

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**UN MODELLO DI PERCEZIONE DEL
COLORE, ESPRESSO DA UN
PROBLEMA DI CAUCHY IN SPAZI DI
BANACH**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
GIOVANNA CITTI

Presentata da:
ANDREA CELESTE
CAGNACCI

II Sessione
Anno Accademico 2014-2015

Così si potesse dimezzare ogni cosa intera, - disse mio zio coricato bocconi sullo scoglio, carezzando quelle convulse metà di polpo, - così ognuno potesse uscire dalla sua ottusa e ignorante interezza. Ero intero e tutte le cose erano per me naturali e confuse, stupide come l'aria; credevo di vedere tutto e non era che la scorza. Se mai tu diventerai metà di te stesso, e te l'auguro, ragazzo, capirai cose al di là della comune intelligenza dei cervelli interi. Avrai perso metà di te e del mondo, ma l'altra metà rimasta sarà mille volte più profonda e preziosa. E tu pure vorrai che tutto sia dimezzato e straziato a tua immagine, perché bellezza e sapienza e giustizia ci sono solo in ciò che è fatto a brani.

Italo Calvino, Il visconte dimezzato.

Introduzione

Uno degli scopi della tesi è studiare un modello matematico di percezione del colore. Noi ci concentreremo su processi che avvengono nella retina, e in corteccia V1, perché la visione è frutto di complessi meccanismi che iniziano con la percezione della luce nel bulbo oculare, e proseguono nella corteccia visiva, che costituisce gran parte della corteccia corticale. Poiché il processo visivo è frutto di questi meccanismi, ne consegue

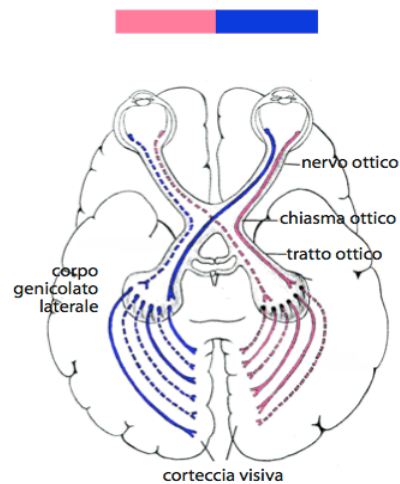


Figura 1: Modello del sistema visivo.

che gli oggetti che percepiamo non coincidono completamente con gli oggetti reali. Per questo esseri viventi diversi percepiscono i colori con modalità diverse.

Oggi, grazie alle moderne tecniche di neuroimaging, che consentono una descrizione dettagliata della corteccia, è possibile formulare modelli matematici di corteccia visiva e giustificare su basi neurofisiologiche questi fenomeni percettivi.

In questa tesi presenteremo un modello introdotto da Faye e Faugeras in [1] che giustifica il fenomeno della visione a colori sulla base delle funzionalità dell'apparato visivo.

La tesi è organizzata in questo modo:

- ⊗ Nel primo capitolo dedicheremo una prima parte per l'architettura funzionale della retina da un punto di vista anatomico. Descriveremo lo spazio del colore ed introdurremo una metrica indotta dalla percezione visiva. Infine osserveremo che la metrica è codificata nelle connessioni neurali e descriveremo la propagazione del segnale visivo che presiede alla percezione in termini di un problema di Cauchy.
- ⊗ Il secondo capitolo conterrà un'introduzione al problema di Cauchy in spazi di dimensione finita alla quale seguirà l'analisi della stabilità con il metodo Lyapunov.
- ⊗ Il terzo capitolo si concentrerà sul problema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy in spazi di Banach, per poi studiare quello proposto da Faye e Faugeras.
- ⊗ Infine l'ultimo capitolo si occuperà della stabilità dell'equazione considerata in spazi di Banach.

Indice

Introduzione	i
1 Lo spazio del colore e la struttura della retina	3
1.1 Il bulbo oculare	3
1.2 Struttura della retina: coni e bastoncelli	5
1.3 La percezione del colore e lo spazio del colore	8
1.4 La distanza nello spazio del colore: le ellissi di Mac-Adam	10
1.5 L'elaborazione del segnale in corteccia visiva primaria	12
1.6 L'equazione fondamentale di percezione cromatica	14
2 Il metodo Lyapunov in dimensione finita	15
2.1 Stabilità per sistemi lineari autonomi	16
2.2 Il metodo Lyapunov	17
2.3 Il metodo di linearizzazione	20
3 Esistenza e unicità della soluzione in spazi di Banach	23
3.1 Il problema di Cauchy in spazi di Banach	23
3.2 Il problema di Cauchy nel modello di Faye e Faugeras	24
4 Il metodo di Lyapunov in spazi di Banach	27
4.1 La stabilità con il metodo Lyapunov in spazi di Banach	27
4.2 La linearizzazione negli spazi di Banach	30
4.3 Stabilità del problema considerato	30
Bibliografia	35

Elenco delle figure

1	Modello del sistema visivo.	i
1.1	Sezione orizzontale attraverso il globo oculare	3
1.2	Stratificazione della retina	5
1.3	Spettro di assorbimento per coni e bastoncelli	6
1.4	Cellule doppie opponenti per il colore	8
1.5	Standard CIE31 per la percezione cromatica	9
1.6	Diagramma di MacAdam	11
1.7	Organizzazione dei blobs	12
1.8	Organizzazione corticale	13
1.9	Diagramma di connettività con nuclei a forma di cappello messicano	13

Capitolo 1

Lo spazio del colore e la struttura della retina

1.1 Il bulbo oculare

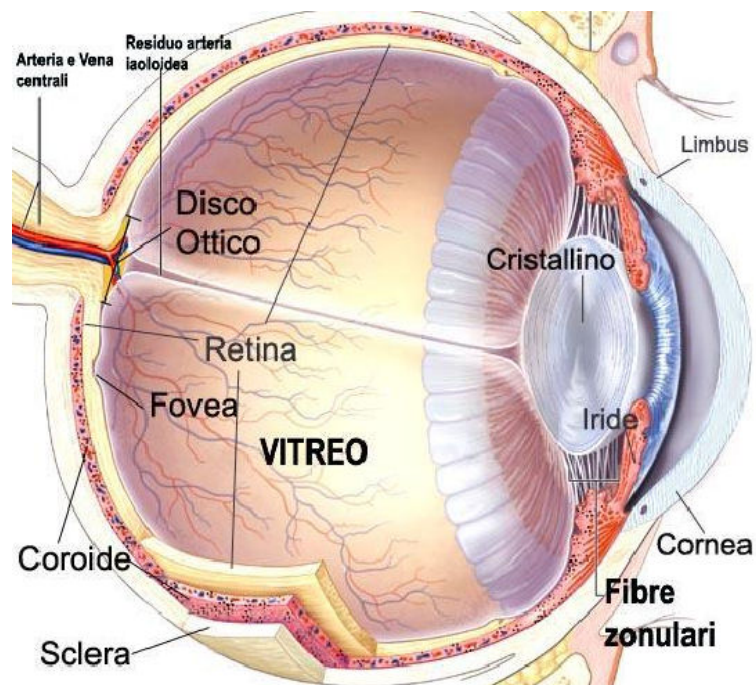


Figura 1.1: Sezione orizzontale attraverso il globo oculare.

L'occhio propriamente detto, cioè il *bulbo oculare*, è una sfera cava, la cui parete è costituita da tre tonache, o membrane, e il cui contenuto è dato da fluidi detti umori, che concorrono a mantenerne la forma.

La lente, o *crystallino*, il principale dispositivo di messa a fuoco dell'occhio, essendo disposta verticalmente nella cavità dell'occhio, la suddivide in due camere. Esaminiamo ora la descrizione delle singole tonache.

La *tonaca esterna (sclera)*, è una membrana connettivale spessa, bianca, a funzione protettiva; prende anche il nome di tonaca fibrosa, ed è visibile nella sua parte anteriore come "bianco dell'occhio". La parte centrale anteriore della sclera è modificata e appare trasparente come il vetro; è questa la *cornea*, attraverso la quale entra la luce. La cornea riceve molte terminazioni nervose sensitive, la maggior parte delle quali sono fibre dolorifiche, e quando la si tocca si determina ammiccamento e lacrimazione. La cornea è la parte più vulnerabile dell'occhio perché è la più sporgente, ma fortunatamente ha una grande capacità di autoriparazione. La cornea, inoltre, è la sola formazione del corpo che si può trapiantare senza pericolo di rigetto perché, essendo priva di vasi sanguiferi, non può essere raggiunta dal sistema immunitario.

