

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

# IL TEOREMA DI INVERSIONE DI LÉVY

Tesi di Laurea in Probabilità e Statistica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Andrea Pascucci

Presentata da:  
Antonello Pesce

II Sessione  
Anno Accademico 2014/2015



# Introduzione

In Teoria della Probabilità, la funzione caratteristica di una variabile aleatoria  $X$  è definita come la funzione a valori complessi  $\varphi(\xi) = E[e^{i\langle X, \xi \rangle}]$ . In questa tesi si dimostrerà un risultato, noto come il Teorema di Inversione di Lévy, che permette di ricostruire, a partire dalla funzione caratteristica, la densità di una variabile aleatoria assolutamente continua. Inoltre, come conseguenza di tale teorema sarà possibile dimostrare che, in generale, la funzione caratteristica di una variabile aleatoria ne caratterizza univocamente la distribuzione.

Si vedrà inoltre un esempio di applicazione della formula di inversione per l'option-pricing in finanza. In particolare si vedrà una formula di valutazione per un'opzione con payoff  $f$  che sfrutta la formula di inversione, in un modello di mercato Merton. A confronto, si vedrà anche la formula di valutazione classica che però, nel caso considerato, richiede l'approssimazione numerica di una serie, e si valuteranno le differenze tra i due metodi attraverso esempi numerici.

L'elaborato è strutturato come segue.

Nel primo capitolo vengono presentati alcuni risultati preliminari alla dimostrazione del teorema. La prima sezione è dedicata a risultati di teoria della misura, tra i quali il Lemma di Dynkin, il Lemma di estensione, il Teorema delle classi monotone e il Teorema di Fubini, mentre nella seconda sezione è riportato un calcolo dell'integrale  $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}$  che sfrutta il Teorema dei residui e il Lemma di Jordan.

Nel secondo capitolo viene introdotta la funzione caratteristica e se ne mo-

---

strano le prime proprietà elementari. Viene poi dimostrato il teorema oggetto della tesi e in seguito viene descritto l'esempio di applicazione considerato. In appendice, infine, sono state richiamate le definizioni e i concetti di base della Teoria della Probabilità che vengono richiamati nel testo.

# Indice

<b>1</b>	<b>Prerequisiti</b>	<b>7</b>
1.1	Prerequisiti di teoria della misura . . . . .	7
1.1.1	$\pi$ -sistemi, unicit� dell'estensione . . . . .	7
1.1.2	Teorema delle classi Monotone . . . . .	11
1.1.3	Misura del prodotto, Teorema di Fubini . . . . .	12
1.2	Calcolo di integrali impropri tramite il metodo dei residui . . . . .	16
1.2.1	Lemma di Jordan . . . . .	17
1.2.2	Calcolo dell'integrale $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Il Teorema di Inversione di Lévy</b>	<b>23</b>
2.1	La funzione caratteristica . . . . .	23
2.1.1	Esempi . . . . .	24
2.2	Teorema di Inversione di Lévy . . . . .	28
2.2.1	Esempio di applicazione . . . . .	31
<b>A</b>	<b>Generalit� sugli spazi di probabilit�</b>	<b>39</b>
A.1	Variabili Aleatorie . . . . .	39
A.1.1	Valore atteso e varianza . . . . .	40
A.1.2	Distribuzioni . . . . .	41
A.1.3	Indipendenza . . . . .	44
A.1.4	Distribuzione multi-normale . . . . .	45
A.2	Processi stocastici . . . . .	45
A.2.1	Processi di Poisson . . . . .	46
A.2.2	Martingale . . . . .	49

**Bibliografia**

**51**

# Capitolo 1

## Prerequisiti

### 1.1 Prerequisiti di teoria della misura

#### 1.1.1 $\pi$ -sistemi, unicit  dell'estensione

**Definizione 1.1.** Sia  $S$  un insieme e  $I$  una famiglia di sottoinsiemi di  $S$ . Allora  $I$  si dice  $\pi$ -sistema su  $S$  se   chiusa rispetto all'intersezione finita:

$$I_1, I_2 \in I \Rightarrow I_1 \cap I_2 \in I$$

**Definizione 1.2.** Sia  $S$  un insieme e  $D$  una famiglia di sottoinsiemi di  $S$ . Allora  $D$  si dice  $d$ -sistema (o sistema Dynkin) su  $S$  se:

1.  $S \in D$ ,
2. se  $A, B \in D$  e  $A \subseteq B$  allora  $B \setminus A \in D$ ,
3. se  $A_n \in D$  e  $A_n \uparrow A$  (ossia  $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$  e  $\bigcup A_n = A$ ), allora  $A \in D$

**Proposizione 1.1.1.** Una famiglia  $\Sigma$  di sottoinsiemi di  $S$    una  $\sigma$ -algebra se e solo se  $\Sigma$    un  $\pi$ -sistema e un  $d$ -sistema.

*Dimostrazione.* L'implicazione 'solo se'   banale. Proviamo l'altra implicazione. Supponiamo che  $\Sigma$  sia un  $\pi$ -sistema e un  $d$ -sistema e che  $E, F$  e  $E_n \in \Sigma$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ). Allora  $E^c := S \setminus E \in \Sigma$ , e

$$E \cup F = S \setminus (E^c \cap F^c) \in \Sigma.$$

Quindi  $G_n := E_1 \cup \dots \cup E_n \in \Sigma$  e, dato che  $G_n \uparrow \bigcup E_k$ , si ha  $\bigcup E_k \in \Sigma$ . Per concludere

$$\bigcap E_k = \left( \bigcup E_k^c \right)^c \in \Sigma.$$

□

**Definizione 1.3.** Sia  $C$  una classe di sottoinsiemi di  $S$ . Si definisce  $d(C)$  intersezione di tutti i  $d$ -sistemi che contengono  $C$ . Naturalmente,  $d(C)$  è un  $d$ -sistema, ed è il più piccolo  $d$ -sistema che contiene  $C$ . Risulta inoltre

$$d(C) \subseteq \sigma(C).$$

**Lemma 1.1.2** (Lemma di Dynkin). *Se  $I$  è un  $\pi$ -sistema allora*

$$d(I) = \sigma(I).$$

*Dimostrazione.* Per la proposizione 1.1.1, occorre solo provare che  $d(I)$  sia un  $\pi$ -sistema.

*Step 1:* sia  $D_1 := \{B \in d(I) : B \cap C \in d(I), \forall C \in I\}$ . Poiché  $I$  è un  $\pi$ -sistema,  $D_1 \supseteq I$ . Inoltre  $D_1$  eredita la struttura di  $d$ -sistema da  $d(I)$ . Si ha infatti:

1.  $S \in D_1$
2. se  $B_1, B_2 \in D_1$  e  $B_1 \subseteq B_2$ , allora, per  $C$  in  $I$ ,

$$(B_2 \setminus B_1) \cap C = (B_2 \cap C) \setminus (B_1 \cap C);$$

e poiché  $B_2 \cap C \in d(I)$ ,  $B_1 \cap C \in d(I)$  e  $d(I)$  è un  $d$ -sistema, si ha  $(B_2 \setminus B_1) \cap C \in d(I)$ , così che  $(B_2 \setminus B_1) \in D_1$ .

3. se  $B_n \in D_1 (n \in \mathbb{N})$  e  $B_n \uparrow B$ , allora per  $C \in I$ ,

$$(B_n \cap C) \uparrow (B \cap C)$$

così che  $(B \cap C) \in d(I)$  e  $B \in D_1$ .

Allora  $D_1$  è un  $d$ -sistema che contiene  $I$ , quindi (essendo anche  $D_1 \subseteq d(I)$  dalla sua definizione)  $D_1 = d(I)$ .

*Step 2:* sia  $D_2 := \{A \in d(I) : B \cap A \in d(I), \forall B \in d(I)\}$ . Lo step 1 mostra che  $D_2 \supseteq I$ . Ma, come nello step 1 si può provare che  $D_2$  eredita la struttura di  $d$ -sistema da  $d(I)$  e di conseguenza  $D_2 = d(I)$ . Ma il fatto che  $D_2 = d(I)$  dice che  $d(I)$  è un  $\pi$ -sistema.  $\square$

**Lemma 1.1.3** (Unicità dell'estensione). *Sia  $S$  un insieme. Sia  $I$  un  $\pi$ -sistema su  $S$ , e sia  $\Sigma := \sigma(I)$ . Supponiamo che  $\mu_1$  e  $\mu_2$  siano misure su  $(S, \Sigma)$  tali che  $\mu_1(S) = \mu_2(S) < \infty$  e  $\mu_1 = \mu_2$  su  $I$ . Allora*

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{su} \quad \Sigma.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$D = \{F \in \Sigma : \mu_1(F) = \mu_2(F)\}.$$

Allora  $D$  è un  $d$ -sistema su  $S$ :

1.  $S \in D$  è dato;
2. se  $A, B \in D$  allora

$$\mu_1(B \setminus A) = \mu_1(B) - \mu_1(A) = \mu_2(B) - \mu_2(A) = \mu_2(B \setminus A), \quad (1.1)$$

così che  $B \setminus A \in D$ ;

3. se  $F_n \in D$  e  $F_n \uparrow F$  allora per la convergenza monotona della misura,

$$\mu_1(F) = \lim \mu_1(F_n) = \lim \mu_2(F_n) = \mu_2(F),$$

così che  $F \in D$ .

Poiché  $D$  è un  $d$ -sistema e  $D \supseteq I$  per ipotesi, il lemma di Dynkin mostra che  $D \supseteq d(I) = \sigma(I) = \Sigma$ , da cui segue il risultato.  $\square$

*Osservazione 1.* La condizione di finitezza  $\mu_1(S) = \mu_2(S) < \infty$  è necessaria in quanto in (1.1) non si potrebbe affermare

$$\infty - \infty = \infty - \infty.$$

Infatti si può provare che il lemma 1.1.3 è falso se ' $< \infty$ ' è omesso.

**Corollario 1.1.4.** *Se due misure di probabilità coincidono su un  $\pi$ -sistema, coincidono sulla  $\sigma$ -algebra generata da quel  $\pi$ -sistema.*

### 1.1.2 Teorema delle classi Monotone

**Teorema 1.1.5.** *Sia  $H$  una famiglia di funzioni limitate da un insieme  $S$  a  $\mathbb{R}$  che soddisfano le seguenti condizioni:*

- (i)  $H$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ;
- (ii) la funzione costante 1 è un elemento di  $H$ ;
- (iii) se  $(f_n)$  è una successione di funzioni non-negative in  $H$  tali che  $f_n \uparrow f$  dove  $f$  è una funzione limitata su  $S$ , allora  $f \in H$ .

