ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SCUOLA DI SCIENZE**

**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

# L'aspetto geometrico delle identità algebriche: un esperimento nell'insegnamento della matematica.

**Tesi di Laurea in Didattica Della Matematica**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**Giorgio Bolondi**

**Presentata da:**
**Antonella Gioiosa**

*II* **Sessione**
**Anno Accademico 2014/2015**

*Alla mia nonna,*

*che adesso mi protegge dall'alto.*

*La matematica è l'arte*

*di dare lo stesso nome a cose diverse.*

***Poincaré***

# Introduzione

Il mio lavoro di tesi nasce dalla curiosità e dalla voglia di analizzare e capire come il "calcolo letterale" fa il suo ingresso in una scuola secondaria di secondo grado.
Ho voluto mettere in risalto l'atteggiamento che insegnanti e alunni hanno nei confronti di quest'argomento delicato, in particolar modo ho voluto descrivere le reazioni e le perplessità che emergono quando agli alunni viene presentato questo nuovo approccio nei confronti della matematica.
Nello studio della matematica l'argomento calcolo letterale rappresenta un passaggio fondamentale per lo studente, in quanto questo lo spinge a compiere quel delicato passaggio dalla praticità e concretezza aritmetica all'astrazione algebrica.
È proprio in questo momento che l'allievo si lascia alle spalle l'aspetto operazionale dell'aritmetica per andare incontro all'aspetto strutturale dell'algebra.
In questa fase ritengo sia fondamentale il ruolo dell'insegnante, oltre quello dei libri di testo, poichè il docente deve essere in grado di ricercare strumenti e supporti didattici al fine di stimolare la curiosità dell'alunno e, quindi, invogliarlo all'apprendimento.
Prima di addentrarmi nel cuore della mia tesi, nei primi capitoli ho voluto analizzare come il sapere matematico accademico diventi sapere da insegnare, sapere insegnato.
Ho voluto in particolar modo, approfondire come avviene quel processo che in Didattica della matematica viene definito come *trasposizione didattica* sia

attraverso il confronto di diversi libri di testo adottati dal '70 ad oggi e sia attraverso l'uso che gli insegnanti fanno di quest'ultimi nella *trasposizione.*
Gli argomenti oggetto di discussione sono i monomi, i polinomi e in particolar modo i prodotti notevoli.
Ho posto l'attenzione prima di tutto sull'approccio, cioè come vengono introdotte le lettere, che significato viene dato ad esse e cosa rappresentano, successivamente sulla metodologia, mettendo in evidenza le diverse scelte degli autori e quindi la correttezza, la coerenza matematica e l'efficacia didattica.
Nel quarto capitolo ho esposto alcune considerazioni che sono emerse durante il periodo di osservazione svolto nel corso del mio tirocinio. Ho messo in evidenza la metodologia didattica della mia tutor e ho cercato di far emergere i pro e i contro della sua azione didattica.
A questo punto dopo aver raccolto spunti e considerazioni la mia tesi si conclude con la descrizione del mio intervento in classe .
Durante la fase di osservazione mi sono resa conto che un grande aiuto per evitare che il passaggio dall'aritmetica all'algebra risulti traumatico può venire sfruttando le costruzioni geometriche.
Proprio da questa riflessione, valorizzando al massimo il lavoro svolto dall'insegnante ho cercato di completare il puzzle del loro sapere matematico, a mio parere ancora incompleto, dando vita attraverso la geometria ai polinomi e in particolar modo ai prodotti notevoli...

# Indice


**1 Definizioni e schemi di definizione** **1**

1.1 Il concetto di trasposizione didattica e il triangolo didattico . . 2

1.2 Designazione, denotazione, descrizione, denominazione, definizione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.2.1 Designazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.2.2 Denotazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.2.3 Descrizione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.2.4 Denominazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.2.5 Definizione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**2 Uno sguardo al calcolo letterale** **9**

**Verso il calcolo letterale** **9**

2.1 I monomi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.2 I polinomi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

2.2.1 Operare con i polinomi . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**3 Interpretazione geometrica dei prodotti notevoli** **25**

3.0.2 Quadrato di binomio . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

3.0.3 Quadrato di trinomio . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

3.0.4 Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

3.0.5 Cubo di binomio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

3.0.6 Potenza di un binomio . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

**4 La sperimentazione** **33**
4.1 Il contesto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
4.2 L'osservazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

**5 Il mio intervento in classe** **45**
5.1 Presentazione della mia attività . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
5.1.1 I polinomi e le loro operazioni . . . . . . . . . . . . . . 47
5.1.2 Gli indesiderati prodotti notevoli . . . . . . . . . . . . 52
5.2 La valutazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
5.2.1 Valutazione dell'esperienza didattica svolta . . . . . . . 62

**Conclusione** **73**

**Bibliografia** **75**

**Appendice** **79**

# Capitolo 1

# Definizioni e schemi di definizione

I *polinomi* sono presenti nella nostra educazione matematica già nella scuola secondaria di primo grado ed in seguito vengono approfonditi in quella di secondo grado; come spesso accade, per introdurre un oggetto con determinate caratteristiche, in matematica si fa ricorso alle *definizioni.*
Associare un nome ad un oggetto matematico è un processo molto diffuso nei contesti di classe.
Nella prassi scolastica, molte azioni vengono etichettate col nome di **definizione**, pur essendo molto lontane da quelle che sono le definizioni formali intese dai matematici.
Se da un lato si usano le definizioni per spiegare il significato di un termine matematico, dall'altro queste sono regolate da norme ben specifiche.
Oltre a costituire una base per la derivazione logica di determinate proprietà appartenenti ad un oggetto, costituiscono una base per la creazione di nuove proprietà, ed è questo duplice ruolo che ci fa capire quanto la conoscenza di un tipo di definizione sia fondamentale per la costruzione di una nuova definizione all'interno della stessa teoria matematica.
Questo è quanto definito da A. Sfard come un paradosso:
«For a future mathematist the self-generating nature of mathematical di-

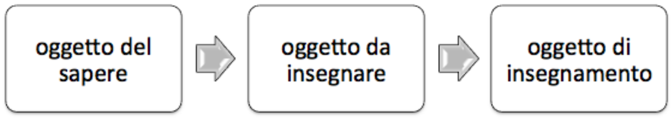
scourse creates a paradoxical situation: one's familiarity with what the discourse is all about seems to be a precondition for participation in the discourse, but, at the same time, such familiarity can only emerge from this participation!≫ [Sfard A. 2008, p. 130].

(Per un futuro da matematico la natura autogenerante di un discorso matematico crea una situazione paradossale: la propria familiarità con ciò di cui tratta il discorso sembra essere una condizione preliminare per la partecipazione al discorso, ma, allo stesso tempo, questa familiarità può emergere solo da questa partecipazione!).
Il processo di *definizione* è molto delicato, in particolare quando viene utilizzato per introdurre oggetti di base di una nuova teoria, e ancor più delicato quando questa teoria è molto astratta, come nel caso dei polinomi. Se da un lato sono necessarie definizioni formali in senso strettamente matematico, dall'altro non dobbiamo dimenticare che questo sapere deve essere *scolarizzabile*, ovvero deve passare attraverso il *processo di trasposizione didattica.*

## 1.1 Il concetto di trasposizione didattica e il triangolo didattico

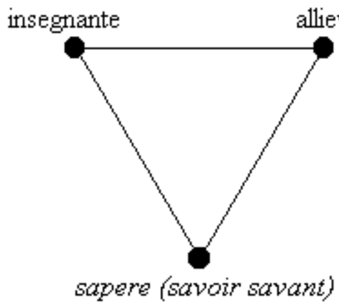
Il termine **trasposizione didattica** fu introdotto nel 1985 da Yves Chevallard che gli attribuì il significato di *lavoro che di un oggetto del sapere da insegnare fa un oggetto di insegnamento* [Chevallard Y. 1985, p. 39]. La *trasposizione didattica* è presentata da Chevallard come un processo di trasformazione, in cui un oggetto di sapere viene identificato come un oggetto da insegnare per poi diventare, nella pratica didattica, un oggetto di insegnamento, in base alle esigenze sociali.

Sono dunque tre i passaggi fondamentali nel processo di trasposizione didattica, che possiamo riassumere nel seguente schema:




in cui vengono evidenziati il passaggio dall'implicito all'esplicito, dalla pratica alla teoria, dal precostruito al costruito. Questo passaggio, per nulla semplice, entra a far parte di un diagramma triangolare, dovuto proprio a Chevallard, che ha come vertici: *l'allievo, l'insegnate e il sapere.*

Nel triangolo di Chevallard vengono schematizzate le interazioni tra insegnate e allievo, rispetto ad un determinato sapere, questa situazione di insegnamento - apprendimento supera il modello verticale della sola relazione insegnante allievo, in cui l'attività dell'allievo viene considerata indipendente dal sapere insegnato.




Questo diagramma, pertanto, deve essere adeguatamente interpretato, studiando tutte le possibili interazioni tra i suoi vertici; in particolare, bisogna porre una certa attenzione al termine *sapere*, quello che lo studioso chiama il sapere accademico, nel nostro caso il sapere matematico, che nasce dalla ricerca.

Già la collocazione che viene data al sapere nel triangolo, fa pensare ad un sapere che sta al di fuori del rapporto diretto tra insegnante e allievo,

un sapere che sta al di fuori dell'insegnamento e dell'apprendimento e che pertanto va adeguatamente trattato, manipolato, mediato.
Per D'Amore si considera ≪questo schema solo come una semplice allusione a tre soggetti (enti, poli, idee) che entrano (qualche volta fisicamente, qualche volta metaforicamente) in contatto tra loro al momento dell'azione didattica≫ [D'Amore B. 1999].

Bisogna quindi prenderlo a modello, per analizzare i possibili rapporti che si possono instaurare tra i tre soggetti che stanno ai vertici del triangolo.

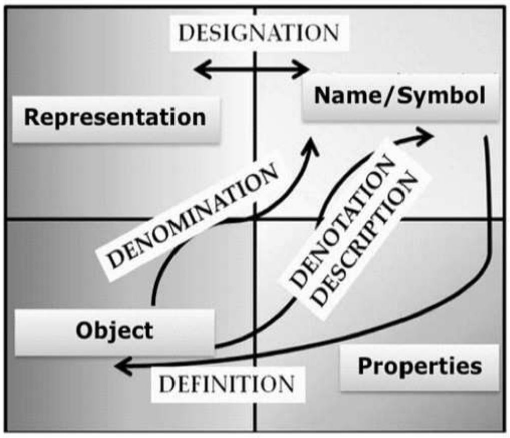
Ciò che, in particolare, definisce l'insegnante e l'allievo come tali, è il passaggio da uno stato iniziale ad uno stato finale nei confronti del sapere, stati tutti caratterizzati dalle varie relazioni che hanno insegnante e allievo col sapere.

## 1.2 Designazione, denotazione, descrizione, denominazione, definizione

Nella ricerca matematica riguardo l'analisi appena fatta non vi sono molti accordi comuni, vi sono però accordi sulle caratteristiche essenziali che una *definizione matematica* deve avere: non contraddittorietà, non circolarità, precisione nella terminologia, essenzialità [Borasi R. 1991], non ambiguità, equivalenza logica ad altre definizioni, invarianza al cambiare di rappresentazioni [Zaslavsky O., Shir K. 2005].

Va notato che vi sono altre possibili azioni tramite cui si associa un nome ad un oggetto matematico che però non soddisfano i criteri prima elencati; si tratta ad esempio di quelle definizioni usate da insegnanti o libri di testo che hanno ormai acquisito un *status formale.*
Cerchiamo adesso di addrentrarci nel cuore del problema analizzando il lavoro di ricerca di Bolondi, Ferretti e Maffia [Bolondi G. et al.(unpublished)] sulla definizione di monomi e polinomi e vediamo come vengono caratterizzate queste altre azioni.

Si descrivono cinque diversi tipi di schema di definizione, che ovviamente possono variare di volta in volta in base al contesto e che non necessariamente connotano una definizione in senso strettamente matematico. Come già fatto da D'Amore e Fandiño Pinilla
(D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012) verranno distinte in *designazione, denotazione, descrizione, denominazione, definizione* e riassunte nel sottostante schema.




### 1.2.1 Designazione

Si parla di **designazione** quando non è possibile comprendere cos'è l'oggetto da definire senza fare un riferimento diretto ad una sua rappresentazione.
*La designazione è un fatto relativo e non assoluto ed è strettamente legata al contesto in cui si è. Designare un oggetto matematico è un espediente comunicativo utile per poter far sì che emittente e ricevente si intendano.*
(D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012).

### 1.2.2 Denotazione

Si è in presenza di una **denotazione** quando viene descritto qualcosa attraverso alcune delle sue proprietà, necessarie ma non sufficienti e pertanto non caratterizzanti l'oggetto, come nel caso di una vera e propria *definizione.*

### 1.2.3 Descrizione

Il termine **descrizione** è usato quando si fa riferimento ad un certo oggetto e se ne elecano le proprietà, sufficienti ma non necessarie e, non di rado, sovrabbondanti.

### 1.2.4 Denominazione

È il caso in cui due o più oggetti già noti sono denominati con lo stesso nome. Le proprietà dell'oggetto non sono espresse esplicitamente, ma sintetizzate in singole parole.

### 1.2.5 Definizione

Una **definizione** è una frase esaustiva in cui *definiendum* (termine che si deve definire) e *definiens* (ciò che serve a definire) sono chiaramente identificabili;
*se nel definiens ci sono parole sconosciute, la definizione serve a poco.*
(D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012). *Una definizione serve a identificare, a circoscrivere, a indicare, a scegliere, a designare, a denominare, a denotare, perfino a connotare.* (D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. 2012).

Come vedremo fra poco, analizzando vari libri di testo riguardo l'argomento *polinomi* non è del tutto semplice e netta la distinzione tra i vari schemi di definizione, infatti spesso i libri di testo non operano questa distinzione.

# Capitolo 2

# Uno sguardo al calcolo letterale

Durante il percorso scolastico l'inizio dello studio del calcolo letterale rappresenta principalmente il grande passaggio dall'aritmetica all'algebra.

Mediante l' aritmetica lo studente viene a conoscenza del linguaggio numerico, delle operazioni e più o meno esplicitamente delle loro proprietà; l'algebra invece richiede un simbolismo più complesso, attraverso il quale è possibile percepire la diversità tra situazioni specifiche e situazioni generali.

Questo passaggio è molto delicato e non sempre così immediato e scontato per lo studente. Per questo è importante che l'insegnante si prefissa delle finalità.

- scegliere la modalità giusta per introdurre l'argomento in funzione del tipo di scuola e classe;
- avere sempre presente che lo studio dell'algebra deve avere una finalità formativa;
- evitare di trasmettere l'impressione che l'algebra si riduca a una serie di regole, o, peggio,trucchetti.

Purtroppo o altre volte per fortuna, il libro di testo viene spesso considerato un importante punto di riferimento, sia dall'alunno stesso che dall'insegnante, per iniziare a prendere confidenza con un nuovo argomento.

Per questo motivo esso deve essere uno strumento completo, coerente, chiaro, corretto e attento alle difficoltà tanto didattiche quanto di apprendimento.

Adesso mediante l'analisi di alcuni libri di testo cercherò di mostrare come viene introdotto il calcolo letterale (prestando particolare attenzione ai monomi e ai polinomi) durante i primi anni di scuola media superiore.

I testi che ho preso in esame sono:

1. Matematica A. Rossi Dell'Acqua- F. Speranza, 1973 (**RS**)

2. Una introduzione moderna all'algebra elementare, B. D'Amore- A. De Flora, 1974 (**DD**)

3. Problemi e modelli della matematica, W. Maraschini- M. Palma, 1981 (**MP**)

4. Matematica come scoperta 1, G. Prodi, 1975 (**P**)

5. Fondamenti e percorsi 1, L. Tonolini - A. Manenti Calvi, 1996 (**TM**)

6. Matematica per il biennio delle superiori, vol. B Il calcolo letterale - Equazioni e disequazioni di primo grado, M. R. Persano - L. Riboldi - G. Zanoli, 2001 (**PRZ**)

7. Nella matematica - Algebra 1, N. Dodero - P. Baroncini - R. Manfredi, 2008 (**DBM**)

Quest'ultimo testo è stato quello che ho utilizzato e consultato durante la mia attività di tirocinio.

## 2.1 I monomi

Uno dei tanti modi di introdurre il calcolo letterale è di pensare ad esso come un nuovo linguaggio. Ma come possiamo creare questo nuovo approccio?

Sotto questo punto di vista in Rossi Dell'Acqua - Speranza e in D'Amore - De Flora troviamo due maniere distinte di motivare l'uso delle lettere nello studio della matematica: la prima come traduzione, che attraverso il simbolismo permette di *compiere con un semplice colpo d'occhio in modo quasi meccanico dei passaggi discorsivi che diversamente esigerebbero l'intervento delle facoltà mentali superiori e a tal scopo il più noto sistema di simboli è quello che consiste nell'indicare con lettere e, quando possibile, nell'operare anche se i numeri restano espressi in lettere;* l'altra come linguaggio senza il quale non si potrebbero risolvere certi problemi:*nella pratica comune, molto spesso non è possibile conoscere tutti gli elementi che entrano in gioco in un determinato problema. Altre volte non è sufficiente studiare un problema singolo, cioè contenente solo elementi ben fissati, ma occorre risolverlo in generale, cioè per valori qualsiasi. È principalmente per questi motivi che si sente l'esigenza di introdurre, in un calcolo algebrico, non solo numeri (positivi o negativi) ma pure lettere. È chiaro che il calcolo non si fa sulle lettere, ma sui numeri che tali lettere rappresentano.*

È proprio prendendo spunto da questa duplice visione che possiamo dare la definizione di espressione letterale come *una qualsiasi espressione fra numeri in cui tutti o alcuni di essi siano indicati mediante lettere ed è necessario precisare per ogni espressione gli eventuali numeri che sostituiti alle lettere le toglierebbero significato.*

Nel D'Amore - De Flora invece, in accordo con la visione secondo cui la matematica è un linguaggio, *abbiamo bisogno di definire un alfabeto per questo linguaggio; delle regole per accostare i segni dell'alfabeto e formare le parole; delle regole per accostare le parole e formare le frasi; delle regole per scegliere tra le espressioni le proposizioni e per attribuire loro un valore di verità.*

Attraverso le regole definite studiando il campo dei razionali possiamo unire numeri e lettere tramite le operazioni di addizione, moltiplicazione e sottrazione. Così possiamo ottenere espressioni del tipo

$$3a^2 - (-5)ab^3 + \frac{1}{2}a^3b^5$$

che chiamiamo *espressione letterale* di cui

$$3a^2 \qquad (-5)ab^3 \qquad \frac{1}{2}a^3b^5$$

sono i **termini** di essa.
Nel testo Rossi Dell'Acqua - Speranza questi **termini** prendono il nome di **espressioni monomie** ossia espressioni in cui non compaiono né l'addizione né la sottrazione. Tuttavia osserviamo come in questo testo non venga esplicitato l'ambiente di lavoro in cui ci troviamo.

Solo successivamente vengono mostrate le tecniche di calcolo su espressioni monomie e viene precisato che stiamo lavorando con espressioni che rappresentano numeri razionali e perciò con le espressioni monomie si possono eseguire tutte le operazioni già introdotte in precedenza, quando sono stati studiati gli insiemi numerici, che continuano ad avere lo stesso significato e godere delle stesse proprietà.

In alcuni testi invece troviamo un approccio più generico, infatti essi fanno notare come l'impiego delle lettere non è una novità per lo studente nello studio della matematica, poichè già quest'ultimo ha avuto a che fare con le lettere in altre situazioni non necessariamante interne alla matematica.

Queste situazioni vengono suddivise in tre categorie:

- **Funzioni**: Si tratta di trascrivere sotto forma di formula una relazione tra oggetti di entità diversa che è già conosciuta. In questo caso compaiono numeri e due variabili **x**(variabile indipendente) ed **y**(variabile dipendente da x).

- **Proprietà**: Si riferisce alle proprietà algebriche.In questi casi le lettere rappresentano elementi generici dell'insieme.

