

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

LA CORRISPONDENZA  
FRA IDEALI E VARIETÀ ALGEBRICHE,  
AFFINI E PROIETTIVE

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Alessandro Gimigliano

Presentata da:  
Chiara Mancini

II Sessione  
Anno Accademico 2014/2015



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Nozioni preliminari</b>	<b>7</b>
1.1 Varietà affini . . . . .	7
1.2 Ideali . . . . .	9
<b>2 Corrispondenza ideali-varietà</b>	<b>13</b>
2.1 Nullstellensatz . . . . .	13
2.2 Corrispondenza fra ideali e varietà . . . . .	17
2.3 Somme di ideali . . . . .	18
2.4 Prodotto di ideali . . . . .	20
2.5 Intersezione di ideali . . . . .	21
2.6 Chiusura di Zariski e ideali quozienti . . . . .	22
2.7 Varietà irriducibili e ideali primi . . . . .	25
2.8 Componenti irriducibili di una varietà . . . . .	29
2.9 Riepilogo . . . . .	33
<b>3 Ideali omogenei e varietà proiettive</b>	<b>35</b>
3.1 Richiami di geometria proiettiva . . . . .	35
3.2 Varietà proiettive . . . . .	37
3.3 Ideali omogenei . . . . .	41
3.4 Corrispondenza ideali omogenei-varietà . . . . .	44
3.5 Chiusura proiettiva di varietà affini . . . . .	49
<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>



# Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è costruire una corrispondenza tra oggetti algebrici, gli ideali, e oggetti geometrici, le varietà, e studiarne il comportamento nel caso affine e proiettivo. Nel primo capitolo introduttivo definiamo ideali e varietà affini e ne diamo alcuni esempi e proprietà.

Nel secondo capitolo studiamo le funzioni che adopereremo in tutta la trattazione,  $\mathbf{I}$  che associa ad ogni varietà affine un ideale, e  $\mathbf{V}$  che ad ogni ideale associa una varietà affine. Dimostreremo che queste funzioni in generale non sono biunivoche, ma applicando il Nullstellensatz ('teorema del luogo degli zeri' in tedesco) vedremo che in campi algebricamente chiusi ad ogni ideale radicale corrisponde una e una sola varietà affine non vuota, e viceversa, cioè le funzioni  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}$  sono biezioni e sono una l'inversa dell'altra. In seguito definiamo le operazioni di somma, prodotto e quoziente di ideali, e studiamo il rapporto con le operazioni tra varietà affini: alla somma di ideali corrisponde l'intersezione di varietà, all'intersezione e al prodotto di ideali corrisponde l'unione di varietà, e al quoziente di ideali corrisponde la chiusura di Zariski della differenza di varietà. Notiamo che la differenza di varietà non è sempre una varietà, perciò abbiamo definito la chiusura di Zariski, che prende il nome dalla topologia di Zariski. Successivamente mostriamo che ad ogni varietà irriducibile corrisponde un ideale primo, inoltre in campi algebricamente chiusi la corrispondenza tra varietà irriducibili e ideali primi è biunivoca, ed è biunivoca anche la corrispondenza tra punti dello spazio e ideali massimali. Infine introduciamo la decomposizione di una varietà in componenti irriducibili, e vediamo la corrispondenza con la decomposizione minimale di un ideale come intersezione di ideali primi.

Nell'ultimo capitolo, dopo aver richiamato alcuni concetti di geometria proiettiva, si definiscono le varietà proiettive come controparte delle varietà affini, si danno alcuni esempi e proprietà. In seguito studiamo le proprietà degli ideali omogenei, e costruiamo un ideale omogeneo a partire da un ideale qualsiasi, l'omogeneizzato di un ideale. Ora possiamo definire anche nel caso proiettivo le funzioni  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}$ , che associano a varietà proiettive ideali omogenei e viceversa. Adoperiamo la versione proiettiva del Nullstellensatz per rendere anche in questo caso la corrispondenza biunivoca, ma a differenza del caso affine dobbiamo restringerci a ideali radicali omogenei propriamente contenuti in  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  e varietà proiettive non vuote, in un

campo algebricamente chiuso. Con queste ipotesi la corrispondenza tra le operazioni algebriche e geometriche è la stessa studiata nel capitolo precedente. Anche la corrispondenza tra ideali primi e varietà irriducibili è la stessa, si nota però che non vale la relazione tra ideali massimali e punti dello spazio. Infine introduciamo la chiusura proiettiva di una varietà affine, che è la più piccola varietà proiettiva che contiene una data varietà affine. In questo modo da ogni varietà proiettiva possiamo ricavare una varietà affine, la porzione affine, e viceversa da ogni varietà affine otteniamo con la chiusura proiettiva una varietà proiettiva.

# Capitolo 1

## Nozioni preliminari

In questo capitolo introdurremo i principali oggetti geometrici e algebrici che tratteremo nella tesi, e cioè varietà affini e ideali in anelli di polinomi, che saranno protagonisti della corrispondenza discussa nel secondo capitolo. Per una trattazione generale di questi argomenti, vedi ad esempio [CLO].

### 1.1 Varietà affini

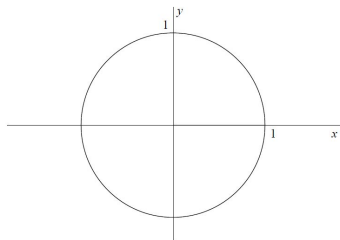
**Definizione 1.** Sia  $K$  un campo e siano  $f_1, \dots, f_s$  polinomi in  $K[x_1, \dots, x_n]$ . Allora definiamo

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall i, 1 \leq i \leq s\}.$$

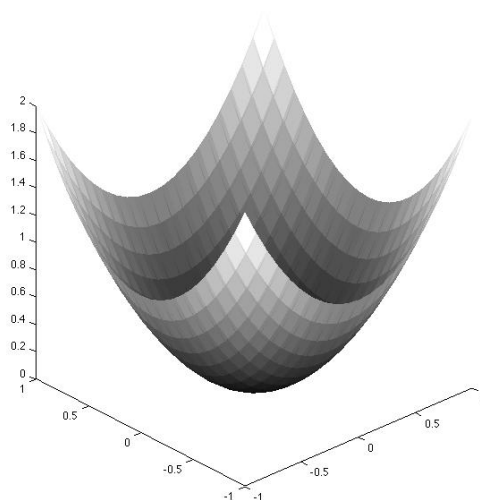
Chiamiamo  $V(f_1, \dots, f_s)$  la **varietà affine** definita da  $f_1, \dots, f_s$ .

Vediamo qualche esempio di varietà considerando  $K = \mathbb{R}$  al fine di disegnarle.

**Esempio 1.** In  $\mathbb{R}^2$  consideriamo la varietà  $V(x^2 + y^2 - 1)$  che risulta essere la circonferenza centrata nell'origine degli assi e di raggio 1.



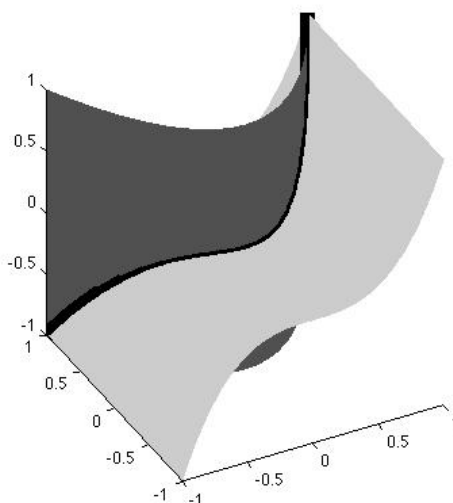
**Esempio 2.** In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo  $V(z - x^2 - y^2)$  che è il paraboloido con  $z$  asse di rotazione.



Più generalmente i grafici di funzioni polinomiali sono varietà affini, infatti il grafico di  $y = f(x)$  è  $\mathbf{V}(y - f(x))$ .

Un esempio più interessante, che ci guiderà lungo tutta la trattazione, è quello della cubica gobba, una curva in  $\mathbb{P}^3$ .

**Esempio 3.** In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo  $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ . Il prossimo lemma mostra che l'intersezione di varietà è ancora una varietà, in particolare la cubica gobba si ottiene come intersezione delle varietà  $\mathbf{V}(y - x^2)$  e  $\mathbf{V}(z - x^3)$ .



**Lemma 1.** Siano  $V, W \subset K^n$  varietà affini, rispettivamente definite dai polinomi  $f_1, \dots, f_s$  e  $g_1, \dots, g_t$ ; allora anche  $V \cup W$  e  $V \cap W$  sono varietà



affini e

$$V \cap W = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t),$$

$$V \cup W = \mathbf{V}(f_i g_j | 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t).$$

*Dimostrazione.* La prima uguaglianza è banale: in  $V \cap W$  si annullano sia  $f_1, \dots, f_s$  che  $g_1, \dots, g_t$ , cioè abbiamo la varietà generata da  $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t$ . Per la seconda uguaglianza, proviamo che  $V \cup W \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$ : sia  $(a_1, \dots, a_n) \in V$ , allora tutti i polinomi  $f_i$  si annullano in questo punto, quindi tutti i prodotti  $f_i g_j$  si annullano in  $(a_1, \dots, a_n)$ . Perciò  $V \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$ ; in modo simile segue che  $W \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$ , cioè  $V \cup W \subset \mathbf{V}(f_i g_j)$ . Per l'altra inclusione, scegliamo  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(f_i g_j)$ . Se questo punto appartiene a  $V$  abbiamo finito, altrimenti significa che  $\exists i_0$  per cui  $f_{i_0}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ . Dato che  $\forall j, f_{i_0} g_j$  si annulla in  $(a_1, \dots, a_n)$ , allora tutti i  $g_j$  si annullano in questo punto, quindi  $(a_1, \dots, a_n) \in W$ . Questo dimostra che  $\mathbf{V}(f_i g_j) \subset V \cup W$ .  $\square$

Osserviamo che dal Lemma 1 si deduce facilmente che anche le unioni e intersezioni finite di varietà sono varietà.

## 1.2 Ideali

Diamo ora una serie di definizioni di oggetti algebrici che ci serviranno nel seguito.

**Definizione 2.** Un sottoinsieme  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  si dice un **ideale** se soddisfa:

- $0 \in I$
- se  $f, g \in I$ , allora  $f + g \in I$
- se  $f \in I$  e  $h \in K[x_1, \dots, x_n]$  allora  $hf \in I$ .

**Definizione 3.** Siano  $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ . Poniamo

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i \mid h_1, \dots, h_s \in K[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

Si dimostra che  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$  è un ideale, detto **ideale generato** da  $f_1, \dots, f_s$ , e chiameremo l'insieme di tali polinomi **base dell'ideale**.

**Definizione 4.** Un ideale  $I$  è **radicale** se, per ogni intero  $m \geq 1$ ,  $f^m \in I$  implica che  $f \in I$ .