Allora, se  $H$  contiene la funzione indicatrice di ogni insieme in qualche  $\pi$ -sistema  $I$ , allora  $H$  contiene ogni funzione  $\sigma(I)$ -misurabile limitata su  $S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $D$  la famiglia di insiemi  $F$  in  $S$  tali che  $I_F \in H$ . È immediato da (i)-(iii) che  $D$  è un  $d$ -sistema. Poiché  $D$  contiene il  $\pi$ -sistema  $I$ ,  $D$  contiene  $\sigma(I)$ .

Supponiamo che  $f$  sia una funzione  $\sigma(I)$ -misurabile tale che, per qualche  $K$  in  $\mathbb{N}$ ,

$$0 \leq f(s) \leq K, \quad \forall s \in S.$$

Per  $n \in \mathbb{N}$  definiamo

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{K2^n} i2^{-n} I_{A(n,i)},$$

dove

$$A(n, i) := \{s : i2^{-n} \leq f(s) \leq (i+1)2^{-n}\}.$$

Poiché  $f$  è  $\sigma(I)$ -misurabile, ogni  $A(n, i) \in \sigma(I)$ , così che  $I_{A(n,i)} \in H$ . Ma  $0 \leq f_n \uparrow f$ , e quindi  $f \in H$ .

Se  $f \in b\sigma(I)$ , possiamo scrivere  $f = f^+ - f^-$ , dove  $f^+ = \max(f, 0)$  e  $f^- = \max(-f, 0)$ . Allora  $f^+, f^- \in b\sigma(I)$  e  $f^+, f^- \geq 0$  e per quanto appena dimostrato  $f^+, f^- \in H$ , da cui il risultato.  $\square$

**Definizione 1.4.** Una famiglia  $H$  di funzioni limitate su un insieme  $S$  a valori reali che soddisfi le condizioni (i)-(iii) del teorema si dice *classe monotona di funzioni*.

### 1.1.3 Misura del prodotto, Teorema di Fubini

Siano  $(S_1, \Sigma_1)$  e  $(S_2, \Sigma_2)$  spazi misurabili. Denotiamo con  $S$  il prodotto cartesiano  $S := S_1 \times S_2$ . Per  $i = 1, 2$  denotiamo con  $p_i$  la proiezione sull' $i$ -esimo spazio:

$$p_1(s_1, s_2) := s_1, \quad p_2(s_1, s_2) := s_2.$$

Si definisce  $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$  come la  $\sigma$ -algebra

$$\Sigma = \sigma(p_1, p_2). \quad (1.2)$$

Quindi  $\Sigma$  è generato da insiemi della forma  $\{p_1^{-1}(B_1) = B_1 \times S_2, B_1 \in \Sigma_1\}$  ed insiemi della forma  $\{p_2^{-1}(B_2) = S_1 \times B_2, B_2 \in \Sigma_2\}$ . Si ha allora che

$$I = \{B_1 \times B_2 : B_i \in \Sigma_i\} \quad (1.3)$$

è un  $\pi$ -sistema che genera  $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ .

**Lemma 1.1.6.** *Sia  $H$  una famiglia di funzioni  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  in  $b\Sigma$  tale che per ogni  $s_1 \in S_1$ , la mappa  $s_2 \mapsto f(s_1, s_2)$  è  $\Sigma_2$ -misurabile su  $S_2$ , per ogni  $s_2 \in S_2$ , la mappa  $s_1 \mapsto f(s_1, s_2)$  è  $\Sigma_1$ -misurabile su  $S_1$ . Allora  $H = b\Sigma$ .*

*Dimostrazione.* Se  $A \in I$ , allora chiaramente  $I_A \in H$ .

Inoltre  $H$  è una classe monotona in quanto:

- i) chiaramente  $H$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ,
- ii) la funzione costante 1 è un elemento di  $H$  in quanto la funzione  $s_1 \rightarrow 1$  è  $\Sigma_1$ -misurabile e  $s_2 \rightarrow 1$  è  $\Sigma_2$ -misurabile,
- iii) se  $f_n$  è una successione in  $H$  tale che  $f_n \uparrow f$  con  $f \in b\Sigma$ , allora  $\forall s_2 \in S_2$  la funzione  $s_1 \rightarrow f(s_1, s_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s_1, s_2) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(s_1, s_2)$  è  $\Sigma_1$ -misurabile e analogamente  $s_2 \rightarrow f(s_1, s_2)$  è  $\Sigma_2$ -misurabile. Quindi  $f \in H$ .

Dato che  $\Sigma = \sigma(I)$ , dal Teorema 1.1.5 segue il risultato.  $\square$

Supponiamo che per  $i = 1, 2$ ,  $\mu_i$  sia una misura *finita* su  $(S_i, \Sigma_i)$ . Allora per il Lemma precedente, per  $f \in b\Sigma$ , sono definiti gli integrali

$$I_1^f(s_1) := \int_{S_2} f(s_1, s_2) \mu_2(ds_2), \quad I_2^f(s_2) := \int_{S_1} f(s_1, s_2) \mu_1(ds_1).$$

**Lemma 1.1.7.** *Sia  $H$  la famiglia di elementi in  $b\Sigma$  con la seguente proprietà:*

$$I_1^f \in b\Sigma_1 \text{ e } I_2^f \in b\Sigma_2 \text{ e } \int_{S_1} I_1^f(s_1) \mu_1(ds_1) = \int_{S_2} I_2^f(s_2) \mu_2(ds_2).$$

Allora  $H = b\Sigma$ .

*Dimostrazione.* Se  $A \in I$ , allora chiaramente  $I_A \in H$ .

Inoltre  $H$  è una classe monotona in quanto:

- i) chiaramente  $H$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  per le proprietà di linearità dell'integrale,
- ii) se  $f$  è la funzione costante 1, allora la funzione  $s_1 \rightarrow I_1^f(s_1) = \mu_2(S_2)$  costante è  $\Sigma_1$ -misurabile, analogamente  $s_2 \rightarrow I_2^f(s_2) = \mu_1(S_1)$  costante è  $\Sigma_2$ -misurabile e

$$\begin{aligned} \int_{S_1} I_1^f(s_1) \mu_1(ds_1) &= \int_{S_1} \mu_2(S_2) \mu_1(ds_1) = \mu_1(S_1) \mu_2(S_2) = \\ &= \int_{S_2} \mu_1(S_1) \mu_2(ds_2) = \int_{S_2} I_2^f(s_2) \mu_2(ds_2) \end{aligned}$$

e quindi  $f \in H$ ,

- iii) se  $f_n$  è una successione in  $H$  tale che  $f_n \uparrow f$  con  $f \in b\Sigma$  allora,  $\forall s_1 \in S_1$ ,  $I_1^f(s_1) = \limsup I_1^{f_n}(s_1)$  e quindi  $I_1^f$  è  $\Sigma_1$ -misurabile e limitata in quanto  $f \in b\Sigma$ . Analogamente  $I_2^f \in b\Sigma_2$  e

$$\begin{aligned} \int_{S_1} I_1^f(s_1) \mu_1(ds_1) &= \int_{S_1} \lim I_1^{f_n}(s_1) \mu_1(ds_1) = \lim \int_{S_1} I_1^{f_n}(s_1) \mu_1(ds_1) = \\ &= \lim \int_{S_2} I_2^{f_n}(s_2) \mu_2(ds_2) = \int_{S_2} \lim I_2^{f_n}(s_2) \mu_2(ds_2) = \\ &= \int_{S_2} I_2^f(s_2) \mu_2(ds_2) \end{aligned}$$

Dato che  $\Sigma = \sigma(I)$ , dal Teorema 1.1.5 segue il risultato.  $\square$

Per  $F \in \Sigma$  con funzione indicatrice  $f := I_F$ , definiamo ora

$$\mu(F) := \int_{S_1} I_1^f(s_1) \mu_1(ds_1) = \int_{S_2} I_1^f(s_2) \mu_2(ds_2).$$

**Teorema 1.1.8** (Teorema di Fubini). *La funzione  $\mu$  è una misura su  $(S, \Sigma)$  detta misura prodotto di  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e si scrive  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  e*

$$(S, \Sigma, \mu) = (S_1, \Sigma_1, \mu_1) = (S_2, \Sigma_2, \mu_2).$$

Inoltre  $\mu$  è l'unica misura su  $(S, \Sigma)$  per cui

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2), \quad A_i \in \Sigma_i. \quad (1.4)$$

Se  $f \in (m\Sigma)^+$  allora si ha

$$\mu(f) = \int_{S_1} I_1^f(s_1) \mu_1(ds_1) = \int_{S_2} I_1^f(s_2) \mu_2(ds_2), \quad (1.5)$$

in  $[0, \infty]$ . Se  $f \in m\Sigma$  e  $\mu(|f|) < \infty$  allora l'equazione 1.4 è valida (con tutti i termini in  $\mathbb{R}$ ).

*Dimostrazione.* Il fatto che  $\mu$  sia una misura è una conseguenza della linearità e del teorema di Beppo-Levi: sia infatti  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di elementi disgiunti di  $\Sigma$ , allora

$$I_{\bigcup A_n}(s_1, s_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} I_{A_n}(s_1, s_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N I_{A_n}(s_1, s_2)$$

con  $f_N = \sum_{n=1}^N I_{A_n}(s_1, s_2) \in (b\Sigma)^+$ . Allora

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup A_n\right) &= \int_{S_2} \left( \int_{S_1} I_{\bigcup A_n}(s_1, s_2) \mu_1(ds_1) \right) \mu_2(ds_2) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int_{S_2} \left( \int_{S_1} I_{A_n}(s_1, s_2) \mu_1(ds_1) \right) \mu_2(ds_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \end{aligned}$$

Il fatto che  $\mu$  sia univocamente specificata da 1.4 è una diretta conseguenza del lemma 1.1.3 (unicità dell'estensione) e del fatto che  $\sigma(I) = \Sigma$ .

---

Il risultato 1.5 è automatico per  $f = I_A$ , dove  $A \in I$ . Per il lemma 1.1.7 tale risultato vale per  $f \in b\Sigma$  e in particolare per  $f$  nello spazio  $(SF)^+$  su  $(S, \Sigma, \mu)$ . Allora è valido per  $f \in (m\Sigma)^+$  per il Teorema di Beppo-Levi. Di conseguenza, per linearità, vale per  $\mu(|f|) < \infty$ .  $\square$

## 1.2 Calcolo di integrali impropri tramite il metodo dei residui

Richiamiamo due importanti teoremi dell'analisi complessa.

