{**}}$ rispetto a $\sigma(E^{**}, E^*)$ e da ciò segue che $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$, cioè per qualche $x \in B_E$ $J(x) \in V$. Vogliamo mostrare che questo x soddisfa (3.11).
Supponiamo per assurdo che $\|\xi - J(x)\| > \epsilon$, ovvero $\xi \in (J(x) + \epsilon B_{E^{**}})^C = W$. Ovviamente anche W è un intorno di ξ nella topologia $\sigma(E^{**}, E^*)$ e ciò segue dalla chiusura di $B_{E^{**}}$ in $\sigma(E^{**}, E^*)$. Usando nuovamente il lemma 3.1.2 abbiamo che $V \cap W \cap J(B_E) \neq \emptyset$.

$$\Rightarrow \ \exists y \in B_E : J(y) \in V \cap W.$$

Da $J(x)$, $J(y) \in V$ abbiamo

$$|\langle f, x \rangle - \langle \xi, f \rangle| < \frac{\delta}{2}, \tag{3.13}$$

$$|\langle f, y\rangle - \langle \xi, f\rangle| < \frac{\delta}{2}. \tag{3.14}$$

Sommando (3.13) e (3.14) viene

$$2\langle \xi, f\rangle < \langle f, x+y\rangle + \delta \le \|f\|\|x+y\| + \delta \le \|x+y\| + \delta.$$

Ora ricordando che vale la (3.12) si ottiene

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| + \frac{\delta}{2} > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta.$$

Dall'uniforme convessità viene $\|x-y\| \le \epsilon$, ma ciò è assurdo, poiché $J(y) \in W$. □

Proposizione 3.3.2. *Sia E spazio di Banach uniformemente convesso. Sia poi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in E tale che $x_n \rightharpoonup x$ in $\sigma(E, E^*)$ e $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \le \|x\|$. Allora $x_n \to x$ in norma.*

Dimostrazione. Se $x = 0$ si ottiene il risultato banalmente.
Se $x \neq 0$, consideriamo $\lambda_n = \max(\|x_n\|, \|x\|)$, $y_n = \lambda_n^{-1} x_n$ e $y = \|x\|^{-1} x$.
Si ha che $\lambda_n \to \|x\|$; se $\lambda_n = \|x\|$ ciò è ovvio.
Invece se $\lambda = \|x_n\|$ segue dalla proposizione 1.2.5 che

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \le \|x\|,$$

$$\Rightarrow \|x\| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Inoltre se $x_n \rightharpoonup x$ debolmente e $\lambda_n \to \|x\|$ allora $y_n \rightharpoonup y$ debolmente.
Dal fatto che $\frac{y_n+y}{2} \rightharpoonup y$ debolmente e usando nuovamente la proposizione 1.2.5 si ottiene

$$\|y\| \le \liminf_{n\to\infty} \left\|\frac{y_n+y}{2}\right\|. \tag{3.15}$$

Segue dalle definizioni che $\|y\| = 1$ e $\|y_n\| \le 1$, quindi $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \le \left\|\frac{y_n}{2}\right\| + \left\|\frac{y}{2}\right\| \le 1$. Usando (3.15) si ha $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \to 1$.
Dall'uniforme convessità viene $\|y_n - y\| \to 0$ e conseguentemente $x_n \to x$ in norma. □

Esempio 7. Come esempi di spazi riflessivi citiamo gli spazi di Hilbert, la cui prova è basata solo sul teorema di rappresentazione di Rietz, e gli spazi L^p. Mostriamo ora che L^p con $p \geq 2$ è riflessivo.
Diamo per nota la seguente disuguaglianza in $\mathbb{R}$ per $p \geq 2$

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Siano f e g due funzioni arbitrarie a valori in $\mathbb{R}$ tali che $f, g \in L^p$. Dalla (3.16) sostituendo $a = f(x)$ e $b = g(x)$ e integrando a destra e sinistra otteniamo per $p \geq 2$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) \quad \forall f, g \in L^p. \tag{3.17}$$

Prendiamo $\epsilon > 0$ e $f, g \in L^p$ tali che $\|f\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ e $\|f - g\|_p > \epsilon$.
La (3.17) diventa

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p.$$

Possiamo concludere che $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p < 1 - \delta$ con $\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} > 0$. Si ottiene che L^p è uniformemente convesso e quindi grazie al teorema 3.3.1 è riflessivo per $p \geq 2$.

Bibliografia

[1] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, 1983, *Universitext, Springer, New York.*