**Definizione 5.** Sia  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  un ideale. Il **radicale** di  $I$ , denotato  $\sqrt{I}$ , è l'insieme

$$\{f \mid f^m \in I \text{ per qualche intero } m \geq 1\}.$$

**Lemma 2.** *Se  $I$  è un ideale in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $\sqrt{I}$  è un ideale in  $K[x_1, \dots, x_n]$  che contiene  $I$ . Inoltre,  $\sqrt{I}$  è un ideale radicale. Infine,  $I$  è radicale se e solo se  $I = \sqrt{I}$ .*

*Dimostrazione.* Vediamo innanzitutto che  $\sqrt{I}$  è un ideale. Supponiamo che  $f, g \in \sqrt{I}$ , allora esistono interi positivi  $m$  e  $l$  tali che  $f^m, g^l \in I$ . Nello sviluppo binomiale di  $(f + g)^{m+l-1}$  ogni termine ha un fattore  $f^i g^j$  con  $i + j = m + l - 1$ . Dato che o  $i \geq m$  o  $j \geq l$ , allora  $f^i$  o  $g^j$  sta in  $I$ , perciò  $f^i g^j \in I$  e ogni termine nello sviluppo binomiale appartiene a  $I$ . Quindi  $(f + g)^{m+l-1} \in I$  e  $f + g \in \sqrt{I}$ . Poi supponiamo  $f \in \sqrt{I}$  e  $h \in K[x_1, \dots, x_n]$ ; dato che  $I$  è un ideale abbiamo  $(hf)^m = h^m f^m \in I$ . Quindi  $hf \in \sqrt{I}$ .

Vogliamo dimostrare adesso che  $I \subset \sqrt{I}$ . Questo è immediato poiché  $f \in I \Rightarrow f^1 \in I \Rightarrow f \in \sqrt{I}$ .

È immediato vedere che  $\sqrt{I}$  è un ideale radicale:  $f^m \in \sqrt{I} \Rightarrow \exists n$  tale che  $(f^m)^n = f^{mn} \in I \Rightarrow f \in \sqrt{I}$ .

Per ultimo mostriamo che  $I$  è radicale  $\Leftrightarrow I = \sqrt{I}$ . L'implicazione sinistra è già dimostrata per il passo precedente, ci rimane l'altra. Sappiamo già che  $I \subset \sqrt{I}$ . Per l'altra inclusione consideriamo  $f \in \sqrt{I}$ , per definizione di radicale  $f^m \in I$  per qualche  $m$ , ma  $I$  è radicale dunque  $f \in I$ , cioè  $\sqrt{I} \subset I$ .  $\square$

La prossima proposizione mostra come una varietà dipenda solo dall'ideale generato dalle equazioni che la definiscono.

**Proposizione 1.** *Se  $f_1, \dots, f_s$  e  $g_1, \dots, g_t$  sono basi dello stesso ideale in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , cioè  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ , allora  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_t)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ ; allora  $(a_1, \dots, a_n)$  annulla  $f_i \forall i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , quindi annulla  $h_1 f_1 + \dots + h_s f_s$  con  $h_1, \dots, h_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ . Per ipotesi ogni  $g_j$  si può scrivere come combinazione di  $f_i$ , quindi  $(a_1, \dots, a_n)$  annulla ogni  $g_j$ , cioè appartiene a  $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_t)$ . In definitiva  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbf{V}(g_1, \dots, g_t)$  e l'altra inclusione è analoga.  $\square$

Riprendiamo l'Esempio 3 della cubica gobba,  $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ ; sappiamo che i polinomi che la definiscono si annullano sui punti di  $V$ , ma possiamo chiederci se esistono altri polinomi con tale proprietà. Per questo definiamo l'insieme di tutti i polinomi che si annullano su una generica varietà.

**Definizione 6.** *Sia  $V \subset K^n$  una varietà affine allora poniamo*

$$I(V) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall (a_1, \dots, a_n) \in V\}.$$

**Lemma 3.** *Se  $V \subset K^n$  è una varietà affine allora  $I(V) \subset K[x_1, \dots, x_n]$  è un ideale radicale; chiamiamo  $I(V)$  l'ideale di  $V$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo innanzitutto che  $\mathbf{I}(V)$  è un ideale. È ovvio che  $0 \in \mathbf{I}(V)$  dato che 0 si annulla su tutti i punti di  $K^n$ . Supponiamo poi che  $f, g \in \mathbf{I}(V)$  e  $h \in K[x_1, \dots, x_n]$ . Sia  $(a_1, \dots, a_n)$  un punto arbitrario di  $V$ , allora  $f(a_1, \dots, a_n) + g(a_1, \dots, a_n) = 0 + 0 = 0$  e  $h(a_1, \dots, a_n)f(a_1, \dots, a_n) = h(a_1, \dots, a_n) \cdot 0 = 0$ . Dunque  $\mathbf{I}(V)$  è un ideale. Inoltre vediamo che è radicale. Sia  $x \in V$ , se  $f^m \in \mathbf{I}(V)$ , allora  $(f(x))^m = 0$ . Questo può succedere solo se  $f(x) = 0$ ; ma, dato che  $x \in V$  è arbitrario,  $f \in \mathbf{I}(V)$ .  $\square$

**Esempio 4.** Per un primo esempio di ideale di una varietà, consideriamo  $\{(0, 0)\}$  varietà di  $K^2$ . Vediamo che  $\mathbf{I}(\{(0, 0)\}) = \langle x, y \rangle$ . L'inclusione  $\langle x, y \rangle \subset \mathbf{I}(\{(0, 0)\})$  è banale perché ogni polinomio della forma  $A(x, y)x + B(x, y)y$  si annulla nell'origine.

Per l'altra inclusione supponiamo che  $f = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$  si annulli nell'origine. Allora  $a_{00} = f(0, 0) = 0$  e, di conseguenza,

$$f = a_{00} + \sum_{i,j \neq 0} a_{ij}x^i y^j = 0 + \left( \sum_{\substack{i,j \\ i>0}} a_{ij}x^{i-1}y^j \right) x + \left( \sum_{j>0} a_{0j}y^{j-1} \right) y \in \langle x, y \rangle.$$

Così  $\mathbf{I}(\{(0, 0)\}) \subset \langle x, y \rangle$ .

**Esempio 5.** Consideriamo il caso  $V = K^n$ , allora  $\mathbf{I}(K^n)$  è l'insieme di tutti i polinomi che si annullano dappertutto, cioè  $\mathbf{I}(K^n) = 0$ , se  $K$  è un campo infinito.

**Esempio 6.** Un esempio più interessante è quello dell'ideale di  $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$ . Vediamo che  $\mathbf{I}(V) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ . Per provare ciò, mostriamo prima che  $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$  può essere scritto nella forma

$$f = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + r \quad (1.1)$$

dove  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$  e  $r$  è un polinomio nella sola variabile  $x$ . Consideriamo prima il caso di  $f = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ : possiamo scriverlo

$$\begin{aligned} x^\alpha y^\beta z^\gamma &= x^\alpha (x^2 + (y - x^2))^\beta (x^3 + (z - x^3))^\gamma \\ &= x^\alpha (x^{2\beta} + \text{termini in } y - x^2) (x^{3\gamma} + \text{termini in } z - x^3) \\ &= h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + x^{\alpha+2\beta+3\gamma} \end{aligned}$$

Così, 1.1 è vera in questo caso e, in generale, preso  $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$ , lo potremo scrivere come combinazione  $\mathbb{R}$ -lineare di monomi, da cui segue che 1.1 vale per ogni  $f$ . Ora possiamo effettivamente dimostrare che  $\mathbf{I}(V) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ . Dalla definizione di cubica gobba abbiamo  $y - x^2, z - x^3 \in \mathbf{I}(V)$  e, dato che  $\mathbf{I}(V)$  è un ideale,  $h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) \in \mathbf{I}(V)$ . In questo modo rimane provata l'inclusione  $\langle y - x^2, z - x^3 \rangle \subset \mathbf{I}(V)$ . Per provare l'inclusione opposta consideriamo  $f \in \mathbf{I}(V)$  che ammette la scrittura 1.1, il nostro scopo è provare

che  $r = 0$ . Per farlo useremo la parametrizzazione della cubica gobba data da  $(t, t^2, t^3)$ ; dato che  $f$  si annulla su  $V$ , si ha:

$$0 = f(t, t^2, t^3) = 0 + 0 + r(t)$$

Per l'arbitrarietà di  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}[x]$  deve essere il polinomio nullo. Allora  $f$  ha la forma desiderata e questo dimostra  $\mathbf{I}(V) \subset \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ .

In analogia con la definizione di ideale di una varietà, possiamo definire la varietà associata a un ideale. Questa è una generalizzazione della definizione iniziale di varietà affine.

**Definizione 7.** Sia  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  un ideale, definiamo l'insieme

$$\mathbf{V}(I) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0; \forall f \in I\}.$$

Il teorema della base di Hilbert ci permette di dimostrare che  $\mathbf{V}(I)$  è una varietà affine.

**Teorema 1 (della base di Hilbert).** Ogni ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  ammette un insieme finito di generatori. Cioè,  $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  per alcuni  $g_1, \dots, g_s \in I$ .

Non dimostriamo questo teorema; lo si può ad esempio trovare in [CLO].

**Proposizione 2.**  $\mathbf{V}(I)$  è una varietà affine; in particolare, se  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , allora  $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ .

*Dimostrazione.* Dal teorema della base di Hilbert,  $I$  è generato da un numero finito di polinomi. Vogliamo dimostrare che  $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ . Innanzitutto, dato che  $f_i \in I$ , se  $f(a_1, \dots, a_n) = 0 \forall f \in I$  allora  $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ , così  $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ . D'altra parte sia  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$  e sia  $f \in I$ ; siccome  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , possiamo scrivere  $f = \sum_{i=1}^s h_i f_i$  per certi  $h_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ , ma allora

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) &= \sum_{i=1}^s h_i(a_1, \dots, a_n) f_i(a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{i=1}^s h_i(a_1, \dots, a_n) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dunque  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbf{V}(I)$ . □

## Capitolo 2

# Corrispondenza ideali-varietà

Lo scopo di questo capitolo è costruire un “dizionario” ideali-varietà, ovvero lo strumento che ci permetterà di tradurre operazioni su ideali nelle corrispondenti operazioni fra varietà, e viceversa.

Per ottenere ciò, ci serviremo di un teorema fondamentale di algebra commutativa, dimostrato per la prima volta da Hilbert: il Nullstellensatz; nella Sezione 1 vedremo tre sue varianti. Nella Sezione 2 vengono studiate in dettaglio le applicazioni  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}$ , protagoniste della corrispondenza. Dalla Sezione 3 alla 8 vedremo come sono legate fra loro le operazioni tra ideali (somma, prodotto, intersezione, quoziente) e quelle tra varietà (intersezione, unione, differenza). L’ultima Sezione è occupata da una tabella riassuntiva.

### 2.1 Nullstellensatz

Nel primo capitolo abbiamo introdotto l’insieme dei polinomi che si annullano su una varietà  $V \subset K^n$  e l’insieme dei punti che annullano i polinomi di un ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ , rispettivamente:

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in V\};$$

$$\mathbf{V}(I) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \forall f \in I\}.$$

Gli insiemi definiti inducono due mappe che danno una prima idea della corrispondenza che studieremo durante il capitolo:

$$\begin{array}{ccc} \text{varietà affini} & \longrightarrow & \text{ideali} \\ V & \longrightarrow & \mathbf{I}(V) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \text{ideali} & \longrightarrow & \text{varietà affini} \\ I & \longrightarrow & \mathbf{V}(I) \end{array} .$$

Osserviamo innanzitutto che la corrispondenza non è biunivoca, infatti la mappa  $\mathbf{V}$  non è iniettiva. Ad esempio gli ideali  $\langle x \rangle$  e  $\langle x^2 \rangle$  sono ideali diversi di  $K[x]$  ma sono associati alla stessa varietà  $\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}(x^2) = \{0\}$ .

Un problema dovuto alla mancanza di iniettività di  $\mathbf{V}$  è la rappresentazione della varietà vuota in  $K^n$ , con  $K$  campo non algebricamente chiuso.