- **Formule di geometria e fisica**: Ad esempio le formule per trovare aree e perimetri, le formule fisiche come quella della velocità. In questi casi le lettere generalizzano oggetti, grandezze, e sono per lo più abbreviazioni. Ad esempio in geometria b indica sempre la base di una figura e h l'altezza.

Sotto questo punto di vista le lettere risultano essere dei **rappresentanti** di valori numerici, che permettono di svolgere i calcoli e risolvere i problemi in modo semplice, solo successivamente si opera la sostituzione numerica.

I testi moderni invece fanno emergere un intreccio tra i punti di vista precedentemente descritti.
Ad esempio il Dodero-Baroncini-Manfredi introduce il passaggio dall'aritmetica all'algebra in questo modo: *Fin qui abbiamo operato con i numeri; ora, invece, imparerai a operare con* ***oggetti*** *nuovi: le lettere.[...] L'uso delle lettere consente di generalizzare un problema e quindi la sua risoluzione risulta valida anche per tutti gli altri problemi dello stesso tipo. Abbiamo, però, già impiegato la simbologia del calcolo letterale, quasi in modo inconsapevole: lo abbiamo fatto, per esempio, per esprimere in modo formale e generale alcune regole o proprietà.*

Nei testi di (PRZ) e (DBM) i monomi e i polinomi sono definiti sfruttando il concetto di espressione (algebrica) letterale definita come *ogni scrittura simbolica che indichi una sequenza di operazioni da eseguire su numeri e lettere assegnati.*

Se ad espressione algebrica viene aggiunto il termine *razionale* allora si intende che le operazioni da eseguire su numeri e lettere sono quelle di tipo razionale, cioè addizione, sottrazione, elevamento a potenza con esponente intero.

A loro volta le espressioni algebriche razionali si suddividono in:

- INTERE: cioè se le operazioni da eseguire con le lettere sono solo addizioni, moltiplicazioni e potenze a esponente intero positivo;
- RAZIONALI: cioè se con le lettere si devono risolvere anche divisioni o potenze a esponente negativo.

Inoltre in (PRZ) le espressioni algebriche razionali vengono chiamate *funzioni razionali*, probabilmente per accentuare il fatto che se decidiamo di dare un valore numerico ad una lettera dobbiamo tenere presente la CONDIZIONE DI ESISTENZA della stessa funzione per evitare di assegnare alle lettere quei valori che rendono l'espressione priva di significato.

Partendo dalla nozione di espressione letterale possiamo presentare la definizione di **monomio**:

- *un'espressione letterale che non contiene operazioni di addizione e sottrazione.* In questa definizione emerge che i monomi possono essere costituiti da un solo numero o da una sola lettera o da lettere e numeri legati da operazione di moltiplicazione, di elevamento a potenza e di divisione, ma non viene sottolineato che stiamo operando in Q. (TM)
- *un'espressione letterale in cui figurano soltanto operazioni di moltiplicazione.* Viene poi specificato che un monomio è un prodotto di fattori numerici e letterali e gli esponenti delle lettere sono numeri interi positivi. (DBM)
- *un' espressione letterale in cui compaiono solo moltiplicazioni o potenze di fattori numerici o letterali in cui gli esponenti delle lettere sono numeri naturali.* (PRZ)

Dobbiamo sottolineare che in (PRZ) e (DBM) per come sono state definite le espressioni letterali e tenendo conto che si lavora con espressioni letterali razionali, quando si parla di moltiplicazione s'intende la moltiplicazioni di Q.

Infatti in questi testi si considerano *monomi* solo espressioni come

$$3a^2b^3c \qquad \frac{1}{2}a^3b^5 \qquad 3 \qquad ecc...$$

Contrariamente nel (TM) si considerano *monomi* anche espressioni come

$$\frac{3ac}{5b^2} \qquad 4a^{-3}b$$

## 2.2 I polinomi

Nell'analizzare la definizione di *polinomio* presente nei vari libri di testo presi in esame, dobbiamo tenere in conto di come viene introdotto il calcolo letterale.
Per inciso la scelta di servirsi di monomi come enti funzionali all'introduzione dei *polinomi* (definiti appunto dai più come somma algebrica di monomi), è condivisa da molti autori, oltre ad essere una diffusa pratica scolastica; nel D'Amore-De Flora e nel Prodi si segue un percorso differente. Nel primo viene continuata la teoria del calcolo letterale. Abbiamo detto che un'espressione letterale razionale intera è costituita da termini, che sono appunto le parole del linguaggio. È quindi possibile mettere insieme parole simili (ossia i termini simili, cioè con parte letterale identica) riducendo l'espressione in una nuova espressione equivalente. Tutte queste espressioni siccome sono costituite da elementi di Q continuano ad appartenere a Q e pertanto è possibile operare tra due o più espressioni con le stesse regole definite in Q (cioè l'addizione, la moltiplicazione, la sottrazione, la divisione, l'elevamento a potenza).

Da queste regole ne discendono alcune particolari, che possiamo vedere come le proposizioni di questo linguaggio, che sono i famosissimi *prodotti notevoli*.

Proprio perché per le proposizioni bisogna appurarne la veridicità, tutti i prodotti notevoli enunciati vengono dimostrati usando le varie regole di calcolo.
Inoltre questa verifica fa sì che lo studente capisca che i prodotti notevoli non sono mere uguaglianze da imparare a memoria, ma che discendono da tutte le proprietà di calcolo studiate fino a quel momento.

Ma a cosa servono tutte queste proposizioni? Queste ci permettono di lavorare con le espressioni letterali razionali: è ciò che comunemente viene chiamato decomposizione di espressioni razionali intere nel prodotto di espressioni razionali intere.

Nel Prodi invece vengono trattati direttamente i polinomi partendo dalle operazioni di Q e dalle macchine di calcolo, senza però trascurare il punto di vista del linguaggio. E' attraverso il calcolo che si costruiscono le espressioni. Infatti in questo testo le operazioni di addizione, di opposto, di moltiplicazione, di reciproco verranno chiamate operazioni algebriche.
Proseguendo, introduce così il calcolo letterale:

*Capita molto spesso di svolgere calcoli complessi, che coinvolgono varie operazioni algebriche. Per descrivere il modo con cui esse sono collegate fra loro, è opportuno fare ancora ricorso ai grafi [...]. Pensiamo di avere a disposizione varie macchine che eseguiscono le singole operazioni algebriche.*
Le macchine dell'addizione e della moltiplicazione hanno due canali d'ingresso perché manipolano due numeri (che vengono detti, come si sa, addendi nel caso dell'addizione, fattori nel caso della moltiplicazione). Le altre due macchine hanno un solo canale d'ingresso perché manipolano un solo numero. Il canale d'uscita che porta il risultato è sempre uno solo.
Pertanto applicando le proprietà associativa, commutativa e distributiva dell'addizione e della moltiplicazione, si può quindi trasformare un'espressione in un'altra che assume lo stesso valore numerico, sostituendo le lettere con numeri razionali relativi. L' espressione che si ottiene solitamente è una *somma di prodotti* che rappresenta quello che poi verrà definito *polinomio*.

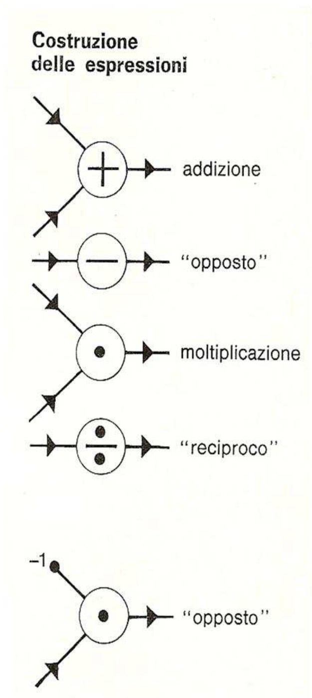



Figura 2.1: *Macchina per operazioni (P).*

Come abbiamo visto al contrario di tutti gli altri testi che partono dal concetto di espressione letterale nel D'Amore e nel Prodi si segue un altro percorso.

Infatti nel D'Amore si preferisce costruire una teoria per le espressioni letterali, mentre nel Prodi abbiamo visto che dalle macchine di calcolo si giunge a definire le espressioni.

Tenendo presente quanto detto vediamo come viene presentata la definizione di **polinomio.**

**Definizione 2.1.** Il caso più generale di espressione letterale è quello di un'espressione che si presenta come somma di espressioni monomie: si chiama espressione polinomiale (RS).

**Definizione 2.2.** Sia (x; y) un elemento del prodotto cartesiano $QxQ$; sia f un'applicazione di $Q$ in $Q$ tale che $f(x) = y$, cioè tale che y è l'immagine di x tramite f. Sia:

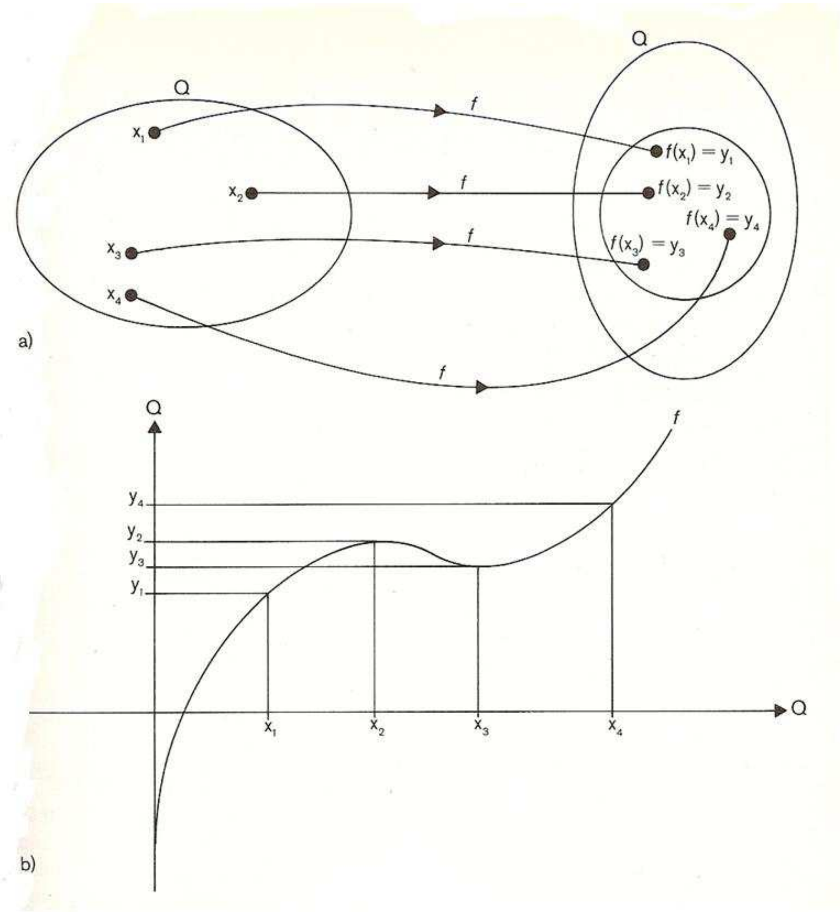
$$y = f(x) = a_n x^n + a_n - 1x^{n-1} + .... + a_1 x + a_0$$

l'espressione razionale tramite la quale si stabilisce il legame tra x e y. Ebbene chiameremo f: *funzione razionale intera o anche polinomio.* [DD]

Fino a questo punto lo studente ha avuto un'idea ancora abbastanza astratta del concetto di polinomio. Ha capito che, comportandosi come espressioni letterali i polinomi, alla variabile x possono essere assegnati valori razionali, e a seconda del valore assegnato si ottengono distinti numeri razionali, ma questo sembra più un gioco di semplice sostituzione. Ed ecco che si offre anche una rappresentazione in $QxQ$ di polinomio in quanto funzione, cioè viene mostrata la relazione tra i termini x di $Q$ e gli elementi di $Q$ che sono le immagini di elementi di $Q$.

Vengono date due rappresentazioni grafiche: la prima attraverso insiemi, quello di partenza $Q$ e quello di arrivo un sottoinsieme di $Q$; la seconda come curva nel piano $QxQ$.

A questo punto viene definito il concetto di immagine di una funzione: l'insieme degli $f(x_i)$ (essendo $x_i$ i valori che può assumere la variabile x) è detta immagine di $Q$ in $Q$ tramite il polinomio $f(x)$. Attraverso la rappresentazione il polinomio prende forma, questi valori, che si ottengono effettuando le sostituzioni, prendono una posizione concreta all'interno di un insieme o in un punto di un diagramma di $QxQ$.




**Definizione 2.3.** Noi chiamiamo *polinomi* in $Q$ le espressioni che si ottengono a partire dalle espressioni atomiche impiegando le sole operazioni di addizione e moltiplicazione (P)

**Definizione 2.4.** Con il termine *polinomio* indichiamo una somma algebrica di monomi non simili; quindi una espressione non ulteriormente riducibile ad un solo monomio (MP)

**Definizione 2.5.** Si chiama *polinomio* una somma algebrica di monomi interi (TM)

**Definizione 2.6.** Si chiama *polinomio* un'espressione algebrica data dalla somma algebrica di più monomi (PRZ)

**Definizione 2.7.** Si dice *polinomio* una somma algebrica di monomi (DBM)

Negli ultimi tre testi citati viene inoltre aggiunto che se nel polinomio compaiono due o più monomi simili, questi vengono sommati seguendo le regole già viste, operando la cosiddetta riduzione dei termini simili.

Il polinomio così ottenuto si dice *ridotto a forma normale.*(PRZ)
In più, nel caso particolare in cui tutti i termini di un polinomio siano monomi simili, esso si riduce a un monomio: quindi un monomio, e perciò anche un numero, può essere considerato un particolare polinomio, costituito da un solo termine.(DBM)

Infine viene detto che un polinomio, ridotto a forma normale, si dice nullo se tutti i suoi termini sono monomi nulli.(PRZ) Risulta quindi chiaro che per convenzione si definisce un polinomio come scrittura composta da oggetti più semplici.

### 2.2.1 Operare con i polinomi

Tra i testi analizzati abbiamo visto che tra le definizioni date di *polinomio* ci sono sostanzialmente due differenze.

A parte il Prodi, che non definisce le operazioni, in quanto definite a priori, gli altri testi definiscono le operazioni in maniera leggermente diversa a secondo del punto di vista scelto. Nei testi che definiscono i polinomi come somma di monomi, le operazioni vengono definite seguendo la traccia di quanto viene esposto in Algebra elementare di B. D'Amore, trattando le operazioni tra generiche espressioni razionali intere.

In Algebra elementare invece si sottolinea maggiormente l'aspetto funzionale.
Adesso mostriamo le definizioni che si possono riscontrare nei libri di testo e quindi in che modo quest'ultimi presentano le operazioni tra polinomi.

### Addizione e Sottrazione

**Definizione 2.8.** *Siano f e g due polinomi, $f : Q \to Q$; diciamo **somma** di questi due polinomi un nuovo polinomio $f + g : Q \to Q$ tale che,*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

. *Se abbiamo un polinomio $f(x)$ ed uno $g(x)$, **sottrarre** $g(x)$ da $f(x)$ significa sommare $f(x)$ e l'opposto di $g(x)$, cioè:*

$$f(x) - g(x) = f(x) + g'(x)$$

*dove g'(x) è il polinomio opposto di g(x) (DD).*

Vediamo ora come queste due operazioni vengono definite negli altri testi.

Premettiamo però che, discendendo dalla definizione data di polinomio come somma algebrica di monomi interi, è naturale che l'addizione e la sottrazione di polinomi siano praticamente le stesse, con le stesse proprietà di quelle definite sui monomi. A differenza di quanto avviene con questi ultimi, si tratta solo di verificare che la somma algebrica di polinomi è ancora un polinomio, e quindi che l'insieme dei polinomi è chiuso rispetto alla somma algebrica.

**Definizione 2.9.** *La differenza tra due polinomi è il polinomio che sommato al secondo dà il primo.(TM)*

**Definizione 2.10.** *L'addizione di due polinomi è l'operazione il cui risultato è il polinomio che si ottiene scrivendo di seguito tutti i termini del primo e del secondo polinomio ciascuno con il proprio segno e riducendo poi i termini simili. Il risultato di questa operazione è detto **somma**. Si chiama **opposto** di un polinomio il polinomio che si ottiene cambiando tutti i segni a quello dato e che si indica premettendo il segno - al polinomio stesso. [...] L'opposto di un polinomio è quindi un elemento simmetrico del polinomio stesso rispetto all'addizione di polinomi.*

L'addizione di polinomi gode delle seguenti proprietà:

- Associativa;
- Commutativa;
- Ammette elemento neutro,il polinomio nullo
- ogni elemento ha il simmetrico rispetto all'addizione, il suo polinomio opposto.

**Definizione 2.11.** *La sottrazione di due polinomi è l'operazione il cui risultato è il polinomio ottenuto addizionando al primo polinomio (minuendo) l'opposto del secondo (sottraendo). Il risultato di tale operazione è detto **differenza**. Le operazioni di addizione e di sottrazione di polinomi si indicano con il termine addizione algebrica di polinomi.(PRZ)*

*Per indicare la **somma** di due polinomi si scrivono di seguito i due polinomi, racchiusi tra parentesi e separati dal segno + di addizione. Per indicare la differenza di due polinomi si scrivono di seguito i due polinomi, racchiusi tra parentesi e separati dal segno - di sottrazione.[DBM] Viene poi detto che la somma e la differenza di polinomi sono ancora polinomi, in quanto si tratta di somma e differenza di monomi. Somma e differenza, inoltre, come nel caso dei monomi prendono il nome di somma algebrica.*

### La Moltiplicazione

**Definizione 2.12.** *Dati due polinomi $f(x)$ e $g(x)$, si chiama **prodotto** di essi un nuovo polinomio che indichiamo con $(fg)(x)$ e la cui rappresentazione è quella che si ottiene pensando $f(x)$ e $g(x)$ come espressioni razionali intere ed eseguendo il prodotto come tali. Si scrive:*

$$f(x)\Delta g(x) = (fg)(x)$$

*(DD).*

Possiamo subito notare come in questo caso ci allontaniamo parecchio dall'aspetto funzionale e ci avviciniamo alle espressioni algebriche.

**Definizione 2.13.** *Il prodotto di due espressioni polinomie è un'espressione polinomia avente per termini i prodotti di ciascun termine della prima per ciascun termine dell'altra (RS).*

**Definizione 2.14.** *Applicando la proprietà distributiva si possono perciò moltiplicare tra loro due polinomi. Il risultato,di fatto, è ottenuto moltiplicando ognuno dei monomi del primo polinomio per ognuno dei monomi del secondo polinomio.(MP)*

Definizione analoga viene data nel Tonolini - Manenti Calvi, mentre nel Persano - Riboldi - Zanoli e nel Dodero - Baroncini - Manfredi, esattamente seguendo lo stile presente in D'Amore - De Flora nelle espressioni letterali, viene affrontata prima la moltiplicazione tra polinomio e monomio e poi quella tra due polinomi. Ne viene che il prodotto di un polinomio per un monomio è il polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine per il monomio dato (PRZ), mentre il prodotto di due polinomi è definito esattamente come sopra.

Un aspetto molto interessante nell'analisi di questi testi l'ho riscontrato nel Dodero - Baroncini - Manfredi il quale offre un'interpretazione geometrica della moltiplicazione tra polinomi: Per fissare le idee consideriamo il caso della moltiplicazione di un trinomio $A + B + C$ per un binomio $X + Y$. Costruisce quindi un rettangolo di lati $A+B+C$ *e* $X+Y$ . La misura dell'area di questo rettangolo è il prodotto delle misure dei lati, ossia $(A+B+C)(X+Y)$. D'altra parte, tale area è la somma delle aree dei sei rettangolini che compongono il rettangolo e quindi misura $AX + BX + CX + AY + AY + AY$ . Perciò risulta:

$$(A + B + C)(X + Y) = AX + BX + CX + AY + AY + AY$$

.