**Teorema 1.2.1** (Teorema di Cauchy). *Siano  $D \subset \mathbb{C}$  un dominio,  $f \in O(D)$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  un cammino chiuso omotopo ad un punto come cammino chiuso. Allora:*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**Teorema 1.2.2** (Teorema dei Residui). *Siano  $D \subset \mathbb{C}$  un dominio e  $f(z)$  una funzione olomorfa su  $D$  eccetto che in un numero finito di singolarità isolate. Sia  $\gamma$  una cammino chiuso omotopo in  $D$  ad un cammino costante come cammino chiuso e non passante per alcun punto singolare di  $f(z)$ . In queste ipotesi vale*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^p [\text{Res}(f; z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j)]$$

dove  $z_1, \dots, z_p$  sono le singolarità di  $f(z)$  interne a  $\gamma$ .

Possono essere calcolati col teorema dei residui anche integrali estesi a tutto l'asse reale:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

La strategia da seguire è considerare accanto all'integrale  $I$  l'integrale

$$J(R) = \int_{-R}^R g(x) dx + \int_{\gamma_R} g(z) dz$$

dove  $\gamma_R$  è una semicirconferenza, centrata nell'origine e di raggio  $R$ , situata nel semipiano  $\text{Im}z > 0$  o  $\text{Im}z < 0$  a seconda dei casi (Figura 1.1)

L'integrale  $J(R)$  è esteso a un cammino chiuso e si può calcolare col metodo dei residui; dalla conoscenza di  $J(R)$  è poi immediato calcolare l'integrale  $I$  se la funzione  $g(z)$  è tale che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz = 0 \tag{1.6}$$

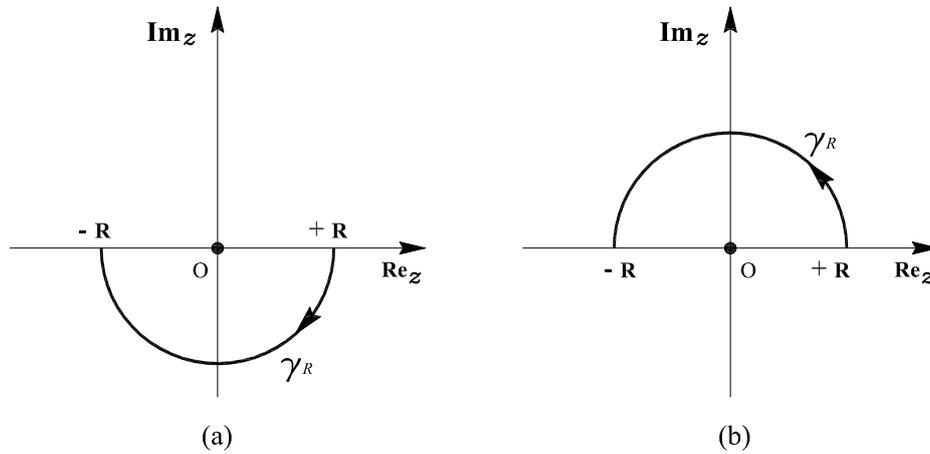


Figura 1.1: Semicirconfereze di raggio  $R$  nel semipiano inferiore (a) e superiore (b)

Infatti preso  $\bar{R}$  abbastanza grande da contenere tutti i poli di  $g(z)$  nel semipiano  $Imz > 0$  o  $Imz < 0$  si avrebbe

$$J(\bar{R}) = \lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(x) dx. \quad (1.7)$$

Segue che, se l'integrale  $I$  esiste, allora  $J(\bar{R}) = I$ ; se ciò non succede ma esiste il limite (1.7), allora questo si chiama *valore principale* dell'integrale  $I$ .

### 1.2.1 Lemma di Jordan

Il lemma di Jordan indica le condizioni per cui può verificarsi (1.6).

1)

$$g(z) = o\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad z \rightarrow \infty$$

In questo caso la semicirconfereza  $\gamma_R$  può giacere sia nel semipiano  $Imz > 0$  sia nel semipiano  $Imz < 0$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo di considerare la semicirconfereza nel semipiano superiore. Abbiamo

$$\left| \int_{\gamma_R} g(z) dz \right| = \left| iR \int_0^\pi g(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq R \int_0^\pi |g(Re^{i\theta})|$$

1.2 Calcolo di integrali impropri tramite il metodo dei residui 1. Prerequisiti

da cui, sfruttando l'ipotesi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R |g(Re^{i\theta})|,$$

si ottiene infine la (1.6).  $\square$

2) La funzione integranda  $g(z)$  è della forma  $e^{iaz}f(z)$ , dove

$$\alpha > 0, \quad f(z) = o(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi$$

e si sceglie  $\gamma_R$  nel semipiano superiore.

*Dimostrazione.*

$$\int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = iR \int_0^\pi e^{i\alpha R(\cos \theta + i \sin \theta)} f(Re^{i\theta}) d\theta$$

Per le ipotesi fatte, fissato arbitrariamente  $\epsilon > 0$ , per  $R$  abbastanza grande si ha  $|f(Re^{i\theta})| < \epsilon$ , quindi

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 2\epsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta$$

Per maggiorare ulteriormente l'integrale si osserva che nell'intervallo che interessa ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) vale la disuguaglianza

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \Rightarrow e^{-\alpha R \sin \theta} \leq e^{-2\alpha R \theta / \pi}$$

da cui

$$2\epsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \leq 2\epsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \theta / \pi} d\theta = \frac{\pi(1 - e^{-\alpha R})}{2\alpha R}$$

Infine si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\epsilon \pi (1 - e^{-\alpha R})}{\alpha} = \frac{\pi \epsilon}{\alpha}$$

Per l'arbitrarietà di  $\epsilon$  segue

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 0 \tag{1.8}$$

$\square$

- 3) Con la sostituzione  $z \rightarrow -z$  si vede che (1.7) vale anche per  $\alpha < 0$  purché

$$f(z) = o(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad \pi \leq \arg z \leq 2\pi$$

e la semicirconferenza  $\gamma_R$  stia nel semipiano inferiore.

- 4) Con la sostituzione  $z \rightarrow -iz$  si vede che vale anche

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{\alpha z} f(z) dz = 0, \quad \alpha > 0$$

purché

$$f(z) = o(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$$

e la semicirconferenza  $\gamma_R$ , centrata qualsiasi punto  $x_0$  dell'asse reale, stia a sinistra della parallela dell'asse immaginario passante per  $x_0$ . Se  $\alpha < 0$  vale un discorso analogo per la semicirconferenza  $\gamma_R$  che stia a destra della parallela dell'asse immaginario passante per  $x_0$ .

### 1.2.2 Calcolo dell'integrale $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

La funzione integranda è pari, quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Osserviamo che l'integrando non è singolare nell'origine; infatti lo zero semplice del denominatore è compensato da uno zero semplice del numeratore.

Il lemma di Jordan non è direttamente applicabile, perché

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z};$$

quindi per il primo addendo bisognerebbe applicare il caso 2) ( $\alpha = 1 > 0$ ) e chiudere con una semicirconferenza nel semipiano superiore, mentre il secondo ricade nel caso 3) ( $\alpha = -1 < 0$ ) e bisognerebbe chiudere nel semipiano inferiore. Non si può nemmeno spezzare l'integrale in una somma di due integrali perché

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

1.2 Calcolo di integrali impropri tramite il metodo dei residui 1. Prerequisiti

non esiste (lo zero del denominatore non è più compensato da uno zero nel numeratore).

La difficoltà si aggira nel modo seguente: poiché  $f(z)$  è ovunque analitica, prima di spezzare l'integrale si può deformare il cammino di integrazione, grazie al teorema di Cauchy. In particolare i due cammini  $C_1$  e  $C_2$  in Figura 1.2 danno lo stesso risultato per  $I$ :

$$I = \frac{1}{2} \int_{C_1} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2} \int_{C_2} \frac{\sin z}{z}.$$

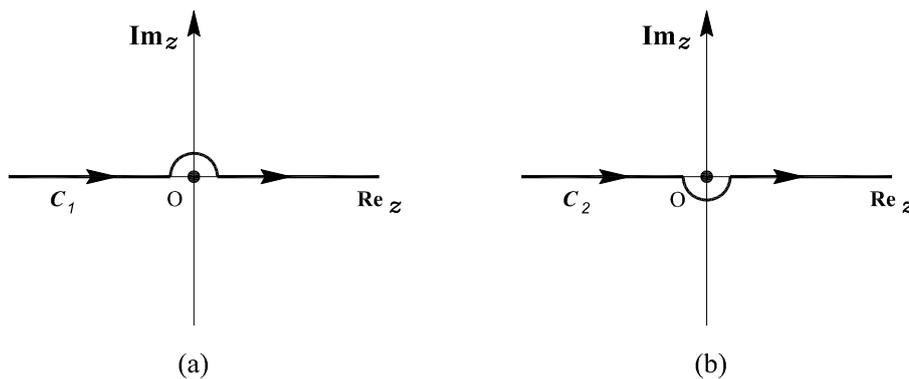


Figura 1.2: Cammini  $C_1$  e  $C_2$  che aggirano l'origine

Dopo aver deformato il cammino è possibile spezzare l'integrale in una somma di due e procedere con il metodo dei residui. Calcoliamo  $I$  integrando su  $C_1$ :

$$I = \frac{1}{4i} \left( \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z} dx - \int_{C_2} \frac{e^{-iz}}{z} dx \right).$$

Benché la funzione  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  sia regolare ovunque, le funzioni  $\frac{e^{iz}}{z}$  e  $\frac{e^{-iz}}{z}$  hanno un polo semplice in  $z = 0$ ; inoltre esse soddisfano il lemma di Jordan nei semipiani  $\text{Im}z > 0$  e  $\text{Im}z < 0$ , rispettivamente.