Ad esempio prendiamo gli ideali generati dai polinomi  $1$ ,  $1 + x^2$ ,  $1 + x^2 + x^4 \in \mathbb{R}[x]$ . Questi polinomi non hanno radici reali e dunque corrispondono alla varietà vuota. Questo problema non sussiste considerando campi algebricamente chiusi, come vediamo con il seguente teorema.

**Teorema 2 (Nullstellensatz debole).** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso e sia  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  un ideale tale che  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ . Allora  $I = K[x_1, \dots, x_n]$ .*

*Dimostrazione.* L'idea consiste nel provare che  $1 \in I$ ; infatti questo implica la nostra tesi: se  $1 \in I \Rightarrow f = f \cdot 1 \in I, \forall f \in K[x_1, \dots, x_n]$ .

Lo proviamo per induzione su  $n$ , numero di variabili.

Se  $n = 1$ , sia  $I \subset K[x]$  tale che  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ . Si può dimostrare che  $K[x]$  è un dominio a ideali principali quindi  $\exists f$  per cui  $I = \langle f \rangle$ . Allora  $\mathbf{V}(I)$  è l'insieme delle radici di  $f$ , ovvero l'insieme degli  $a \in K$  che verificano  $f(a) = 0$ . Ma, dato che  $K$  è algebricamente chiuso, ogni polinomio non costante ha radici. Dunque l'unico modo in cui si può avere  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$  è se  $f$  è una costante non nulla. In tal caso  $1/f \in K$ , allora  $1 = (1/f) \cdot f \in I$ .

Ora assumiamo di aver dimostrato il teorema per  $n - 1$  variabili e vediamo per  $n$ . Consideriamo un ideale  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset K[x_1, \dots, x_n]$  per cui  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ . Supponiamo che  $f_1$  non sia costante, altrimenti non ci sarebbe niente da provare, e abbia grado  $N \geq 1$ . Operiamo un cambio di coordinate per portare  $f_1$  in una forma particolare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{x}_1, \\ x_2 &= \tilde{x}_2 + a_2 \tilde{x}_1, \\ &\vdots \\ x_n &= \tilde{x}_n + a_n \tilde{x}_1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove gli  $a_i$  sono costanti ancora da determinare in  $K$ . Sostituiamo gli  $x_1, \dots, x_n$  con le nuove coordinate:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + a_2 \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n + a_n \tilde{x}_1) \\ &= c(a_2, \dots, a_n) \tilde{x}_1^N + \text{termini in cui } \tilde{x}_1 \text{ ha grado } < N. \end{aligned}$$

Si può dimostrare che  $c(a_2, \dots, a_n)$  è un'espressione polinomiale non nulla in  $a_2, \dots, a_n$ .

Con il cambiamento di coordinate 2.1 ogni polinomio  $f \in K[x_1, \dots, x_n]$  va in un polinomio  $\tilde{f} \in K[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]$ . È immediato dimostrare che l'insieme  $\tilde{I} = \{\tilde{f} \mid f \in I\}$  è un ideale in  $K[\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]$ . Notiamo che vale ancora  $\mathbf{V}(\tilde{I}) = \emptyset$  dato che, se le equazioni trasformate avessero soluzione, allora le avrebbero anche quelle iniziali. Inoltre, se possiamo dimostrare che  $1 \in \tilde{I}$ , allora  $1 \in I$ , poiché le costanti non vengono modificate da 2.1.

Ricordiamo che abbiamo trasformato  $f_1$  in

$$\tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = c(a_2, \dots, a_n)\tilde{x}_1^N + \text{termini in cui } \tilde{x}_1 \text{ ha grado } < N,$$

dove abbiamo scelto dei particolari  $a_2, \dots, a_n$  tali che  $c(a_2, \dots, a_n) \neq 0$ .

Sia  $\pi_1 : K^n \rightarrow K^{n-1}$  la mappa di proiezione sulle ultime  $n-1$  componenti. Poniamo  $\tilde{I}_1 = \tilde{I} \cap K[\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n]$ , allora per un lemma che riportiamo in seguito,  $\mathbf{V}(\tilde{I}_1) = \pi_1(\mathbf{V}(\tilde{I}))$ . Questo implica che  $\mathbf{V}(\tilde{I}_1) = \pi_1(\mathbf{V}(\tilde{I})) = \pi_1(\emptyset) = \emptyset$ .

Dall'ipotesi induttiva segue che  $\tilde{I}_1 = K[\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n]$ , questo implica che  $1 \in \tilde{I}_1 \subset \tilde{I}$ .  $\square$

**Lemma 4.** *Sia  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset K^n$  e assumiamo che, per qualche  $i$ ,  $f_i$  sia della forma*

$$f_i = cx_1^N + \text{termini in cui } x_1 \text{ ha grado } < N,$$

dove  $c \in K - \{0\}$  e  $N \geq 1$ . Sia  $I_1 = I \cap K[x_2, \dots, x_n]$ , allora, in  $K^{n-1}$ ,  $\pi_1(V) = \mathbf{V}(I_1)$ , dove  $\pi_1$  è la proiezione sulle ultime  $n-1$  componenti.

Questo lemma è in realtà un corollario del Teorema di estensione geometrica, che esula dalla nostra trattazione e ne omettiamo la dimostrazione, ma può essere trovata in [CLO].

Il nostro scopo è rendere in qualche modo biunivoca la corrispondenza precedentemente definita dalle mappe  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}$ . Per riuscirci sarà fondamentale il Nullstellensatz forte, che è una diretta conseguenza del prossimo teorema, il Nullstellensatz di Hilbert. Esso afferma che se un polinomio  $f$  si annulla su tutti i punti di  $\mathbf{V}(I)$ , allora qualche potenza di  $f$  deve appartenere a  $I$ , cioè  $f \in \sqrt{I}$ .

**Teorema 3 (Nullstellensatz di Hilbert).** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso e siano  $f, f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ . Se  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s))$ , allora esiste un intero  $m \geq 1$  tale che  $f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ .*

*Dimostrazione.* Dall'ipotesi  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s))$ , si ha che  $f$  si annulla su tutti gli zeri comuni dei polinomi  $f_1, \dots, f_s$ . Dobbiamo provare che esiste un intero  $m \geq 1$  e dei polinomi  $A_1, \dots, A_s$  tali che

$$f^m = \sum_{i=1}^s A_i f_i.$$

La prova più diretta consiste nel considerare l'ideale

$$\tilde{I} = \langle f_1, \dots, f_s, 1 - yf \rangle \subset K[x_1, \dots, x_n, y]$$

e provare che  $\mathbf{V}(\tilde{I}) = \emptyset$ .

Per vederlo, prendiamo  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in K^{n+1}$  e distinguiamo due casi:

- $(a_1, \dots, a_n)$  è uno zero comune di  $f_1, \dots, f_s$ ,
- $(a_1, \dots, a_n)$  non è uno zero comune di  $f_1, \dots, f_s$ .

Nel primo caso segue dall'ipotesi che  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ . Così, valutando il polinomio  $1 - yf$  in  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ , si ha  $1 - a_{n+1}f(a_1, \dots, a_n) = 1 \neq 0$ . In particolare,  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \notin \mathbf{V}(\tilde{I})$ .

Nel secondo caso,  $\exists i, 1 \leq i \leq s$  tale che  $f_i(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ . Pensando  $f_i$  come una funzione in  $n+1$  variabili che non dipende dall'ultima variabile, abbiamo  $f_i(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \neq 0$ . Possiamo concludere che  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \notin \mathbf{V}(\tilde{I})$ . Dunque, per l'arbitrarietà di  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in K^{n+1}$ ,  $\mathbf{V}(\tilde{I}) = \emptyset$ .

Dal Nullstellensatz debole segue che  $\tilde{I} = K[x_1, \dots, x_n, y]$ , cioè  $1 \in \tilde{I}$ . Quindi possiamo scrivere 1 come

$$1 = \sum_{i=1}^s p_i(x_1, \dots, x_n, y) f_i + q(x_1, \dots, x_n, y)(1 - yf)$$

per opportuni polinomi  $p_i, q \in K[x_1, \dots, x_n, y]$ . Ora, passando al campo dei quozienti,  $K(x_1, \dots, x_n, y)$ , poniamo  $y = 1/f(x_1, \dots, x_n)$ . Allora la relazione precedente diventa:

$$1 = \sum_{i=1}^s p_i(x_1, \dots, x_n, 1/f) f_i.$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $f^m$ , dove  $m$  è scelto abbastanza grande da far scomparire tutti i denominatori, si avrà in definitiva

$$f^m = \sum_{i=1}^s A_i f_i,$$

per alcuni polinomi  $A_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ , che è proprio la nostra tesi.  $\square$

Ora possiamo dimostrare la seguente variante del Nullstellensatz.

**Teorema 4 (Nullstellensatz forte).** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso. Se  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  è un ideale, allora*

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

*Dimostrazione.*  $\sqrt{I} \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ , infatti  $f \in \sqrt{I} \Rightarrow f^m \in I$  per qualche  $m$ . Quindi  $f^m$  si annulla in  $\mathbf{V}(I)$ , il che implica che anche  $f$  si annulla in  $\mathbf{V}(I)$ , cioè  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ .

Viceversa, supponiamo che  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ ; allora per definizione  $f$  si annulla su  $\mathbf{V}(I)$ . Dal Nullstellensatz di Hilbert, esiste un intero  $m \geq 1$  tale che  $f^m \in I$ . Ma questo significa che  $f \in \sqrt{I}$ . Per l'arbitrarietà di  $f$ ,  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subset \sqrt{I}$ .  $\square$



## 2.2 Corrispondenza fra ideali e varietà

In questa sezione approfondiremo il ruolo delle funzioni  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}$  introdotte precedentemente. Abbiamo già accennato che queste due funzioni danno luogo a una corrispondenza fra ideali e varietà; in particolare, se si lavora su un campo algebricamente chiuso, la corrispondenza è una biezione fra varietà affini e ideali radicali.

**Lemma 5.** *Sia  $K$  un campo arbitrario. Le mappe*

$$\mathbf{I}: \text{varietà affini} \longrightarrow \text{ideali}$$

e

$$\mathbf{V}: \text{ideali} \longrightarrow \text{varietà affini}$$

*invertono le inclusioni, cioè se  $I_1 \subset I_2$  sono ideali, allora  $\mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}(I_2)$  e, analogamente, se  $V_1 \subset V_2$  sono varietà, allora  $\mathbf{I}(V_1) \supset \mathbf{I}(V_2)$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $I_1$  e  $I_2$  ideali tali che  $I_1 \subset I_2$ , vogliamo dimostrare che  $\mathbf{V}(I_1) \supset \mathbf{V}(I_2)$ . Sia  $x \in \mathbf{V}(I_2)$ , allora  $\forall f \in I_2, f(x) = 0$ ; in particolare  $x$  è uno zero di ogni  $f \in I_1 \subset I_2$ . Quindi  $x \in \mathbf{V}(I_1)$ .