La *tonaca media (coroide)* è una membrana ricca di vasi sanguiferi, ha funzione nutritiva, che contiene cellule pigmentate scure. Il pigmento impedisce la riflessione della luce all'interno dell'occhio. Anteriormente la coroide si modifica per formare due strutture muscolari lisce, i *corpi ciliari*, che contengono in sospensione la *lente* (o cristallino), e l'*iride*. L'iride è pigmentata e presenta al centro un foro circolare, la *pupilla*, che lascia passare la luce. L'iride, è formata da fibre muscolari lisce disposte circolarmente e radialmente, che costituiscono il diaframma dell'occhio (simile a quello di una macchina fotografica). Infatti l'iride regola la quantità di luce che entra nell'occhio, così da consentire di vedere in modo ottimale in varie condizioni di luminosità. Nella visione da vicino e in condizioni di luminosità, la muscolatura circolare si contrae e la pupilla si restringe; nella visione da lontano con scarsa luminosità si contraggono le fibre radiali per allargare (dilatare) la pupilla, il che permette l'entrata nell'occhio di una maggiore quantità di luce.

La *tonaca interna* è la pallida e delicata *retina*; è questa la membrana sensitiva dell'occhio che si estende solo fino al corpo ciliare.

1.2 Struttura della retina: coni e bastoncelli

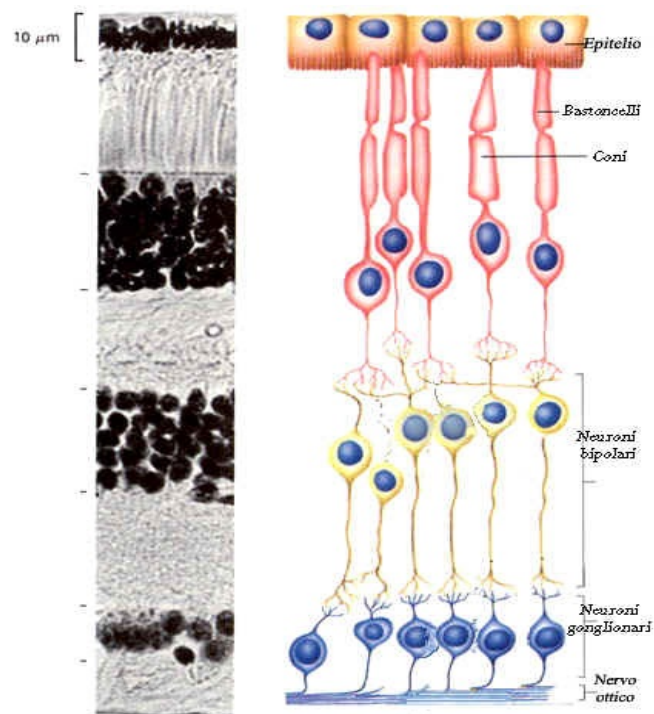


Figura 1.2: Stratificazione della retina.

La *retina* è suddivisa in 10 strati di neuroni e di cellule, il secondo strato contiene i *bastoncelli* e i *coni*, più precisamente detti *fotorecettori* perché sono stimolati dalla luce. I segnali elettrici dai fotorecettori vengono trasmessi attraverso una catena bineuronale (cellule bipolari e poi cellule gangliari), quindi abbandonano la retina mediante il nervo ottico sotto forma di impulsi nervosi che alla fine raggiungono la corteccia visiva. Il risultato è la visione.

I fotorecettori sono distribuiti su tutta la retina sensitiva tranne del punto in cui il nervo ottico (formato dagli assoni delle cellule gangliari) emerge dal bulbo oculare; questa zona è denominata disco ottico o punto cieco; infatti quando la luce proveniente da un oggetto

è focalizzata nel disco, scompare dalla visione e quindi non si vede.

I bastoncelli sono più numerosi alla periferia, ossia ai margini della retina e diminuiscono di numero verso il centro; essi permettono di vedere non a colori, ma con diverse tonalità di grigio in condizioni di luce crepuscolare. È noto che i bastoncelli contengono un composto pigmentato: la *rodopsina* (porpora visiva) che si forma dalla proteina opsina combinata con il retinene che è un derivato della vitamina A.

I coni sono recettori che in condizione di luce piena, forniscono un'elevata capacità di discriminazione visiva, consentendo di vedere a colori nei dettagli il mondo circostante. Essi sono più fittamente addensati nel centro della retina e il loro numero diminuisce verso la periferia. Lateralmente al punto cieco si trova la *fovea centrale*, una minuscola depressione che contiene soltanto coni; di conseguenza questa zona è l'area di massima acuità visiva, ossia il punto dove la vista è più acuta, e difatti tutto ciò che si vuole vedere distintamente viene focalizzato sulla fovea. Anche i coni contengono una sostanza chimica fotosensibile, la *iodopsina* e probabilmente anche altre, ma quali esse siano in realtà non è ben noto ad oggi.

Esistono tre tipi di coni, ciascuno sensibile ad un intervallo di lunghezze d'onda, centrato su una particolare lunghezza d'onda dello spettro luminoso. Si chiamano coni S, M, L

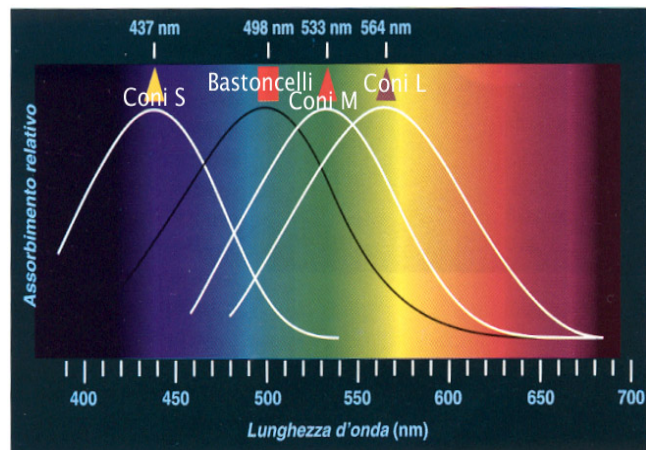


Figura 1.3: Spettro di assorbimento per coni e bastoncelli.

perché sensibili a lunghezze d'onda rispettivamente corte, medie o lunghe. Precisamente i coni S rispondono massimamente alla luce blu (437 nm), i coni M alla luce verde (533 nm), mentre i coni L rispondono massimamente a lunghezze d'onda di 564 nm, che

includono sia il verde che il rosso.

I coni non sono tuttavia sensibili solo alla lunghezza d'onda centrale, ma rispondono con intensità minore ad un intervallo di lunghezze centrato attorno a quella centrale. Pertanto a tonalità purpuree e violette rispondono con intensità non massimale sia i coni S e L, rendendo possibile alla corteccia visiva l'identificazione di questi colori.

Al di fuori dell'intervallo compreso tra 380 e 780 *nm*, che consideriamo quello della luce, non percepiamo nulla, per questo motivo non siamo in grado di vedere le radiazioni infrarosse e ultraviolette.

In aggiunta a questa struttura retinica si osserva la presenza di particolari cellule gangliari dette "doppie opponenti". Queste cellule si distinguono in:

- . cellule per l'intensità luminosa (di tipo M),
- . cellule per le informazioni cromatiche (di tipo P).

Le cellule di tipo P, a loro volta, si dividono in:

- * cellule eccitate da coni per il rosso e inibite da coni per il verde, e viceversa (opponenti per il rosso-verde),
- * cellule eccitate da coni per il blu e inibite da coni per il rosso e verde, e viceversa (opponenti per il blu-giallo).

Queste cellule prendono in input l'output dei fotorecettori e forniscono una migliore determinazione del colore, in particolare permettono 2 cose:

1. Una adeguata e precisissima percezione dei contrasti: l'alternarsi e il sovrapporsi dei campi recettivi di queste stesse cellule, produce zone ad elevatissima discriminazione luminosa.
2. Una percezione dei cambiamenti di illuminazione: le cellule centro-on riescono a percepire molto bene i rapidi aumenti di illuminazione; al contrario le cellule centro-off percepiscono al meglio le rapide diminuzioni di illuminazione.