Pertanto si possono chiudere i cammini di integrazione nelle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$

come in Figura 1.3.

$$I = \frac{1}{4i} \left( \oint_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \oint_{\gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z} dz \right).$$

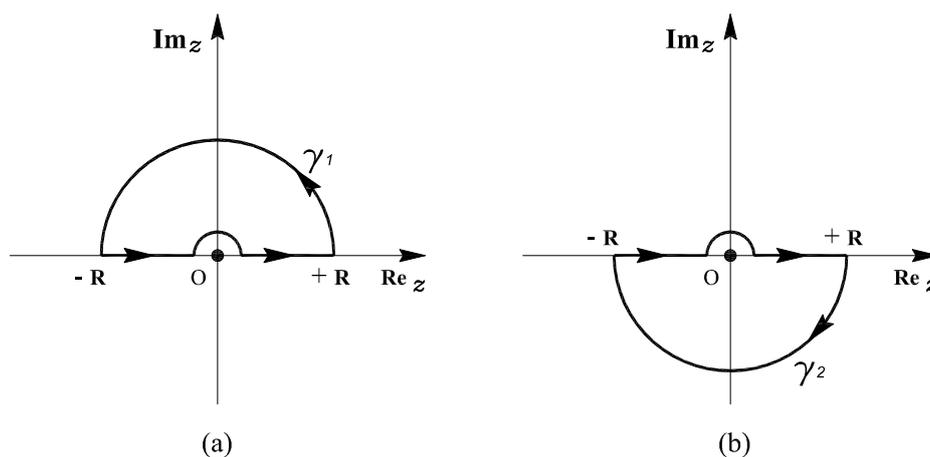


Figura 1.3: Chiusura del cammino che aggira l'origine nel semipiano superiore (a) ed inferiore (b)

Ora, il primo integrale è nullo per il teorema di Cauchy e il secondo si calcola con il teorema dei residui, tenendo conto del cambiamento di segno necessario perché la curva  $\gamma_2$  è percorsa in senso orario:

$$I = -\frac{1}{4i} \oint_{\gamma_2} \frac{e^{-iz}}{z} dz = \frac{1}{4i} 2\pi i \left[ \text{Res} \left( \frac{e^{-iz}}{z}; 0 \right) \right] = \frac{\pi}{2}. \quad (1.9)$$



# Capitolo 2

## Il Teorema di Inversione di Lévy

### 2.1 La funzione caratteristica

**Definizione 2.1.** Sia  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  una v.a. sullo spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$ . La funzione

$$\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$\varphi_X(\xi) = E[e^{i\langle \xi, X \rangle}], \quad \xi \in \mathbb{R}^d \quad (2.1)$$

è detta *funzione caratteristica della v.a.  $X$*

*Osservazione 2.* Data una funzione sommabile  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , solitamente si usa la notazione<sup>1</sup>

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, X \rangle} f(x) dx, \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>In realtà a seconda dei campi di applicazione si usano diverse convenzioni per la definizione della trasformata di Fourier: per esempio, di solito nei corsi di analisi matematica si definisce

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, X \rangle} f(x) dx.$$

La (2.2) è la definizione usata abitualmente in teoria della probabilità.

per indicare la *trasformata di Fourier della funzione f*. Notiamo che se  $X$  ha distribuzione  $\mu_X$  allora

$$\varphi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, X \rangle} \mu_X(dx)$$

e se  $X \in AC$  con densità  $\gamma_X$  allora

$$\varphi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, X \rangle} \gamma_X(x) dx$$

ossia la funzione caratteristica  $\varphi_X = \hat{\gamma}_X$  è proprio la trasformata di Fourier della densità di  $X$

*Osservazione 3.* Proprietà elementari:

1.  $\varphi_X(0) = 1$  per definizione;
2.  $|\varphi_X(\xi)| \leq E[|e^{i\langle \xi, X \rangle}|] = 1$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  per la disuguaglianza di Jensen;
3.  $\varphi_x$  è una funzione continua su  $\mathbb{R}^d$  per il teorema della convergenza dominata;
4. Nel caso uno-dimensionale, se  $\gamma_X$  è una funzione pari allora  $\varphi_X$  assume valori reali: infatti si ha

$$e^{ix\xi} = \cos(x\xi) + i \sin(x\xi)$$

allora

$$\varphi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \gamma_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \cos(x\xi) \gamma_X(x) dx$$

### 2.1.1 Esempi

**Esempio 2.1.** Consideriamo ora alcuni esempi notevoli

1.  $X \sim \delta_\mu$ , con  $\mu \in \mathbb{R}^d$ , allora

$$\varphi_X(\xi) = e^{i\langle \xi, \mu \rangle}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

Osserviamo che in questo caso  $\varphi_X \notin L^1(\mathbb{R}^d)$  perché  $\varphi_X(\xi) \equiv 1$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

2.  $X \sim \text{Unif}_{[-1,1]}$  allora

$$\varphi_X(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\xi x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos(\xi x) dx = \frac{\sin(\xi)}{\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Anche in questo caso  $\varphi_X \notin L^1(\mathbb{R})$ . (Figura 2.1)

3.  $X \sim N_{\mu, \sigma^2}$ , con  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \geq 0$ , allora

$$\varphi_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{s\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{e^{i\mu\xi}}{\sqrt{s\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi - \frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

dove si è effettuato il cambio di variabile  $y = x - \mu$ .

Calcoliamo la trasformata di  $f(x) = e^{-\lambda x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ .

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi - \lambda x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x - \frac{i\xi}{2\lambda})^2 - \frac{\xi^2}{4\lambda}} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x - \frac{i\xi}{2\lambda})^2} dx$$

Operando formalmente il cambio di variabile  $y = x - \frac{i\xi}{2\lambda}$  otteniamo

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}} \quad (2.3)$$

dove si è usato il fatto che  $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ . In realtà non possiamo operare direttamente il cambio di variabile dal momento che  $y$  è una variabile complessa. Tuttavia l'argomento può essere reso rigoroso ricorrendo al teorema dei residui.

Sostituendo  $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$  otteniamo infine

$$\varphi_X(\xi) = e^{i\xi\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Osserviamo che per  $\sigma = 0$  ritroviamo la funzione caratteristica della delta di Dirac centrata in  $\mu$ . (Figura 2.2)

Nel caso  $d$ -dimensionale con  $\mu \in \mathbb{R}^d$  e  $C$  matrice di covarianza si ottiene:

$$\varphi_X(\xi) = e^{i\langle \xi, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle C\xi, \xi \rangle}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (2.5)$$

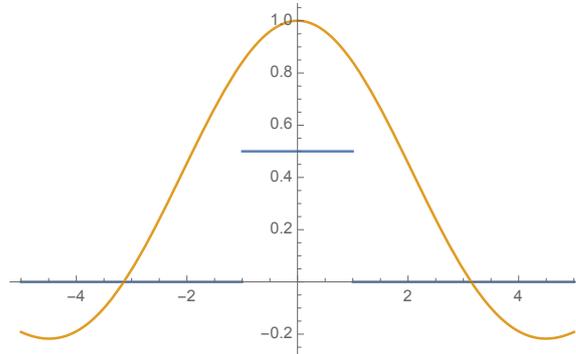


Figura 2.1: Grafico della densità uniforme su  $[-1, 1]$  (in blu) e della relativa funzione caratteristica (in arancio)

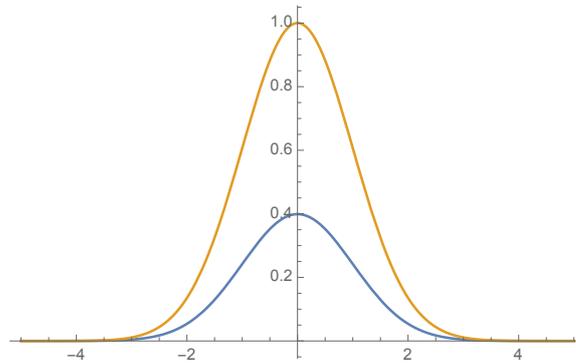


Figura 2.2: Grafico della densità della distribuzione normale (in blu) e della relativa funzione caratteristica (in arancio)

**Esempio 2.2.** Un processo *jump diffusion* è un processo stocastico definito come la somma indipendente

$$X_t = \mu t + B_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n, \quad (2.6)$$

dove  $\mu \in \mathbb{R}^d$ ,  $B_t \sim N_{0,tC}$  e  $Z_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$  è un processo di Poisson di intensità  $\lambda$  (come definito in (A.6)).

Calcoliamo la funzione caratteristica di  $X_t$ . Denotiamo con

$$\hat{\eta} = E[e^{i\langle \xi, Z_1 \rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} \eta(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

la funzione caratteristica di  $Z_1$ . Allora abbiamo

$$\varphi_{Z_t} = E \left[ e^{i\langle \xi, \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \rangle} \right] = \sum_{n \geq 0} E \left[ e^{i\langle \xi, \sum_{k=1}^n Z_k \rangle} \mathbb{1}_{\{N_t=n\}} \right] =$$

(per l'indipendenza di  $N_t, Z_1, \dots, Z_n, \quad n \in \mathbb{N}$ )

$$= \sum_{n \geq 0} (E [e^{i\langle \xi, Z_1 \rangle}])^n P(N_t = n) =$$

(dal risultato (A.5))

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t \hat{\eta}(\xi))^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t \hat{\eta}(\xi)} = e^{\lambda t (\hat{\eta}(\xi) - 1)}$$

Si ha allora:

$$\varphi_{\mu t}(\xi) = e^{t\psi_{\mu t}(\xi)} \text{ con } \psi_{\mu t}(\xi) = i\langle \mu, \xi \rangle,$$

$$\varphi_{B_t}(\xi) = e^{t\psi_{B_t}(\xi)} \text{ con } \psi_{B_t}(\xi) = -\frac{1}{2}\langle C\xi, \xi \rangle, \text{ (dal risultato (2.5))}$$

$$\varphi_{Z_t}(\xi) = e^{t\psi_{Z_t}(\xi)} \text{ con } \psi_{Z_t}(\xi) = \lambda t (\hat{\eta}(\xi) - 1) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1) \lambda \eta(dx)$$

dove  $\lambda$  è l'intensità e  $\eta$  è la distribuzione dei salti. Osserviamo inoltre che essendo  $\mu t, B_t, Z_t$  indipendenti si ha che  $e^{i\langle \xi, \mu t \rangle}, e^{i\langle \xi, B_t \rangle}, e^{i\langle \xi, Z_t \rangle}$  sono ancora indipendenti. Allora

$$\varphi_{X_t}(\xi) = E [e^{i\langle \xi, \mu t + B_t + Z_t \rangle}] = \varphi_{\mu t}(\xi) \varphi_{B_t}(\xi) \varphi_{Z_t}(\xi) = e^{t\psi(\xi)}$$

con

$$\psi(\xi) = \psi_{\mu t}(\xi) + \psi_{B_t}(\xi) + \psi_{Z_t}(\xi) = i\langle \mu, \xi \rangle - \frac{1}{2}\langle C\xi, \xi \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \xi, x \rangle} - 1) \lambda \eta(dx) \quad (2.7)$$

In particolare se  $Z_1$  è uno-dimensionale e normale,  $Z_1 \sim N_{\alpha, \sigma^2}$  allora (da (2.4))

$$\psi(\xi) = i\mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \lambda(e^{i\alpha\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} - 1) \quad (2.8)$$