Consideriamo poi  $V_1 \subset V_2$  varietà, vogliamo dimostrare  $\mathbf{I}(V_1) \supset \mathbf{I}(V_2)$ . Sia  $f \in \mathbf{I}(V_2)$ , allora  $\forall x \in V_2, f(x) = 0$ ; in particolare  $f$  si annulla su tutti gli  $x \in V_1 \subset V_2$ . Quindi  $f \in \mathbf{I}(V_1)$ .  $\square$

**Lemma 6.** *Sia  $K$  un campo arbitrario. Per ogni varietà  $V \subset K^n$ , si ha*

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V,$$

*cioè  $\mathbf{I}$  è iniettiva.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che le varietà di  $K^n$  sono tutte della forma  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ , per certi  $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ . Dato che ogni  $f \in \mathbf{I}(V)$  si annulla su  $V$ , l'inclusione  $V \subset \mathbf{V}(\mathbf{I}(V))$  è una diretta conseguenza della definizione di  $\mathbf{V}$ . Per l'altra inclusione, notiamo che  $f_1, \dots, f_s \in \mathbf{I}(V)$  e siccome  $\mathbf{I}(V)$  è un ideale,  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbf{I}(V)$ . Dato che  $\mathbf{V}$  inverte le inclusioni,  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) \subset \mathbf{V}(\langle f_1, \dots, f_s \rangle) = V$ . Dunque rimane dimostrata  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$ ; di conseguenza, dato che  $\mathbf{I}$  ha inversa sinistra, è iniettiva.  $\square$

**Teorema 5.** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso. Se ci restringiamo agli ideali radicali, allora le mappe*

$$\mathbf{I}: \text{varietà affini} \longrightarrow \text{ideali radicali}$$

e

$$\mathbf{V}: \text{ideali radicali} \longrightarrow \text{varietà affini}$$

*sono biezioni che invertono le inclusioni, in particolare sono una l'inversa dell'altra.*

*Dimostrazione.* Abbiamo provato nel Capitolo 1 che  $\mathbf{I}(V)$  è radicale, quindi è giustificata la restrizione del codominio agli ideali radicali.

Dal lemma precedente sappiamo che  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V$  per ogni varietà  $V$ , rimane da provare che  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$  per ogni ideale radicale  $I$ . Questa è un'immediata conseguenza del Nullstellensatz forte, che afferma  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$ , ma essendo  $I$  radicale,  $I = \sqrt{I}$ . Quindi  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  sono una l'inversa dell'altra, in questo modo è definita la biezione tra ideali radicali e varietà affini.  $\square$

Come conseguenza di questo teorema, ogni affermazione sulle varietà affini può essere riformulata in termini algebrici come affermazione sugli ideali radicali, se si lavora su un campo algebricamente chiuso.

In seguito studieremo come si corrispondono le operazioni tra ideali e quelle tra varietà.

### 2.3 Somme di ideali

**Definizione 8.** Se  $I$  e  $J$  sono ideali di  $K[x_1, \dots, x_n]$ , allora la **somma** di  $I$  e  $J$  è l'insieme

$$I + J = \{f + g \mid f \in I \text{ e } g \in J\}.$$

**Proposizione 3.** Se  $I, J \subset K[x_1, \dots, x_n]$  sono ideali, allora anche  $I + J \subset K[x_1, \dots, x_n]$  è un ideale; in particolare  $I + J$  è il più piccolo ideale contenente  $I$  e  $J$ . Inoltre se  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  e  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  allora  $I + J = \langle f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \rangle$ .

*Dimostrazione.* Notiamo che  $0 = 0 + 0 \in I + J$ . Supponiamo che  $h_1, h_2 \in I + J$ , per definizione esistono  $f_1, f_2 \in I$  e  $g_1, g_2 \in J$  tali che  $h_1 = f_1 + g_1$  e  $h_2 = f_2 + g_2$ . Allora  $h_1 + h_2 = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2) \in I + J$ , infatti  $f_1 + f_2 \in I$  perché  $I$  è un ideale, analogamente  $g_1 + g_2 \in J$ . Verifichiamo la chiusura rispetto alla moltiplicazione: siano  $h \in I + J$  e  $l \in K[x_1, \dots, x_n]$ , allora si può scrivere  $h = f + g$  con  $f \in I$  e  $g \in J$ . Quindi  $l \cdot h = l \cdot (f + g) = l \cdot f + l \cdot g$ , ma  $l \cdot f \in I$  e  $l \cdot g \in J$ , perciò  $l \cdot h \in I + J$ . Dunque  $I + J$  è un ideale.

Sia  $H$  un ideale contenente  $I$  e  $J$ , allora  $H$  dovrà contenere tutti gli elementi del tipo  $f + g$  dove  $f \in I$  e  $g \in J$ , ovvero  $H \supset I + J$ . Quindi ogni ideale contenente  $I, J$  contiene anche  $I + J$  e così  $I + J$  è il più piccolo di tali ideali.

Infine se  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  e  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  allora  $\langle f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \rangle$  è un ideale contenente  $I$  e  $J$ , così, per quanto provato prima,  $I + J \subset \langle f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \rangle$ . L'altra inclusione è ovvia, quindi si ha  $I + J = \langle f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s \rangle$ .  $\square$

Un'immediata conseguenza di cui ci serviremo nel prossimo esempio è il seguente:

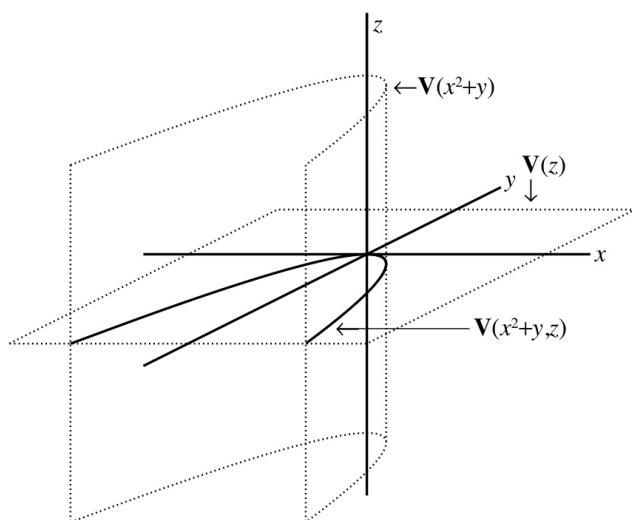
**Corollario 1.** Se  $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$  allora  $\langle f_1, \dots, f_r \rangle = \langle f_1 \rangle + \dots + \langle f_r \rangle$ .

**Teorema 6.** Siano  $I$  e  $J$  ideali in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $\mathbf{V}(I + J) = \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$ .

*Dimostrazione.* Se  $x \in \mathbf{V}(I + J)$ , allora  $x \in \mathbf{V}(I)$  perché  $I \subset I + J$ , analogamente  $x \in \mathbf{V}(J)$ . Quindi  $x \in \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$  e concludiamo  $\mathbf{V}(I + J) \subset \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$ .

Per l'inclusione opposta, supponiamo  $x \in \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$ . Sia  $h$  un polinomio in  $I + J$ , allora esistono  $f \in I$  e  $g \in J$  tali che  $h = f + g$ . Abbiamo  $f(x) = 0$  perché  $x \in \mathbf{V}(I)$  e  $g(x) = 0$  perché  $x \in \mathbf{V}(J)$ , quindi  $h(x) = 0$ . Per l'arbitrarietà di  $h$ ,  $x \in \mathbf{V}(I + J)$ , quindi  $\mathbf{V}(I + J) \supset \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$ .  $\square$

**Esempio 7.** Siano  $I = \langle x^2 + y \rangle$  e  $J = \langle z \rangle$  ideali in  $\mathbb{R}^3$  e per la Proposizione 3,  $I + J = \langle x^2 + y, z \rangle$ . Notiamo dalla figura che  $\mathbf{V}(I)$  è il cilindro parabolico,  $\mathbf{V}(J)$  è il piano e  $\mathbf{V}(I + J)$  è la parabola in cui si intersecano le due superfici.



Un altro esempio di varietà data dalla somma di due ideali è la cubica gobba dell'Esempio 3.

## 2.4 Prodotto di ideali

**Definizione 9.** Se  $I$  e  $J$  sono ideali in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , il loro **prodotto**, denotato  $I \cdot J$ , è definito come l'ideale generato da tutti i polinomi  $f \cdot g$  dove  $f \in I$  e  $g \in J$ .

**Proposizione 4.** Siano  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  e  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ . Allora  $I \cdot J$  è generato da tutti i prodotti dei generatori di  $I$  e  $J$ :

$$I \cdot J = \langle f_i g_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \rangle.$$

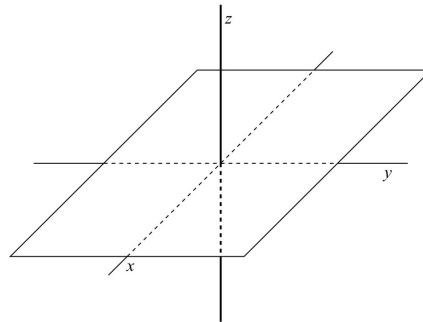
*Dimostrazione.* È chiaro che l'ideale generato dai prodotti dei generatori  $f_i g_j$  è contenuto in  $I \cdot J$ . Per provare l'inclusione opposta, osserviamo che ogni polinomio di  $I \cdot J$  è una somma di polinomi della forma  $fg$  con  $f \in I$  e  $g \in J$ . Ma ognuno degli  $f$  e  $g$  si scrive come combinazione dei generatori degli ideali a cui appartengono, cioè  $f = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ ,  $g = b_1 g_1 + \dots + b_s g_s$ , per opportuni polinomi  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ . Così  $fg$ , e ogni somma di polinomi di questa forma, può essere scritto come  $\sum c_{ij} f_i g_j$ , con  $c_{ij} \in K[x_1, \dots, x_n]$ .  $\square$

**Teorema 7.** Se  $I, J \subset K[x_1, \dots, x_n]$  sono due ideali, allora  $\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $x \in \mathbf{V}(I \cdot J)$ , allora  $g(x)h(x) = 0$  per ogni  $g \in I$  e  $h \in J$ . Se  $g(x) = 0$  per ogni  $g \in I$  allora  $x \in \mathbf{V}(I)$ . Se  $g(x) \neq 0$  per ogni  $g \in I$ , allora deve essere  $h(x) = 0$  per ogni  $h \in J$ . In ogni caso  $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ .

Viceversa, supponiamo  $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ , allora  $g(x) = 0$  per ogni  $g \in I$  oppure  $h(x) = 0$  per ogni  $h \in J$ . In questo modo  $g(x)h(x) = 0$  per ogni  $g \in I$  e  $h \in J$ . Così  $f(x) = 0$  per ogni  $f \in I \cdot J$ , quindi  $x \in \mathbf{V}(I \cdot J)$ .  $\square$

Osserviamo che abbiamo già parlato di unione di varietà, in particolare nel Lemma 1 del Capitolo 1, avevamo visto la relazione  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_r) \cup \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) = \mathbf{V}(f_i g_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s)$ .



**Esempio 8.** La varietà  $\mathbf{V}(xz, yz)$  corrispondente all'ideale generato dal prodotto dei generatori di  $\langle x, y \rangle$  e  $\langle z \rangle$ , ideali di  $\mathbb{R}[x, y, z]$ , è l'unione di  $\mathbf{V}(x, y)$ , cioè l'asse  $z$ , e di  $\mathbf{V}(z)$ , cioè il piano  $xy$ .