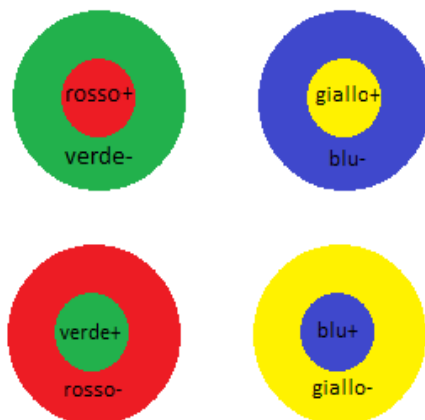


Figura 1.4: Cellule doppie opponenti per il colore.

1.3 La percezione del colore e lo spazio del colore

Il ruolo dei tre tipi di coni, e la loro sensibilità a stimoli luminosi di lunghezze d'onda differenti è stato individuato, tra i primi, da Von Helmholtz, che ha proposto un primo modello di percezione del colore. Questo modello si presta ad una trattazione matematica e ad un'accurata rappresentazione quantitativa del colore, ed è basato sugli esperimenti di Wright e Guild, effettuati rispettivamente nel 1928 e nel 1931. In tali esperimenti una persona osservava una zona divisa in due: in una metà del campo visivo veniva proiettato un campione di luce monocromatica di lunghezza d'onda conosciuta e nell'altra metà venivano proiettate tre luci monocromatiche di intensità variabile. Regolando l'intensità di queste tre luci colorate, l'osservatore doveva cercare di riprodurre un colore che apparisse uguale a quello proiettato nell'altra metà del campo visivo. Il risultato di questo esperimento era provare che combinando tre colori era possibile ottenere tutti i colori fondamentali dello spettro cromatico. Sulla base degli esperimenti di Wright e Guild, nel 1931 la CIE formalizzò le caratteristiche di percezione cromatica dell'osservatore standard, tramite le curve di sensibilità standard. Si tratta di tre funzioni (visualizzate nella figura (1.5)) \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} definite nell'intervallo di lunghezze d'onda $[380,780]$ nm. A partire dalle curve di sensibilità standard il CIE introdusse un metodo univoco per convertire la

radianza spettrale di una radiazione elettromagnetica compresa nello spettro luminoso, in tre numeri X, Y, Z detti valori di tristimolo del segnale luminoso. Precisamente

$$X = K_{max} \int_{380}^{780} L_e(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda;$$

$$Y = K_{max} \int_{380}^{780} L_e(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda;$$

$$Z = K_{max} \int_{380}^{780} L_e(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda$$

dove $K_{max} = 683 \text{ lmW}^{-1}$ è il valore massimo della curva di efficacia luminosa, L_e indica lo spettro della sorgente luminosa e $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ lo spettro di assorbimento per il diverso tipo di cono. Al fine di separare l'informazione inerente la quantità di energia della luce

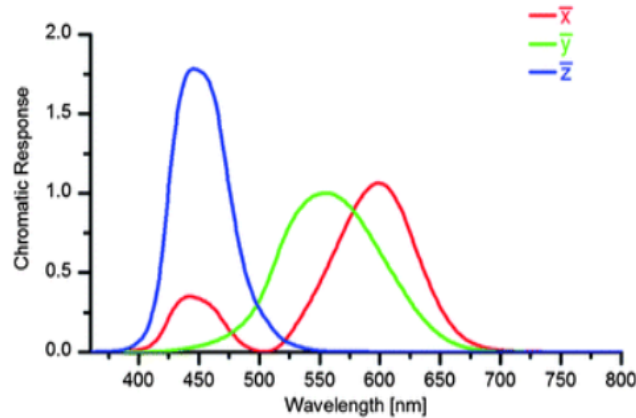


Figura 1.5: Standard CIE31 per la percezione cromatica.

percepita dalla sola informazione inerente la cromaticità, la CIE ha poi introdotto le coordinate cromatiche x, y :

$$x = \frac{X}{X + Y + Z}, y = \frac{Y}{X + Y + Z}.$$

Matematicamente x e y risultano dalla trasformazione proiettiva dei valori di tristimolo

in un piano bidimensionale. Lo spazio del colore che ne deriva, caratterizzato dalle coordinate x , y e Y , è conosciuto come $CIExyY$. Quindi tutte le caratteristiche di un segnale luminoso possono essere individuate tramite la terna di valori (x, y, Y) , che individua univocamente il colore tramite le coordinate di cromaticità e la luminosità (l'energia) dello stesso tramite la luminanza totale Y . Le coppie (x, y) e le terne di valori di tristimolo (X, Y, Z) possono essere considerate come le coordinate di uno spazio cromatico bi o tri-dimensionale.

1.4 La distanza nello spazio del colore: le ellissi di Mac-Adam

Purtroppo né lo spazio (x, y) , né quello dei valori del tristimolo, sono lineari nella discriminazione dei colori e non si prestano ad una valutazione percettiva della differenza tra due tinte. In altre parole, ad uguali distanze nello spazio non corrispondono uguali differenze cromatiche percettive e questo vale anche per il diagramma di cromaticità. Ciò è stato espresso da MacAdam, con opportune ellissi che indicano zone di indistinguibilità del colore determinate sperimentalmente nello spazio cromatico (x, y) . L'esperimento di MacAdam infatti consisteva nel sottoporre ad un osservatore un colore e chiedergli di individuare un colore ad esso uguale analizzando una serie di colori campione. Ogni differenza tra il colore target e il colore campione percepito come uguale, fu rappresentata sul diagramma cromatico CIE 1931 come un punto. L'unione di questi punti forma un'ellisse. Lo stesso esperimento fu ripetuto su 25 colori target e ne risultarono quindi 25 ellissi chiamate ellissi di MacAdam. Ogni ellisse di MacAdam si suddivide in 7 steps chiamati standard deviation of color matching (SDCM). Per l'occhio umano, le variazioni di colore entro il 3° step dell'ellisse MacAdam sono impercettibili. Si può notare la diversa estensione e inclinazione nelle varie zone del diagramma. Dato che ogni punto del diagramma corrisponde ad una terna di stimolo, si può dedurre che, per esempio, nelle zone del verde rispetto al blu, un numero decisamente maggiore di triplette producono la stessa sensazione di colore o perlomeno sensazioni tra loro indistinguibili. Questo non vuole dire che gli esseri umani sono meno sensibili al verde rispetto al blu, bensì che le funzioni che mappano la distribuzione spettrale nella tripletta di stimolo non

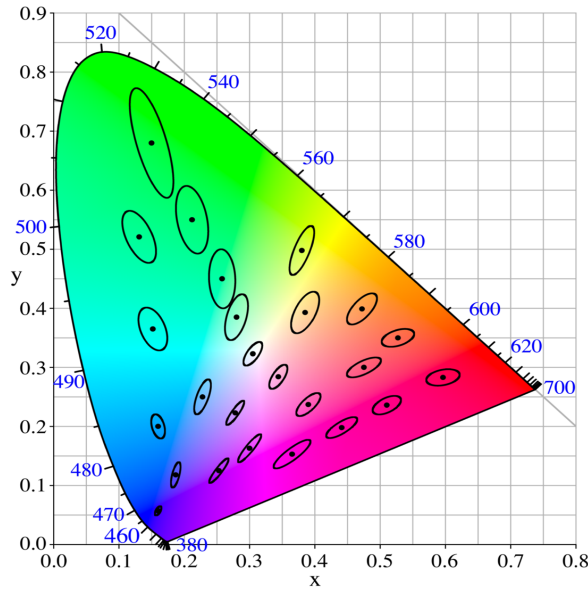


Figura 1.6: Diagramma di MacAdam.

sono percettivamente lineari. Una soluzione a questo problema potrebbe essere quella di deformare lo spazio (x, y) e renderlo più lineare percettivamente. Furono così proposti dal CIE altri due spazi cromatici: il Luv e il Lab. Nello spazio CIE Lab si ottengono i seguenti parametri:

$$L^* = 116\left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}} - 16$$

$$a^* = 500\left[\left(\frac{X}{X_n}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$b^* = 200\left[\left(\frac{Y}{Y_n}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{Z}{Z_n}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

dove X_n , Y_n e Z_n sono i valori del tristimolo CIE per il colore bianco. La differenza tra coppie di colori nello spazio CIE Lab è la distanza euclidea tra due punti nello spazio del colore. Per semplicità nelle seguenti sezioni denoteremo $r = (L^*, a^*, b^*)$ un elemento generale del nostro spazio e $d(r, r')$ la distanza tra due colori. La distanza nello spazio del colore si ottiene dalla formula

$$d(r, r') = \sqrt{(L^* - L_1^*)^2 + (a^* - a_1^*)^2 + (b^* - b_1^*)^2}.$$

1.5 L'elaborazione del segnale in corteccia visiva primaria

Il segnale visivo viene trasmesso dalla retina alla corteccia V1, che lo elabora, ed è organizzata in modo retinotopico, ovvero rispetta l'organizzazione spaziale e le distanze retiniche. Si suddivide in 6 strati, ciascuno deputato all'elaborazione di un specifico segnale. L'output dei coni viene elaborato nello strato 3 della corteccia, dove sono presenti strutture dette blob. Ogni blob è centrato all'interno di ogni colonna di dominanza oculare. Essi contengono cellule ad opponenza semplice e doppia. All'interno di ogni blob i neuroni avranno un'opponenza rosso/verde o giallo/blu, le due forme di opponenza non sono mescolate nello stesso blob. Queste osservazioni suggeriscono che ogni singolo blob è dedicato all'analisi di un solo sistema di opponenza cromatica.