## 2.2 Teorema di Inversione di Lévy

**Teorema 2.2.1** (Formula di Inversione di Lévy). *Sia  $\varphi_X$  la funzione caratteristica di una v.a. reale  $X$  che abbia legge  $\mu_X$  e funzione di ripartizione  $F_X$ . Allora, per  $a < b$ ,*

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} \varphi_X(\xi) d\xi &= \\ &= \frac{1}{2} \mu_X(\{a\}) + \mu_X((a, b)) + \frac{1}{2} \mu_X(\{a\}) = \\ &= \frac{1}{2} [F_X(b) + F_X(b-)] - \frac{1}{2} [F_X(a) + F_X(a-)]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Inoltre se  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(\xi)| d\xi < \infty$  ( $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$ ) allora  $X \in AC$  con densità

$$\gamma_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi_X(\xi) d\xi \quad (2.10)$$

*Dimostrazione.* Per  $u, v \in \mathbb{R}$  con  $u \leq v$ ,

$$|e^{iv} - e^{iu}| \leq |v - u| \quad (2.11)$$

dal momento che

$$|e^{iv} - e^{iu}| = \left| \int_u^v i e^{it} dt \right| \leq \int_u^v |i e^{it}| dt = \int_u^v 1 dt.$$

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Per il Teorema di Fubini, per  $0 < T < \infty$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} \varphi_X(\xi) d\xi &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \mu_X(dx) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi(x-a)} - e^{-i\xi(x-b)}}{i\xi} d\xi \right\} \mu_X(dx). \end{aligned} \quad (2.12)$$

purché mostriamo che

$$C_T = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi(x-a)} - e^{-i\xi(x-b)}}{i\xi} d\xi \right\} \mu_X(dx) < \infty$$

Tuttavia, la disuguaglianza 2.11 mostra che  $C_T \leq \frac{T(b-a)}{\pi}$  pertanto l'uguaglianza 2.12 è valida. Ora possiamo sfruttare la parità della funzione coseno per ottenere:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi(x-a)} - e^{-i\xi(x-b)}}{i\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\sin(x-a)\xi - \sin(x-b)\xi}{\xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(x-a)\xi - \sin(x-b)\xi}{\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} [\text{sign}(x-a)S(|x-a|T) - \text{sign}(x-b)S(|x-b|T)] \end{aligned} \tag{2.13}$$

dove, come di solito

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e

$$S(U) := \int_0^U \frac{\sin x}{x} dx \quad (U > 0).$$

Nonostante l'integrale di Lebesgue  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  non esiste in quanto

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^- dx = \infty,$$

abbiamo dalla Sezione 1.2.2:

$$\lim_{U \rightarrow \infty} S(U) = \frac{\pi}{2} \tag{2.14}$$

L'espressione 2.13 è dunque limitata simultaneamente in  $x$  e  $T$  per  $a$  e  $b$  fissati; inoltre, per  $T \rightarrow \infty$ , l'espressione 2.13 converge a

$$\begin{aligned} & 0 \text{ se } x < a \vee x > b, \\ & \frac{1}{2} \text{ se } x = a \vee x = b, \\ & 1 \text{ se } a < x < b. \end{aligned}$$

Dal Teorema della convergenza dominata otteniamo allora:

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} \varphi_X(\xi) d\xi = \\
& = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi(x-a)} - e^{-i\xi(x-b)}}{i\xi} d\xi \right\} \mu_X(dx) = \\
& = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\xi(x-a)} - e^{-i\xi(x-b)}}{i\xi} d\xi \right\} \mu_X(dx) = \\
& = \frac{1}{2} \mu_X(\{a\}) + \mu_X((a, b)) + \frac{1}{2} \mu_X(\{a\})
\end{aligned}$$

Ricordando la proprietà della funzione di ripartizione  $\mu_X(\{a\}) = P(x = a) = F_X(a) - F_X(a-)$ ,

$$\frac{1}{2} \mu_X(\{a\}) + \mu_X((a, b)) + \frac{1}{2} \mu_X(\{a\}) = \frac{1}{2} [F_X(b) + F_X(b-)] - \frac{1}{2} [F_X(a) + F_X(a-)].$$

Questo conclude la prima parte della dimostrazione.

Supponiamo ora  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(\xi)| d\xi < \infty$ . Possiamo far tendere  $T \rightarrow \infty$  nel risultato 2.9 e usare il teorema della convergenza dominata per ottenere

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi} \varphi_X(\xi) d\xi \quad (2.15)$$

purché  $F_X$  continua in  $a$  e  $b$ . Tuttavia per il Teorema della convergenza dominata il membro destro dell'equazione è continuo in  $a$  e  $b$  e possiamo concludere che  $F_X$  non ha atomi e che la 2.15 vale per ogni  $a$  e  $b$  con  $a < b$ .

$$\frac{F_X(b) - F_X(a)}{b - a} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi(b - a)} \varphi_X(\xi) d\xi. \quad (2.16)$$

Ma dalla disuguaglianza 2.11

$$\left| \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi(b - a)} \right| \leq 1$$

Quindi, l'assunto  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_X(\xi)| d\xi < \infty$  permette di usare il Teorema della convergenza dominata per far tendere  $b \rightarrow a$  in 2.16: essendo  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{e^{-i\xi a} - e^{-i\xi b}}{i\xi(b - a)} = e^{-i\xi a}$  si ottiene

$$F'_X(a) = \gamma_X(a) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi a} \varphi_X(\xi) d\xi,$$

e, per finire,  $\gamma_X$  è continua per il Teorema della convergenza dominata.  $\square$

**Corollario 2.2.2.** *Siano  $X$  e  $Y$  v.a. reali rispettivamente con distribuzione  $\mu_X$  e  $\mu_Y$ . Se*

$$\varphi_X(\xi) = \varphi_Y(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

*allora*

$$\mu_X(H) = \mu_Y(H), \quad H \in \mathcal{B}.$$

*Dimostrazione.* Per il teorema 2.2.1 abbiamo  $\mu_X((a, b)) = \mu_Y((a, b))$  per ogni  $a, b \in C$ , dove  $C$  è l'insieme di tutti gli  $x \in \mathbb{R}$  tali che  $\mu_X(\{x\}) = \mu_Y(\{x\}) = 0$ . Dal momento che  $C$  è al più numerabile, la famiglia  $\{(a, b) : a, b \in C\}$  di intervalli è un  $\pi$ -sistema che genera  $\mathcal{B}$ . Allora  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  coincidono su  $\mathcal{B}$  per il Lemma di unicità dell'estensione 1.1.3  $\square$

In base al corollario precedente, la funzione caratteristica  $\varphi_X$  identifica la distribuzione di  $X$ ; inoltre nel caso in cui  $\varphi_X$  sia sommabile la formula 2.10 fornisce l'espressione della densità di  $X$ .

### 2.2.1 Esempio di applicazione

Lo studio della funzione caratteristica si rivela fondamentale nello studio di quelle variabili aleatorie o processi stocastici di cui non si conosce la funzione di distribuzione, ma la funzione caratteristica è nota in forma esplicita.

Sia  $X$  una variabile aleatoria reale e sia  $f$  una funzione  $\mathcal{B}$ -misurabile e sommabile e supponiamo di voler calcolare  $E[f(X)]$ .

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \gamma_X(x) dx =$$

(applicando la formula di inversione)

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi_X(\xi) d\xi \right) dx =$$

(cambiando l'ordine di integrazione)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi) \varphi_X(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

dove  $\hat{f}$  è la trasformata di Fourier della funzione  $f$  secondo la definizione (2.2). Assumendo di conoscere le funzioni  $\hat{f}$  e  $\varphi_X$  esplicitamente, è possibile calcolare l'integrale con un metodo numerico.

**Esempio 2.3.** Il modello Merton è un modello di mercato che prevede che l'andamento di un titolo rischioso sia modellizzato da un processo

$$S_t = S_0 e^{X_t} = e^{X_t + \ln S_0}$$

dove  $S_0 > 0$  e

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$$

dove  $W_t \sim N_{0,t}$ ,  $Z_n \sim N_{\alpha, \delta^2}$  sia un processo jump-diffusion reale (Esempio 2.2), su uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$  con filtrazione  $F_t$ , di parametri  $\mu$  (coefficiente di drift),  $\sigma$  (richiosità del titolo o volatilità),  $\alpha$  (ampiezza media dei salti),  $\delta^2$  (varianza dei salti).

Supponiamo che  $f$  sia la funzione payoff di un derivato,  $f \in mB$ . Allora il prezzo neutrale al rischio dell'opzione sul titolo  $S$  sarà dato da

$$H(S_0, t) = e^{-rT} E^Q[f(X_t + \ln S_0)]$$

dove  $r$  è il tasso di interesse e  $Q$  è una misura martingala equivalente, ossia  $Q$  è una misura equivalente a  $P$  e tale che il processo  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  dei prezzi scontati sia una martingala.

Per semplicità supponiamo  $r = 0$  e che  $\hat{S}_t = S_t$  sia una martingala nella misura  $P$ . Allora il prezzo dell'opzione sarà dato da

$$H(S_0, t) = E[f(X_t + \ln S_0)] = \int_{\mathbb{R}} f(x + \ln S_0) \gamma_{X_t}(x) dx.$$

Per esempio, per una opzione Call con strike  $K$ , poniamo

$$f^{Call}(x) = (e^x - K)^+, \quad x \in \mathbb{R}$$

così che il prezzo di una Call a scadenza  $T$  è dato da

$$H^{Call}(S_0, K, T) = E[f^{Call}(X_T + \ln S_0)]$$

Dall'assunto che  $(S_t)_{t \in I}$  sia una martingala su  $(\Omega, F, P, F_t)$  segue che

$$E[S_t] = E[S_0] = S_0$$

costante, da cui

$$E[e^{X_t}] = 1 = \varphi_{X_t}(-i) = e^{t\psi(-i)}$$

dove  $\varphi_{X_t}$  è la funzione caratteristica del processo jump-diffusion e  $\psi$  è il suo esponente, ammesso che siano ben definiti.