## 2.5 Intersezione di ideali

**Proposizione 5.** *Se  $I$  e  $J$  sono ideali in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $I \cap J$  è ancora un ideale.*

*Dimostrazione.* Notiamo che  $0 \in I \cap J$  poiché  $0 \in I$  e  $0 \in J$ . Se  $f, g \in I \cap J$ , allora  $f+g \in I$  poiché  $f, g \in I$ , analogamente  $f+g \in J$  e quindi  $f+g \in I \cap J$ . Infine sia  $f \in I \cap J$  e  $h \in K[x_1, \dots, x_n]$ , dato che  $f \in I$ , abbiamo  $h \cdot f \in I$ , allo stesso modo  $h \cdot f \in J$  e quindi  $h \cdot f \in I \cap J$ .  $\square$

Osserviamo che si ha sempre  $I \cdot J \subset I \cap J$ , dato che gli elementi di  $I \cdot J$  sono somme di polinomi della forma  $fg$  con  $f \in I$  e  $g \in J$ . Ma  $fg$  appartiene sia a  $I$ , poiché  $f \in I$ , sia a  $J$ , perché  $g \in J$ , che sono ideali. Non vale però l'inclusione contraria, infatti se consideriamo  $I = J = \langle x, y \rangle$ , allora  $I \cdot J = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$  e  $I \cap J = I = \langle x, y \rangle$  e il monomio  $x \in I \cap J$  ma  $x \notin I \cdot J$ .

Un'altra proprietà dell'intersezione di due ideali a noi particolarmente utile è la seguente:

**Proposizione 6.** *Se  $I$  e  $J$  sono ideali in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $f \in \sqrt{I \cap J}$ , allora  $f^m \in I \cap J$  per qualche intero  $m > 0$ . Dato che  $f^m \in I$ , allora  $f \in \sqrt{I}$ . Ugualmente,  $f \in \sqrt{J}$ , di conseguenza  $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ .

Per l'inclusione opposta supponiamo  $f \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ . Allora esistono interi  $m, p > 0$  tali che  $f^m \in I$  e  $f^p \in J$ . Quindi  $f^m f^p = f^{m+p} \in I \cap J \Rightarrow f \in \sqrt{I \cap J}$ .  $\square$

**Teorema 8.** *Se  $I$  e  $J$  sono ideali in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ , allora  $x \in \mathbf{V}(I)$  oppure  $x \in \mathbf{V}(J)$ . Ciò significa che  $f(x) = 0, \forall f \in I$ , o  $f(x) = 0, \forall f \in J$ , cioè  $f(x) = 0, \forall f \in I \cap J$ . Quindi  $x \in \mathbf{V}(I \cap J)$  e  $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \subset \mathbf{V}(I \cap J)$ .

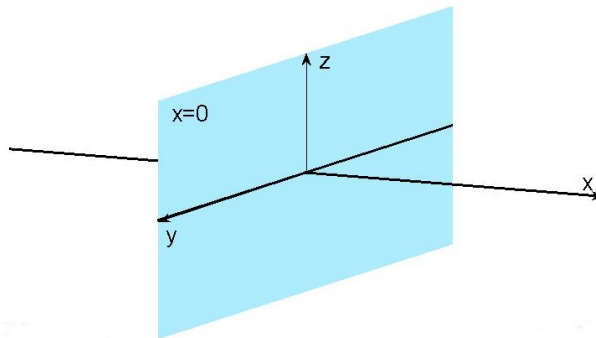
D'altro canto, sappiamo che  $I \cdot J \subset I \cap J$  e abbiamo  $\mathbf{V}(I \cdot J) \supset \mathbf{V}(I \cap J)$ . Ma, per il Teorema 7,  $\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ , ovvero  $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \supset \mathbf{V}(I \cap J)$ .  $\square$

Dal teorema appena dimostrato si evince che l'intersezione di due ideali corrisponde alla medesima varietà associata al prodotto degli stessi ideali. Il calcolo dell'intersezione è in generale più complicato del calcolo del prodotto e una trattazione di questo argomento si può trovare in [CLO]; però è spesso più utile utilizzare la prima operazione, in quanto l'intersezione di ideali radicali è sempre radicale (vedi Proposizione 6), mentre non è detto che il prodotto di ideali radicali sia radicale (ad esempio  $I \cdot J$ , dove  $I = J$ ).

**Esempio 9.** Siano  $I = \langle xy, z \rangle$  e  $J = \langle x \rangle$  ideali in  $\mathbb{R}[x, y, z]$ . Proviamo che  $I \cap J = \langle xy, xz \rangle$ . Sia  $f \in I \cap J$ , allora  $f \in I \Rightarrow f = Axy + Bz$  e  $f \in J \Rightarrow f = Cx$ , per  $A, B, C$  opportuni polinomi. Allora il polinomio  $B$  deve essere della forma  $Dx$ , quindi  $f = Axy + Dxz$ , cioè  $f \in \langle xy, xz \rangle$ . D'altra parte, se  $f \in \langle xy, xz \rangle$ ,  $f = Axy + Bxz$ , per  $A, B$  opportuni polinomi. Allora  $f \in I$ , perché combinazione di  $xy$  e  $z$ , e  $f \in J$ , perché multiplo di  $x$ .

Notiamo però che l'intersezione appena calcolata è diversa dal prodotto  $I \cdot J$ , che risulta essere  $\langle x^2y, xz \rangle$ .

La figura ci mostra che  $V(I)$  è l'unione dell'asse  $x$  e dell'asse  $y$  e  $V(J)$  è il piano  $x = 0$ . Dal Teorema 8,  $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$ , ovvero l'unione del piano  $x = 0$  e dell'asse  $x$ . Osserviamo che questa è proprio la varietà associata a  $\langle xy, xz \rangle$ . Notiamo poi che la varietà associata all'ideale prodotto coincide ancora con  $V(I) \cup V(J)$ , nonostante gli ideali  $I \cap J = \langle xy, xz \rangle$  e  $I \cdot J = \langle x^2y, xz \rangle$  siano diversi.



## 2.6 Chiusura di Zariski e ideali quozienti

Le operazioni tra varietà viste finora danno luogo ad altre varietà (come unione e intersezione), ma esistono casi in cui ciò non accade, ad esempio la differenza di varietà.

**Esempio 10.** Siano  $W = V(K)$ , dove  $K = \langle xz, yz \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ , e  $V = V(I)$ , dove  $I = \langle z \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$ . Abbiamo già visto che  $W$  è l'unione del piano  $xy$  e dell'asse  $z$ . Dato che  $V$  è il piano  $xy$ ,  $W - V$  coincide con l'asse  $z$  privato dell'origine. Vediamo che non è una varietà: supponiamo per assurdo che  $W - V = V(f_1, \dots, f_s)$ , cioè che sia una varietà. Un polinomio che si annulla sui punti di  $W - V$  può essere scritto come  $f(0, 0, z) = g(z) \in \mathbb{R}[z]$ .  $g$  è un polinomio in una variabile con infiniti zeri, quindi  $g \equiv 0$ , in particolare si annulla anche in  $z = 0$ , cioè  $f$  si annulla anche nell'origine, che non appartiene a  $W - V$ , in contraddizione con l'ipotesi.

Vogliamo poter considerare la più piccola varietà contenente un sottoinsieme qualsiasi  $S$  di  $K^n$ , perciò definiremo la chiusura di Zariski di  $S$ . Avremo bisogno di alcune considerazioni preliminari.

Sia che  $S \in K^n$  risulti o meno una varietà affine, l'insieme

$$\mathbf{I}(S) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0, \forall a \in S\}$$

è un ideale radicale di  $K[x_1, \dots, x_n]$ .

La dimostrazione ricalca quella del Lemma 3 del Capitolo 1.

**Proposizione 7.** *Se  $S \subset K^n$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(S))$  è una varietà, in particolare è la più piccola varietà affine contenente  $S$ .*

*Dimostrazione.* Dalla corrispondenza fra ideali e varietà  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(S))$  è una varietà. Vogliamo far vedere che se  $W \subset K^n$  è una varietà contenente  $S$ , allora  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(S)) \subset W$ . Si ha  $W \supset S \Rightarrow \mathbf{I}(W) \subset \mathbf{I}(S)$ , perché  $\mathbf{I}$  ribalta le inclusioni. Ma allora  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) \supset \mathbf{V}(\mathbf{I}(S))$ , perché anche  $\mathbf{V}$  ribalta le inclusioni. Infine  $W$  è una varietà, quindi  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(W)) = W$ , il che implica la tesi.  $\square$

**Definizione 10.** *La chiusura di Zariski di un sottoinsieme dello spazio affine è la più piccola varietà affine contenente il sottoinsieme. Se  $S \subset K^n$ , la chiusura di Zariski di  $S$  si denota con  $\bar{S}$  ed equivale a  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(S))$ .*

Osserviamo che il termine “chiusura di Zariski” deriva dal fatto che si può definire in  $K$  una topologia (detta topologia di Zariski) prendendo come chiusi le varietà algebriche. In questo caso  $\bar{S}$  è il più piccolo chiuso contenente  $S$  nella topologia di Zariski. Un approfondimento sull'argomento si può trovare in [RH].

Nell'Esempio 10 la chiusura di Zariski di  $W - V$  è tutto l'asse  $z$ .

**Definizione 11.** *Se  $I, J \subset K[x_1, \dots, x_n]$  sono ideali, allora  $I : J$  è definito come l'insieme*

$$\{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid fg \in I, \forall g \in J\}$$

*ed è detto ideale quoziente di  $I$  su  $J$ .*

**Proposizione 8.** *Se  $I, J$  sono ideali di  $K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $I : J$  è un ideale di  $K[x_1, \dots, x_n]$  e  $I : J$  contiene  $I$ . Inoltre se  $I$  è radicale, allora  $I : J$  è radicale.*

*Dimostrazione.* Per provare che  $I : J \supset I$ , notiamo che, siccome  $I$  è un ideale, se  $f \in I$ , allora  $fg \in I$  per ogni  $g \in K[x_1, \dots, x_n]$  e quindi  $fg \in I$  per ogni  $g \in J$ .

Vediamo ora che  $I : J$  è un ideale, per prima cosa notiamo che  $0 \in I : J$  perché  $0 \in I$ . Siano  $f_1, f_2 \in I : J$ , allora  $f_1g$  e  $f_2g$  stanno in  $I$  per ogni  $g \in J$ . Dato che  $I$  è un ideale  $(f_1 + f_2)g = f_1g + f_2g \in I$  per ogni  $g \in J$ , cioè  $f_1 + f_2 \in I : J$ . Se  $f \in I : J$  e  $h \in K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $fg \in I$  e, dato che  $I$  è un ideale,  $hgf \in I$  per ogni  $g \in J$ , questo significa che  $hf \in I : J$ .

L'ultima parte del teorema è banale, infatti se  $f^m \in I : J$ , allora  $f^m g \in I$  per ogni  $g \in J$ , ma,  $J$  è un ideale, allora  $g^m \in J$  e  $(f^m g)g^{m-1} \in I$  perché  $I$  è un ideale, quindi  $f^m g^m \in I$  per ogni  $g^m \in J$ . Siccome  $I$  è radicale,  $fg \in I$  per ogni  $g \in J$ , cioè  $f \in I : J$ .  $\square$

Per esempio, in  $K[x, y, z]$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle xz, yz \rangle : \langle z \rangle &= \{f \in K[x, y, z] \mid f \cdot z \in \langle xz, yz \rangle\} \\ &= \{f \in K[x, y, z] \mid f \cdot z = Axz + Byz\} \\ &= \{f \in K[x, y, z] \mid f = Ax + By\} \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

**Teorema 9.** *Siano  $I, J \subset K[x_1, \dots, x_n]$  ideali. Allora*

$$\mathbf{V}(I : J) \supset \overline{\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)}.$$

*Se, inoltre,  $K$  è algebricamente chiuso e  $I$  è radicale, allora*

$$\mathbf{V}(I : J) = \overline{\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)}.$$

*Dimostrazione.* Vediamo che  $I : J \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$ . Sia  $f \in I : J$  e  $x \in \mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)$ , allora  $fg \in I$  per ogni  $g \in J$ . Dato che  $x \in \mathbf{V}(I)$ , abbiamo che  $f(x)g(x) = 0$  per ogni  $g \in J$ ; inoltre, siccome  $x \notin \mathbf{V}(J)$ , esiste un  $g \in J$  tale che  $g(x) \neq 0$ , ma allora  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)$ . Dunque  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$ , il che prova l'inclusione. Sfruttando il fatto che  $\mathbf{V}$  ribalta le inclusioni,  $\mathbf{V}(I : J) \supset \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)))$ , che conclude la dimostrazione della prima parte del teorema.