I blob spesso sembrano essere appaiati. Il blob in una particolare colonna di dominanza oculare è connesso, mediante ponti al blob sito nella colonna oculare vicina. I ponti connettono blobs di diversa opponenza cromatica e le loro cellule non rispondono né al rosso/verde né al giallo/blu ma presentano una selettività spettrale combinata. Così, sembra che vi sia una rappresentazione dei colori misti in zona V1.

L'area che circonda i blobs processa il contrasto acromatico. Si nota così una se-

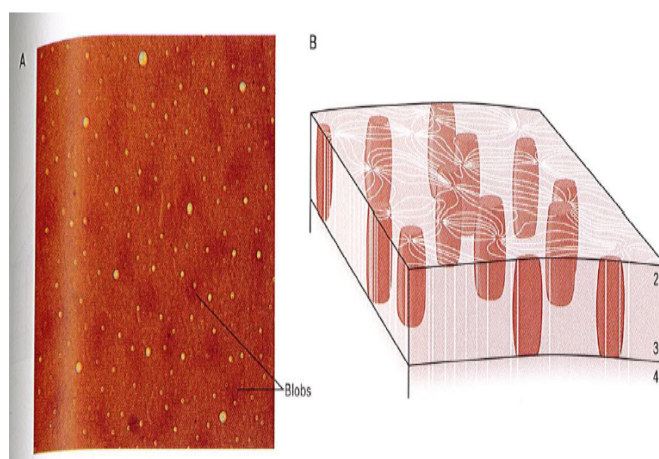


Figura 1.7: Organizzazione dei blobs.

gregazione dei sistemi cellulari nella codifica dell'immagine; alcune cellule sono dedite

alla percezione del contrasto cromatico, oltre alla visione acromatica e del movimento. L'esistenza delle cellule "doppie opponenti" nei blobs conferma l'ipotesi che questa zona

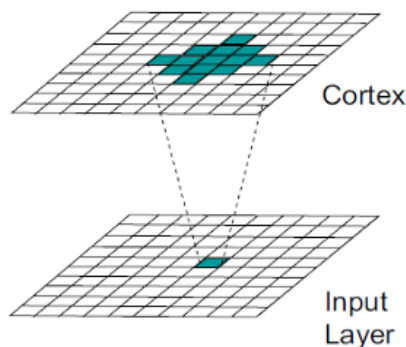


Figura 1.8: Organizzazione corticale.

tra ogni ipercolonna si occupi della percezione del contrasto cromatico.

Tra differenti sfere corticali troviamo connettività laterale. La connettività laterale presiede la propagazione dell'impulso visivo fra le diverse unità corticali, ricostruendo un'immagine unitaria dagli impulsi trasmessi singolarmente. Grazie alla connettività laterale ogni cellula riceve input che possono essere eccitatori o inibitori da diverse cellule dello stesso strato corticale. L'ipotesi di Faugeras è che la connettività possa essere rappresen-

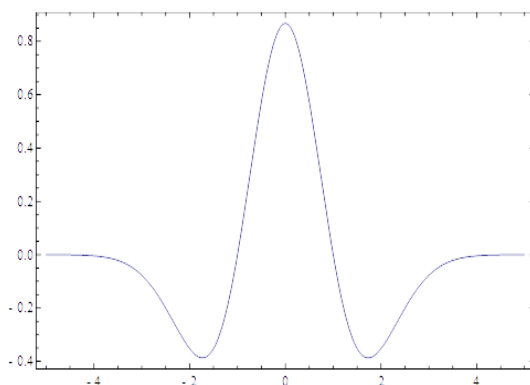


Figura 1.9: Diagramma di connettività con nuclei a forma di cappello messicano.

tata da nuclei a forma di cappello da messicano: questi descrivono un'interazione in cui unità con caratteristiche cromatiche simili vengono rinforzate, mentre con caratteristiche

cromatiche diverse si inibiscono reciprocamente. Nel modello di Faye e Faugeras i nuclei per la connettività avranno quindi la seguente forma:

$$W(r, r') = \frac{1}{\sigma_1} e^{-d(r, r')/\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} e^{-d(r, r')/\sigma_2} \quad \sigma_1 < \sigma_2.$$

1.6 L'equazione fondamentale di percezione cromatica

L'attività corticale, risultato della propagazione lungo la connettività dell'impulso visivo può essere descritta, non considerando i ritardi per la trasmissione del segnale, dalla seguente equazione integro-differenziale:

$$\partial_t u(r, t) = -u(r, t) + \int_{\mathcal{N}} W(r, r') S(u(r', t)) dr' + I_{ext}(r). \quad (1.6.1)$$

Supponiamo di avere n popolazioni di neuroni interagenti il cui stato è descritto dal loro potenziale di membrana u , un vettore di dimensione n . Sia la funzione $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $S(x) = [S_1(x_1), \dots, S_n(x_n)]^T$ in cui ciascuna S_i è sigmoideale e tale che $\forall i = 1, \dots, n$ S_i e S'_i sono positive e limitate. Denotiamo $S'_{im} = \sup_x S'_i(x)$, $S_m = \max_i \sup_x S_i(x)$, $DS_m = \max_i S'_{im}$ e la matrice $DS = \text{diag}(S'_i)$. La relazione tra la potenza di scarica v_i dell' i -esima popolazione e il suo potenziale di membrana u_i è data da $v_i = S_i(u_i)$.

L'insieme \mathcal{N} modella la popolazione di neuroni ed è un sottinsieme limitato di \mathbb{R}^3 . Le variabili r e r' sono riferite a \mathcal{N} (in particolare r sarà una terna del tipo (L^*, a^*, b^*) , vista la sezione sopra). W è una matrice $n \times n$ che descrive come la popolazione al punto r' influenza quella al punto r . Più precisamente $W_{ij}(r, r')$ descrive come la j -esima popolazione nel punto r' influenza la i -esima nel punto r , ed è stata modellata nella sezione precedente.

Infine I_{ext} è una corrente esterna che tiene conto di altre fonti di eccitazione.

Capitolo 2

Il metodo Lyapunov per la stabilità in dimensione finita

Richiamiamo dapprima la definizione di problema di Cauchy autonomo.

Definizione 2.1. Siano $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $u_0 \in \mathbb{R}^n$; poniamo $I = [t_0, t_0 + a]$ e $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^n; \|u - u_0\| \leq b\}$. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Definiamo problema di Cauchy autonomo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u) & t \in I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.0.1)$$

Definizione 2.2. Sia $t_0 \in J \subset I$. Si dice soluzione del problema (2.0.1) una funzione $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi(t) \in \Omega$ per ogni t , $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ per ogni $t \in J$ e $\varphi(t_0) = u_0$

Definizione 2.3. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, si dice lipschitziana nella variabile u se esiste una costante $K > 0$ tale che

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq K|u_1 - u_2| \quad \forall u_1, u_2 \in \Omega.$$

Teorema 1. Siano $a, b > 0$, $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^n; \|u - u_0\| \leq b\}$ con $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Sia poi $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana in u con costante di Lipschitz K tale che $M = \max_{\Omega} |f|$ e $c = \min\{a, b/M\}$. Allora esiste una ed una sola funzione $\varphi \in C^1([t_0, t_0 + c], \Omega)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u), & t_0 < t \leq t_0 + c \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

2.1 Stabilità per sistemi lineari autonomi

Nel seguito supporremo sempre che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sia Lipschitziana in u per studiare il problema di Cauchy autonomo

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Definizione 2.4. *Se il problema (2.1.1) ha una soluzione costante $\varphi(t) = u_0$ per ogni t , u_0 si dice punto di equilibrio.*

Per dare la definizione di stabilità, d'ora in avanti studieremo soluzioni del problema (2.1.1) definite per ogni $t \geq 0$.