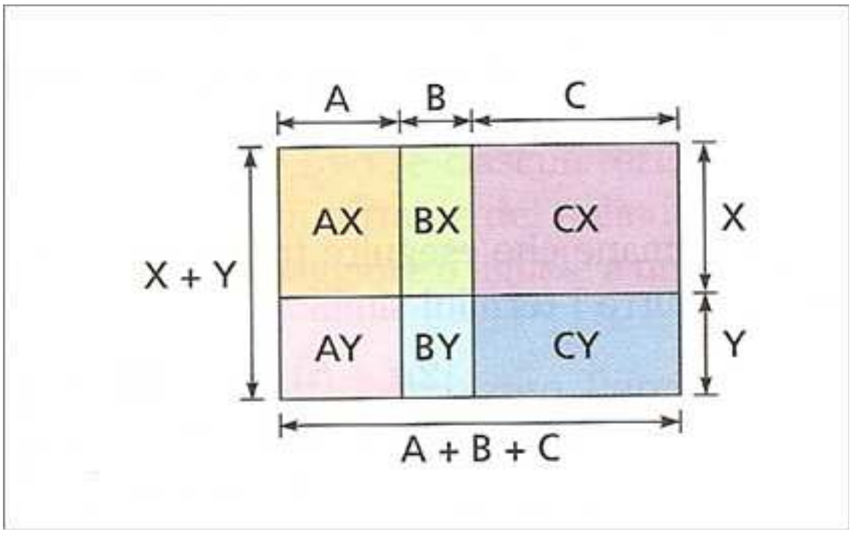



Figura 2.2: *Prodotto di polinomi*

### Elevamento a potenza

Questa operazione viene definita solo in alcuni testi ma in modo molto generico, ad esempio il Persano - Riboldi - Zanoli la presenta in questo modo:

*Moltiplichiamo due o più polinomi tra loro identici introduciamo un'altra operazione,* ***l'elevamento a potenza*** *di un polinomio, con esponente naturale. [...]. La potenza di un polinomio è ancora un polinomio solo se l'esponente è un numero naturale. In altri casi ci si limita a considerare nello specifico solo alcune particolari potenze di polinomi, che rientrano nei prodotti notevoli.*

L'analisi dei prodotti notevoli e l'interpetrazione geometrica del prodotto presentata da Dodero-Baroncini e Manfredi che hanno suscitato in me la curiosità di analizzare e mostrare le identità algebriche mediante delle dimostrazioni geometriche. È tutto questo che ha dato vita alla mia attività didattica svolta durante le ore di tirocinio.

# Capitolo 3

# Interpretazione geometrica dei prodotti notevoli

Come abbiamo precedentemente detto, i **prodotti notevoli** in quasi tutti i testi analizzati vengono trattati come particolari moltiplicazioni tra polinomi.

Nel Dodero-Baroncini-Manfredi, testo che ho usato durante il mio tirocinio, ho riscontrato l'aspetto più interessante nella trattazione dei prodotti notevoli ovvero *l'interpretazione geometrica* di quest'ultimi.

Prima di presentare la mia attività di tirocinio e il lavoro che ho svolto con i ragazzi, in questo capitolo voglio mostrare tutta la teoria che vi è alla base.

### 3.0.2 Quadrato di binomio

Cominciamo col considerare due generici monomi, che indichiamo con $A$ e $B$; la loro somma è il binomio $(A + B)$. Per definizione di potenza si ha

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B)$$

Quindi, calcolando il prodotto, si ottiene

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

sommando i termini $AB$ e $BA$, che sono uguali per la proprietà commutativa della moltiplicazione,si ottiene

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Il termine $2AB$ si chiama *doppio prodotto* e il segno del suo coefficiente sarà positivo o negativo a seconda che i coefficienti dei due monomi A e B siano concordi o discordi.

**Regola**: *Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo monomio, più il doppio prodotto dei due monomi, più il quadrato del secondo monomio.*

**Interpretazione geometrica**: Costruiamo anzitutto un quadrato di lato $A+B$.

La misura dell'area di questo quadrato è $(A+B)^2$. D'altra parte, vediamo anche che esso è formato da due quadrati, i cui lati misurano rispettivamente $A$ e $B$, e da due rettangoli, ciascuno dei quali ha i lati che misurano $A$ e $B$.

Quindi la misura dell'area del quadrato di lato $A+B$ dev'essere la somma delle misure delle aree di tali figure:

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

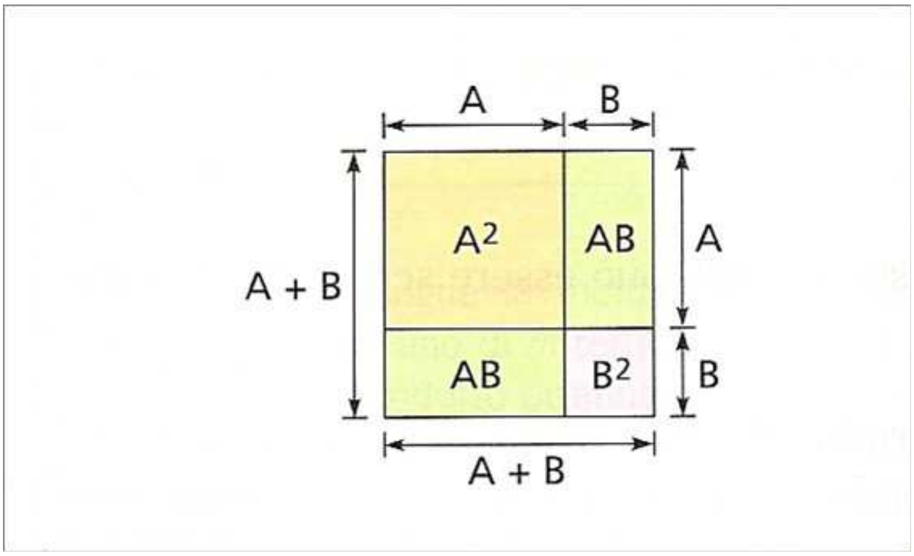



Figura 3.1: *Quadrato di binomio*

### 3.0.3 Quadrato di trinomio

Consideriamo tre generici monomi, che chiameremo con $A, B, C$; il **quadrato del trinomio** $(A + B + C)$ è

$$(A + B + C)^2 = (A + B + C)(A + B + C)$$

Eseguendo la moltiplicazione, si ottiene

$$(A + B + C)^2 = A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2$$

da cui, riducendo i termini simili, si ha

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Si trova una formula perfettamente analoga per il quadrato di un polinomio di quattro o più termini; pertanto vale la seguente regola generale:

**Regola**: *Il quadrato di un polinomio di un numero qualunque di termini è uguale alla somma dei quadrati di tutti i termini e dei doppi prodotti di ciascun termine per ognuno di quelli che lo seguono.*

**Interpretazione geometrica**: *Analogamente a quanto fatto prima, costruiamo un quadrato di lato $A + B + C$. La misura dell'area di questo quadrato è $(A + B + C)^2$. D'altra parte, vediamo anche che esso è formato da un quadrato di lato $A$, da un quadrato di lato $B$, da un quadrato di lato $C$, da due rettangoli di lati $A$ e $B$, da due rettangoli di lati $A$ e $C$ e da due rettangoli di lati $B$ e $C$. Quindi la misura dell'area del quadrato di lato $A + B + C$ dev'essere la somma delle misure delle aree di tali figure:*

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

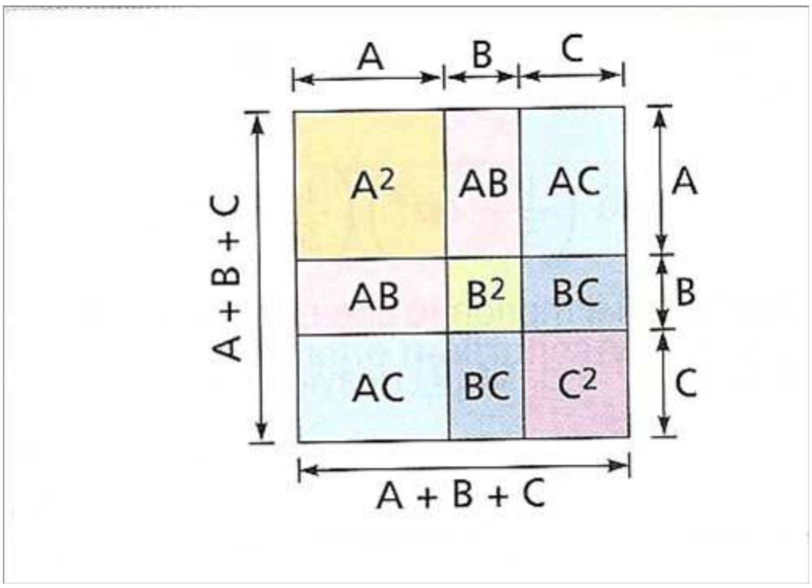



Figura 3.2: *Quadrato di trinomio*

### 3.0.4 Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

Siano $A$ e $B$ due monomi; calcolando il prodotto della loro somma $A+B$ per la loro differenza $A-B$, si ottiene:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

da cui, elidendo i monomi opposti $BA$ e $-AB$, si ricava

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

**Regola**: *Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale al quadrato del primo monomio meno il quadrato del secondo monomio.*

**Interpretazione geometrica**: *Supponendo $A > B$, si può vedere questo prodotto in due modi: Uno è quello di considerarlo come la differenza tra le aree di un quadrato di lato $A$ e un quadrato di lato $B$; mentre nel secondo si può vedere come somma delle aree di un quadrato di lato $A$ e un rettangolo di lati $B$ e $(A-B)$.*

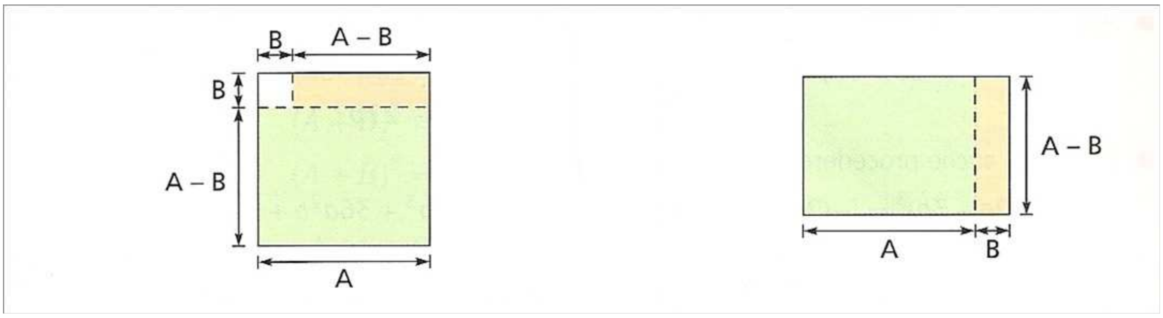



Figura 3.3: *Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza.*

### 3.0.5 Cubo di binomio

**Il cubo di un binomio**, si ottiene moltiplicando il quadrato del binomio per il binomio stesso; otteniamo perciò: $(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B)^1 ==$ $(A^2+B^2+2AB)(A+B) = A^3+A^2B+B^2A+B^3+2A^2B+2B^2A$ Riducendo i termini simili, otteniamo

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

**Regola**: *Il cubo di un binomio è un quadrinomio i cui termini sono*:

- *il cubo del primo monomio*;
- *il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo*;
- *il triplo prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo*;
- *cubo del secondo monomio.*

*I coefficienti dello sviluppo del cubo del binomio hanno*:

- *tutti i termini preceduti dal segno + se i coefficienti di A e B sono positivi*;
- *tutti i termini preceduti dal segno - se i coefficienti di A e B sono negativi*;
- *i termini a segni alterni, se i coefficienti di A e B sono discordi, a partire dal segno + se A ha coefficiente positivo, dal segno - se A ha coefficiente negativo*;

**Interpretazione geometrica**: costruiamo un cubo con spigolo che misura $(A+B)$. La misura del volume di questo cubo è $(A+B)^3$. D'altra parte vediamo anche che esso si può scomporre in otto figure solide:

- *un cubo di spigolo A il cui volume misura* $A^3$;

- *un cubo di spigolo B il cui volume misura* $B^3$;
- *tre parallelepipedi, ciascuno dei quali ha dimensioni* $A, A, B$*; il volume di ciascuno di essi misura* $A^2B$*; il loro volume totale misura* $3A^2B$;
- *tre parallelepipedi, ciascuno dei quali ha dimensioni* $A, B, B$*; il volume di ciascuno di essi misura* $AB^2$*; il loro volume totale misura* $3BA^2$.

La misura del volume del cubo, che come abbiamo detto è $(A+B)^3$, è anche uguale alla somma delle misure dei volumi di questi otto solidi, e quindi si ha:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

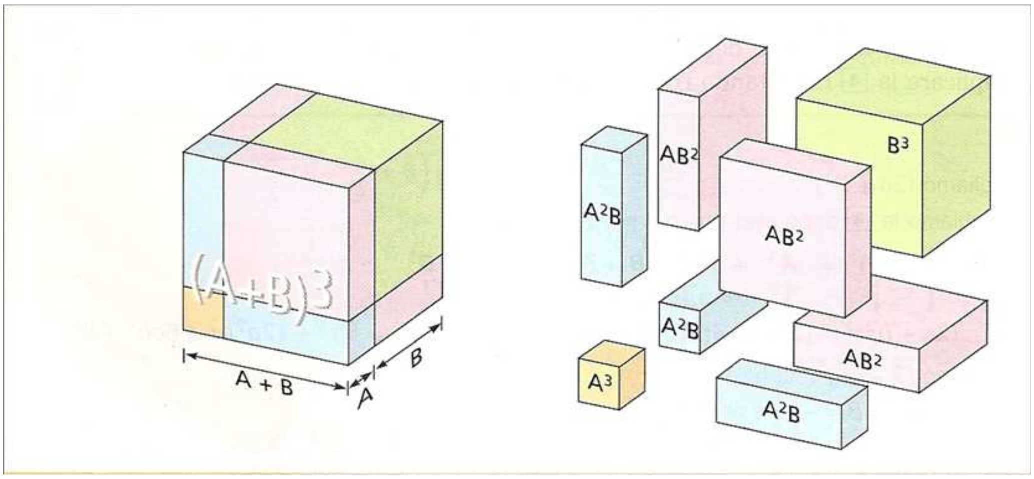



Figura 3.4: *Cubo di binomio*

### 3.0.6 Potenza di un binomio

Vogliamo ora vedere se è possibile trovare una formula per lo sviluppo di $(A+B)^n$, **cioè della potenza n-esima del binomio** $(A+B)$, con $n \in N$. Conoscendo lo sviluppo di $(A+B)^n$ con $n = 0, ...., 4$ riporta alcune considerazioni generali che valgono per lo sviluppo di $(A+B)^n$ con n numero naturale qualsiasi:

- *ogni sviluppo ha un termine in più del precedente*;
- *i coefficienti dei termini estremi sono uguali, come pure i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi*;
- *lo sviluppo di* $(A+B)^n$ *contiene* $n+1$ *termini: il primo è* $A^n$ *e l'ultimo è* $B^n$;
- *lo sviluppo di* $(A+B)^n$ *è un polinomio omogeneo di grado n, completo sia rispetto alla lettera* $A$ *sia rispetto alla lettera* $B$*, ordinato secondo le potenze decrescenti di* $A$ *e crescenti di* $B$.

Quindi, al fine di trovare una regola generale, partendo dagli sviluppi fin qui considerati, si considera il triangolo di Tartaglia, in cui si possono ottenere i coefficienti degli sviluppi di $(A+B)^n$ per qualsiasi n, ordinando il polinomio prodotto come descritto sopra.
Trovo molto utile fornire una rappresentazione grafica, quando possibile dei prodotti notevoli, perché insieme alla dimostrazione algebrica, aiuta lo studente a ragionare su cosa sta facendo, invece di impararli a memoria come formule.

Tuttavia ritengo limitativo il fatto che quando si espongono si trattino $A$ e $B$ solo come monomi, in quanto magari lo studente, trovando davanti, ad esempio, a una scrittura del tipo $(x+y+z)(x+y-z)$ non riconosce che si tratta di un prodotto della somma di due espressioni per la loro differenza e quindi non riesce subito a scriverlo come $[(x+y)^2-z^2]$. Ovviamente non è un fatto grave, perché basta svolgere tutti i calcoli e ci si riconduce alla stessa espressione; penso solo che per una ragione di completezza e generalità sarebbe stato più opportuno considerare $A$ e $B$ generici polinomi.

# Capitolo 4

# La sperimentazione

L'interpretazione geometrica dei prodotti notevoli messa in risalto in modo dettagliato nel testo di **Dodero-Manfredi-Baroncini** ha suscitato in me la voglia di mostrare quest'importante aspetto ai ragazzi, con l'obiettivo che le costruzioni geometriche li potessero aiutare ad accantonare quel meccanicismo noioso e ripetitivo che spesso emerge tra i ragazzi nello studio dell'algebra ed in particolar modo nella trattazione dello sviluppo dei prodotti notevoli.

Il mio scopo principale è stato quello di far capire loro che il lavoro mnemonico svolto per imparare lo sviluppo dei prodotti notevoli poteva essere sostituito da un lavoro di costruzione e sperimentazione; tale lavoro poteva avvenire sfruttando semplici strumenti come cartoncini e disegni, inoltre, potevano sfruttare le loro conoscenze del software *geogebra*.

## 4.1 Il contesto

Il contesto nel quale ho svolto il mio lavoro è stato quello di una classe prima del liceo scientifico statale S.Savarino di Partinico (PA), scuola situata in un territorio la cui situazione socio-economica non presenta particolari aspetti critici.

La scuola è infatti frequentata in buona parte da studenti responsabili, dotati di un forte senso critico nei confronti delle discipline che studiano, cercando di acquisire un'autonomia metodologica e una capacità progettuale nella consapevolezza che queste saranno strumenti fondamentali per i successivi studi universitari.

La classe in cui ho svolto la mia attività, come ho già detto, è una prima costituita da 21 studenti di cui 8 ragazze e 13 ragazzi.

Già dall'inizio mi sono accorta che la classe non presentava delle forti problematiche dal punto di vista disciplinare, ma in fase di osservazione ho potuto cogliere manifestazioni di situazioni ampiamente studiate durante il corso di Didattica della Matematica.

Cito qui in breve:

- la predilezione, da parte degli studenti, di un approccio marcatamente procedurale al calcolo simbolico, che rischia di oscurare (se non opportunamente guidato verso un più maturo stadio di conoscenza) gli aspetti strutturali della disciplina (Sfard, 1991);

- la tendenza di molti allievi ad accettare passivamente quanto studiato ed a manipolare, anche con discreta abilità, i simbolismi loro introdotti, senza alcuna attenzione al significato di cui tali simboli sono portatori, in accordo con un modello di algebra, come collezione di trucchi ed artifici finalizzati alla soluzione di esercizi, più che come valido strumento di pensiero (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994);

- difficoltà nella messa in formula di un problema espresso nel linguaggio naturale, a cominciare dalle scelte da operare nel delicato processo di **nominalizzazione** che consiste nell'assegnare nomi agli elementi del problema in modo da incorporarvi il senso del problema stesso (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994);

- vistosi problemi di verbalizzazione, quando veniva richiesto di giustificare un passaggio o di esplicitare il processo mentale seguito, che testimoniano da una parte una scarsa padronanza del linguaggio algebrico, cui la classe è stata da poco introdotta; dall'altra, ancora una volta, l'assenza di controllo razionale nell'applicazione delle regole di calcolo.

In seguito nella descrizione della mia attività riporterò esempi concreti che faranno emergere chiaramente le criticità sopra elencate.

## 4.2 L'osservazione

Ho iniziato la mia attività con una prima fase di osservazione; sia per conoscere meglio la classe e quindi cercare di estrapolare da loro i motivi dell'ostilità e delle difficoltà che incontrano nello studio della Matematica, sia per costruire un mio piano di trasposizione didattica basato su scelte di coerenza e continuità rispetto al percorso didattico avviato dall'insegnante prima del mio arrivo.

Ho da subito letto negli occhi dei ragazzi la curiosità e l'entusiasmo di avermi in classe, probabilmente perché mi vedevano come una figura di supporto, ma soprattutto perché fin da subito sono riuscita ad interagire ed instaurare con loro un rapporto confidenziale e di fiducia.
In questa fase nonostante io abbia assistito alle lezioni in modo non attivo, la mia tutor mi ha permesso di dare consigli ai ragazzi sullo svolgimento di alcuni esercizi, di fare loro qualche domanda durante le verifiche orali, di dare qualche piccolo suggerimento durante le prove scritte.