Supponiamo ora che  $K$  sia algebricamente chiuso e che  $I = \sqrt{I}$ . Sia  $x \in \mathbf{V}(I : J)$ , si ha, come nel ragionamento precedente, che se  $hg \in I$  per ogni  $g \in J$ , allora  $h(x) = 0$ . Sia ora  $h \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$ ; se  $g \in J$ , allora  $hg$  si annulla su  $\mathbf{V}(I)$ , perché  $h$  si annulla su  $\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)$  e  $g$  su  $\mathbf{V}(J)$ . Così dal Nullstellensatz si ha  $hg \in \sqrt{I}$ , ma per ipotesi  $I = \sqrt{I}$ , quindi  $hg \in I$  per ogni  $g \in J$ . Allora, come già osservato,  $h(x) = 0$ . In questo modo  $x \in \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)))$ . Questo significa che  $\mathbf{V}(I : J) \subset \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)))$ .  $\square$

**Corollario 2.** *Siano  $V$  e  $W$  varietà in  $K^n$ . Allora*

$$\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W) = \mathbf{I}(V - W).$$

*Dimostrazione.* Nel teorema precedente, abbiamo mostrato che  $I : J \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J))$ . Se lo applichiamo a  $I = \mathbf{I}(V)$  e  $J = \mathbf{I}(W)$ , si ottiene  $\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W) \subset \mathbf{I}(V - W)$ . L'inclusione opposta si ottiene applicando la Proposizione 8, ovvero  $\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W) \supset \mathbf{I}(V)$ , ma in modo ovvio  $\mathbf{I}(V) \supset \mathbf{I}(V - W)$ , concludiamo che  $\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W) \supset \mathbf{I}(V - W)$ .  $\square$

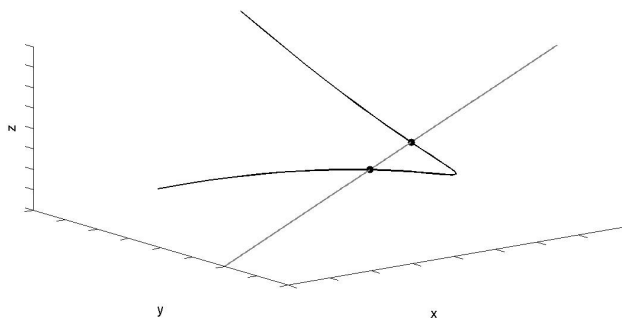


**Esempio 11.** Riprendiamo gli ideali dell'Esempio 10,  $I = \langle xz, yz \rangle$  e  $J = \langle z \rangle$ , e ne facciamo il quoziente, come abbiamo visto si ottiene  $\langle x, y \rangle$ . In termini di varietà,  $V(I)$  è il piano  $z = 0$  unito all'asse  $z$ , e  $V(J)$  è ancora il piano  $z = 0$ . Allora, facendone la differenza e successivamente la chiusura di Zariski, la varietà ottenuta è l'asse  $z$ , che è proprio la varietà associata a  $\langle x, y \rangle$ .

**Esempio 12.** Per un altro esempio consideriamo la cubica gobba  $V = V(y - x^2, z - x^3)$  e una retta  $W = V(z - x, y - 1)$ , rappresentate nella figura seguente. La differenza  $V - W$  è la cubica gobba meno i due punti di intersezione tra la cubica e la retta,  $P = (1, 1, 1)$  e  $Q = (-1, 1, -1)$ , quindi  $V - W = V - \{P, Q\}$ . La chiusura di Zariski di  $V - W$  è la più piccola varietà che contiene  $V - W$ , quindi è esattamente la cubica gobba,  $V$ .

Passando agli ideali, chiamiamo  $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$  l'ideale associato alla cubica gobba, e  $J = \langle z - x, y - 1 \rangle$  l'ideale associato alla retta. Vediamo che  $I : J = I$ , cioè il quoziente  $I : J$  è l'ideale associato alla chiusura di Zariski della differenza delle due varietà, che è la cubica gobba.

Sappiamo  $I : J = \{f \in K[x, y, z] \mid fg \in I; \forall g \in J\}$ , e ogni  $g \in J$  si può scrivere  $g = A(z - x) + B(y - 1)$ , con  $A, B \in K[x, y, z]$ . Quindi  $I : J = \{f \in K[x, y, z] \mid f \cdot [A(z - x) + B(y - 1)] \in I\}$ ; usiamo la parametrizzazione della cubica gobba  $(t, t^2, t^3)$ , e abbiamo  $I : J = \{f \in K[t] \mid f(t, t^2, t^3) \cdot [A(t, t^2, t^3)(t^3 - t) + B(t, t^2, t^3)(t^2 - 1)] = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$ .  $A(t, t^2, t^3) \neq 0$  e  $B(t, t^2, t^3) \neq 0$  poiché  $A$  e  $B$  sono polinomi arbitrari, quindi deve essere  $f(t, t^2, t^3) = 0$ , e  $I : J = \{f \in K[t] \mid f(t, t^2, t^3) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\} = I$ .



## 2.7 Varietà irriducibili e ideali primi

Abbiamo già visto che l'unione di due varietà è ancora una varietà. Ad esempio, nell'Esempio 9 della Sezione 2.5, abbiamo parlato di  $V(xy, xz)$  che è l'unione di un piano e una retta. Intuitivamente è naturale pensare a piani e rette come oggetti più semplici rispetto a  $V(xy, xz)$ , nell'ambito delle varietà. L'intuizione ci dice anche che rette e piani sono in qualche

modo non scomponibili in unioni finite di varietà più semplici. Andiamo a formalizzare questi concetti.

**Definizione 12.** Una varietà affine  $V \subset K^n$  si dice *irriducibile* se ogni volta che  $V$  compare nella forma  $V = V_1 \cup V_2$ , dove  $V_1, V_2$  sono varietà affini, allora  $V_1 = V$  o  $V_2 = V$ .

Così  $\mathbf{V}(xz, yz)$  non è una varietà irriducibile. Ancora non è completamente chiaro capire quando una varietà è o meno irriducibile; se la definizione corrispondesse effettivamente alla nostra intuizione geometrica, un punto, una linea e un piano dovrebbero essere irriducibili. Per lo stesso motivo la cubica gobba  $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$  in  $\mathbb{R}^3$  sembra essere irriducibile. Il problema che ci poniamo ora è quello di provare tali affermazioni. L'approccio che utilizzeremo è di tipo algebrico, infatti caratterizzeremo gli ideali corrispondenti alle varietà irriducibili.

**Definizione 13.** Un ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  si dice *primo* se presi  $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$  tali che  $fg \in I$ , allora  $f \in I$  o  $g \in I$ .

Notiamo che un ideale primo  $I$  è radicale. Infatti, consideriamo  $f^m \in I$ , possiamo scrivere  $f \cdot f^{m-1} \in I$ , per definizione di ideale primo,  $f \in I$  o  $f^{m-1} \in I$ . Il primo caso implica che  $I$  è radicale, nel secondo caso possiamo iterare il procedimento fino ad ottenere  $f^2 \in I \Rightarrow f \in I$ , riottenendo  $I$  radicale.

**Proposizione 9.** Sia  $V \subset K^n$  una varietà affine. Allora  $V$  è irriducibile se e solo se  $\mathbf{I}(V)$  è un ideale primo.

*Dimostrazione.* Innanzitutto, assumiamo che  $V$  sia irriducibile e siano  $fg \in \mathbf{I}(V)$ . Definiamo le varietà affini  $V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$  e  $V_2 = V \cap \mathbf{V}(g)$ . Allora  $fg \in \mathbf{I}(V)$  implica facilmente che  $V = V_1 \cup V_2$ , ma dal momento che  $V$  è irriducibile, abbiamo  $V = V_1$  o  $V = V_2$ . Se è vera la prima uguaglianza, si ha  $V = V \cap \mathbf{V}(f)$ ; ciò implica che  $f$  si annulla su  $V$ , ovvero  $f \in \mathbf{I}(V)$ . Così  $\mathbf{I}(V)$  risulta primo.

Poi, assumiamo che  $\mathbf{I}(V)$  sia primo e sia  $V = V_1 \cup V_2$ . Supponiamo che  $V \neq V_1$ , vogliamo allora dimostrare che  $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_2)$ . Per provarlo, notiamo che  $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(V_2)$  poiché  $V_2 \subset V$ . Per l'inclusione opposta, osserviamo che  $\mathbf{I}(V) \subsetneq \mathbf{I}(V_1)$ , perché  $V_1 \subsetneq V$ . Allora possiamo prendere  $f \in \mathbf{I}(V_1) - \mathbf{I}(V)$ , consideriamo anche  $g \in \mathbf{I}(V_2)$ . Dato che  $V = V_1 \cup V_2$ , segue che  $fg$  si annulla su  $V$ , ovvero  $fg \in \mathbf{I}(V)$ . Ma  $\mathbf{I}(V)$  è primo, così o  $f$  o  $g$  giace in  $\mathbf{I}(V)$ . Sappiamo che  $f \notin \mathbf{I}(V)$ , allora  $g \in \mathbf{I}(V)$ , questo prova  $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_2)$ . Dall'iniettività di  $\mathbf{I}$  segue che  $V = V_2$ . Dunque  $V$  è irriducibile.  $\square$

Il prossimo corollario, la cui dimostrazione deriva immediatamente dalla precedente Proposizione, va ad arricchire la nostra conoscenza della corrispondenza ideali-varietà.

**Corollario 3.** *Se  $K$  è un campo algebricamente chiuso, le funzioni  $I$  e  $V$  inducono una corrispondenza iniettiva fra varietà irriducibili di  $K^n$  e ideali primi di  $K[x_1, \dots, x_n]$ .*

**Esempio 13.** *Proviamo che l'ideale  $I(V)$  della cubica gobba è primo.*

*Supponiamo che  $fg \in I(V)$ . Sappiamo già che una parametrizzazione della curva in questione è data da  $(t, t^2, t^3)$ , allora per ogni  $t$  risulta  $f(t, t^2, t^3)g(t, t^2, t^3) = 0$ . Questo implica che  $f(t, t^2, t^3)$  o  $g(t, t^2, t^3)$  è il polinomio nullo, in questo modo  $f$  o  $g$  si annulla su  $V$ . Quindi  $f$  o  $g$  sta in  $I(V)$ , il che prova che  $I(V)$  è un ideale primo. Applicando la Proposizione 9, si ha che la cubica gobba è una varietà irriducibile di  $\mathbb{R}^3$ .*

Allo stesso modo si può provare che ogni retta è irriducibile.

In realtà questo esempio è un caso particolare di un risultato più generale: ogni varietà affine di  $K^n$  (dove  $K$  è un campo infinito) che ammette una parametrizzazione polinomiale o razionale è irriducibile. Si può trovare una dimostrazione di ciò in [CLO].