Definizione 2.5. *Sia $\varphi \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

φ si dice stabile secondo Lyapunov se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni v_0 tale che $\|u_0 - v_0\| < \delta$, allora per la soluzione $\psi \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R}^n)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u) \\ u(0) = v_0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

vale $\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ per ogni $t \in [0, \infty)$.

Se poi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0$ allora φ si dice asintoticamente stabile. Ciò significherà che a piccole perturbazioni dei dati sono associate piccole variazioni delle soluzioni.

Teorema 2. *Si consideri il problema $\dot{u} = Au$ dove A è una matrice $n \times n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalori di molteplicità algebrica m_1, \dots, m_r . Sia*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{m_j} c^{ij} t^{i-1} e^{\lambda_j t}$$

la soluzione generale del sistema per ogni $t \geq 0$. Allora:

1. L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_j < 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$.

2. L'origine è un punto di equilibrio stabile, ma non asintoticamente $\Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda_j \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$ e tutti gli autovalori con parte reale nulla hanno molteplicità uno.

3. L'origine è instabile altrimenti.

Dimostrazione. 1) La soluzione φ è somma di addendi di tipo $ct^h e^{\lambda_j t}, c \in \mathbb{R}^n$.

\Leftarrow Se $\operatorname{Re}\lambda_j < 0 \quad \forall \lambda_j$ allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ e così 0 è asintoticamente stabile.

\Rightarrow Viceversa se 0 è asintoticamente stabile allora \nexists i tale che $\operatorname{Re}\lambda_i \geq 0$ infatti, se ce ne fossero, avrei soluzioni che non tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$, il che è assurdo.

2) \Leftarrow Data la soluzione del problema, si ha:

$ct^h e^{\lambda_j t}$ se $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, oppure $ce^{i\operatorname{Im}\lambda_j t}$ se $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$. Nel primo caso si ha convergenza a zero per $t \rightarrow +\infty$, nel secondo saranno invece neutralmente stabili.

\Rightarrow Viceversa se 0 è stabile gli addendi della soluzione possono essere solo del tipo sopra.

3) Se esistesse un autovalore λ_j tale che $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ oppure immaginari puri e non semplici, allora esisterebbero soluzioni del tipo $\varphi(t) = ce^{\lambda_j t}$ o $\varphi(t) = (c + c_1 t + \dots + c_{k_j-1} t^{k_j-1}) e^{i\operatorname{Im}\lambda_j t}$ la cui norma tende a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$. Inoltre $\varphi(0) = c$ e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\varphi$ è ancora soluzione con $\varphi(0) = \alpha c$. Così, partendo da un punto vicino a 0, si ha $\|\alpha c\| \rightarrow +\infty$ il che implica instabilità per 0.

Se 0 è instabile non potranno valere le condizioni agli autovalori di 1 e 2.

□

Definizione 2.6. Se l'origine è punto di equilibrio stabile o asintoticamente stabile, allora si dice che il sistema è stabile.

2.2 Il metodo Lyapunov

Definizione 2.7. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto contenente 0 e sia $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. La funzione V si dice funzione di Lyapunov per il problema (2.1.1) se valgono le condizioni seguenti:

$$1. V(0) = 0 \text{ e } V(u) > 0 \quad \forall u \in \Omega, u \neq 0$$

$$2. dV(u)(f(u)) \leq 0 \quad \forall u \in \Omega$$

Osservazione 1. L'espressione $dV(u)(f(u))$ è l'espressione formale che si ottiene derivando $V(\varphi(t))$, dove φ è soluzione di (2.1.1).

Teorema 3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitziana e tale che $f(0) = 0$.

a) Se esiste un aperto $\Omega_1 \subseteq \Omega$ intorno di 0 e una funzione V definita su Ω_1 , di Lyapunov per il sistema, allora 0 è punto di equilibrio stabile

b) Se $dV(u)(f(u)) < 0$ per ogni $u \in \Omega_1 \setminus \{0\}$, allora 0 è punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Per la dimostrazione ci serviamo di tre lemmi.

Lemma 1. (*Intrappolamento delle orbite*)

Sia Ω_2 aperto limitato tale che $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_1$ e $u_0 \in \Omega_2$. Sia $V(u_0) < a$ e $V(u) \geq a \quad \forall u \in \partial\Omega_2$. Allora la soluzione φ del problema $\dot{u} = f(u)$ con dato iniziale $\varphi(0) = u_0$ si può prolungare su tutto l'intervallo $[0, +\infty)$ e $\varphi(t) \in \Omega_2 \quad \forall t \geq 0$.

Dimostrazione. Se per assurdo esiste t tale che $\varphi(t)$ non appartiene a Ω_2 , sia $t^* = \inf\{t \geq 0 \mid \varphi(t) \notin \Omega_2\}$ il primo istante in cui esce da Ω_2 . Per la continuità di φ , $\varphi(t^*) \in \partial\Omega_2$ e per definizione di t^* si ha $\varphi(t) \in \Omega_2$ per $0 \leq t < t^*$. Posto $\Phi(t) := V(\varphi(t))$ si ha

$$\Phi(0) = V(\varphi(0)) = V(u_0) < a$$

e

$$\Phi(t^*) = V(\varphi(t^*)) \geq a$$

ma, nelle ipotesi di a),

$$\dot{\Phi}(t) = dV(\varphi(t))(\dot{\varphi}(t)) = dV(\varphi(t))(f(\varphi(t))) \leq 0 \quad \forall t \in [0, t^*]$$

e quindi ho un assurdo. □

Lemma 2. (*Escursione delle orbite*)

Sia Ω_2 aperto limitato contenente u_0 tale che $\overline{\Omega_2} \subseteq \Omega_1$. Sia $b \in \mathbb{R}^+$ e $dV(u)(f(u)) \leq -b \forall u \in \Omega_2$. Se la soluzione φ di $\dot{u} = f(u)$ con dato iniziale $\varphi(0) = u_0$ si può prolungare per ogni $t \geq 0$, allora φ esce da Ω_2 .

Dimostrazione. Per assurdo se $\varphi(t) \in \Omega_2 \forall t \geq 0$, allora

$$0 \leq V(\varphi(t)) = \int_0^t \frac{d}{ds}(V(\varphi(s)))ds + V(u_0) \leq -bt + V(u_0).$$

Per $t \rightarrow +\infty$ avrei $-bt + V(u_0) \rightarrow -\infty$, il che è assurdo. \square

Lemma 3. (*Attrattività dell'origine*)

Sia Ω_3 aperto e limitato contenente 0 ed u_0 tale che $\overline{\Omega_3} \subset \Omega_1$. Sia V funzione di Lyapunov per (2.1.1) con $dV(u)(f(u)) < 0$ in $\Omega_1 \setminus \{0\}$. Se la soluzione φ del problema $\dot{u} = f(u)$ con dato iniziale $\varphi(0) = u_0$ verifica $\varphi(t) \in \Omega_3$ per ogni $t \geq 0$, allora $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Essendo $dV(u)(f(u)) < 0$ per ogni $u \in \Omega_1 \setminus \{0\}$, se pongo $\Phi(t) = V(\varphi(t))$ sarà decrescente. Il mio fine è mostrare che $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = 0$. Se così non fosse, esisterebbe $a \in \mathbb{R}^+$ tale che $V(\varphi(t)) \rightarrow a$ per $t \rightarrow +\infty$ e $V(\varphi(t)) \geq a$ per ogni $t \geq 0$. Essendo $V(0) = 0$, esiste un intorno $B_\delta(0)$ tale che se $u \in \overline{B_\delta}(0)$ allora $V(u) \leq a/2$. Così necessariamente $\varphi(t) \in \Omega_3 \setminus \overline{B_\delta}(0)$ per ogni t . Sia $-b < 0$ il max di $dV(u)(f(u))$ su $\overline{\Omega_3} \setminus B_\delta(0)$, per il lemma 2 allora $\varphi(t)$ esce da $\Omega_3 \setminus \overline{B_\delta}(0)$ ma non le è permesso farlo. Di conseguenza

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = 0.$$

Poiché $\varphi(t)$ è limitata, da ogni successione possiamo estrarre una sotto-successione convergente, il cui limite deve essere 0 perché V si annulla solo in 0 . Quindi $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. \square

Definizione 2.8. Se un punto di equilibrio u_0 è asintoticamente stabile, si chiama bacino di attrazione di u_0 l'insieme

$\mathcal{O}(u_0) := \{v_0 \in \Omega \mid \text{la soluzione } \psi \text{ del problema di Cauchy con dato iniziale } v_0 \text{ verifica}$

$$\psi(t) \rightarrow u_0 \text{ per } t \rightarrow +\infty\}$$

Osservazione 2. Nelle ipotesi di questo lemma si avrà come conseguenza che Ω_3 è contenuto nel bacino di attrazione di 0.