A primo impatto sembrerebbe che in questo periodo di osservazione il mio lavoro è stato del tutto sterile, invece proprio in questo periodo ho colto passo passo le tecniche e le modalità d'insegnamento-apprendimento della classe e quest'ultime mi hanno permesso di elaborare la mia unità didattica.
Il mio obiettivo è stato quello di creare un lavoro che andasse ad abbattere l'aspetto meccanico e mnemonico, che spesso gli alunni adottano nello stu-

dio dell'algebra, per sviluppare, invece, un aspetto critico e costruttivo nei confronti degli oggetti matematici che in quel momento stavano studiando ovvero: *polinomi e prodotti notevoli.*

Durante la mia osservazione mi sono immediatamente accorta che l'insegnante era particolarmente fedele al libro di testo *Modelli matematici* di Fraschini-Grazzi da lei adottato e quindi seguiva alla lettera definizioni, esempi ed esercizi proposti che forniva il testo. Insegnare-imparare la matematica per capitoli seguendo fedelmente il libro di testo era una consuetudine di classe, infatti era un metodo che gli alunni adottavano per quasi tutte le discipline.
Mi sono resa conto che in questo modo la classe costruiva una matematica artificiale, che seguiva una costruzione temporale basata su un prima e un dopo.

Bisogna a questo punto sottolineare che un libro di testo, in particolare nella scuola secondaria di primo grado, dovrebbe essere uno strumento che l'insegnante dovrebbe plasmare e non un libro dal quale apprendere dogmi. A questo punto, il compito dell'insegnante dovrebbe essere quello di dare una lettura critica al testo e decidere quale possa essere l'uso migliore in base al contesto classe che si trova davanti; l'insegnante dovrebbe quindi valutare se è necessario integrare le lezioni con materiale aggiuntivo, preso da altri libri o creato personalmente. Bisogna, purtroppo, dire che questo lavoro viene fatto molto raramente, poichè spesso il docente segue meticolosamente il libro di testo, dandogli piena fiducia e rischiando che i ragazzi al posto di comprendere e apprendere imparino a ripetere.

Come si osserva in Arrigo, D'Amore e Sbaragli:
*"occorrerebbe chiarire le finalità di un libro di testo, che è il risultato di una trasposizione didattica scelta dagli Autori e che non va quindi interpretato dall'insegnante come un libro di matematica scientificamente significativo a parte rarissime occasioni, dal quale si possono apprendere concetti corretti e certi. Il sapere dovrebbe già essere dominato dall'insegnante nel momento in*

*cui adotta un libro di testo e queste conoscenze dovrebbero essere semplicemente rilette e reinterpretate nella trasposizione didattica scelta dall'Autore, per poi accettarle in toto o riadattarle personalmente nel particolare contesto classe".*[Arrigo G. et al. 2010, *p*.190].

Alla luce delle osservazioni appena fatte, vediamo come l'insegnante ha presentato agli alunni l'argomento *polinomi e prodotti notevoli.*

L'insegnante come prima cosa ha presentato agli alunni il capitolo dedicato ai polinomi intitolato *"Monomi e polinomi"*, e ha mostrato subito gli obiettivi che si è prefissata di raggiungere durante la trattazione di quest'argomento. Ovvero:

- riconoscere monomi e polinomi e saperne individuare le caratteristiche;
- operare con monomi e polinomi applicando le regole sui prodotti notevoli;
- padroneggiare l'uso delle lettere come puro simbolo e come variabile;
- stabilire la divisibilità fra polinomi.

A questo punto l'insegnante ha fornito agli alunni la definizione di **espressione algebrica letterale** dicendo che *è un'espressione nella quale alcuni numeri sono rappresentati da lettere; per espressione si intende una serie di numeri legati tra loro da simboli di operazione. Inoltre, se nell'espressione compaiono anche i numeri relativi questa prende il nome di espressione algebrica.* A questo punto l'insegnante ha presentato degli esempi di *espressione algebrica letterale*, ma sono stati degli esempi puramente *matematici* in cui alle lettere venivano sostituiti i numeri; così facendo l'insegnante si è preclusa di costruire quel legame tra Matematica e realtà, fondamentale a mio parere, per permettere agli alunni di costruire un sapere proprio e non mnemonico. L'insegnante fatti questi semplici esempi alla classe ne ha tralasciati altri che tengono conto del registro geometrico, fondamentali per iniziare a costruire

quel legame tra *Matematica a realtà* che accennavo prima. Dopo questi l'insegnante ha dato la definizione di *monomio*:
*Un* ***monomio*** *è un'espressione letterale in cui l'unica operazione tra le lettere è la moltiplicazione da intendere anche la potenza con esponente naturale.*

Questa non è altro che una **descrizione** e non una **definizione** essendo una condizione sufficiente, ma non necessaria. Da questa, non è ben chiaro se tra i monomi sono anche compresi i numeri e le lettere con esponente pari a 1: i primi potrebbero essere pensati come espressioni letterali in cui le lettere hanno tutte esponente zero, mentre le altre come moltiplicazioni tra una lettera con esponente pari a 1 ed altre con esponente pari a zero.

Mi sembra del tutto ovvio che una sfumatura di questo tipo non è facilmente comprensibile dagli alunni senza alcun suggerimento da parte dell'insegnante.

L'insegnante avendo anche dato la definizione di *forma normale, coefficiente e parte letterale*, ha chiamato alla lavagna alcuni ragazzi e ha chiesto loro di riconoscere i monomi scritti in forma normale, qualora non lo erano di scriverli in tale forma, inoltre di distinguerne il coefficente e la parte letterale.

Ho trovato molto interessanti degli esempi dove l'insegnante ha fatto notare che si poteva accettare l'operazione di divisione nel coefficente, ma non tra le lettere come ad esempio:

$$\frac{x}{y} \qquad\qquad \frac{1}{2}a^3b^2c$$

L'insegnante ha proseguito dando le definizioni di **grado del monomio** e **grado rispetto ad una lettera**, affermando che:

*il grado di un monomio è la somma di tutti gli esponenti delle lettere.*
*L'esponente di ciascuna lettera è detto grado rispetto a quella lettera.*
La stessa ha lasciato trapelare dalla sua spiegazione che non vi è alcun punto di contatto tra i due concetti.
A questo punto l'insegnante ha fornito ai ragazzi le definizioni di monomi **simili** e **opposti**. Nella definizione di monomi simili, ha sottolineato il fatto

che i monomi devono essere in forma normale e ha supportato la sua spiegazione con esercizi di comprensione.
La definizione di monomi opposti è stata letta dal libro di testo ed è stata completata una tabella con dei monomi e veniva chiesto loro di classificarli come opposti o simili.
L'insegnante,fatto tutto questo, ha assegnato ai ragazzi una serie di esercizi da svolgere a casa, presi dalla sezione *Esercizi* del loro libro di testo, suo dire, per consolidare le definizioni appena apprese. Prima di andar via ha anticipato loro che la prossima volta gli avrebbe parlato di un nuovo oggetto matematico:*I polinomi.*

La lezione seguente è iniziata con la richiesta da parte dell'insegnante sui dubbi che eventualmente hanno avuto gli alunni nello svolgimento degli esercizi per casa, ma tutta la classe è stata concorde nel dire che gli esercizi erano molto semplici perchè si sono limitati ad applicare le definizioni che l'insegnante aveva dato loro.
Fatto questo breve sondaggio, l'insegnante ha scritto alla lavagna la definizione di **polinomio**:

*Un polinomio è una somma o differenza di monomi*
Questa ci accorgiamo essere una condizione necessaria e sufficente e per questo una **definizione** formale.

A questa sono seguite la definizione di *termini*, e quella di *forma normale*; a questo punto l'insegnante ha proposto alcuni esempi e ha chiesto loro se è vero che:
*Ogni monomio è un polinomio. Ogni polinomio è un monomio.*

Alla domanda appena fatta la classe ha risposto con un primo momento di assoluto silenzio, poi ha inziato a discutere; alcuni sostenevano che l'affermazione era vera altri invece dicevano che era falsa.

Sulla veridicità della prima parte dell'affermazione sono stati quasi tutti d'accordo anche perchè hanno riportato degli esempi di polinomi non ridotti in forma normale come ad esempio $2a^2 + 5a^2$ che visto in questo modo lo hanno definito come polinomio, ma visto come risultato della somma ovvero

$7a^2$ hanno detto essere un monomio. Loro hanno sostenuto che qualsiasi monomio poteva essere scritto come somma e quindi leggerlo come polinomio. Il dubbio è rimasto sulla seconda parte dell'affermazione, e a mio parere si è mantenuto anche dopo la spiegazione dell'insegnante, poichè ella ha lasciato come sfida quella di trovare un controesempio, sfida per nulla semplice per dei ragazzi che hanno da poco preso confidenza con il calcolo algebrico.
Anche in questo caso l'insegnante ha dato la definizione di **grado complessivo** di un polinomio senza fare alcun accenno questa volta al *grado di un polinomio rispetto ad una sua lettera.*

Nel dare la definizione di *grado di un polinomio*, l'insegnante si è soffermata nel dire che ciò che va calcolato è il massimo dei gradi dei monomi e non, come spesso si fa sbagliando, la somma di questi. Ha ribadito ancora che va calcolato il massimo e non il maggiore, perché potrebbe succedere che vi siano monomi di grado uguale.

Anche queste definizioni sono state supportate da una serie di esercizi di comprensione in cui sono stati proposti dei polinomi in forma normale in cui veniva chiesto il numero di termini, la classificazione in base al numero di questi, il grado dei termini del polinomio, il grado del polinomio e se il polinomio era o meno omogeneo.

Il caso interessante che ha proposto l'insegnante è stato l'esempio del polinomio omogeneo *a-2b* nel quale bisognava tener presente il massimo e non il maggiore.
L'esercizio che a questo punto ha messo in crisi i ragazzi è stato il seguente:

Qual è il grado del polinomio

$$5a^3 + 3a^2 - 2a^3 + 5a + 4a^3 - 10$$

La risposta data quasi all'unisono è stata *di terzo grado.*
A questo punto è emerso come i ragazzi spesso svolgano gli esercizi senza riflettere, in quanto hanno fatto riferimento all'ultima definizione data dall'insegnante, ma hanno tralasciato del tutto di osservare che il polinomio non è ridotto in forma normale e che quindi la risoluzione dell'esercizio doveva avvenire in modo diverso.

Quest'esercizio è da tenere particolarmente presente in quanto spesso si dovrebbe far riferimento ad esercizi del genere per portare l'alunno a staccarsi dal meccanicismo ed imparare a riflettere sulla consegna che gli viene fatta di volta in volta.
L'insegnante non ha mai parlato di polinomi come funzione, pertanto a differenza di quanto proposto nel libro di testo, per definire l'uguaglianza tra due polinomi non è ricorsa al *Principio di identità* dei polinomi, ma ha dato la seguente definizione:

*Due polinomi, ridotti in forma normale, si dicono uguali se sono formati dagli stessi termini.*
In questa definizione ha utilizzato il termine *formati*, mai definito in precedenza, questo sta ad indicare che i due polinomi in questione hanno gli stessi addendi, facendo così riferimento esplicito alla loro rappresentazione. Il termine *formare*, nel linguaggio naturale, viene usato per indicare una composizione di più elementi, ovviamente presentato così non esprime le relazioni che intercorrono tra questi, ma fa riferimento soltanto a quello che si vede, senza rimarcare le proprietà e la struttura che vi stanno dietro.

A questa seguono le definizioni di polinomi **opposti, polinomio nullo, polinomio ordinato e polinomio completo rispetto ad una lettera.** Come la stessa professoressa ha precisato, la definizione di *polinomio ordinato* è molto rigorosa, infatti attenendosi al libro di testo afferma:

*Un polinomio in forma normale con almeno due termini si dice ordinato in modo crescente (decrescente) rispetto a una lettera, se leggendolo da sinistra verso destra, gli esponenti di quella lettera sono tutti diversi e crescono (decrescono).*
L'insegnante ha scritto sulla lavagna un esercizio chiedendo di completare il polinomio rispetto ad una lettera, e ha sottolineato che non si può parlare di completezza se non si è specificato a quale lettera ci si riferisce, questo per spronare i ragazzi a leggere sempre bene e con spirito critico la consegna degli esercizi per evitare errori evitabili.

Nella lezione successiva, l'insegnante ha introdotto le operazioni con i po-

linomi.
Ha iniziato introducendo le operazioni di addizione tra polinomi, di moltiplicazione di un polinomio per un monomio e quindi di divisione di un polinomio per un monomio.
In questa lezione la professoressa ha seguito scrupolosamente il libro di testo, ha proposto esercizi ed esempio presenti in esso, spesso facendo riprodurre alla lavagna i medesimi esempi.

Ho notato che l'insegnante si è particolarmente soffermata sulla divisione di un polinomio per un monomio enunciando la regola per calcolare il quoziente tra un polinomio e un monomio ed esplicitando ogni singolo passaggio da compiere per portare a termine l'algoritmo risolutivo; ha elencato ogni proprietà utilizzata, ha sottolineato l'importanza delle parentesi, ha suggerito delle strategie per evitare di commettere errori e a tal proposito ha consigliato, almeno in una fase iniziale, di non saltare dei passaggi per poter avere un maggiore controllo sugli errori e ridurre così la probabilità di commetterli.

Al momento di svolgere gli esercizi da lei proposti alla classe, ha chiesto ai ragazzi quando non è possibile effettuare la divisione tra un polinomio e un monomio.

Probabilmente era sua intenzione portare la classe a fare questa considerazione in maniera quasi autonoma in quanto lei aveva semplicemente accennato che non era sempre possibile senza dare alcuna spiegazione.

A tal proposito ha fatto svolgere ai ragazzi un esercizio di divisione in cui il risulato non era un polinomio, poichè il monomio divisore era di grado superiore al polinomio dividendo e per questo il quoziente era ad esponente intero negativo e quindi non un monomio.
Alla fine di ogni esercizio svolto in classe, l'insegnante ha chiamato i ragazzi dal posto e gli ha fatto enunciare le nozioni apprese nelle lezioni precedenti in modo da far acquisire meglio i concetti di base anche ai ragazzi che hanno tralasciato il lavoro da fare a casa.

Dopo aver spiegato anche l'algoritmo per moltiplicare due polinomi, l'in-

segnante ha proposto alla classe degli esercizi semplici, ma mirati, per capire come i ragazzi affrontano certe situazioni particolari e quindi per preparare il terreno per la presentazione dei *prodotti notevoli*.
Quest'ultimi sono stati presentati senza far alcun riferimento al registro geometrico e al parallelismo che si può creare tra le costruzioni geometriche e le identità algebriche.

Ho subito notato grande smarrimento negli alunni quando l'insegnante ha scritto sulla lavagna lo sviluppo dei prodotti notevoli e si è limitata a dire che questi andavano imparati a memoria perchè erano strumenti fondamentali per il programma futuro.
La prima reazione della classe è stata quella di dire all'insegnante:

*Come facciamo ad impararli tutti, a non sbagliare e a non dimenticarci qualche termine dello sviluppo?*
Proprio davanti a questa domanda l'insegnante ha un pò esitato a rispondere, limitandosi poi a dire che andavano imparati e quindi applicati come avevano fatto tutti fino ad allora.
Proprio in questo momento, dopo quest'osservazione mi è venuto in mente di *dare vita al calcolo letterale e in particolar modo ai prodotti notevoli...*

# Capitolo 5

# Il mio intervento in classe

## 5.1 Presentazione della mia attività

Durante la fase di osservazione descritta nel capitolo precedente, ho avuto modo di constatare in diverse situazioni che gli alunni apprendevano i concetti che l'insegnante forniva loro come se fossero dei dogmi privi di alcuna spiegazione che andavano imparati ed applicati negli esercizi che l'insegnante lasciava per casa e nei compiti scritti.
Ho notato che spesso gli alunni chiedevano all'insegnante di fare più esempi, probabilmente a mio parere per cercare di capire meglio l'oggetto matematico preso in esame, ma nonostante i vari esempi leggevo nei loro volti uno smarrimento dovuto, a mio avviso, al fatto che l'insegnante non ha mai fornito loro un esempio legato alla realtà per far sì, che i ragazzi potessero un minimo fare esperienza dell'oggetto matematico in questione.
Osservato ciò, ho chiesto all'insegnante se potevo pianificare una mia unità didattica sui polinomi e in particolar modo sullo sviluppo dei prodotti notevoli; senza nessuna esitazione la mia richiesta è stata ben accolta.
Come prima cosa ho subito pianificato il mio lavoro non scostandomi molto dalla programmazione svolta dall'insegnante.

Il mio obiettivo non è stato quello di fare tabula rasa del lavoro che gli studenti avevano fatto e che molti probabilmente avevano appreso con fatica;

l'obiettivo che mi prefiggevo era quello di andare a completare quel puzzle del loro sapere matematico che a mio avviso era un pò incompleto.

La motivazione che mi ha spinto a fare tutto questo è stata anche dettata dal fatto che un puzzle incompleto adesso, avrebbe sicuramente dato grossi problemi nella scomposizione dei polinomi e quindi nelle frazioni algebriche. Ho preparato, come aveva fatto l'insegnante la mia unità didattica, che riporto qui di seguito, e l'ho da subito letta alla classe e all'insegnante tutor. La cosa che mi premeva di più rispetto al lavoro fatto dall'insegnante è stato di commentare tutto il lavoro insieme alla classe chiedendo loro dei pareri e cercando di renderli parte attiva di tutti gli argomenti che avremmo fatto da lì a poco.

**UNITA' DIDATTICA: IL CALCOLO LETTERALE**

| CONOSCENZE | ABILITA' |
|---|---|
| **Unità didattica 1: I monomi e i polinomi**<br>• Definizione di monomio.<br>• Grado di un monomio. Monomi simili. Operazioni con i monomi. M.C.D. e m.c.m. fra monomi.<br>• I prodotti notevoli.<br>• Definizione di polinomio.<br>• Grado di un polinomio. Polinomi ordinati. Polinomi omogenei. Operazioni tra polinomi.<br>• Divisione di un polinomio per un monomio. Divisione fra due polinomi.<br>• Teorema del resto. Divisibilità fra polinomi. Regola di Ruffini. | • Sommare algebricamente monomi<br>• Calcolare prodotti, potenze e quozienti di monomi<br>• Eseguire addizione, sottrazione e moltiplicazione di polinomi<br>• Semplificare espressioni con operazioni e potenze di monomi e polinomi<br>• Calcolare il M.C.D. e il m.c.m. fra monomi<br>• Applicare i prodotti notevoli<br>• Eseguire la divisione tra due polinomi<br>• Applicare la regola di Ruffini<br>• Utilizzare il calcolo letterale per rappresentare e risolvere problemi |
| **Unità didattica 2: Scomposizione di un polinomio in fattori**<br>• Raccoglimento a fattore comune totale. Raccoglimento a fattore comune parziale. Scomposizione di polinomi con i prodotti notevoli. Scomposizione di un particolare trinomio di secondo grado.<br>• Scomposizione di polinomi con la regola di Ruffini. Scomposizione della differenza e della somma di due cubi.<br>• Determinazione del M.C.D. e del m.c.m. fra polinomi | • Raccogliere a fattore comune<br>• Calcolare il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi |

**VERIFICA E VALUTAZIONE**

Per appurare il raggiungimento o meno degli obiettivi proposti si opererà una continua verifica del processo di apprendimento, nel corso e alla fine delle attività proposte, mediante verifiche scritte e orali tradizionali, prove strutturate.
Per la valutazione di ciascun alunno si utilizzeranno i dati delle verifiche e si prenderanno in considerazione il livello di partenza, la partecipazione al dialogo educativo, l'impegno evidenziato.