Nella corrispondenza che stiamo studiando fra ideali e varietà, consideriamo come ideali primi quelli massimali e come varietà irriducibili i punti; vedremo che in un campo algebricamente chiuso esiste una corrispondenza biunivoca fra essi.

**Definizione 14.** *Un ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  è **massimale** se  $I \neq K[x_1, \dots, x_n]$  e ogni ideale  $J$  che contiene  $I$  è tale che  $J = I$  o  $J = K[x_1, \dots, x_n]$ .*

**Proposizione 10.** *Se  $K$  è un campo, un ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  della forma*

$$I = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle,$$

*dove  $a_1, \dots, a_n \in K$ , è massimale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $J \supsetneq I$  sia un ideale, allora deve esistere un  $f \in J$ , tale che  $f \notin I$ . Possiamo usare l'algoritmo di divisione per scrivere  $f$  come  $A_1(x_1 - a_1) + \dots + A_n(x_n - a_n) + b$ , per un  $b \in K$ . Dato che  $A_1(x_1 - a_1) + \dots + A_n(x_n - a_n) \in I$  e  $f \notin I$ , abbiamo  $b \neq 0$ . Comunque, sapendo che  $f \in J$  e  $A_1(x_1 - a_1) + \dots + A_n(x_n - a_n) \in I \subset J$ , vale

$$b = f - (A_1(x_1 - a_1) + \dots + A_n(x_n - a_n)) \in J.$$

e, poiché  $b \neq 0$ , esiste l'inverso di  $b$  e  $(1/b) \cdot b = 1 \in J$ . Quindi  $J = K[x_1, \dots, x_n]$ .  $\square$

**Proposizione 11.** *Se  $K$  è un campo, un ideale massimale in  $K[x_1, \dots, x_n]$  è primo.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $I$  sia un ideale proprio ma non primo e sia  $fg \in I$ , dove  $f \notin I$  e  $g \notin I$ . Consideriamo l'ideale  $\langle f \rangle + I$ , questo ideale contiene strettamente  $I$  perché  $f \notin I$ . Inoltre, se avessimo  $\langle f \rangle + I = K[x_1, \dots, x_n]$ , allora  $1 = cf + h$ , per un polinomio  $c$  e un  $h \in I$ . Moltiplicando per  $g$ , avremmo  $g = cfg + hg \in I$ , che contraddice la nostra scelta di  $g$ . Quindi  $\langle f \rangle + I$  è un ideale proprio che contiene  $I$ , questo implica che  $I$  non è massimale. Siamo così in contraddizione con l'ipotesi, allora  $I$  è primo.  $\square$

Osserviamo che

$$\mathbf{V}(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}.$$

Inoltre,

$$\mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle,$$

infatti se  $f \in \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\})$ , allora  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , quindi possiamo fattorizzarlo come  $f = f_1(x_1 - a_1) + \dots + f_n(x_n - a_n)$ , per opportuni polinomi  $f_1, \dots, f_n$ . Dunque,  $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ , ovvero  $\mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\}) \subset \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ . Viceversa, se  $f \in \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ , allora  $f = f_1(x_1 - a_1) + \dots + f_n(x_n - a_n)$ ; sostituendo  $(a_1, \dots, a_n)$  a  $(x_1, \dots, x_n)$  si ottiene  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , perciò  $f \in \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\})$ . Ne deduciamo che  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subset \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\})$ .

Quindi ogni punto  $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$  corrisponde all'ideale massimale  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$  di  $K[x_1, \dots, x_n]$ . Il viceversa non vale se  $K$  non è algebricamente chiuso. Per esempio in  $\mathbb{R}[x]$  è noto che l'ideale  $\langle x^2 + 1 \rangle$  è massimale, però  $\mathbf{V}(x^2 + 1) = \emptyset$ , infatti non esiste alcun punto in  $\mathbb{R}$  che annulla  $x^2 + 1$ .

**Teorema 10.** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso, allora ogni ideale massimale di  $K[x_1, \dots, x_n]$  è della forma  $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ , per qualche  $a_1, \dots, a_n \in K$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  ideale massimale. Poiché  $I \neq K[x_1, \dots, x_n]$ , abbiamo  $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$ , per il Nullstellensatz debole. Quindi esiste almeno un punto  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$ . Passando agli ideali si ha che  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subset \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\})$ . Ma, per il Nullstellensatz forte,  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$  e, poiché  $I$  è primo,  $\sqrt{I} = I$ . Quindi possiamo scrivere  $I \subset \mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\})$ . Abbiamo già osservato che  $\mathbf{I}(\{(a_1, \dots, a_n)\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ , perciò l'inclusione diventa  $I \subset \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \subsetneq K[x_1, \dots, x_n]$ . Dato che  $I$  è massimale segue che  $I = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ .  $\square$

**Corollario 4.** *Se  $K$  è un campo algebricamente chiuso, allora c'è una corrispondenza biettiva tra i punti di  $K^n$  e gli ideali massimali di  $K[x_1, \dots, x_n]$ .*

## 2.8 Componenti irriducibili di una varietà

In questa sezione vedremo che ogni varietà può essere scritta come unione di varietà irriducibili, per dimostrarlo utilizzeremo la seguente proposizione di cui diamo solo l'enunciato (una dimostrazione completa si può trovare in [CLO]).

**Proposizione 12 (Condizione della catena discendente).** *Ogni catena discendente di varietà  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \cdots$  in  $K^n$  è stazionaria, ovvero esiste un intero positivo  $N$  tale che  $V_N = V_{N+1} = \cdots$ .*

**Teorema 11.** *Sia  $V \subset K^n$  una varietà affine. Allora  $V$  può essere scritta come unione finita*

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$

dove ogni  $V_i$  è una varietà irriducibile.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $V$  sia una varietà che non può essere scritta come unione finita di irriducibili. Allora  $V$  non è irriducibile, cioè  $V = V_1 \cup V_1'$ , con  $V \neq V_1$  e  $V \neq V_1'$ . Inoltre almeno una fra  $V_1$  e  $V_1'$  non può essere scritta come unione di irriducibili, altrimenti anche  $V$  lo sarebbe. Assumiamo che  $V_1$  non sia unione di irriducibili. Ripetendo l'argomentazione già data per  $V$ , possiamo scrivere  $V_1 = V_2 \cup V_2'$ , con  $V_1 \neq V_2$  e  $V_1 \neq V_2'$  e  $V_2$  che non è unione di irriducibili. Continuando in questo modo, si otterrà la successione infinita di varietà  $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots$ , dove  $V \neq V_1 \neq V_2 \neq \cdots$ , ma questo è un assurdo, per la Proposizione 12.  $\square$

Abbiamo visto nell'Esempio 9 che la varietà  $\mathbf{V}(xy, xz)$  è l'unione di una retta (l'asse  $x$ ) e un piano ( $x = 0$ ), che sono varietà irriducibili. Un esempio più significativo di decomposizione di una varietà in irriducibili è il seguente.

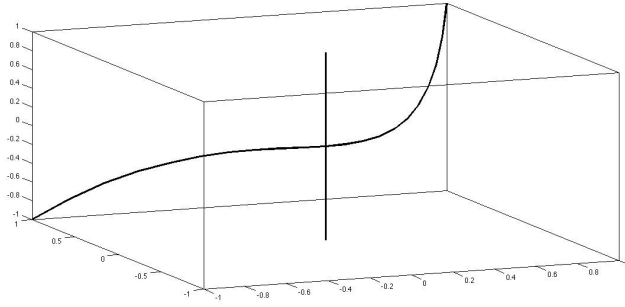
**Esempio 14.** *Sia  $\mathbf{V}(x^3 - xy, x^4 - xz, x^2y - y^2, x^3y - yz)$ . Notiamo che  $\langle x^3 - xy, x^4 - xz, x^2y - y^2, x^3y - yz \rangle$  può essere scritto come prodotto degli ideali  $\langle x, y \rangle$  e  $\langle x^2 - y, x^3 - z \rangle$ . Abbiamo già visto che sono ideali radicali, e corrispondono rispettivamente all'asse  $z$  e alla cubica gobba. Per il Teorema 7, alla varietà del prodotto corrisponde l'unione delle varietà, cioè  $\mathbf{V}(x^3 - xy, x^4 - xz, x^2y - y^2, x^3y - yz) = \mathbf{V}(x, y) \cup \mathbf{V}(x^2 - y, x^3 - z)$ . Abbiamo così ottenuto che la varietà di partenza è unione di varietà irriducibili.*

Introduciamo un nuovo tipo di decomposizione, in modo da evitare casi in cui una componente irriducibile compare più di una volta, oppure in cui una è contenuta in un'altra.

**Definizione 15.** *Sia  $V \subset K^n$  una varietà. Una decomposizione*

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m,$$

dove ogni  $V_i$  è una varietà irriducibile, si dice **decomposizione minimale** se  $V_i \not\subset V_j$  per  $i \neq j$ .



**Teorema 12.** *Se  $V \subset K^n$  è una varietà, allora  $V$  ammette una decomposizione minimale  $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ . Inoltre, tale decomposizione è unica a meno dell'ordine delle componenti  $V_1, \dots, V_m$ .*

*Dimostrazione.* Dal Teorema 11, si ha  $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$  dove ogni  $V_i$  è irriducibile. Se  $V_i \subset V_j$  per qualche  $i \neq j$ , possiamo evitare di scrivere  $V_i$  nella decomposizione,  $V$  risulterà essere l'unione delle restanti  $V_j$ . Ripetendo questo procedimento si arriva a una decomposizione minimale di  $V$ .

Per mostrare l'unicità, supponiamo che  $V = V'_1 \cup \dots \cup V'_l$  sia un'altra decomposizione minimale. Allora, per ogni  $V_i$  nella prima decomposizione, si ha

$$V_i = V_i \cap V = V_i \cap (V'_1 \cup \dots \cup V'_l) = (V_i \cap V'_1) \cup \dots \cup (V_i \cap V'_l).$$

Dal momento che  $V_i$  è irriducibile,  $V_i = V_i \cap V'_j$  per qualche  $j$ , cioè  $V_i \subset V'_j$ . Applicando la stessa argomentazione a  $V'_j$  (usando la prima decomposizione di  $V$ ) si vede che  $V'_j \subset V_k$  per qualche  $k$ . Si ottiene così  $V_i \subset V'_j \subset V_k$ . Per la minimalità,  $i = k$  e segue che  $V_i = V'_j$ . Dunque ogni  $V_i$  compare in  $V = V'_1 \cup \dots \cup V'_l$ , il che implica che  $m \leq l$ . Analogamente si vede che  $l \leq m$ , quindi  $m = l$ . Abbiamo così provato che le componenti  $V'_i$  non sono altro che le  $V_i$ , eventualmente permutate.  $\square$

I teoremi appena enunciati possono essere espressi in termini puramente algebrici, usando la corrispondenza tra ideali radicali e varietà.