Nel caso specifico di  $X_t$  processo jump-diffusion, ciò si traduce in una condizione (necessaria) sul coefficiente  $\mu$ : infatti, imponendo  $\psi(-i) = 0$  si ottiene (da (2.8)):

$$0 = \psi(-i) = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 + \lambda(e^{\alpha + \frac{1}{2}\delta^2} - 1)$$

da cui

$$\mu = \lambda(1 - e^{\alpha + \frac{1}{2}\delta^2}) - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Non conoscendo la densità  $\gamma_{X_t}$  ed essendo nota  $\varphi_{X_t}$  (da (2.8)), supponendo che  $f$  sia sommabile, si può ragionare come in (2.17):

$$E[f(X_t + \ln S_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x + \ln S_0) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi_{X_t}(\xi) d\xi \right) dx =$$

(moltiplicando e dividendo per  $e^{i(\ln S_0)\xi}$ )

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi) e^{i(\ln S_0)\xi} \varphi_{X_t}(\xi) d\xi$$

Di seguito si riporta un esempio di implementazione tramite il programma di calcolo *Matlab*: come funzione payoff è stata usata la funzione  $f(x) = e^{-x^2}$  che ammette trasformata di Fourier della forma  $g(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$  (da (2.3)).

```
%% parametri %%
sigma=0.2; lambda=1; alfa=0.03; delta=0.3;
mu=lambda*(1-exp(alfa+(1/2)*delta^2))-(1/2)*sigma^2;
%% trasformata di f %%
g=@(x) pi^(1/2)*exp(-x.^2/4); %trasformata di f
%% esponente della funzione caratteristica %%
p=@(x) 1i*mu*x-(1/2)*sigma^2*x.^2+lambda*(exp(1i*alfa*x-(1/2)*delta^2*x.^2)-1);
```

```

%% funzione integranda %% l=@(x,S_0,t) 1/(2*pi)*g(x).*exp(1i*log(S_0)*x).*exp(t*p(x));
%% valore atteso %%
Ea=@(S_0,t) integral(@(x) l(x,S_0,t),-Inf,Inf);
ezmesh(E,[1,10],[0,10])

```

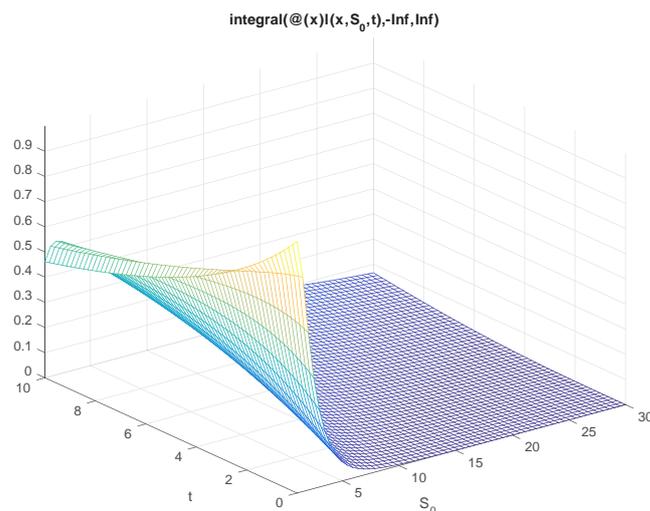


Figura 2.3: Grafico del Valore Atteso (a) restituito da *Matlab*

Vediamo a confronto un secondo approccio, che sfrutta la scrittura come sviluppo in serie della della densità di  $X_t$ . Abbiamo

$$P(X_t \in H) = \sum_{n \geq 0} P(X_t \in H | N_t = n) P(N_t = n), \quad H \in B.$$

$P(X_t = n)$  è nota da (A.5), inoltre, per l'indipendenza,

$$\mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^n Z_k \sim N_{\mu t + n\alpha, \sigma^2 t + \mu \delta^2}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \gamma_{X_t}(x) &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\delta^2)}} e^{-\frac{(x - \mu t - n\alpha)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} \right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\delta^2)}} e^{-\frac{(x - \mu t - n\alpha)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} \end{aligned}$$

Da cui

$$E[f(X_t + \ln S_0)] = e^{-\lambda t} \int_{\mathbb{R}} f(x + \ln S_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\delta^2)}} e^{-\frac{(x - \mu t - n\alpha)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} dx =$$

(la sommatoria può essere portata fuori dal segno di integrale per Beppo-Levi)

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n! \sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\delta^2)}} \int_{\mathbb{R}} f(x + \ln S_0) e^{-\frac{(x - \mu t - n\alpha)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} dx.$$

Come per l'implementazione precedente consideriamo la funzione  $f(x) = e^{-x^2}$  e valutiamo numericamente la serie confrontando i risultati ottenuti.

Con l'aiuto del software scientifico *Mathematica* si calcola preliminarmente l'integrale dentro la serie, ottenendo:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x + \ln S_0) e^{-\frac{(x - \mu t - n\alpha)^2}{2(\sigma^2 t + n\delta^2)}} dx = \frac{e^{-\frac{(\mu t + n\alpha)^2 + (\ln S_0)^2}{1 + 2\sigma^2 t + 2n\delta^2}} \sqrt{2\pi} S^{-\frac{2(\mu t + n\alpha)}{1 + 2\sigma^2 t + 2n\delta^2}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{\sigma^2 t + n\delta^2}}}$$

Di seguito l'implementazione con gli stessi parametri:

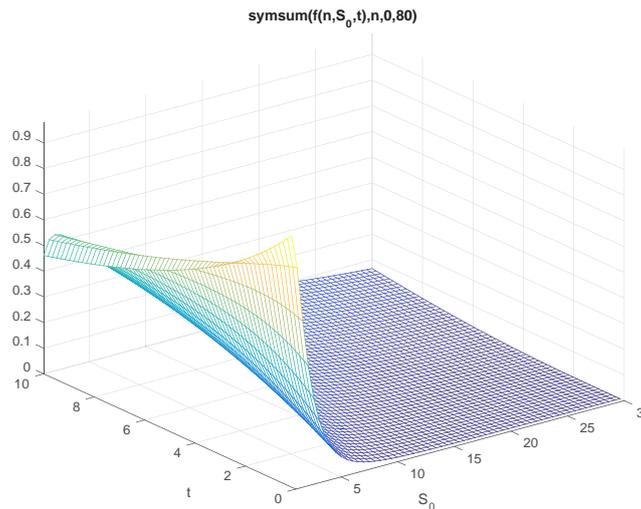


Figura 2.4: Valore Atteso (b) per N=80

```

%% parametri %%
sigma=0.2; lambda=1; alfa=0.03; delta=0.3;
mu=lambda*(1-exp(alfa+(1/2)*delta^2))-(1/2)*sigma^2;
syms n S_0 t N;
%% n-esimo termine della serie %%
f=@(n,S_0,t) (exp(-lambda*t)*(lambda*t)^n/(factorial(n)*...);
%% valore atteso (troncando la serie all'N-esimo termine) %%
Eb=@(S_0,t,N) symsum(f(n,S_0,t),n,0,N);
%% grafico di E per N=80 %%
ezmesh(E(S_0,t,80),[1,30],[0,30])

```

Fissato  $S_0 = 1$  osserviamo la convergenza del secondo metodo valutando l'errore relativo tra i valori restituiti dalla prima funzione e quelli restituiti dalla seconda, al crescere di  $N$  e per diversi valori di  $t$ . (Figure 2.5 e 2.6)

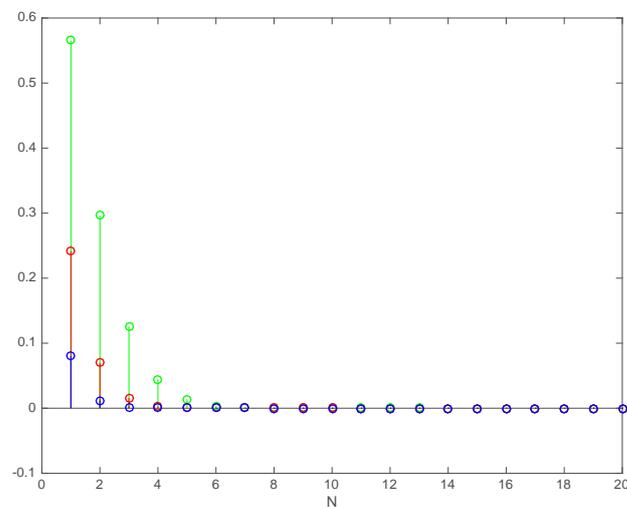


Figura 2.5: Errore relativo calcolato al crescere di  $N$  per  $t = \frac{1}{2}$  (in blu),  $t = 1$  (in rosso),  $t = 2$  (in verde)

```

for N=1:1:20
    stem(N,(Ea(1,2)-Eb(1,2,N))/Ea(1,2),'g')
    hold on

```

```

end
for N=1:1:20
    stem(N, (Ea(1,1)-Eb(1,1,N))/Ea(1,1), 'r')
    hold on
end
for N=1:1:20
    stem(N, (Ea(1,1/2)-Eb(1,1/2,N))/Ea(1,1/2), 'b')
    hold on
end
end

```

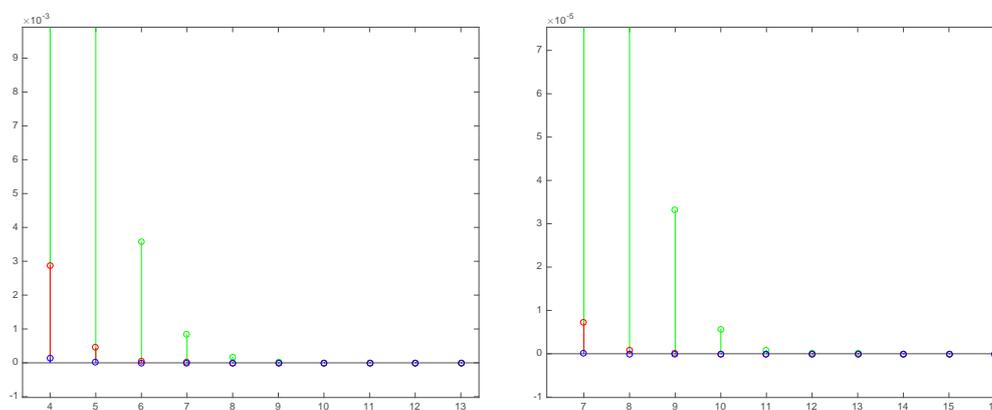


Figura 2.6: Per  $t = 2$  si osserva un errore di circa lo 0,4% per  $N=6$  e di circa lo 0,001% per  $N=10$ .



# Appendice A

## Generalità sugli spazi di probabilità

Sia  $\Omega$  un insieme generico e sia  $F$  una  $\sigma$ -algebra su  $\Omega$ .

**Definizione A.1.** La tripla  $(\Omega, F, P)$  è detta *spazio di probabilità* se è uno spazio di misura dove la misura  $P$  è tale che  $P(\Omega) = 1$ .

Nel linguaggio della probabilità  $\Omega$  viene detto *insieme campione*,  $\omega \in \Omega$  *evento elementare*, gli elementi di  $F$  *eventi* e  $F$   *$\sigma$ -algebra degli eventi*.