Possiamo dunque ora dimostrare il nostro teorema grazie ai tre lemmi sopra enunciati.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\Omega_2 := B_\varepsilon(0) \subset \Omega_1$, $a = \min_{\partial\Omega_2} V$ so che $\partial\Omega_2$ è compatto e che V è continua positiva, allora anche a è ben definito e positivo. Poiché $V(0) = 0$, esiste $B_\delta(0)$ tale che $V(u) \leq a/2 \forall u \in B_\delta(0)$. Per il lemma 1 $\forall u_0 \in B_\delta(0)$, la soluzione di (2.1.1) φ è prolungabile su $[0, +\infty)$ e non esce da $B_\varepsilon(0)$. Così 0 è stabile e se $dV(u)(f(u)) < 0 \forall u \in \Omega_1 \setminus \{0\}$ l'asintotica stabilità segue dal lemma 3 con $\Omega_3 = B_\varepsilon(0)$. \square

2.3 Il metodo di linearizzazione

Per un sistema lineare autonomo la stabilità è risolta col teorema 2 e 3. Nel caso non lineare, invece, si procede sostituendo il sistema originale con uno lineare. L'approssimazione è efficace solo nell'intorno del punto di equilibrio e si avrà quindi una sua validità di tipo locale.

Teorema 4. *Sia Ω aperto di \mathbb{R}^n contenente 0, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $f(u_0) = 0$. Sia*

$$\dot{u} = f(u), \quad u(0) = u_0 \tag{2.3.1}$$

un sistema autonomo. Se A è la Jacobiana di f in u_0 , la funzione f avrà sviluppo di Taylor

$$f(u) = A(u - u_0) + o(u - u_0) \text{ per } u \rightarrow u_0. \tag{2.3.2}$$

Definizione 2.9. *Chiamiamo sistema linearizzato associato a (2.3.1) nel punto u_0*

$$\dot{u} = Au. \tag{2.3.3}$$

Nel seguito supporremo sempre $u_0 = 0$.

Teorema 5. *Se 0 è asintoticamente stabile per il sistema linearizzato (2.3.3) allora lo sarà anche per il sistema originale.*

Per dimostrare il teorema ci serviremo di un lemma.

Lemma 4. *Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale strettamente negativa allora esiste Q matrice $n \times n$ simmetrica definita positiva tale che $Q(A+A^T)$ è definita negativa. Nel caso A simmetrica gli autovalori sono reali, quindi è definita negativa e sceglierò $Q = I_n$.*

Dimostrazione. Se 0 è asintoticamente stabile per (2.3.3) allora, per il Teorema 2, gli autovalori di A avranno parte reale negativa. Sia Q come nel lemma 4 e $V(u) = \langle Qu, u \rangle$ forma quadratica def. positiva. Calcolo $dV(u)(f(u))$:

$$dV(u)(f(u)) = 2 \langle Qu, Au \rangle + 2 \langle Qu, o(u) \rangle$$

e per simmetria di Q

$$2 \langle Qu, Au \rangle = 2 \langle u, QAu \rangle = \langle u, Q(A + A^T)u \rangle .$$

Dato che Q è definita negativa, se λ_{max} è il più grande autovalore di $Q(A + A^T)$, è negativo, allora

$$2 \langle Qu, Au \rangle \leq \lambda_{max} \| u \|^2 .$$

Se fisso $\varepsilon > 0$, $\exists B_{\delta_\varepsilon}(0)$ tale che se $u \in B_{\delta_\varepsilon}(0)$ allora $\| o(u) \| \leq \varepsilon \| u \|$. Inoltre, ponendo c la norma di Q si avrà $\| Qu \| \leq c \| u \|$ e tramite Cauchy-Schwarz:

$$| \langle Qu, o(u) \rangle | \leq \| Qu \| \| o(u) \| \leq c\varepsilon \| u \|^2$$

e così $dV(u)(f(u)) \leq (\lambda_{max} + c\varepsilon) \| u \|^2$. Scegliendo ε arbitrariamente piccolo tale che $\lambda_{max} + c\varepsilon < 0$ avremo $dV(u)(f(u)) < 0$ in $B_{\delta_\varepsilon}(0) \setminus \{0\}$ e quindi per il teorema 3, 0 sarà asintoticamente stabile per il sistema originario. \square

Teorema 6. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto contenente 0 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitziana e tale che $f(0) = 0$.*

Se esiste un aperto $\Omega_1 \subseteq \Omega$ intorno di 0 e una funzione V definita su Ω_1 di Lyapunov per il sistema linearizzato, allora V sarà funzione di Lyapunov anche per il sistema assegnato (2.3.1).

Capitolo 3

Esistenza e unicità della soluzione in spazi di Banach

3.1 Il problema di Cauchy in spazi di Banach

Procediamo studiando l'esistenza della soluzione al problema di Cauchy, stavolta in spazi di Banach.

Teorema 7. (*Esistenza e unicità locale*)

Siano $a, b > 0$, E uno spazio di Banach, $I = [t_0, t_0 + a]$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\Omega = \{u \in E; \|u - u_0\| \leq b\}$. Sia poi $f : \Omega \rightarrow E$ lipschitziana rispetto ad u con K costante di Lipschitz tale che $M = \max_{\Omega} f$ e $c = \min\{a, b/M\}$. Allora esiste una ed una sola funzione $\varphi \in C^1([t_0, t_0 + c], \Omega)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u), & t_0 < t \leq t_0 + c \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Osservazione 3. In generale il problema (3.1.1) ha solo soluzioni locali ma con l'ipotesi che f sia Lipschitziana e del tipo $f(u) = -u + G(u)$ dove G funzione lipschitziana, allora si assicura l'esistenza in grande.

Teorema 8. (*Esistenza e unicità in grande*)

Sia E uno spazio di Banach e Ω sottoinsieme chiuso e convesso di E contenente u_0 . Sia

$G : \Omega \longrightarrow \Omega$ una funzione Lipschitziana, cioè sia

$$\|G(u_1) - G(u_2)\| \leq K_1 \|u_1 - u_2\| \quad \forall u_1, u_2 \in \Omega.$$

Allora il problema

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -u + G(u) & \text{per } t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione appartenente a $C^{(1)}(\mathbb{R}^+, \Omega) \cap C(\overline{\mathbb{R}^+}, \Omega)$.

3.2 Il problema di Cauchy nel modello di Faye e Faugeras

In questo capitolo denoteremo sempre con \mathcal{N} un aperto di \mathbb{R}^3 , che rappresenta lo spazio di colore descritto in sezione 1.3. Inoltre porremo

$$E = L^2(\mathcal{N}, \mathbb{R}^n)$$

con la norma

$$\|u\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} u_i^2(r) dr} \quad \forall u \in E.$$

Verifichiamo che l'equazione (1.6.1) ricade nel setting della sezione 3.1. Sia Ω sottinsieme chiuso e convesso di E , definiamo una funzione continua

$$f : \Omega \rightarrow E.$$

rappresentabile nella forma

$$f(u) = -u + G(u) + I_{ext}$$

dove

$$G(u) = \int_{\mathcal{N}} W(r, r') S(u(r')) dr'.$$

Studieremo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

e gli applicheremo il teorema di esistenza in grande.

Proposizione 9. *Se*

- $W \in L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))$
- $I_{ext} \in E$,

allora G è ben definita e $G(u) \in E$ per $u \in E$.