**INTERVENTO DI RECUPERO**

L'unità didattica sarà supportata da un'adeguata attività di recupero rivolta agli allievi che non hanno raggiunto gli obiettivi proposti.
L'azione di recupero si svolgerà insieme ad attività di consolidamento e potenziamento per gli altri elementi della classe attraverso esercizi e problemi differenziati da svolgere sia in classe che a casa.
Nel lavoro di recupero, che si effettuerà in itinere per ciascuna unità didattica, si ricorrerà a diverse metodologie che possano consentire un reale miglioramento degli allievi: insegnamento individualizzato, lavoro in coppie d'aiuto, lavoro in piccoli gruppi assegnando il ruolo di "tutor" ad alunni diversi.

Figura 5.1: *Unità didattica: Monomi e polinomi*

I ragazzi sono stati molto sorpresi di questa nuova esperienza, grazie a questo ho potuto constatare che hanno avuto un approccio più attivo e sono stati molto entusiasti di rivedere gli argomenti già fatti da un'altra prospettiva.

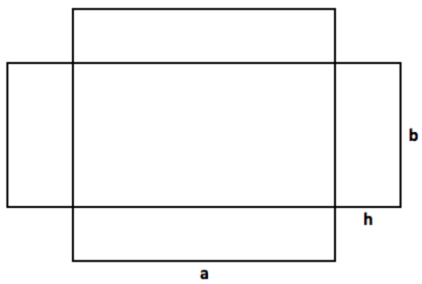
### 5.1.1 I polinomi e le loro operazioni

Ho iniziato la lezione sui polinomi sottolineando il fatto che la somma di monomi è possibile solo nel caso in cui questi sono simili e detto ciò per presentare il nuovo oggetto matematico: *il polinomio*, ho fatto subito ricorso ad un esempio molto pratico:
"*ho portato in classe una scatola avente la stessa forma di quella mostrata nella figura seguente, l'ho aperta e l'ho pogiata sulla cattedra . Con un pennarello nero ho segnato e dato il nome ai lati della scatola* ***a, b*** *e all'altezza* ***h****.*
*A questo punto ho chiesto ai ragazzi come potevano trovare l'area dell'intera*

*scatola e in coro hanno subito risposto che dovavano trovare le aree dei rettagoli di cui la scatola era formata e poi fare la somma di queste."*
*Visti i buoni propositi dell'osservazione, ho chiamato uno di loro alla lavagna e ho chiesto di mettere in pratica ciò che avevano detto a voce. In collaborazione con i compagni il ragazzo ha osservato che: l'area del fondo della scatola era $ab$, poi ha osservato che c'erano $2$ rettangoli di area $ah$ e altri due di area $bh$.*
*Trovate le aree di tutti i rettangoli ha osservato che adesso queste andavano sommate e per questo ha affermato*

$$ab + 2ah + 2bh$$

*Alla vista della suddetta scrittura, qualcuno dal posto ha fatto notare alla classe che quest'ultima era una somma di monomi, ma non simili tra loro e che per questo motivo loro non erano in grado di operare con quest'oggetto.*
*A questo punto il mio intervento è stato inevitabile: quest'esempio mi ha dato la possibilità di presentare loro il nuovo oggetto matematico: **il polinomio**.*




L'esperienza appena descritta mi ha dato anche la possibilità di testare con mano le cosidette criticità che ho elencato e descritto nel precedente capitolo; in particolar modo la tendenza che hanno i ragazzi di accettare passivamente quanto studiato, infatti *il polinomio* era un oggetto che già avevano incontrato con la loro insegnante e che non hanno saputo riconoscere, e i problemi che mostrano nella verbalizzazione quando viene chiesto loro di giustificare una scrittura, questo dovuto al fatto che hanno una scarsa padronanza del linguaggio algebrico.

È evidente come da subito ho fatto ricorso al registro geometrico, soprattutto per abituare i ragazzi a questo nuovo tipo di studio che sarebbe servito loro per apprendere meglio il lavoro che avremmo fatto in seguito.
Una volta presentato il polinomio, attraverso l'esempio, ho chiesto ai ragazzi di arrivare insieme alla definizione formale di quest'ultimo. Buona parte della classe ha risposto subito dicendo che come si poteva evincere dall'esempio "*Un polinomio è la somma di due o più monomi non simili*". Ho fatto notare loro che la definizione poteva andare bene, ma quello che dovevano precisare era che in questo contesto si parla di somma algebrica.

> Fare arrivare loro alla costruzione della definizione di polinomio mediante un esempio geometrico è stata la mia prima piccola soddisfazione!

Nel parlare dei *termini* del polinomio, ovvero dei monomi che lo compongono, ho fatto subito notare che: *"Un monomio non è altro che un particolare polinomio, nel quale tutti i termini sono simili infatti se sommati danno un solo termine e quindi un solo monomio."*
Altra definizione che ho voluto costruire insieme agli studenti, è stata quella di *polinomi opposti*, per questo motivo ho chiesto ai ragazzi di fornirmi attraverso un esempio la suddetta definizione.

Uno di loro si è alzato, è venuto alla lavagna e ha scritto:

$$5ab - 4a + c \qquad -5ab + 4a - c$$

ha guardato i compagni e ha chiesto loro se avesse fatto bene, la maggior parte di loro hanno annuito e a questo punto lui si è rivolto verso di me e ha affermato: "*a mio parere, per quanto detto prima, due polinomi sono opposti se sono formati da monomi opposti; infatti dall'esempio che ho scritto lo possiamo subito notare*".

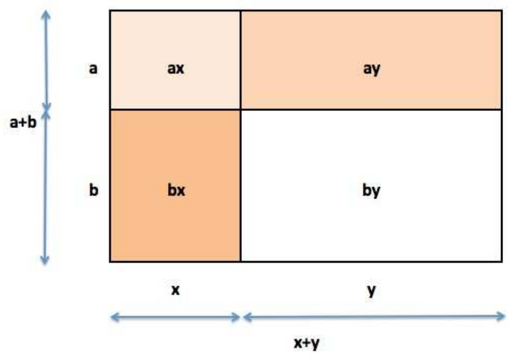
Mi sono rivolta alla classe e ho chiesto loro di scrivere nel loro quaderno un esempio che rispecchiasse quello che aveva detto a voce il loro compagno. Passando tra i banchi dopo alcuni minuti mi sono resa subito conto che avevano fatto propria quella definizione, tutti avevano compreso quanto detto anche precedentemente.

Sotto consiglio della mia tutor, prima di addentrarmi nell'argomento *operare con i polinomi* ho presentato il polinomio come funzione dando particolare importanza al valore che tale oggetto assume una volta assegnato un valore alla x. In particolare, ho detto loro che se "*noi consideriamo il nostro polinomio una funzione delle variabili che vi compaiono, se io lo devo calcolare dovrò darvi un valore per la $x$ e uno per la $y$, allora il valore che assume il polinomio quando voi al posto delle variabili mettete un numero si chiama valore del polinomio in quel punto: questo perché è una funzione*". Questo accenno mi ha permesso di spiegare loro il significato di *zeri del polinomio* e il Principio d'identità dei polinomi.
Mediante un esempio, ho enunciato la regola della addizione tra polinomi e ricorrendo alla regola già fatta per i monomi ho fatto notare ai ragazzi che erano già in grado di fare tale operazione. Nella stessa lezione ho parlato di differenza tra polinomi, sottolineando l'importanza delle parentesi, poichè mi ero accorta che ancora non riuscivano ad operare bene e spesso attribuivano il segno meno solo al primo monomio e agli altri no. Per ovviare a tale problema ho cercato di far fare loro molti esercizi spesso anche a voce, li ho chiamati uno alla volta e li facevo cimentare in questo "giochino".

Nella lezione successiva, ho presentato le altre operazioni che riguardavano i polinomi: moltiplicazione e divisione di un polinomio per un monomio, moltiplicazione tra polinomi; mi sono poi soffermata in particolar modo nella moltiplicazione tra polinomi cercando di far costruire loro le identità algebriche dei prodotti notevoli sfruttando le costruzioni geometriche.
A questo punto, ho proposto alla classe di approfondire il prodotto di due polinomi mediante costruzione geometrica per immetterli in un nuovo tipo di ragionamento che li avrebbe aiutati nello sviluppo dei prodotti notevoli.

Il mio obiettivo è stato quello di far capire loro che i termini dello sviluppo dei prodotti notevoli potevano essere riscontrati nelle figure geometriche, questo li avrebbe, a mio parere, aiutati ad abolire quell'approccio mnemonico

che fino ad allora avevano mantenuto verso questi oggetti matematici.
Ho proposto loro un esempio generico di prodotto tra polinomi, giusto per farli entrare in questa nuova ottica. Ho chiesto come potevamo interpretare geometricamente il prodotto tra due polinomi e aiutandomi con una costruzione fatta con geogebra ho fatto notare che quello che dovevamo fare era di calcolare l'area di rettangoli, e cioè supporre di avere un rettangolo la cui base sia la somma di due segmenti, per esempio chiamiamo il primo pezzo $x$ e un secondo pezzo $y$, dividendo anche l'altezza in due segmenti, uno lo chiamo $a$ e l'altro lo chiamo $b$. Adesso se io volessi calcolare l'area del rettangolo devo considerare la base che è (x + y) e moltiplicarla per l'altezza che è (a+b). L'area del rettangolo sarà dunque $(x+y)(a+b)$ svolgendo i calcoli otteniamo 4 termini. Adesso dividendo il rettangolo seguendo i segmenti che abbiamo indicato, quella che abbiamo scritto è l'area del rettangolo e i 4 termini indicano le aree di questi piccoli rettangolini.




Come si può notare attuo spesso un cambio di registro, da quello algebrico a quello geometrico, molto utile, a mio parere, per arricchire il significato, la conoscenza, la comprensione degli oggetti che prendiamo in analisi.
Da questo momento in poi il mio interesse sarà quello di far coordinare loro i diversi registri semiotici, cercando così di non proporre ai ragazzi soltanto regole e formule preconfezionate, ma dando a tutti la possibilità di avvicinarsi meglio all'argomento *prodotti notevoli* mediante delle costruzioni che loro

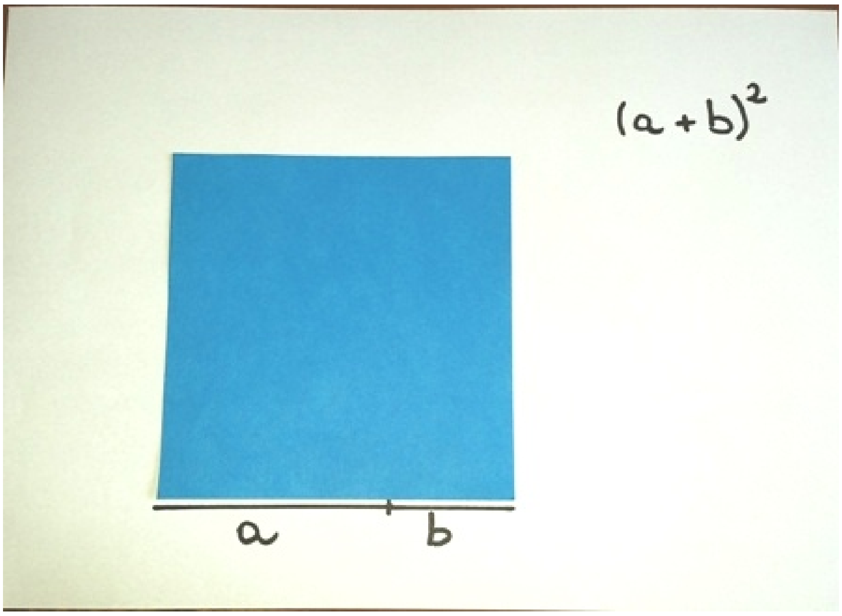
stessi faranno.

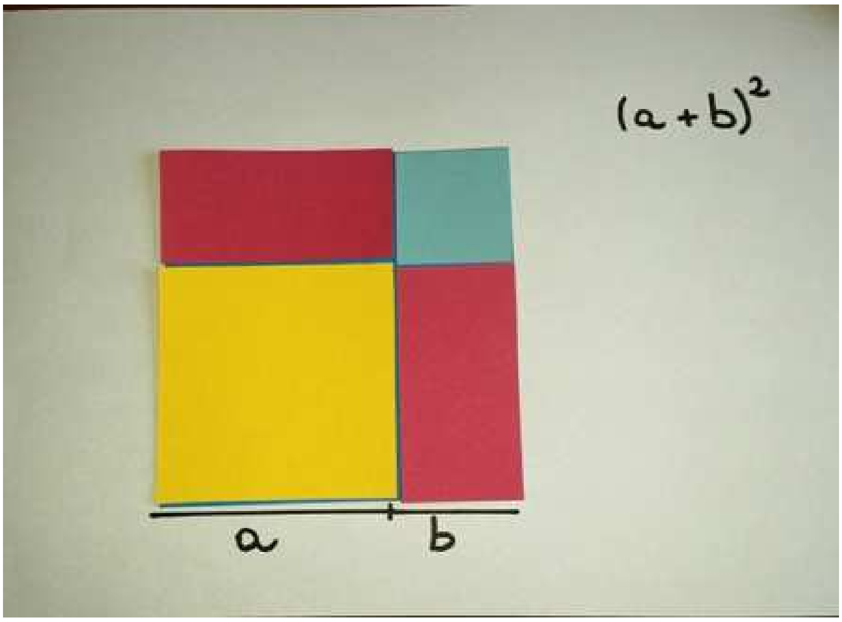
### 5.1.2 Gli indesiderati prodotti notevoli

Una volta presentato il generico prodotto tra polinomi, ho detto loro che esistevano degli "amici" chiamati **prodotti notevoli** che li potevano aiutare a risolvere i calcoli con meno passaggi e più velocemente.
A questo punto ho detto che questi "amici" non avevano solamente l'aspetto negativo di essere imparati a memoria come avevano fatto fino a quel momento, ma quest'ultimi potevano prendere forma attraverso la geometria. Quest'aspetto gli avrebbe permesso di toccare con mano formule che fino a quel momento si erano limitati a ripetere verbalmente.
Ho presentato i prodotti notevoli in questo modo:

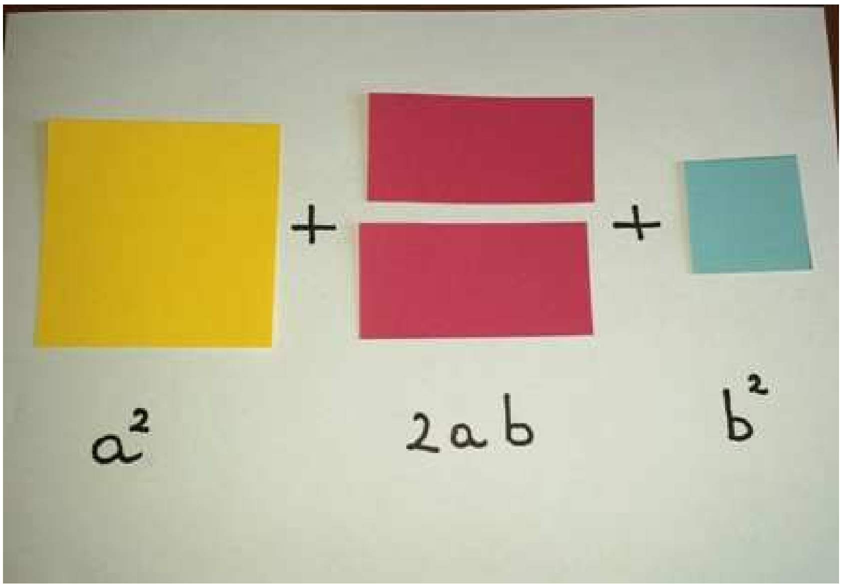
**QUADRATO DI BINOMIO** :
**Il prodotto di un binomio per se stesso corrisponde ad un trinomio formato dai seguenti elementi:**

- **il quadrato del primo termine**
- **il quadrato del secondo termine**
- **il doppio prodotto fra i due termini (con segno opportuno).**

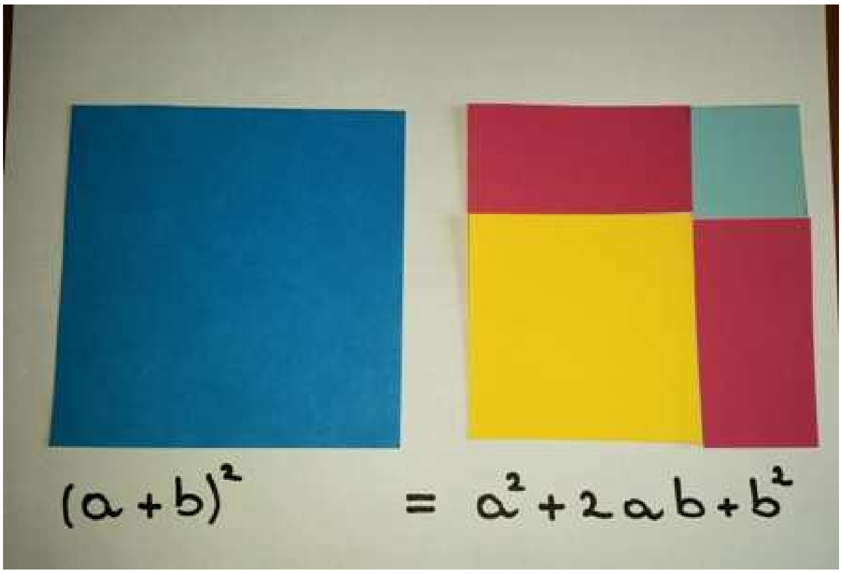



L'area del quadrato di lato $(a+b)$ (quadrato di colore blu) è equivalente alla somma delle aree di un quadrato di lato $a$ (quadrato di colore giallo), un quadrato di lato $b$ (quadrato di colore azzurro) e di due rettangoli di lati $a$ e $b$ (rettangoli di colore rosa).
Allora $(a+b)^2$ sarà uguale a:



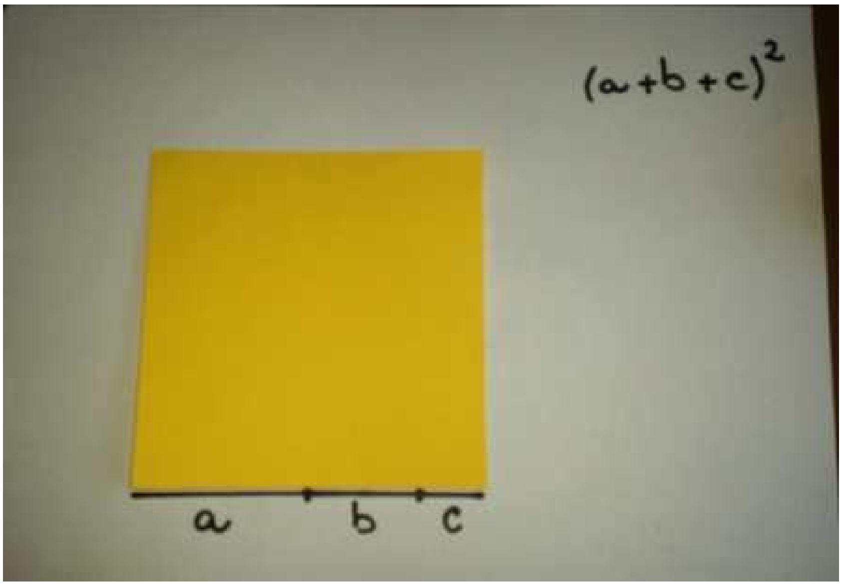

Ricapitolando:

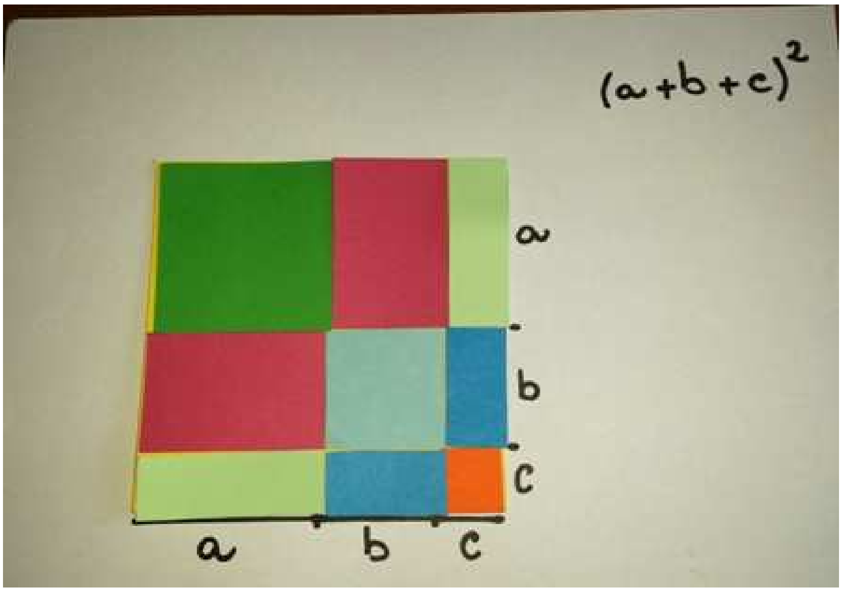


QUADRATO DI UN TRINOMIO :

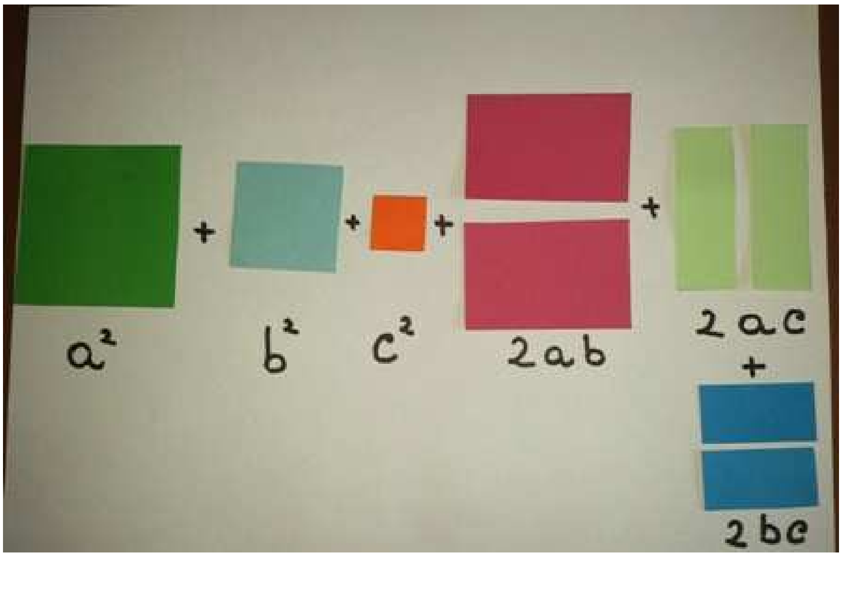
Il quadrato di un trinomio è un polinomio che ha come termini:

- il quadrato del primo termine
- il quadrato del secondo termine
- il quadrato del terzo termine
- il doppio prodotto del primo termine per il secondo
- il doppio prodotto del primo termine per il terzo
- il doppio prodotto del secondo termine per il terzo

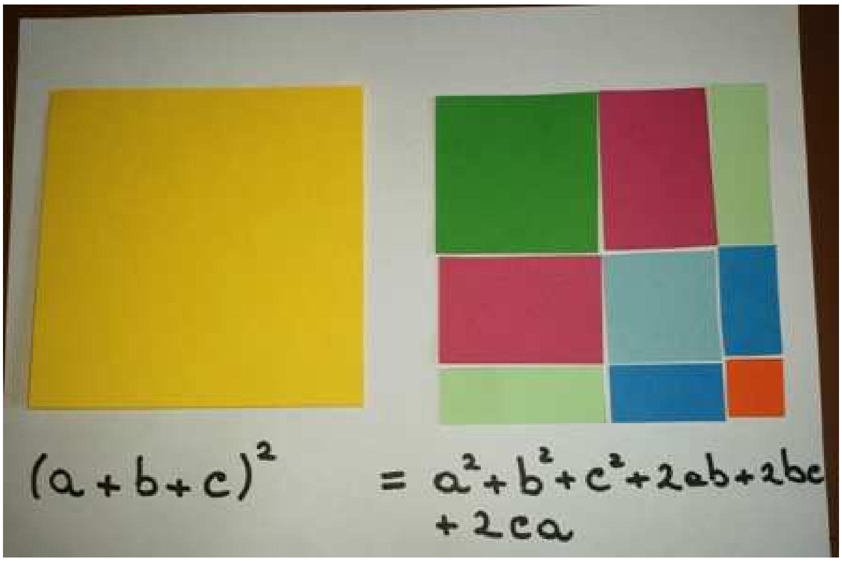





L'area del quadrato di lato $(a+b+c)$ (quadrato di colore giallo) è equivalente alla somma delle aree di un quadrato di lato $a$ (quadrato di colore verde scuro), di un quadrato di lato $b$ (quadrato di colore celeste), di un quadrato di lato $c$ (quadrato di colore arancione), di due rettangoli di lati $a$ e $b$ (rettangoli di colore rosa), di due rettangoli di lati $a$ e $c$ (rettangoli di colore verde chiaro) e di due rettangoli di lati $b$ e $c$ (rettangoli di colore blu). Allora $(a+b+c)^2$ sarà uguale a:



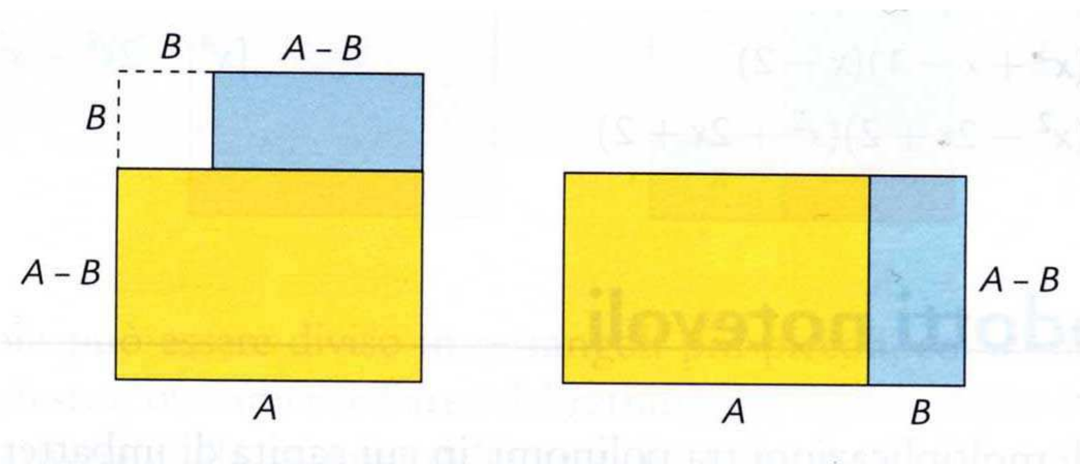
Ricapitolando:




**SOMMA PER DIFFERENZA** :

**Il prodotto fra la somma di due monomi e la loro differenza è uguale alla differenza fra:**

- **il quadrato del primo monomio**
- **ed il quadrato del secondo monomio.**



- Ritagliamo da un angolo di un quadrato di lato $A$, un quadrato di lato $B$ (figura di sinistra): si ottiene una figura di area $(A^2 - B^2)$ che è l'unione del rettangolo giallo e del rettangolo azzurro.

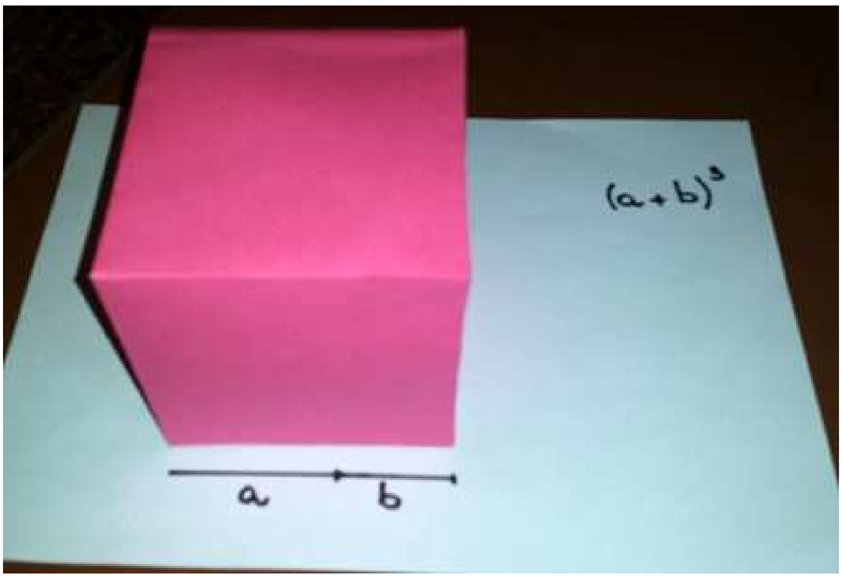
- Ritagliamo ora il rettangolo azzurro e incolliamolo a quello giallo (figura di destra): si ottiene un nuovo rettangolo di lati $(A + B)$ e $(A - B)$ avente area $(A + B)(A - B)$.

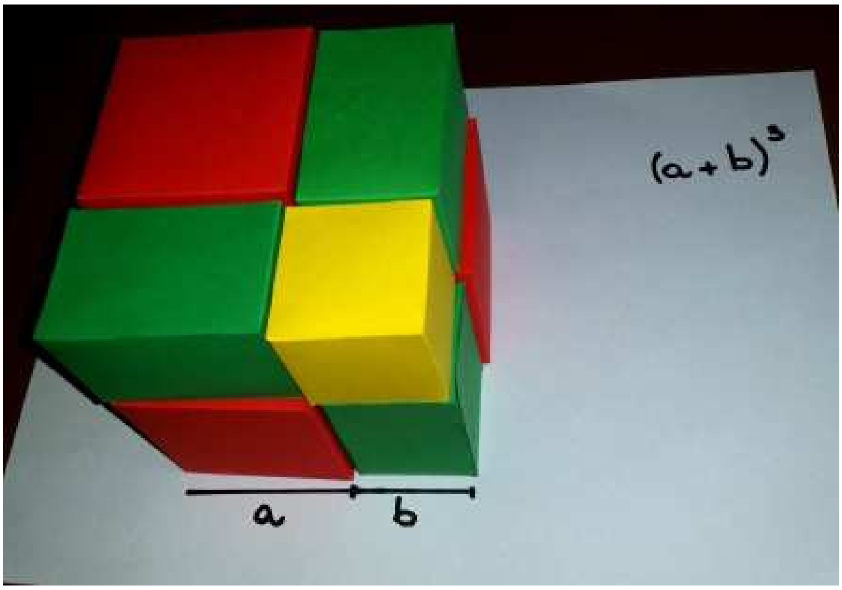
- Dall'equivalenza delle due figure segue $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

**CUBO DI BINOMIO** :

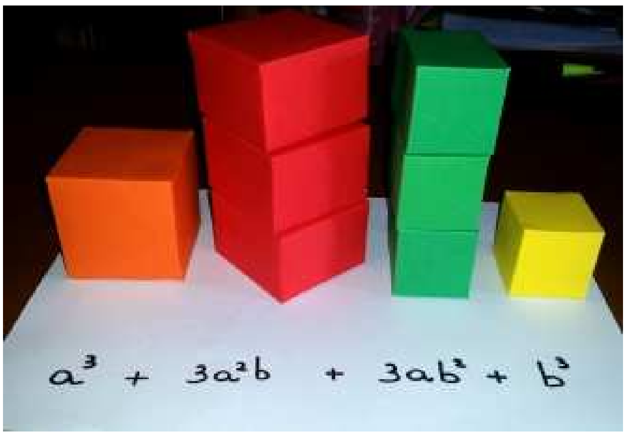
**Il cubo di un binomio è un quadrinomio che come termini:**

- **il cubo del primo termine**
- **il triplo del quadrato del primo termine per il secondo**
- **il triplo del primo termine per il quadrato del secondo**
- **il cubo del secondo termine**

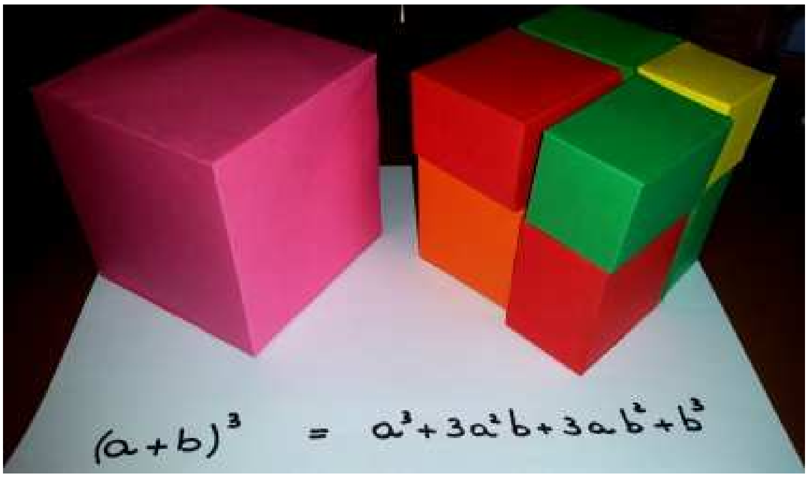





Il volume del cubo di lato $(a + b)$ (cubo di colore rosa) equivale alla somma dei volumi di un cubo di lato $a$ (cubo di colore arancione), di 3 parallelepipedi di area di base $a^2$ e altezza $b$ (parallelepipedi di colore rosso), di 3 parallelepipedi di area di base $b^2$ e altezza $a$ (parallelepipedi di colore verde) e di un cubo di lato $b$ (cubo di colore giallo).
Allora $(a + b)^3$ sarà uguale a:



Ricapitolando:




I lavori che abbiamo appena visto sono frutto di attività di gruppo svolte in classe. Visualizzando siti di applicazioni con Geogebra

- http://geogebra.altervista.org/algebra
- http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/accueilmath.htm

abbiamo ritagliato, costruito geometricamente alcuni prodotti notevoli e abbiamo imparato a riconoscerli.
Devo osservare che questo processo non si può continuare, ad esempio, con le potenze quarte (e in effetti anche nella storia della matematica queste potenze sono state dure da digerire, proprio perché mancava una immagine geometrica); però spero che questo lavoro abbia messo in moto nei ragazzi il meccanismo di pensiero algebrico-formale che permette una generalizzazione al di là dei casi trattabili geometricamente.

## 5.2 La valutazione

Tenendo presente che, il termine *valutazione*, in pedagogia, ha a che fare non solo con la misura del profitto dello studente, ma anche con il ritorno informativo sull'efficacia dell'azione didattica, ho distinto, i due fronti sui quali mi sono mossa.
Riguardo al primo dei due obiettivi, ho adottato diversi strumenti di valutazione, che sono andati dalla tradizionale verifica scritta, ai lavori di gruppo che abbiamo fatto durante le costruzioni geometriche dei prodotti notevoli; dalle sollecitazioni di interventi dal posto che hanno dato loro la possibilità di formulare autonomamente le *definizioni* degli oggetti matematici che ho presentato, alle interrogazioni alla lavagna proponendo loro degli esercizi diversi da quelli svolti a casa.
Tale valutazione mi ha permesso di accertare se gli obiettivi che mi ero proposta erano stati raggiunti e inoltre mi ha permesso di cogliere preziosi spunti di riflessione per valutare quanto la mia azione didattica fosse stata efficace. Del tutto utile sottolineare che la mia valutazione ha tenuto sempre conto della situazione oggettiva di ogni singolo studente e dell'intera classe; da questo l'importanza e l'utilità dell'osservazione che ha preceduto il mio intervento didattico.

Nelle prove di valutazione non mi sono limitata a misurare le abilità applicative di quanto abbiamo visto in aula. Al contrario, il mio obiettivo è stato quello di mettere in luce, e valutare, l'effettivo apprendimento di concetti e l'acquisizione di competenze che andavano al di là del semplice utilizzo di regole. Il lavoro di gruppo è stato un ottimo strumento in quanto mi ha permesso di osservare i processi mentali seguiti dagli alunni per raggiungere un obiettivo.

Tra le finalità primarie del primo aspetto della valutazione, ho messo in evidenza i suoi obiettivi formativi, sia nell'offrire ritorni ai ragazzi, sulle loro lacune, sia nel trasmettere implicitamente cosa è realmente importante e cosa no.
In riferimento, al secondo aspetto della valutazione, ovvero, il ritorno infor-

mativo sull'efficacia dell'azione didattica, mi sono limitata ad osservare che gli obiettivi che mi ero prefissata sono stati raggiunti da buona parte della classe, a parte qualcuno che ancora mostrava qualche incertezza dovuta, a mio parere, al poco tempo che ha avuto per liberarsi dal meccanicismo che fino ad allora aveva adottato nello studio della matematica. Ho osservato che il mio intervento ha suscitato partecipazione attiva, curiosità e interesse verso gli argomenti trattati e verso la disciplina in generale.
Raccolti questi importanti risultati da una parentesi di esperienza scolastica vissuta intensamente, confido nel fatto che l'intera esperienza di tirocinio mi possa offrire preziosi spunti per arricchire le mie conoscenze culturali e per sviluppare ancor di più quello spirito critico che ho acquisito studiando Matematica.

### 5.2.1 Valutazione dell'esperienza didattica svolta

Quello che è emerso durante la mia fase di osservazione è stato il modo in cui i ragazzi hanno affrontato le prove di verifica che la loro insegnante ha sottoposto loro, infatti ho notato che gli alunni tendevano a memorizzare i contenuti della disciplina, e difficilmente facevano ricorso al ragionamento per rispondere ai quesiti che gli venivano posti.
Questo è stato tanto più vero, quanto più venivano incitati a risolvere problemi non convenzionali, che richiedevano il ricorso ad una matematica che non è costituita da schemi tradizionali.
La prova di verifica che ho preparato alla fine del mio intervento didattico mirava a staccarli da quelle ricette di calcolo che aveva fornito la loro insegnante e mirava invece a sviluppare un forte senso critico nei confronti degli esercizi che ho proposto; esercizi parecchio diversi da quelli che ha dato la loro insegnante durante la prova di verifica sugli stessi argomenti.

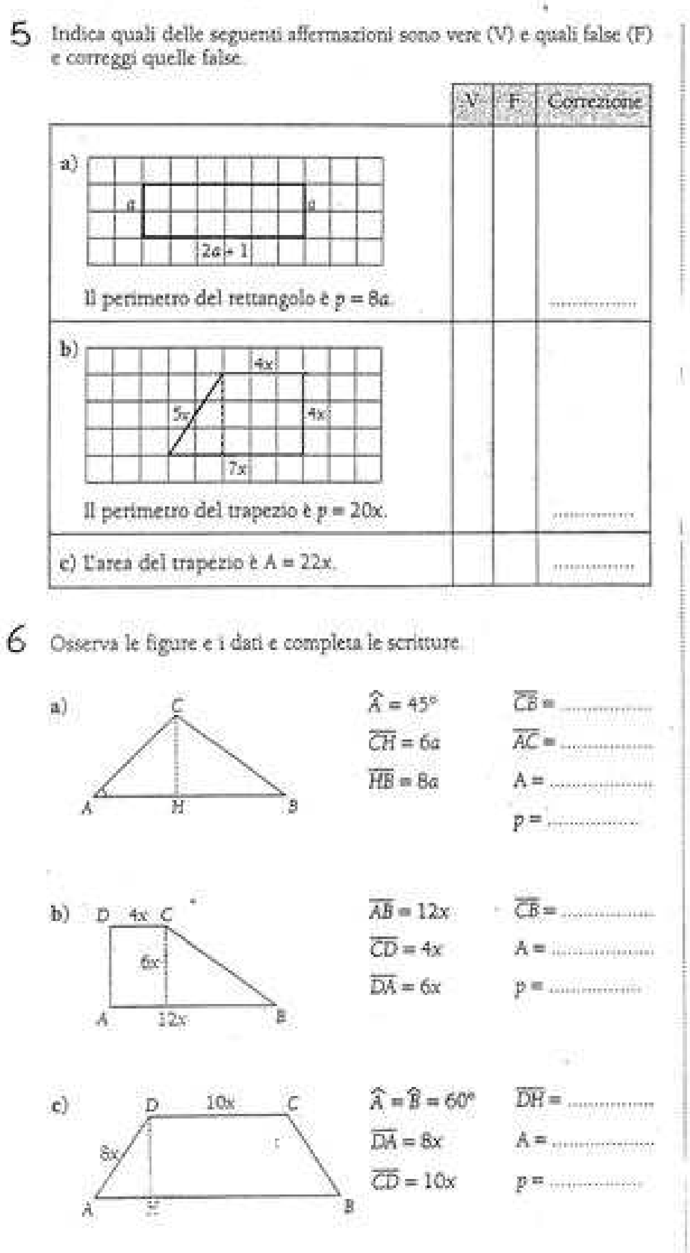
Per questo motivo, a conclusione del mio intervento didattico, ho proposto alla classe un compito preparato in collaborazione con la loro insegnante, la quale ha deciso di tenerlo in considerazione nella valutazione finale, avente come scopo quello di valutare le conoscenze e le competenze acquisite.