### A.1 Variabili Aleatorie

**Definizione A.2.** Una *variabile aleatoria* su uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$  è una funzione

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

tale che  $X \in mF$ .<sup>1</sup> Se  $X$  è a valori in  $\mathbb{R}$ , si dice che  $X$  è una variabile aleatoria reale.

---

<sup>1</sup>Se  $(S; \Sigma)$  è uno spazio misurabile indichiamo con  $m\Sigma$  la classe delle funzioni  $\Sigma$ -misurabili su  $S$  e con  $(m\Sigma)^+$  la classe degli elementi non negativi di  $m\Sigma$ . Denotiamo con  $b\Sigma$  la classe delle funzioni  $\Sigma$ -misurabili limitate su  $S$ .

**Definizione A.3.** Sia  $X$  una variabile aleatoria su uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$ . La legge  $\mu_X$  di  $X$  è una misura di probabilità su  $(\mathbb{R}^d, B)$  definita da

$$\mu_X := P \circ X^{-1}.$$

**Definizione A.4.** Sia  $X$  una variabile aleatoria reale su uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$ . La funzione di ripartizione di  $X$  è la funzione

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

definita da

$$F_X(y) := \mu_X(-\infty, y] = P(X \leq y) = P(\{\omega, X(\omega) \leq y\}).$$

Proprietà generali della funzione di  $F_X$ :

i)  $F_X$  è una funzione monotona (debolmente) crescente tale che

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F_X(y) = 0 \quad e \quad \lim_{y \rightarrow \infty} F_X(y) = 1.$$

ii)  $F_X$  è continua a destra e

$$P(X = y) = F_X(y) - F_X(y-) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Se  $P(X = y) > 0$  si dice che la legge  $\mu_X$  di  $X$  ha un *atomo* in  $y$  e la funzione di ripartizione  $F_X$  di  $X$  ha una discontinuità in  $y$ :  $\mu_X(\{y\}) = F_X(y) - F_X(y-) = P(X = y)$ .

### A.1.1 Valore atteso e varianza

**Definizione A.5.** Data una variabile aleatoria reale  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  sommabile su uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$ , il valore atteso di  $X$  è definito come l'integrale astratto

$$E[X] := \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega).$$

Se  $X = (X_1, \dots, X_d)$  è una variabile aleatoria a valori in  $\mathbb{R}^d$  si pone

$$E[X] = (E[X_1], \dots, E[X_d])$$

Riscriviamo in questa notazione i teoremi di convergenza:

- i) Teorema di Beppo-Levi: se  $0 \leq X_n \uparrow X$  allora  $E[X_n] \uparrow E[X]$ .
- ii) Teorema della Convergenza Dominata: se  $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \forall (n, \omega)$  dove  $E[Y] \leq \infty$  allora  $E[|X_n - X|] \rightarrow 0$  da cui  $E[X_n] \rightarrow E[X]$ .

**Definizione A.6.** La varianza di una variabile aleatoria reale  $X$  è definita da

$$\text{var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$

La covarianza di due variabili aleatorie reali  $X, Y$  è definita da

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])],$$

ammesso che  $(X - E[X])(Y - E[Y])$  sia integrabile.

Nel caso in cui  $X = (X_1, \dots, X_d)$  sia una variabile aleatoria a valori in  $\mathbb{R}^d$ , la matrice di covarianza  $\text{Cov}(X) = (c_{i,j})$  è definita da

$$c_{i,j} = \text{cov}(X_i, Y_j), \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Richiamiamo infine la Disuguaglianza di Jensen.

**Teorema A.1.1.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  e

$$X : \Omega \rightarrow ]a, b[ \quad e \quad f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$$

rispettivamente una variabile aleatoria sullo spazio  $(\Omega, F, P)$  e una funzione convessa. Se  $X, f(X) \in L^1(\Omega, F, P)$  allora si ha

$$f(E[X]) \leq E[f(X)].$$

## A.1.2 Distribuzioni

**Definizione A.7.** Una distribuzione  $\mu$  su  $\mathbb{R}^d$  è una mappa  $\mu : B(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, 1]$  definita da

$$\mu(H) = \sum_{x \in H \cap A} \gamma_d(x) + \int_H \gamma_c(x) dx, \quad H \in B, \quad (\text{A.1})$$

dove:

- i)  $\gamma_c$ , detta *densità continua* di  $\mu$  è una funzione  $B$ -misurabile  $\gamma_c : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty[$  tale che  $\int_{\mathbb{R}^d} \gamma_c(x) dx =: I \in [0, 1]$ .
- ii)  $\gamma_d$ , detta *densità discreta* di  $\mu$  è una funzione  $\gamma_d : A \rightarrow [0, 1]$  dove  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  è finito o numerabile, tale che  $\sum_A \gamma_d(x) = 1 - I$ .

Nel caso in cui  $\gamma_d \equiv 0$  diciamo che  $\mu$  è una *distribuzione assolutamente continua* (AC).

Una distribuzione  $\mu$  è una misura di probabilità su  $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$  e la rappresentazione di  $\mu$  in (A.1) è unica. Inoltre se  $\mu$  è assolutamente continua allora  $\mu(H) = 0$  per ogni  $H \in B$  che abbia misura di Lebesgue nulla, ossia  $\mu$  è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

**Definizione A.8.** Sia  $X$  una variabile aleatoria sullo spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$  e sia  $\mu_X$  la legge di  $X$ . Se  $\mu_X$  è una distribuzione, ossia è della forma (A.1) allora  $\mu_X$  è detta *distribuzione della variabile aleatoria*  $X$ .

**Esempio A.1.** Consideriamo alcuni esempi notevoli di distribuzioni.

- i) La distribuzione *Delta di Dirac*  $\delta_{x_0}$  centrata in  $x_0$  è la distribuzione con

$$\gamma_c \equiv 0 \quad \text{e} \quad \gamma_d = 1 \text{ su } A = \{x_0\}.$$

Allora

$$\delta_{x_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in H \\ 0 & \text{se } x_0 \notin H \end{cases}$$

- ii) La *distribuzione uniforme*  $\text{Unif}_K$  su  $K$ , dove  $K \in B$  ha misura di Lebesgue  $L(K) > 0$ , è la distribuzione con

$$\gamma_c = \frac{1}{L(K)} \mathbb{1}_K \quad \text{e} \quad \gamma_d \equiv 0.$$

Allora

$$\text{Unif}_K(H) = \int_{H \cap K} \frac{1}{L(K)} dx = \frac{L(K \cap H)}{L(K)}, \quad H \in B.$$

- iii) La *distribuzione esponenziale*  $\text{Exp}_\lambda$  di parametro  $\lambda > 0$  è la distribuzione con densità

$$\gamma_c = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{>0}}(x), \quad \text{e} \quad \gamma_d \equiv 0.$$

Allora

$$\text{Exp}_\lambda(H) = \lambda \int_{H \cap [0, \infty[} e^{-\lambda x} dx, \quad H \in B.$$

- iv) La *distribuzione normale reale*  $N_{\mu, \sigma^2}$  di parametri  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \geq 0$  è la distribuzione su  $B(\mathbb{R})$  con densità continua

$$\gamma_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{se } \sigma > 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e densità discreta su  $A = \{\mu\}$

$$\gamma_d(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma = 0 \\ 0 & \text{se } \sigma > 0 \end{cases}$$

Allora  $N_{\mu,0} = \delta_\mu$  e, per  $\sigma > 0$ ,

$$N_{\mu, \sigma^2}(H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_H e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad H \in B(\mathbb{R}).$$

Il seguente risultato mostra che se la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria  $X$  è continua e  $C^1$  a tratti allora la densità di  $X$  si ottiene derivando la funzione di ripartizione.

**Teorema A.1.2.** *Sia  $X \in AC$  una variabile aleatoria reale con funzione di ripartizione  $F_X$ . Se  $F_X$  è  $C^1$  a tratti allora  $F'_X$  è la densità di  $X$ . In particolare la funzione di ripartizione identifica la distribuzione di  $X$ .*

Richiamiamo infine il Teorema fondamentale del calcolo della media.

**Teorema A.1.3.** *Siano  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$  rispettivamente una variabile aleatoria su  $(\Omega, F, P)$  con legge  $\mu_X$  e una funzione  $B$ -misurabile,  $f \in mB$ . Allora  $f \circ X \in L^1(\Omega, P)$  se e solo se  $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mu_x)$  e in tal caso vale*

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_X.$$

Inoltre se  $\mu_x$  è una distribuzione della forma (A.1) allora si ha

$$E[f(X)] = \sum_{x \in A} f(x)\gamma_d(x) + \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma_c(x)dx.$$

**Esempio A.2.** Calcoliamo col teorema della media, il valore atteso e la varianza di due variabili aleatorie con distribuzioni notevoli.

i) Se  $X \sim \text{Exp}_\lambda$  allora

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} y \text{Exp}_\lambda(dy) = \lambda \int_0^\infty ye^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda}, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{var}(X) = \int_{\mathbb{R}} \left(y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \text{Exp}_\lambda(dy) = \lambda \int_0^\infty \left(y - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda^2}.$$

ii) Se  $X \sim N_{\mu, \sigma^2}$  allora

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} y N_{\mu, \sigma^2}(dy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy =$$

(col cambio di variabili  $y = \frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ )

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} ze^{-z^2} dz + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \mu.$$

In modo analogo si vede che

$$\text{var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (y - \mu)^2 N_{\mu, \sigma^2}(dy) = \sigma^2.$$

### A.1.3 Indipendenza

**Definizione A.9.** Sia dato uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$ . Diciamo che le famiglie di eventi  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$  sono indipendenti se

$$P(H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1}) \cdots P(H_{i_k}),$$

per ogni scelta di  $H_{i_j} \in \mathcal{H}_{i_j}$  e differenti indici  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ . Diciamo che le variabili aleatorie  $X_1, \dots, X_n$  sono indipendenti se lo sono le relative  $\sigma$ -algebre  $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ .

*Osservazione 4.* Se  $X, Y$  sono variabili indipendenti e  $f, g$  sono funzioni reali  $B$ -misurabili, allora le variabili aleatorie  $f(X)$  e  $g(Y)$  sono indipendenti.