Dimostrazione. Mostro che $G_i \in E$ dove G_i indica l' i -esima componente:

$$\begin{aligned} (G(u))_i &\leq \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathcal{N}} W_{i,j}^2(r, r') dr' \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{N}} u_j^2(r') dr' \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_E \left(\sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} W_{i,j}^2(r, r') dr' \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_E^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} \left(\sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} W_{i,j}(r, r') u_j(r') dr' \right)^2 dr \\ &\leq \sum_i \int_{\mathcal{N}} \|u\|_E^2 \sum_j \int_{\mathcal{N}} W_{i,j}^2(r, r') dr' dr \\ &\leq \|u\|_E^2 \|W\|_{L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))}^2. \end{aligned}$$

Ne viene che $G(u) \in E$. □

Proposizione 10. *Data la scelta di G e nelle ipotesi della proposizione precedente si deduce che f è ben definita.*

Proviamo ora che f è Lipschitziana.

Teorema 11. *Sia $W \in L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))$ e $I_{ext} \in E$, allora f è lipschitziana.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} f(u_1)(r) - f(u_2)(r) &= \\ &= -(u_1(r) - u_2(r)) + \int_{\mathcal{N}} W(r, r') (S(u_1(r')) - S(u_2(r'))) dr' \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_E \leq \|u_1 - u_2\|_E + DS_m \|W\|_{L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))} \|u_1 - u_2\|_E.$$

Allora esiste K tale che

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_E \leq K \|u_1 - u_2\|_E.$$

Ciò prova la lipschitzianità di f rispetto ad u . □

Teorema 12. *Sia E uno spazio di Banach e Ω sottoinsieme chiuso e convesso di E contenente u_0 . Sia $G : \Omega \rightarrow \Omega$, un operatore uniformemente lipschitziano. Allora il problema*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -u + G(u) + I_{ext} & \text{per } t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione appartenente a $C^{(1)}(\mathbb{R}^+, \Omega) \cap C(\overline{\mathbb{R}^+}, \Omega)$.

Dimostrazione. La prova segue direttamente dal teorema di esistenza e unicità in grande. □

Capitolo 4

Il metodo di Lyapunov in spazi di Banach

Il nostro obiettivo è applicare il metodo di linearizzazione ai nostri spazi di Banach, ovvero lavorare su un punto di equilibrio u_0 di (3.2.1) per studiare l'equazione differenziale lineare.

4.1 La stabilità con il metodo Lyapunov in spazi di Banach

Ricordiamo la seguente definizione di punto di equilibrio asintoticamente stabile, che avevamo dato in spazi di dimensione finita, e si può rinunciare in spazi di Banach.

Definizione 4.1. Sia $\varphi \in C^1([0, +\infty), E)$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

φ si dice stabile secondo Lyapunov se per ogni $\varepsilon > 0 \exists \delta$ tale che per ogni v_0 tale che $\|u_0 - v_0\| < \delta$, allora per la soluzione $\psi \in C^1([0, +\infty), E)$ del problema di Cauchy con dato iniziale v_0 vale $\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \forall t \in [0, +\infty)$.

Se poi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$ allora φ si dice asintoticamente stabile

Definizione 4.2. Sia Ω sottospazio chiuso convesso di E . Se un punto di equilibrio u_0 è asintoticamente stabile, si chiama bacino di attrazione di u_0 l'insieme

$$\mathcal{O}(u_0) = \{v_0 \in \Omega \mid \text{la soluzione } \psi \text{ del problema di Cauchy (3.2.1) con dato iniziale } v_0 \\ \text{verifica } \psi(t) \rightarrow u_0 \text{ per } t \rightarrow +\infty\}$$

Definizione 4.3. Sia $\Omega \subseteq E$ aperto contenente 0 e sia $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. La funzione V si dice funzione di Lyapunov per il problema (3.2.1) se valgono le condizioni seguenti:

1. $V(0) = 0$ e $V(u) > 0 \quad \forall u \in \Omega, u \neq 0$
2. $dV(u)(f(u)) \leq 0 \quad \forall u \in \Omega$.

Vediamo come modificare in questo contesto i teoremi enunciati nel caso finito-dimensionale.

Lemma 5. (Escursione delle orbite) Sia Ω_2 aperto limitato contenuto in Ω contenente u_0 . Supponiamo che esista $b \in \mathbb{R}^+$ tale che $dV(u)(f(u)) \leq -b \quad \forall u \in \Omega_2$. Se la soluzione φ di $\dot{u} = f(u)$ con dato iniziale $\varphi(0) = u_0$ si può prolungare per ogni $t \geq 0$, allora φ esce da Ω_2 .

Omettiamo la prova uguale a quella in dimensione finita.

Nel teorema di attrattività in dimensione finita abbiamo utilizzato la compattezza degli aperti limitati. In dimensione infinita l'ipotesi andrà sostituita con un controllo su V .

Teorema 13. Sia $\Omega_3 \subset \Omega$ aperto limitato, 0 e $u_0 \in \Omega_3$. Sia V una funzione di Lyapunov su Ω_3 , tale che esiste $a > 0$ e $V(u) < a$ per ogni $u \in \Omega_3$. Supponiamo che

- esistano due funzioni reali di variabile reale J_1, J_2 continue, non decrescenti e tali che $J_1(s) > 0$ e $J_2(s) > 0$ per ogni $s > 0$, $J_1(0) = J_2(0) = 0$ ed inoltre

$$J_1(\|u\|) \leq V(u) \leq J_2(\|u\|) \quad \forall u \in E.$$

- esista una funzione reale J_3 continua non decrescente, tale che $J_3(s) > 0$ per ogni $s > 0$, $J_3(0) = 0$, e che

$$d(V(u)(f(u)) \leq -J_3(\|u\|).$$

Allora la soluzione φ del problema di Cauchy (3.2.1) con dato iniziale u_0 rimane in Ω_3 per ogni t e soddisfa $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. La funzione $\Phi(t) = V(\varphi(t))$ sarà decrescente. Il mio fine è mostrare che $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = 0$. Se così non fosse, esisterebbe $\eta > 0$ tale che $V(\varphi(t)) \rightarrow \eta$ per $t \rightarrow +\infty$ e $V(\varphi(t)) \geq \eta$ per $t \geq 0$. Essendo $V(0) = 0$, esiste un intorno $B_\delta(0)$ tale che, se $\varphi(t) \in \overline{B_\delta(0)}$ allora $V(\varphi(t)) \leq \eta/2$. Così necessariamente $\varphi(t) \in \Omega_3 \setminus \overline{B_\delta(0)}$ per ogni t . Per ipotesi posto $b = J_3(u) > 0$, si ha $dV(u)(f(u)) \leq -b$ su $\overline{\Omega_3} \setminus B_\delta(0)$ e per il lemma 5 allora $\varphi(t)$ esce da $\Omega_3 \setminus \overline{B_\delta(0)}$ il che è assurdo. Di conseguenza

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = 0$$

e ciò insieme all'ipotesi su V implica che $J_1(\|\varphi(t)\|) \rightarrow 0$, quindi $\varphi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. \square

Corollario 1. Sia V funzione di Lyapunov definita su E che soddisfi:

1. $J_1(\|u\|_E) \leq V(u) \leq J_2(\|u\|_E)$, dove J_1 e J_2 sono continue non decrescenti reali tale che $J_1(s)$ e $J_2(s)$ sono positivi per $s > 0$ e $J_1(0) = J_2(0) = 0$.
2. $J_1(s) \rightarrow +\infty$ per $s \rightarrow +\infty$.
3. $dV(u)(f(u)) \leq -J_3(\|u\|_E)$ dove J_3 è continua non decrescente reale, positiva per $s > 0$ e tale che $J_3(0) = 0$.

Allora il punto 0 è asintoticamente stabile per (3.2.1)

Dimostrazione. Similmente che nel teorema 3 la soluzione $\varphi = 0$ di (3.2.1) è asintoticamente stabile grazie al Teorema 13. \square

4.2 La linearizzazione negli spazi di Banach

Definizione 4.4. Un punto $u_0 \in E$ si dice di equilibrio per (3.2.1) se

$$f(u_0) = 0.$$

Osserviamo che in questo caso la funzione costante $\varphi(t) = u_0$ è soluzione del problema di Cauchy (3.2.1).

Osservazione 4. Sia Ω aperto di E contenente u_0 , $f \in C^1(\Omega, E)$, tale che $f(u_0) = 0$. Ponendo $A := df(u_0)$, la funzione f avrà sviluppo di Taylor

$$f(u) = A(u - u_0) + o(u - u_0) \text{ per } u \rightarrow u_0. \quad (4.2.1)$$

Definizione 4.5. Chiamiamo sistema linearizzato associato a (3.2.1) nel punto u_0

$$\dot{u} = Au. \quad (4.2.2)$$

In questo setting non facciamo riferimento agli autovalori di A , ma enunciamo in dimensione infinita un Teorema analogo al Teorema 6.