La prova, che metterò per intero in appendice, è costituita da esercizi di routine, al fine di accertare le capacità di applicazione di quanto visto in classe, ma anche da parecchi quesiti che hanno richiesto il ricorso ad una capacità di ragionamento e di applicazione delle costruzioni geometriche fatte in classe durante i lavori di gruppo, in particolar modo questi hanno puntato a valutare le competenze e l'abilità che gli alunni hanno acquisito nel passaggio dal registro algebrico a quello geometrico e viceversa.

È proprio sugli esercizi di questo tipo che mi voglio soffermare, per analizzare il modo in cui gli alunni si sono confrontati con questi e le riflessioni che hanno fatto ragionando sulla loro risoluzione. In ogni caso, in appendice, metterò risultati, commenti e riflessioni che sono emerse nello svolgimento dell'intero compito.

Adesso voglio porre l'attenzione e analizzare le risposte che gli alunni hanno dato a quegli esercizi del compito la cui chiave di lettura la trovavano sfruttando il registro geometrico e poi dovevano tradurre il loro ragionamento sfruttando il registro algebrico.

I primi due esercizi che voglio analizzare sono i seguenti:



5 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F) e correggi quelle false.

| | V | F | Correzione |
|---|---|---|---|
| a) Il perimetro del rettangolo è $p = 8a$. | | | ............... |
| b) Il perimetro del trapezio è $p = 20x$. | | | ............... |
| c) L'area del trapezio è $A = 22x$. | | | ............... |



6 Osserva le figure e i dati e completa le scritture.

a) $\hat{A} = 45°$ $\overline{CH} = 6a$ $\overline{HB} = 8a$ $\overline{CB} =$ ............... $\overline{AC} =$ ............... $A =$ ............... $p =$ ...............



b) $\overline{AB} = 12x$ $\overline{CD} = 4x$ $\overline{DA} = 6x$ $\overline{CB} =$ ............... $A =$ ............... $p =$ ...............



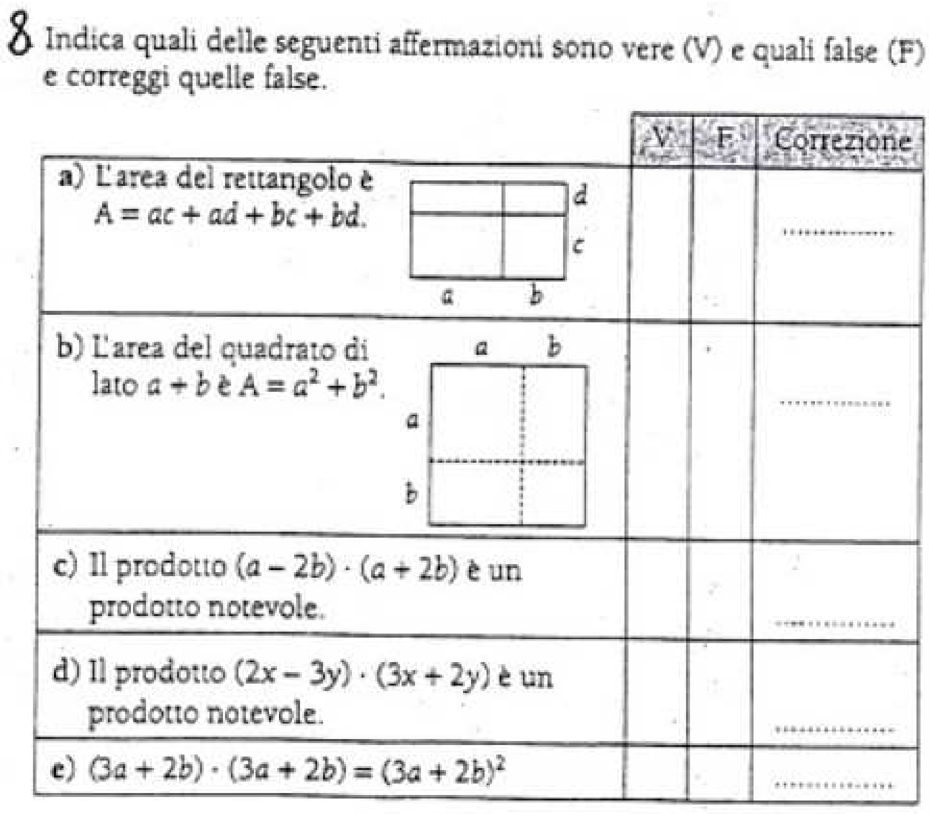
c) $\hat{A} = \hat{B} = 60°$ $\overline{DA} = 8x$ $\overline{CD} = 10x$ $\overline{DH} =$ ............... $A =$ ............... $p =$ ...............

Iniziamo analizzando l'esercizio numero 5. L'esercizio consta di 3 punti (punto a, punto b e punto c), ogni punto è costituito da una figura geometrica le cui dimensioni sono espresse da lettere, un'affermazione e tre ipotetiche risposte sull'affermazione data. L'alunno doveva quindi analizzare ed operare sulla figura e una volta letta l'affermazione doveva rispondere se quest'ultima era vera o falsa e nel caso fosse stata falsa apportare la giusta correzione.
L'esercizio per essere svolto correttamente prevedeva la correzione dei punti **a** e **c** e la conferma della veridicità del punto **b**.
Dall'analisi fatta è emerso che 16 alunni su 21 hanno risposto correttamente all'esercizio, invece 2 ragazzi su 5 che hanno sbagliato hanno risposto che l'affermazione del punto **a** era corretta, poichè hanno considerato la base del rettangolo $(2a + a)$ e non $(2a + 1)$ e per questo motivo hanno risposto che il perimetro era $8a$ proprio come diceva l'affermazione.
I restanti 3 invece hanno risposto correttamente al punto **a**, ma non hanno apportato la giusta correzione al punto **c** in quanto hanno dichiarato che non ricordavano la formula per calcolare l'area del trapezio. In ogni caso hanno scritto che la risposta era sicuramente sbagliata in quanto la $x$ nell'affermazione era di primo grado e invece per riferirsi ad un'area doveva essere di secondo grado. Ho invece notato che tutti hanno risposto correttamente al punto **b** probabilmente perchè era una semplice somma tra monomi.
Ho da subito constatato che in classe vi erano grandi lacune in ambito geometrico soprattutto per quanto riguardava la geometria di base legata in particolar modo a figure geometriche che vengono utilizzate raramente. Devo anche sottolineare che tra quelli che hanno risposto correttamente ai tre punti, molti di loro sono venuti alla cattedra durante il compito per chiarire dei dubbi sulla formula dell'area del trapezio.
Da quest'esercizio ho dedotto che i problemi non erano tanto legati all'operare con le lettere, ma quanto a lacune che si riportavano dalle scuole medie.

L'esercizio numero 6, al contario dell'esercizio numero 5, prevedeva un ragionamento più articolato infatti in questo caso non vi erano delle affermazioni

già preconfezionate, ma dovevano essere loro mediante ragionamento geometrico a trovare gli elementi che l'esercizio richiedeva.
Anche l'esercizio 6 consta di 3 punti (punto a, punto b, punto c), in tutti i 3 punti troviamo una figura geometrica le cui dimensioni sono espresse mediante monomi, a fianco della figura vengono espresse le dimensioni note e altre dimensioni non note che dovevano essere calcolate mediante operazioni, tra queste anche l'area e il perimetro delle figure in questione.
Come ho già detto quest'esercizio prevedeva un ragionamento più articolato in quanto oltre a mettere in pratica l'abilità e la competenza di operare con le lettere, i ragazzi dovevano fare i conti con conoscenze geometriche acquisite precedentemente come il teorema di Pitagora e le caratteristiche dei triangoli, in particolar modo di quelli isosceli.
Devo subito sottolineare che i risultati di quest'esercizio sono stati una vera delusione, infatti su 21 ragazzi solamente 10 hanno risposto correttamente all'intero esercizio, i restanti 11 invece o non hanno completamente risposto o si sono limitati ad affermare che non ricordavono le formule da applicare.
Tra questi 11 alunni quelli che mi sono rimasti più impressi sono stati Daniele che come commento all'esercizio ha scritto che non lo poteva risolvere perchè nei quesiti mancavano dei dati e quindi lui non era in grado di trovare area e perimetro delle figure e Giuseppe che invece ha scritto che le conoscenze geometriche che aveva acquisito fino ad allora non gli permettevano di risolvere l'esercizio. Giuseppe ha inoltre scritto come commento che ancora i triangoli e il teorema di Pitagora non l'aveva affrontato con l'insegnante e quindi non lo sapeva applicare: a questo punto mi sono limitata a pensare che aveva sicuramente rimosso i tre anni di scuola media terminati appena l'anno prima.
Quest'esercizio mi ha fatto riflettere che lo studio della matematica che avevano fatto fino ad allora era stato uno studio settoriale e a scompartimenti, infatti chiuso lo scompartimento geometria di base affrontata alla scuole medie, tutto quello che avevano imparato poteva essere rimosso poichè faceva parte del passato e non serviva più.

Come riflessione all'esercizio, ho fatto notare loro che la matematica non può essere studiata seguendo una linea temporale, ma la matematica deve essere appresa cercando di creare dei continui collegamenti tra quello imparato prima e quello che impareranno dopo, anche perchè ho detto loro che in questi primi due anni di liceo stavano raccogliendo gli strumenti necessari che gli sarebbero serviti per affrontare gli argomenti futuri e quindi i futuri studi universitari, proprio per questo motivo non potevano permettersi uno studio settoriale della matematica e in generale di tutte le discipline.
L'altro esercizio che voglio analizzare è l'esercizio numero 8 del compito, questo fa parte della seconda parte della verifica quella che verte sulle operazioni con i polinomi.
L'esercizio è il seguente:



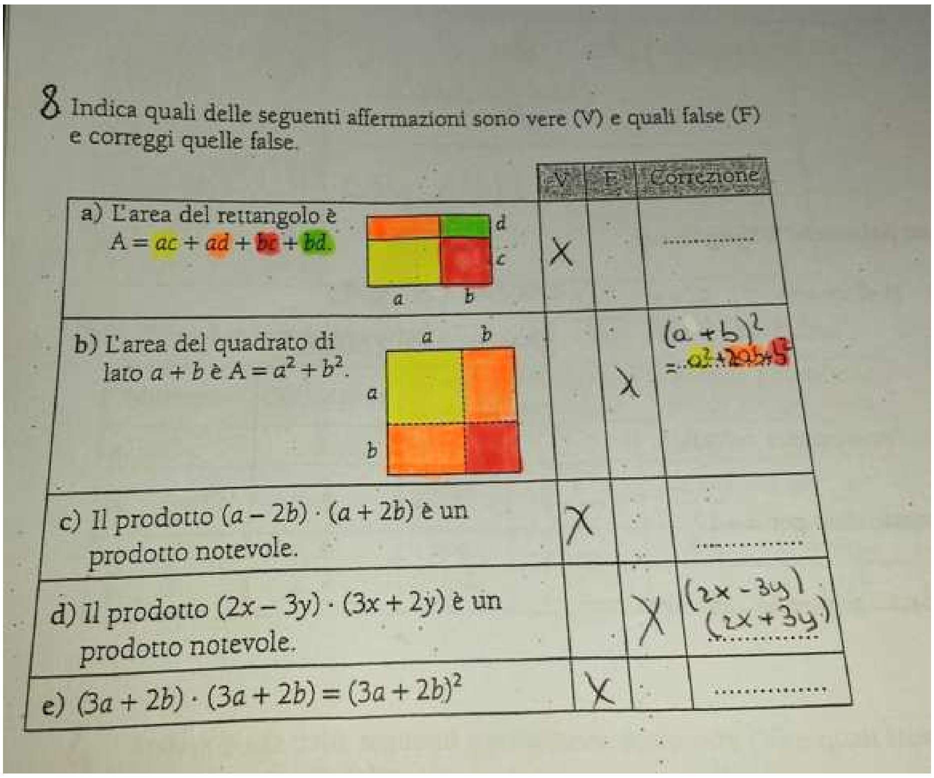
8 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F) e correggi quelle false.

| | V | F | Correzione |
|---|---|---|---|
| a) L'area del rettangolo è $A = ac + ad + bc + bd$. | | | ........ |
| b) L'area del quadrato di lato $a + b$ è $A = a^2 + b^2$. | | | ........ |
| c) Il prodotto $(a - 2b) \cdot (a + 2b)$ è un prodotto notevole. | | | ........ |
| d) Il prodotto $(2x - 3y) \cdot (3x + 2y)$ è un prodotto notevole. | | | ........ |
| e) $(3a + 2b) \cdot (3a + 2b) = (3a + 2b)^2$ | | | ........ |

L'esercizio numero 8 è costituito da 5 punti (punto a, punto b, punto c, punto d, punto e). Anche quest'esercizio come il numero 5 prevede per ogni punto una figura geometrica le cui dimensioni sono espresse mediante polinomi, un'affermazione che riguarda la figura e tre ipotetiche risposte sull'affermazione data.
Come fatto nell'esercizio precedente, l'alunno doveva ragionare sulla figura in particolar modo sulle sue dimensioni, interpretare l'affermazione e anche in questo caso dire se l'affermazione è vera o falsa e nell'eventualità apporre la correzione. Ho sottolineato che l'alunno doveva ragionare sulle dimensioni della figura poichè quest'ultime non erano espresse da polinomi "espliciti", ma loro si dovevano cimentare a scrivere il polinomio che rappresentava le dimensioni della figura in questione. A mio parere, quest'esercizio doveva risultare abbastanza semplice soprattutto dopo il lavoro che avevamo fatto in classe nel costruire con cartoncini lo sviluppo dei prodotti notevoli.
Per essere svolto correttamente l'esercizio prevedeva la conferma della veridicità dei punti **a, c** ed **e** e la correzione dei punti **b** e **d**, infatti nel punto **b** nell'affermazione mancavano le aree dei due rettangoli e quindi il doppio prodotto, nel punto **d** invece andava rivisto il prodotto notevole e andava trovato il polinomio che trasformasse quella scrittura in un prodotto notevole.
Devo dire che la correzione di quest'esercizio mi ha dato una notevole soddisfazione, infatti a parte 4 alunni tutto il resto della classe ha risposto correttamente a tutti i quesiti dell'esercizio. Di questi 4 alunni 2 hanno sbagliato il punto **d**, infatti hanno risposto che quello era un prodotto notevole e non hanno attenzionato il fatto che i due polinomi erano del tutto diversi, ma gli errori e i commenti più deludenti sono emersi dagli altri 2 alunni che nel punto **a** hanno scritto che la base del rettangolo era $ab$ anzicchè $(a + b)$ e lo stesso hanno fatto per l'altezza dicendo che quest'ultima era $cd$ anzicchè $(c + d)$. Ovviamente fornite le suddette osservazioni hanno risposto che l'affermazione del punto **a** era del tutto errata.
Altro risultato deludente per me è stato quello che gli stessi alunni hanno

riportato riguardo il punto **b**, infatti hanno affermato la veridicità dell'affermazione non curandosi per nulla della figura lì posta e non facendo alcun riferimento a tutto il lavoro fatto in classe. Sono dura nell'affermare questo perchè volutamente ho fornito loro quest'esercizio che rispecchiava pienamente le costruzioni e le osservazioni che solamente pochi giorni prima avevamo fatto in classe.

Fortunatamente la mia delusione e il mio sconforto sono svaniti poco dopo, quando ho visto che molti ragazzi hanno fatto questo: Vedere che i ragazzi

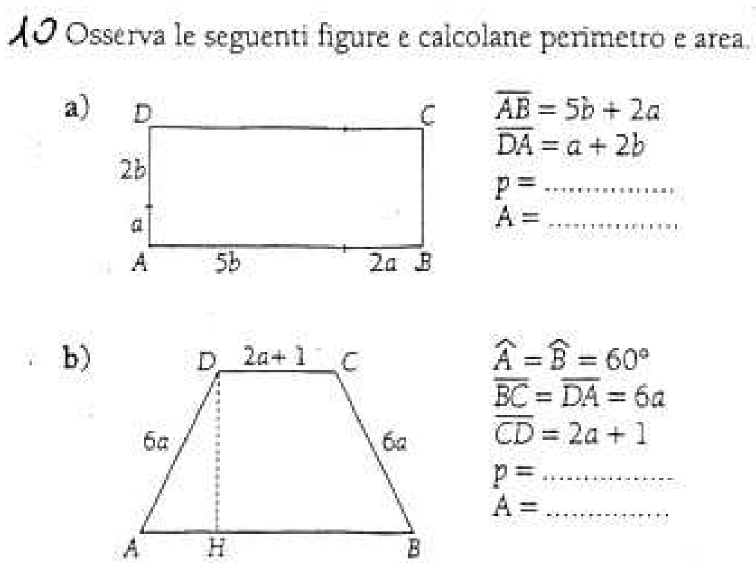


8 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F) e correggi quelle false.

| | V | F | Correzione |
|---|---|---|---|
| a) L'area del rettangolo è $A = ac + ad + bc + bd$. | X | | ............... |
| b) L'area del quadrato di lato $a + b$ è $A = a^2 + b^2$. | | X | $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ |
| c) Il prodotto $(a-2b)\cdot(a+2b)$ è un prodotto notevole. | X | | ............... |
| d) Il prodotto $(2x-3y)\cdot(3x+2y)$ è un prodotto notevole. | | X | $(2x-3y)(2x+3y)$ |
| e) $(3a+2b)\cdot(3a+2b)=(3a+2b)^2$ | X | | ............... |

hanno utilizzato gli stessi colori per indicare lo stesso concetto in ambito geometrico e in ambito algebrico mi ha permesso di poter capire che la mia azione didattica almeno in questo verso era stata parecchio efficace. Ho potuto inoltre constare che in parte si erano liberati dal *contratto didattico* che avevano instaurato con la loro insegnante che probabilmente non li avrebbe portati del tutto a compiere quell'importante e fondamentale passaggio dall'aspetto operazionale dell'aritmetica all'aspetto strutturale dell'algebra.

L'ultimo esercizio che voglio analizzare è l'esercizio numero 10 della verifica, anche questo prevedeva un'elasticita di ragionamento sul cambio dal registro geometrico a quell'algebrico.
L'esercizio è il seguente:


10 Osserva le seguenti figure e calcolane perimetro e area.

a) $\overline{AB} = 5b + 2a$
$\overline{DA} = a + 2b$
p = ...............
A = ...............



b) $\widehat{A} = \widehat{B} = 60°$
$\overline{BC} = \overline{DA} = 6a$
$\overline{CD} = 2a + 1$
p = ...............
A = ...............