**Teorema A.1.4.** *Siano  $X_1, \dots, X_N \in L^1(\Omega, P)$  variabili aleatorie reali indipendenti. Allora*

$$X_1 \cdots X_N \in L^1(\Omega, P), \quad E[X_1 \cdots X_N] = E[X_1] \cdots E[X_N],$$

e

$$\text{var}(X_1 \cdots X_N) = \text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_N).$$

### A.1.4 Distribuzione multi-normale

Fissati  $\mu \in \mathbb{R}^d$  e  $C$  matrice  $d \times d$ , simmetrica e definita positiva, si definisce la funzione di densità Gaussiana  $d$ -dimensionale di parametri  $\mu$  e  $C$  nel modo seguente:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det C}} e^{-\frac{1}{2} \langle C^{-1}(x-\mu), x-\mu \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{A.3})$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x) dx &= 1, \\ \int_{\mathbb{R}^d} x_i \Gamma(x) dx &= \mu_i, \\ \int_{\mathbb{R}^d} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \Gamma(x) dx &= C_{i,j}, \end{aligned}$$

per ogni  $i, j = 1, \dots, d$ . Tali risultati motivano la definizione: se  $X$  è una variabile aleatoria  $d$ -dimensionale con densità  $\Gamma$  in (A.3) allora diciamo che  $X$  ha *distribuzione multi-normale con media  $\mu = E[X]$  e matrice di covarianza  $C = \text{cov}(X)$* . In tal caso scriviamo  $X \sim N_{\mu, C}$ .

## A.2 Processi stocastici

Sia  $(\Omega, F, P)$  uno spazio di probabilità e sia  $I$  un intervallo reale del tipo  $[0, T]$  oppure  $[0, +\infty[$ .

**Definizione A.10.** Un *processo stocastico misurabile* in  $\mathbb{R}^d$  è una famiglia  $(X_t)_{t \in I}$  di variabili aleatorie a valori in  $\mathbb{R}^d$  tali che l'applicazione

$$X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad X(t, \omega) = X_t(\omega)$$

è misurabile rispetto alla  $\sigma$ -algebra prodotto  $B(I) \times F$ . Si dice che  $X$  è sommabile se  $X_t \in L^1(\Omega, P)$  per ogni  $t \in I$ .

Un processo stocastico può essere utilizzato per descrivere un fenomeno aleatorio che evolve nel tempo: per esempio possiamo interpretare la variabile aleatoria  $X_t$  in  $\mathbb{R}_+$  come il prezzo di un titolo rischioso al tempo  $t$ , oppure la variabile aleatoria  $X_t$  in  $\mathbb{R}^3$  come la posizione di una particella nello spazio al tempo  $t$ . Ad ogni  $\omega \in \Omega$  corrisponde una diversa traiettoria

$$\gamma_\omega := \{X_t(\omega), t \in I\}, \quad \omega \in \Omega.$$

### A.2.1 Processi di Poisson

Il processo di Poisson è l'esempio fondamentale di un processo con traiettorie discontinue e funge da base per i processi di salto. Per costruire un processo di Poisson consideriamo una successione  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro  $\lambda > 0$ :

$$\tau_n \sim \text{Exp}_\lambda, \quad n \geq 1.$$

Consideriamo un modello dove i salti si presentano casualmente e  $\tau_n$  rappresenta il tempo d'attesa dell' $n$ -esimo salto dal precedente: quindi, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T_n := \sum_{k=1}^n \tau_k$$

è l'istante dell' $n$ -esimo salto.

Osserviamo che  $E[T_n - T_{n-1}] = E[\tau_n] = \frac{1}{\lambda}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ossia  $\frac{1}{\lambda}$  è la distanza media tra i salti; per questo motivo il parametro  $\lambda$  è anche chiamato *intensità*.

Si ha che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  le variabili  $T_n$  hanno densità

$$\gamma_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

*Dimostrazione.* Per  $n = 1$  è ovvio in quanto  $T_1 = \tau_1$  ha distribuzione esponenziale. Assumiamo che  $T_n$  abbia densità data da (A.4). Vediamo se questo è vero anche per  $T_{n+1} = T_n + \tau_{n+1}$ : poichè i  $\tau_i$  sono indipendenti, saranno indipendenti anche  $T_n$  e  $T_{n+1}$  così:

$$\begin{aligned} \gamma_{T_{n+1}}(t) &= \gamma_{T_n + \tau_{n+1}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_{T_n}(s) \gamma_{\tau_{n+1}}(t-s) ds = \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds = \\ &= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1} ds = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

□

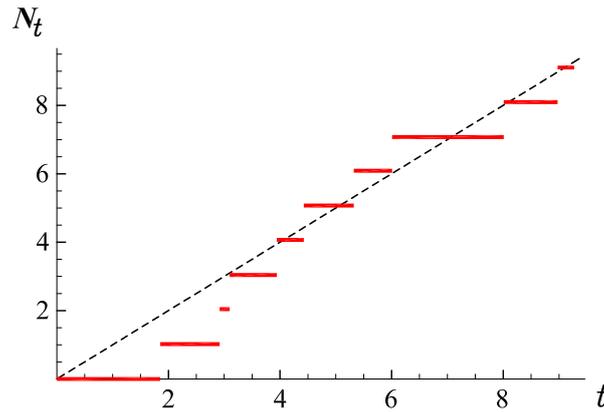


Figura A.1: Una traiettoria di un processo di Poisson con  $\lambda = 1$ . La linea tratteggiata è il valore atteso  $E[N_t] = \lambda t$

Il *processo di Poisson* con intensità  $\lambda$  è il processo

$$N_t = \sum_{n \geq 1} n \mathbb{1}_{[T_n, T_{n+1}[}(t), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

con  $T_n$  definito come sopra. Tale processo conta il numero di salti che si verificano fino all'istante  $t$ . In particolare  $N_t$  è a valori interi non negativi. Per ogni  $t > 0$ ,  $N_t$  ha distribuzione

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.5})$$

*Dimostrazione.*

$$P(N_t = n) = P(t \geq T_n) - P(t \geq T_{n+1}) =$$

(dalla (A.4))

$$= P(t \geq T_n) - \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} ds =$$

(per parti)

$$\begin{aligned} P(t \geq T_n) - \left( - \left[ e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} \right]_{s=0}^{s=t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} ds \right) = \\ = P(t \geq T_n) + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - P(t \geq T_n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

□

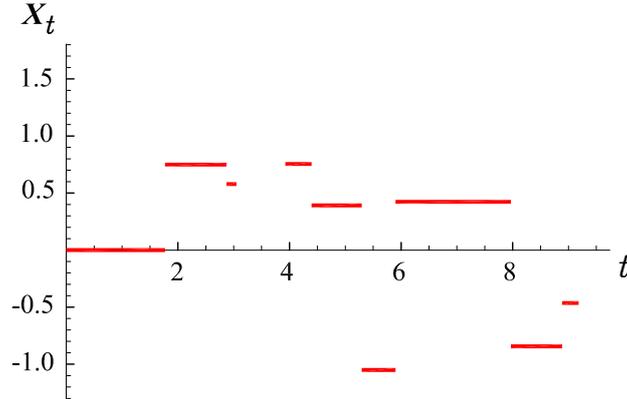


Figura A.2: Una traiettoria di un processo di Poisson composto con  $\lambda = 1$  e  $\eta = N_{0,1}$

Sia  $N$  un processo di Poisson e assumiamo che  $Z = (Z_n)$  sia una successione di variabili aleatorie a valori in  $\mathbb{R}^d$  indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione  $\eta$ . Il *processo di Poisson composto* è definito come

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.6})$$

Per convenzione  $X_t = 0$  quando  $N_t = 0$ .

I salti del Poisson composto  $X$  si presentano allo stesso momento dei salti di  $N$ : tuttavia, mentre i salti di  $N$  sono fissati con valore uno, i salti di  $X$  hanno valori aleatori con distribuzione  $\eta$ .

## A.2.2 Martingale

**Definizione A.11.** Sia  $X$  una variabile aleatoria reale sommabile sullo spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$  e sia  $G$  una  $\sigma$ -algebra contenuta in  $f$ . Sia  $Y$  una variabile aleatoria tale che

- i)  $Y$  è sommabile e  $G$ -misurabile,
- ii)  $\int_A X dP = \int_A Y dP$  per ogni  $A \in G$ .

Allora diciamo che  $Y$  è una versione dell'attesa di  $X$  condizionata a  $G$  e scriviamo  $Y = E[X | G]$ .

*Osservazione 5.* Se  $Y = E[X | G]$  e  $Z$  è una variabile aleatoria  $G$ -misurabile tale che  $Z = Y$  q.s. allora anche  $Z = E[X | G]$ . Dunque il valore atteso di  $X$  è definito a meno di un evento trascurabile: l'espressione  $Y = E[X | G]$  non deve essere intesa come un'uguaglianza di variabili aleatorie bensì come una notazione che indica che  $Y$  è una variabile aleatoria che gode delle proprietà i) e ii) della definizione precedente.

**Definizione A.12.** Una *filtrazione*  $(F_t)_{t \geq 0}$  in  $(\Omega, F, P)$  è una famiglia crescente di sotto- $\sigma$ -algebre di  $F$ .

**Definizione A.13.** Dato un processo stocastico  $X = (X_t)_{t \in I}$ , la *filtrazione naturale* per  $X$  è definita da

$$\tilde{F}_t^X = \sigma(X_s | 0 \leq s \leq t) := \sigma(\{X_s^{-1}(H) | 0 \leq s \leq t, H \in B\}), \quad t \in I.$$

**Definizione A.14.** Un processo stocastico  $X$  è adattato ad una filtrazione  $F_t$  se  $\tilde{F}_t^X \subseteq F_t$  per ogni  $t$ , o in altri termini se  $X_t$  è  $F_t$ -misurabile per ogni  $t$ .

Chiaramente  $\tilde{F}_t^X$  è la più piccola filtrazione rispetto alla quale  $X$  è adattato.

**Definizione A.15.** Sia  $M$  un processo stocastico sommabile e  $F_t$ -adattato. Diciamo che  $M$  è una *martingala* rispetto a  $F_t$  e alla misura  $P$  se

$$M_s = E[M_t | F_s], \quad \text{per ogni } 0 \leq s \leq t.$$

Il valore atteso di una martingala  $M$  è costante nel tempo, infatti:

$$E[M_t] = E[E[M_t | F_0]] = E[M_0], \quad t \geq 0.$$

# Bibliografia

- [1] A. PASCUCCI, *Note delle Lezioni*, dispense del corso ‘Probabilità e Statistica 1’, Bologna, 2014
- [2] A. PASCUCCI, *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, Springer, 2011
- [3] A. PASCUCCI, *Calcolo Stocastico per la Finanza*, Springer, 2008
- [4] D. WILLIAMS, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge, 1991
- [5] G. ZITKOVIC, dispense del corso ‘Theory of Probability 1’, Department of Mathematics, University of Texas, Austin, 2013
- [6] M. FRAU, dispense del corso ‘Metodi matematici della Fisica’, Dipartimento di Fisica, Torino, 2002
- [7] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Education, 3rd edition, 1986