Teorema 14. Sia $\Omega \subseteq E$ aperto contenente u_0 , $f : \Omega \rightarrow E$ localmente Lipschitziana tale che $f(u_0) = 0$. Se esiste un aperto $\Omega_1 \subseteq \Omega$ intorno di u_0 e una funzione V definita su Ω_1 , di Lyapunov per il sistema linearizzato (4.2.2), allora V sarà di Lyapunov anche per il sistema assegnato (3.2.1).

4.3 Stabilità del problema considerato

Calcoliamo innanzitutto la linearizzazione dell'operatore al secondo membro in (3.2.1). Otteniamo direttamente $A = df(0)$:

$$A(u) = -u + \int_{\mathcal{N}} W(r, r') DS(u(r')) dr'.$$

Definiamo una nuova funzione

$$\widetilde{W}(r, r') = W(r, r') DS(u(r')) \text{ , } \forall (r, r') \in \mathcal{N}^2.$$

Verifichiamo che il funzionale A è ben definito se $u \in L^2(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ e a tal fine sarà sufficiente mostrare che $\widetilde{W} \in L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))$

Teorema 15. Sia u_0 un punto di equilibrio di (3.2.1). Se $W \in L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))$, allora $\widetilde{W} \in L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))$.

Dimostrazione. $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$(\widetilde{W}(r, r'))_{i,j} = \widetilde{W}_{i,j}(r, r') = \sum_{k=1}^n W_{i,k}(r, r') DS(u_0(r'))_{k,j}$$

e $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$\widetilde{W}_{i,j}(r, r')^2 \leq n \sum_{k=1}^n W_{i,k}(r, r')^2 (DS(u_0(r'))_{k,j})^2 \leq n DS_m^2 \sum_{k=1}^n W_{i,k}(r, r')^2.$$

Si avrà

$$\int_{\mathcal{N}^2} \widetilde{W}_{i,j}(r, r')^2 dr dr' \leq n DS_m^2 \int_{\mathcal{N}^2} W_{i,j}(r, r')^2 dr dr' < +\infty$$

poiché $W \in L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))$. Allora, per Fubini, anche $\widetilde{W} \in L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))$. \square

Così, usando la definizione 4.5 l'equazione linearizzata intorno a u_0 ha l'espressione seguente:

$$\partial_t u = -u + \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}(r, r') u(r') dr'. \quad (4.3.1)$$

Osservazione 5. Se 0 è asintoticamente stabile per (4.3.1), allora u_0 è asintoticamente stabile per (3.2.1).

Ora procederemo definendo un funzionale di Lyapunov per (4.3.1) col fine di studiarne la stabilità in 0 grazie ai precedenti teoremi. Partiamo dall'equazione

$$\partial_t u(r, t) = -u(r, t) + \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}(r, r') u(r') dr' \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3.2)$$

ovvero:

$$\partial_t u_i(r, t) = -u_i(r, t) + \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r') u_j(r') dr' \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (4.3.3)$$

Il funzionale di Lyapunov che farà al caso nostro sarà, come nel lemma 4 (in dimensione finita), la forma quadratica associata all'identità,

$$V(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} u_i(r)^2 dr \quad (4.3.4)$$

Ora ci concentreremo sulla sua derivata, per verificare che soddisfi le condizioni dei funzionali di Lyapunov. Valutiamo V lungo una soluzione u e deriviamo:

$$dV(u)(A(u)) = - \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} u_i(r)^2 dr + \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} u_i(r) \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r') u_j(r') dr dr'$$

Così abbiamo ottenuto:

$$dV(u)(A(u)) = - \|u\|_E^2 + P(u)$$

dove

$$P(u) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} u_i(r) \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r') u_j(r') dr dr'.$$

Tramite la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz negli spazi L^2 si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r') u_j(r') dr' \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n \sqrt{\int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r')^2 dr'} \sqrt{\int_{\mathcal{N}} u_j(r')^2 dr'} \leq \\ & \leq \|u\|_E \sqrt{\sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r')^2 dr'} \end{aligned}$$

E sostituendo in $P(u)$:

$$P(u) \leq \|u\|_E \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} u_i(r) \sqrt{\sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r')^2 dr'} dr$$

Riutilizzando ora Cauchy-Schwarz:

$$\leq \|u\|_E \sum_{i=1}^n \sqrt{\int_{\mathcal{N}} u_i(r)^2 dr} \sqrt{\int_{\mathcal{N}} \left(\sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{N}} \widetilde{W}_{i,j}(r, r')^2 dr' \right) dr} \leq \|u\|_E^2 \|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))}.$$

Così

$$dV(u)(A(u)) \leq (-1 + \|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))}) \|u\|_E^2.$$

Dai calcoli precedenti ricaviamo il seguente

Teorema 16. Se $\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))} < 1$, allora u_0 è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Sia

$$V(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{N}} u_i(r)^2 dr.$$

Allora sono soddisfatte:

1. $\exists J_1, J_2$ tali che $J_1(\|u\|_E) \leq V(u) \leq J_2(\|u\|_E)$ dove J_1, J_2 sono continue non decrescenti reali con $J_1(s)$ e $J_2(s)$ positive per $s > 0$ e $J_1(0) = J_2(0) = 0$. Infatti

$$V(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2.$$

2. Grazie alla proposizione precedente $dV(u)(A(u)) \leq -J_3(\|u\|_E)$ e $J_3(s) = (1 - \|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathcal{N}^2, M_n(\mathbb{R}))})s^2$ così che $J_3(s) > 0$ se $s > 0$ e J_3 è continua non decrescente.

Così, applicando il Corollario 1, 0 è asintoticamente stabile per la (4.3.1) e quindi u_0 è asintoticamente stabile per la (3.2.1) grazie al Teorema 14. \square

Bibliografia

- [1] G. Faye, O. Faugeras, Some theoretical and numerical results for delayed neural field equation, Elsevier, 2010.
- [2] M. Rossi, A. Rizzi, Luce, percezione, colore, in Realtà virtuale per il Design. Il progetto della luce nel laboratorio digitale, Ed. Poli.Design , Milano, 2001.
- [3] j.R. McClintic, Fisiologia del corpo umano, prima edizione, Zanichelli, 1983.
- [4] E. N.Marieb, Elementi di anatomia e fisiologia dell'uomo, seconda edizione, Zanichelli, 2010.
- [5] Kandel, Principles of neural science, fourth Edition, McGraw-Hill, 2000.
- [6] C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica, vol. 2 , Masson, 1991.
- [7] D.H. Hubel, Eye, brain and vision, second Edition, Henry Holt and Company, 1995.
- [8] B. Pini, Lezioni di analisi matematica di secondo livello, parte prima, CLUEB Bologna, 1983.
- [9] J.K. Hale, S.M.V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer Verlag, 1993.

RINGRAZIAMENTI

La citazione che ho scelto all'inizio della tesi rispecchia in pieno il mio percorso universitario, ricco di cadute ma anche di bellezza e gioia. Ho dovuto perdere una metà di me e cambiare ottica: crescere. In questo percorso mi sento di ringraziare infinitamente:

- ★ la mia famiglia(sì, compresa mia sorella) per essermi stata vicino ed avermi quasi obbligata a non mollare;
- ★ il mio Pao che mi ha sopportato nelle crisi pre-post esami, che ha sempre creduto in me;
- ★ le amicizie che sono restate, Valentina in particolare, che, nonostante non potesse comprendere appieno i miei nuovi umori da universitaria non mi ha mai lasciata e c'è tuttora;
- ★ le amicizie di questo percorso e in particolare Martina e Valeria che hanno saputo sempre come prendermi e con le quali studiare era più produttivo, da sola, credo, non sarei arrivata fin qui;
- ★ mia zia Patrizia e il momento nel quale, trionfante, mi sono sentita di saperne più di lei in matematica (ovviamente questa è un' utopia);
- ★ le mie coinquiline Silvia e Sara , ma anche la nuova arrivata Hortensia; mi avete donato un sorriso quando ne avevo bisogno, serenate, e cibo in quantità;
- ★ la prof.ssa Giovanna Citti che mi ha aiutato a costruire questa tesi ma che soprattutto mi ha donato un metodo e tanta voglia di andare avanti.