Il seguente esercizio è costituito da due punti (punto a, punto b), anche questo fa parte della sezione operare con i polinomi e al contrario dell'esercizio 8 i ragazzi non si dovevano limitare a rispondere vero o falso, ma come nell'esercizio 6 dovevano mettere in atto le facoltà di calcolo e ragionamento. Entrambi i punti dell'esercizio forniscono ai ragazzi una figura geometrica dove ancora una volta le dimensioni sono espresse mediante polinomi, questa volta forniti esplicitamente nei dati, a questo punto gli alunni presi in considerazione i dati loro forniti dovevano trovare area e perimetro delle figure a fianco ovviamente sfruttando le operazioni con i polinomi.
Nel primo esercizio bisognava svolgere una semplice somma tra polinomi per trovare il perimetro del rettangolo e un semplice prodotto tra polinomi per

trovarne l'area. Il secondo era leggermente più complesso in quanto prevedeva l'applicazione del temuto teorema di Pitagora e anche questa volta la conoscenza delle caratteristiche dei triangoli.
I risultati di quest'esercizio sono stati più che attesi, infatti come immaginavo 18 ragazzi hanno saputo rispondere bene al quesito del punto **a**, i restanti 3 hanno fatto errori di calcolo dovuti a loro dire al fatto che essendo l'ultimo esercizio non hanno avuto abbastanza tempo per risolverlo.
Come già mi aspettavo il punto **b** dell'esercizio è stato un vero e proprio disastro infatti solamente 9 ragazzi lo hanno risolto correttamente, dei restanti 12 una buona parte non ha completamente risposto lasciando l'esercizio in bianco e quei 4 che si sono cimentati nell'esercizio hanno dichiarato come prima che non sapevano applicare il teorema di Pitagora e inoltre che secondo loro l'esercizio non poteva essere svolto perchè mancava la dimensione della base del trapezio.
Anche in questo caso ho dovuto constatare che vi erano dei grossi problemi sulla geometria di base e non tanto sulle operazioni con i polinomi.
Dall'analisi globale dell'intero compito posso sostenere che la mia azione didattica non è stata poi così male e per concludere con una nota positiva, confido nel fatto che uno scambio temporaneo di cattedra offra agli allievi l'opporunità di relativizzare la rigidità del contratto didattico instaurato con la loro insegnante , con l'effetto di depurare almeno in parte il rapporto allievo-sapere matematico da tutte quelle componenti che dipendono dalla mediazione didattica.

# Conclusione

A conclusione del mio lavoro di tesi, vorrei citare una frase del matematico George Polya, che ben si accorda con lo spirito con cui ho affrontato quest'esperienza di tirocinio, che mi auguro continui ad animare il mio futuro professionale: *"Un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l'opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionale alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale."*.
Scelgo queste poche parole come fonte di ispirazione futura e come dichiarazione di responsabilità cui sin d'ora mi impegno a tener fede nelle scelte didattiche che segneranno il mio percorso lavorativo.

# Bibliografia

[1] Arrigo G. D'Amore B. e Sbaragli S., *Infiniti infiniti*, Trento, Erickson 2010.

[2] Bolondi G., Ferretti F., Maffia A. (unpublished), Monomials and polinomials: the long march towards a definition.

[3] Brousseau G., *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol.7, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1986.

[4] Brousseau G., *La relation didactique: le milieu, in Actes de la IVéme Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* IREM Paris 7, 1986.

[5] Brousseau G., *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, edito e tradotto da N. Balacheff, M. Cooper, R. Shuterland e V. Warfield, Kluwer, 1997

[6] Bruner J. S., Dopo Dewey. *Il processo di apprendimento nelle due culture*, Armando Editore, Roma. Trad. it. di Antonello Armando, The process of education, Harvard University Press, 1978 Cambridge

[7] Bruner J. S., *Verso una teoria dell'istruzione*, Armando, Roma. Trad. it. di G. B. Flores d'Arcais e P. Massimi, Toward a Theory of Instruction, The Belknap Press of Harward University Press Cambridge - Massachusetts, 1999

[8] Chevallard Y., *La transposition didactique. Du savoir enseignant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1985

[9] Chevallard Y., *Les programmes et la transposition didactique - Illusions, contraintes et possibles*, Conférence prononcée le 24 octobre 1985 aux Journées de l'APMEP (Port- Barcarès, 24-26 octobre 1985). Texte paru dans le Bulletin de l'APMEP 1986

[10] D'Amore B. - Alberta De Flora, *Una introduzione moderna alla Algebra elementare*, Zanichelli, 1974.

[11] D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica*, Bologna: Pitagora, 1999

[12] D'Amore B., *Matematica, stupore e poesia*, Firenze; Milano: Giunti, 2009

[13] D'Amore B, Fandiño Pinilla M. I., *Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano*, Bollettino dei docenti di matematica. Bellinzona, Svizzera, 2012.

[14] Dodero N. - Baroncini P. - Manfredi R., *Nella matematica, Algebra 1*, Ghisetti e Corvi, 2008

[15] Duval R., *L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico?*, La matematica e la sua didattica. Bologna: Pitagora, 1999.

[16] Malara N., *Il Pensiero Algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà*, L'educazione Matematica, 1996

[17] Malara N., *Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra*, La matematica e la sua didattica. Bologna: Pitagora, 1997

[18] Maraschini W. - Palma M., *Problemi e modelli della Matematica*, Paravia, 1981

[19] Mariotti M. A., Cerulli M., *Espressioni numeriche ed espressioni letterali: continuità o rottura?*, La matematica e la sua didattica. Bologna: Pitagora, 2003.

[20] Persano M. R. - Riboldi L. - Zanoli G., *Matematica per il biennio delle superiori, vol B Il calcolo letterale, Equazioni e disequazioni di primo grado*, Juvenilia, 2006.

[21] Prodi G., *Matematica come scoperta*, D'Anna G., 1975.

[22] Prodi G., *Guida al progetto d'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori proposto da G. Prodi : esperienze di nuclei di ricerca didattica 1*, Messina ; Firenze : D'Anna, 1977.

[23] ProdiG., *Tendenze attuali nell'insegnamento della Matematica*, Accademia Nazionale delle Scienze dette dei XL, 1982.

[24] Re Fraschini M., Grazzi G., *Competenze Matematiche 1.* Algebra 1, ATLAS, 2014

[25] Rossi Dell'Acqua A. - Speranza F., *Matematica per il biennio delle Scuole Medie Superiori*, Zanichelli, 1973.

[26] Sfard A., *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourse, and mathematizing*, Cambridge University Press, 2008

[27] Tonolini L. - Manenti Calvi A., *Fondamenti e percorsi* 1, Minerva Italica, 2000.

# Verifica finale

**1.** Completa le seguenti scritture.

a) Un monomio è ..........................................................................

b) Due monomi sono simili se ......................................................

c) Un polinomio è ........................................................................

d) Il grado di un polinomio è .......................................................

2 Osserva i seguenti monomi e completa la relativa tabella.

$a^2b;\ -\frac{1}{2}ab;\ +\frac{2}{3}a^2b;\ -\frac{1}{2}ab^2;\ -a^2b;\ +ab;\ +\frac{1}{2}ab;\ -\frac{1}{3}ab^2$

| | |
|---|---|
| a) monomi simili fra loro | ............................................................ ............................................................ |
| b) monomi opposti fra loro | ............................................................ ............................................................ |

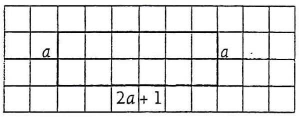
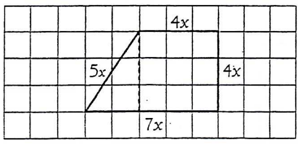
3 Completa la seguente tabella.

| Monomio | Coefficiente | Parte letterale | Grado del monomio | Monomio simile | Monomio opposto |
|---|---|---|---|---|---|
| a) $3a^2bc$ | .......... | .......... | .......... | .......... | .......... |
| b) $-\frac{2}{3}ab^3c^2$ | .......... | .......... | .......... | .......... | .......... |
| c) $-xy$ | .......... | .......... | .......... | .......... | .......... |
| d) $+x^2$ | .......... | .......... | .......... | .......... | .......... |

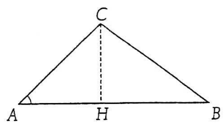
4 Indica quali delle seguenti uguaglianze sono vere (V) e quali false (F) e correggi quelle false.

| | V | F | Correzione |
|---|---|---|---|
| a) $-7a+5a=-2a$ | | | .............. |
| b) $-5ab+9ab=+4$ | | | .............. |
| c) $-\frac{3}{4}ab-\frac{1}{2}ab=-\frac{5}{4}ab$ | | | .............. |
| d) $-a^2b+\frac{1}{2}a^2b=+\frac{1}{2}a^2b$ | | | .............. |
| e) $\left(-\frac{7}{6}x^2y\right)-\left(-\frac{5}{3}x^2y\right)=\frac{1}{2}x^2y$ | | | .............. |
| f) $\left(\frac{2}{3}a^2b\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}ab^2\right)=-a^3b^3$ | | | .............. |
| g) $(-5ab^3)\cdot(-3ab)=+15ab^3$ | | | .............. |
| h) $\left(-\frac{3}{4}xy\right)\cdot(+4xy^2)\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)=x^3y^3$ | | | .............. |

**5** Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F) e correggi quelle false.

| | V | F | Correzione |
|---|---|---|---|
| a)   Il perimetro del rettangolo è $p = 8a$. | | | ................ |
| b)   Il perimetro del trapezio è $p = 20x$. | | | .............. |
| c) L'area del trapezio è $A = 22x$. | | | .............. |

**6** Osserva le figure e i dati e completa le scritture.

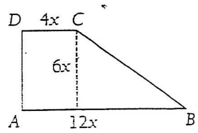
a) 


$\widehat{A} = 45°$ $\overline{CB}$ = ................

$\overline{CH} = 6a$ $\overline{AC}$ = ................

$\overline{HB} = 8a$ A = ...................

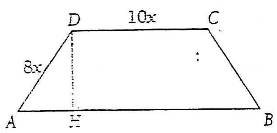
$p$ = ................

b) 


$\overline{AB} = 12x$ $\overline{CB}$ = ................

$\overline{CD} = 4x$ A = ...................

$\overline{DA} = 6x$ $p$ = ................

c) 


$\widehat{A} = \widehat{B} = 60°$ $\overline{DH}$ = ................

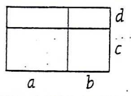
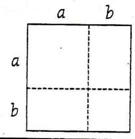
$\overline{DA} = 8x$ A = ...................

$\overline{CD} = 10x$ $p$ = ................

7 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F) e correggi quelle false.

| | V | F | Correzione |
|---|---|---|---|
| a) $3a + 7b + 1$ è un polinomio. | | | ............... |
| b) $5a + 3a - \frac{1}{2}a$ è un polinomio. | | | ............... |
| c) $3a^2 - \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c$ è un trinomio. | | | ............... |
| d) $a - b$ è un binomio. | | | ............... |
| e) $a^2 + 2a^2b + c$ è un trinomio di 2° grado. | | | ............... |

8 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere (V) e quali false (F) e correggi quelle false.

| | V | F | Correzione |
|---|---|---|---|
| a) L'area del rettangolo è $A = ac + ad + bc + bd$.  | | | ............... |
| b) L'area del quadrato di lato $a + b$ è $A = a^2 + b^2$.  | | | ............... |
| c) Il prodotto $(a - 2b) \cdot (a + 2b)$ è un prodotto notevole. | | | ............... |
| d) Il prodotto $(2x - 3y) \cdot (3x + 2y)$ è un prodotto notevole. | | | ............... |
| e) $(3a + 2b) \cdot (3a + 2b) = (3a + 2b)^2$ | | | ............... |

9 Esegui le seguenti operazioni.

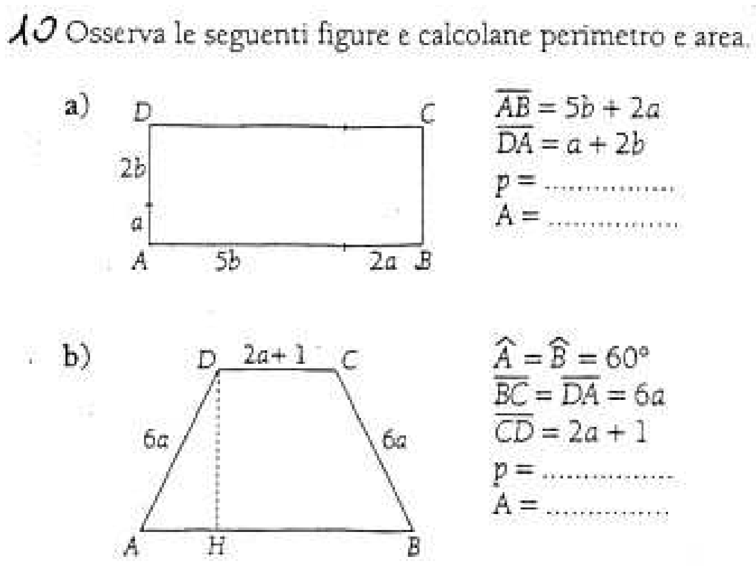
a) $(2x - y) \cdot (y - 2x) =$ ..............................................................................

b) $(2x - y) \cdot (2x + y) =$ ..............................................................................

c) $\left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{5}b\right) \cdot \left(\frac{3}{4}a + \frac{2}{5}b\right) =$ ..............................................................

d) $(3a - 2b)^2 =$ ..............................................................................

e) $(3a - 2b)^3 =$ ..............................................................................


10 Osserva le seguenti figure e calcolane perimetro e area.

a) $\overline{AB} = 5b + 2a$
$\overline{DA} = a + 2b$
$p = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$A = \ldots\ldots\ldots\ldots$



b) $\widehat{A} = \widehat{B} = 60°$
$\overline{BC} = \overline{DA} = 6a$
$\overline{CD} = 2a + 1$
$p = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$A = \ldots\ldots\ldots\ldots$



Avendo già analizzato e commentato gli esercizi del compito che rispecchiavano e valutavano il mio intervento didattico, sia per quanto riguarda l'efficacia della mia azione didattica sia per quanto riguarda l'apprendimento dei concetti da parte degli alunni, in questa parte della mia tesi voglio rendervi partecipi dei risultati dell'intera verifica.

*ESERCIZIO* 1: Il primo esercizio del compito era prettamente teorico infatti richiedeva di scrivere le definizioni di *monomio, monomi simili, polinomio e grado di un polinomio.* Questo primo esercizio è stato risolto correttamente da 17 ragazzi su 21 questi alla definizione di monomio e monomi simili hanno risposto :
*"Un monomio è un'espressione algebrica costituita da un coefficiente ed una parte letterale dove compaiono solo moltiplicazioni. Inoltre due monomi si dicono simili se hanno la stessa parte letterale."*.
Alla definizione di polinomio invece molti nella risposta hanno fatto riferi-

mento all'esempio della scatola schiacciata che io ho proposto a lezione e poi hanno affermato che:
*"Un polinomio è la somma algebrica di monomi non simili."*.
La definizione di grado di un polinomio è stata così data:
*"Il grado di un polinomio, è il grado complessivo più alto di uno dei monomi che compongono il polinomio."*.
Devo dire che i restanti 4 studenti che non hanno svolto l'esercizio completamente corretto non presentano gravi problemi nell'acquisizione dei concetti, piuttosto devo dire che nelle definizioni sono stati meno precisi rispetto agli altri. Ad esempio nella definizione di polinomio si sono limitati a dire che:
*"Un polinomio è la somma algebrica di monomi"*, a questo punto ho fatto notare loro che se non specificavano il fatto che i monomi non dovevano essere *simili* questo poteva condurci a trovare nuovamente un monomio. Inoltre sempre gli stessi ragazzi nella definizione di *grado di un polinomio* hanno semplicemente affermato che: *"Il grado di un polinomio corrisponde al monomio di grado più grande"*.
Da questa ho percepito che probabilmente avevano capito il concetto, ma avevano formulato male la definizione.

*ESERCIZIO* 2: Nell'esercizio numero 2 la richiesta era quella di classificare alcuni monomi dati alla rinfusa in una tabella che prevedeva di inserire in una riga tutti i monomi simili e in un'altra riga quelli opposti.
Dalla correzione del compito è emerso che tutti e 21 i ragazzi hanno svolto l'esercizio correttamente anche perchè a loro dire l'esercizio era abbastanza semplice.

*ESERCIZIO 3*: L'esercizio numero 3 invece consta di 4 punti: ogni punto presenta un monomio e di ogni monomio se ne doveva riconoscere il coefficente, la parte letterale, il grado, si doveva inoltre scrivere un monomio simile ed uno opposto a quello dato.
Hanno svolto correttamente l'esercizio 16 ragazzi ritenendolo molto simile ad esercizi che avevano svolto per casa. I restanti 5 ragazzi hanno presen-

tato degli errori nel riconoscere il grado del monomio in questione, infatti nonostante avessero scritto a fianco la definizione di grado di un monomio, a mio parere per avere un supporto nello svolgimento dell'esercizio, non hanno calcolato la somma degli esponenti delle lettere presenti nel monomio, ma hanno scritto l'esponente più grande che compariva.
A questo punto, come già temevo in fase di osservazione, loro non avevano fatto la distizione tra il grado di un monomio e il grado rispetto ad una lettera e la confusione nell'acquisizione di questi concetti li ha portati all'errore.

*ESERCIZIO* 4: L'esercizio numero 4 consta di 8 punti, i primi tre punti mostravano la risoluzione di una somma di monomi e si doveva dire se il risultato fornito dall'esercizio era vero, falso e nel caso apportare la correzione; il quarto punto mostrava la risoluzione di una sottrazione tra monomi e infine gli ultimi tre punti mostravano la risoluzione di prodotti tra monomi, anche in questi casi andava detto se il risultato era o non era corretto e nel caso apportare la giusta correzione.
A quest'esercizio hanno risposto correttamente 15 ragazzi su 21. Dei 6 ragazzi che hanno riportato qualche errore 4 di loro hanno sbagliato il punto **b** infatti non si sono accorti che nel risultato mancava la parte letterale e hanno risposto che l'affermazione è vera; sempre gli stessi hanno riportato l'errore nel punto **e**, infatti hanno scritto che l'affermazione è falsa perchè a loro dire la risposta è $(\frac{-17}{6}\ x^2y)$ questo mette in evidenza il fatto che non hanno considerato per nulla il segno meno davanti la parentesi e sono andati avanti ad operare meccanicamente senza riflettere su quello che stavano facendo. I restanti 2 ragazzi hanno lasciato l'esercizio incompleto e hanno risposto correttamente solamente ai quesiti dei punti **a, c** ed **h**.

*ESERCIZIO* 7: Anche l'esercizio 7, come molti altri esercizi del compito, prevedeva di rispondere se le affermazioni che fornivano i 5 punti erano vere, false e nel caso apportare la giusta correzione.
L'esercizio 7 è quello che apre la sezione dei polinomi, infatti i suoi punti

chiedono proprio di riconoscere se quelli scritti sono dei polinomi e quindi dei trinomi e binomi.
All'esercizio hanno risposto correttamente 18 alunni, i restanti 3 alunni hanno riportato gli errori nel punto **b** infatti non hanno scritto che quella somma riconduceva ad un monomio e nel punto **e** non hanno saputo riconoscere il grado del polinomio affermando la veridicità dell'affermazione.

*ESERCIZIO* 9: L'esercizio 9 consta di 5 punti, e riguarda lo sviluppo dei prodotti notevoli; il primo punto prevedeva di riconoscere il quadrato del binomio e quindi risolverlo, il secondo e il terzo punto prevedevano lo sviluppo di una somma per differenza e gli ultimi due punti invece lo sviluppo del quadrato e del cubo di un binomio scritti in forma "esplicita".
Quest'esercizio è stato svolto correttamente da 14 ragazzi, in particolar modo mi urge sottolineare che i restanti 7 che hanno riportato errori hanno svolto correttamente lo sviluppo degli ultimi due prodotti notevoli. Questi ragazzi nella parte bianca del foglio hanno riprodotto più o meno le costruzioni geometriche fatte in classe dichiarando che in questo modo non hanno dimenticato alcun termine. Probabilmente l'errore che hanno riportato tutti e 7 nel primo esercizio è stato frutto di una scarsa osservazione e di uno scarso ragionamento.

Valutando globalmente la verifica insieme alla loro insegnante, possiamo ritenerci fortunate degli obiettivi che i ragazzi hanno raggiunto probabilmente anche grazie a questo scambio temporaneo di cattedra che ha fatto sì che loro potessero completare in modo globale il puzzle del loro sapere matematico riguardo gli argomenti affrontati.