**Teorema 13.** *Se  $K$  è un campo algebricamente chiuso, allora ogni ideale radicale in  $K[x_1, \dots, x_n]$  può essere scritto in modo unico come intersezione finita di ideali primi,  $I = P_1 \cap \dots \cap P_r$ , dove  $P_i \not\subset P_j$  per  $i \neq j$ . Chiamiamo tale rappresentazione dell'ideale radicale **decomposizione minimale**, come nel caso delle varietà.*

*Dimostrazione.* Questo teorema segue immediatamente dai teoremi precedenti e dal fatto che la corrispondenza inverte le inclusioni.  $\square$

**Teorema 14.** *Se  $K$  è algebricamente chiuso e  $I$  è un ideale radicale proprio tale che*

$$I = \bigcap_{i=1}^r P_i$$

*è la sua decomposizione minimale, allora i  $P_i$  sono precisamente gli ideali primi propri appartenenti all'insieme  $\{I : \langle f \rangle \mid f \in K[x_1, \dots, x_n]\}$ .*

*Dimostrazione.* Innanzitutto notiamo che, siccome  $I$  è un ideale proprio, anche ogni  $P_i$  è un ideale proprio (a causa della minimalità della decomposizione).

Per ogni  $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ , si ha

$$I : \langle f \rangle = \left( \bigcap_{i=1}^r P_i \right) : \langle f \rangle = \bigcap_{i=1}^r (P_i : \langle f \rangle), \quad (2.2)$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla definizione di ideale quoziente.

Dimostriamo che se  $P = \bigcap_{j=1}^n I_j$  e  $P$  è primo, allora  $P = I_j$  per un certo  $j$ . Siano  $f \in I_h$  e  $g \in I_k$ , allora  $fg \in I_h \cap I_k \subset P$ ; siccome  $P$  è primo,  $f \in P$  o  $g \in P$ , quindi  $I_h \subset P$  o  $I_k \subset P$ , in particolare abbiamo dimostrato che esiste un  $j$  per cui  $I_j \subset P$ . D'altra parte, dato che  $P \subset \bigcap_{j=1}^n I_j$ , si ha  $P \subset I_j$  per ogni  $j$ .

Supponiamo ora che  $I : \langle f \rangle$  sia un ideale primo proprio. Se applichiamo quanto appena dimostrato a 2.2, allora si ottiene  $I : \langle f \rangle = P_i : \langle f \rangle$ , per qualche  $i$ .

Notiamo poi che per ogni ideale primo  $P$  vale: se  $f \in P \Rightarrow P : \langle f \rangle = \langle 1 \rangle$ ; se  $f \notin P \Rightarrow P : \langle f \rangle = P$ . Infatti,

$$\begin{aligned} P : \langle f \rangle &= \{h \in K[x_1, \dots, x_n] \mid hg \in P, \forall g \in \langle f \rangle\} \\ &= \{h \in K[x_1, \dots, x_n] \mid hlf \in P, \forall l \in K[x_1, \dots, x_n]\} \\ &= \{q \in K[x_1, \dots, x_n] \mid qf \in P\}. \end{aligned}$$

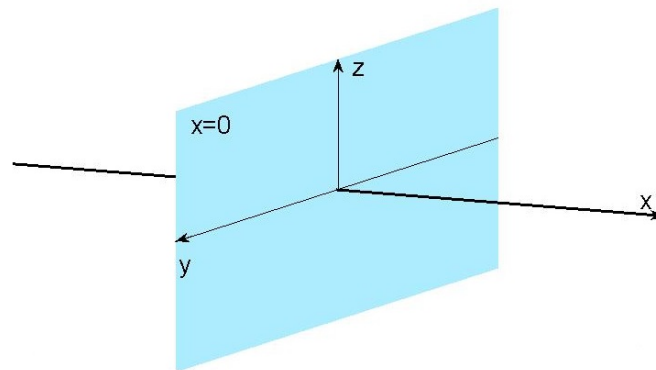
Se  $f \in P$ ,  $P : \langle f \rangle = K[x_1, \dots, x_n]$ . Se  $f \notin P$ , allora  $q \in P$ , perché  $P$  è primo, e quindi  $P : \langle f \rangle = P$ .

Quindi nel nostro caso,  $P_i : \langle f \rangle = P_i$  o  $\langle 1 \rangle$ . Segue che  $I : \langle f \rangle = P_i : \langle f \rangle = P_i$ .

Per vedere che ogni  $P_i$  si presenta in questa forma, fissiamo  $i$  e prendiamo  $f \in \left( \bigcap_{j \neq i} P_j \right) - P_i$ ; tale  $f$  esiste perché  $\bigcap_{i=1}^r P_i$  è minimale. Allora  $P_i : \langle f \rangle = P_i$  e  $P_j : \langle f \rangle = \langle 1 \rangle$  per  $j \neq i$ . Se combiniamo questo con 2.2, risulta facilmente che  $I : \langle f \rangle = P_i$ .  $\square$

Diamo un esempio di cosa succede traducendo il teorema appena dimostrato in termini di varietà.

**Esempio 15.** Sappiamo che l'intersezione di ideali primi corrisponde all'unione di varietà irriducibili, perciò consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  la varietà  $V = \mathbf{V}(xy, xz)$ , che sappiamo essere l'unione del piano  $V_1 = \mathbf{V}(x)$  e la retta  $V_2 = \mathbf{V}(y, z)$ . Per un qualsiasi polinomio  $f$ , l'ideale della forma  $\langle xy, xz \rangle : \langle f \rangle$  corrisponde alla varietà  $\overline{V - \mathbf{V}(f)}$ . Nel nostro caso  $V_1 = \overline{V - \mathbf{V}(f)}$  con  $f = 0$  equazione di un piano passante per  $V_2$ ;  $V_2 = \overline{V - V_1}$ .





## 2.9 Riepilogo

Riassumiamo in una tabella le relazioni fra oggetti algebrici, gli ideali radicali, e quelli geometrici, le varietà affini, studiate finora. Assumiamo che il campo su cui lavoriamo sia algebricamente chiuso e che gli ideali in questione siano radicali.

ALGEBRA		GEOMETRIA	
ideali radicali			varietà affini
$I$	$\longrightarrow$		$\mathbf{V}(I)$
$\mathbf{I}(V)$	$\longleftarrow$		$V$
somma di ideali			intersezione di varietà
$I + J$	$\longrightarrow$		$\mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$
$\sqrt{\mathbf{I}(V) + \mathbf{I}(W)}$	$\longleftarrow$		$V \cap W$
prodotto di ideali			unione di varietà
$I \cdot J$	$\longrightarrow$		$\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$
$\sqrt{\mathbf{I}(V) \cdot \mathbf{I}(W)}$	$\longleftarrow$		$V \cup W$
intersezione di ideali			unione di varietà
$I \cap J$	$\longrightarrow$		$\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$
$\mathbf{I}(V) \cap \mathbf{I}(W)$	$\longleftarrow$		$V \cup W$
quoziente di ideali			differenza di varietà
$I : J$	$\longrightarrow$		$\overline{\mathbf{V}(I) - \mathbf{V}(J)}$
$\mathbf{I}(V) : \mathbf{I}(W)$	$\longleftarrow$		$\overline{V - W}$
ideali primi	$\longleftrightarrow$		varietà irriducibili
ideali massimali	$\longleftrightarrow$		punti dello spazio affine



## Capitolo 3

# Ideali omogenei e varietà proiettive

In questo capitolo studieremo la corrispondenza tra ideali e varietà algebriche da un punto di vista proiettivo. Inizieremo ricordando i concetti principali di geometria proiettiva, in seguito definiremo le varietà proiettive e vedremo come si differenziano dalle varietà affini. Nella Sezione 3 introdurremo gli ideali omogenei e ne studieremo le proprietà, infatti ideali omogenei e varietà proiettive saranno protagonisti della corrispondenza descritta nella Sezione 4. Studieremo la versione proiettiva delle funzioni **I** e **V** descritte nel Capitolo 2, faremo uso dei Nullstellensatz proiettivi per rendere biunivoca la corrispondenza, infine vedremo come le operazioni tra ideali omogenei si relazionano alle operazioni tra varietà proiettive, e viceversa. Nell'ultima Sezione definiremo la chiusura proiettiva di una varietà affine e ne studieremo alcune proprietà, in particolare osserveremo la relazione tra una varietà affine e la sua chiusura proiettiva.

### 3.1 Richiami di geometria proiettiva

In questa sezione richiamiamo i concetti principali per lavorare negli spazi proiettivi e con i polinomi omogenei. Per i particolari e le dimostrazioni si rimanda a [CLO] e [S].

Sia  $K$  un campo, per definire lo spazio proiettivo  $n$ -dimensionale su  $K$ , consideriamo la relazione  $\sim$  sui punti di  $K^{n+1} \setminus \{0\}$ , tale che  $(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K$  tale che  $(x_0, \dots, x_n) = \lambda(x'_0, \dots, x'_n)$ . Si dimostra che  $\sim$  è una relazione di equivalenza.

**Definizione 16.** Si dice *spazio proiettivo  $n$ -dimensionale su  $K$* , denotato  $\mathbb{P}^n(K)$ , l'insieme delle classi di equivalenza della relazione  $\sim$  su  $K^{n+1} \setminus \{0\}$ . Cioè  $\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ .

Ogni  $(n+1)$ -upla  $[x_0, \dots, x_n] \in K^{n+1} \setminus \{0\}$  definisce un punto  $P$  in  $\mathbb{P}^n(K)$ , e  $[x_0, \dots, x_n]$  si dicono **coordinate omogenee** di  $P$ .

Geometricamente possiamo vedere i punti di  $\mathbb{P}^n(K)$  come le rette che passano per l'origine di  $K^{n+1}$ , oppure

$$\mathbb{P}^n(K) \cong \{\text{sottospazi vettoriali di dimensione 1 di } K^{n+1}\}.$$

Definiamo,  $\forall i = 0, \dots, n$ , il sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n(K)$

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(K) \mid x_i \neq 0\},$$

e la mappa  $\phi_i : U_i \rightarrow K^n$  tale che  $\phi_i([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ .

Si dimostra che le mappe  $\phi_i$  pongono i punti di  $U_i$  in corrispondenza biunivoca con i punti di  $K^n$ , e dato un punto  $P = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(K)$ , le nuove coordinate  $\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$  vengono chiamate **coordinate non omogenee** di  $P$  su  $U_i$ .

Per ogni  $i = 0, \dots, n$ ,  $H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(K) \mid x_i = 0\}$  è chiamato  $i$ -esimo **iperpiano all'infinito**,  $H_i = \mathbb{P}^n(K) \setminus U_i$  e viene identificato con  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ .

Si può infine dimostrare che  $\mathbb{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^n U_i$

Vediamo ora alcune proprietà dei polinomi omogenei.

**Definizione 17.** Un polinomio  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  si dice **omogeneo di grado  $d$**  se tutti i monomi che lo compongono hanno grado  $d$ .

In modo equivalente, un polinomio  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  è omogeneo di grado  $d$  se e solo se  $\forall t \in K$ ,  $f(tx_0, \dots, tx_n) = t^d f(x_0, \dots, x_n)$ .

Vale banalmente che il prodotto di due polinomi omogenei è ancora un polinomio omogeneo, in particolare se  $f, g \in K[x_0, \dots, x_n]$  sono polinomi omogenei di grado rispettivamente  $N$  e  $M$ , il prodotto  $f \cdot g$  è un polinomio omogeneo di grado  $N + M$ .

**Definizione 18.** Dato  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  omogeneo di grado  $d$ , il polinomio  $F \in K[x_1, \dots, x_n]$ , tale che  $f(x_0, \dots, x_n) = F(1, x_1, \dots, x_n)$  si dice **deomogeneizzato** di  $f$  rispetto a  $x_0$ .

Dato un polinomio  $g$  di grado  $d$ , sia  $g_k$  la somma dei termini di  $g$  di grado  $k$ , con  $0 \leq k \leq d$ , i  $g_k$  sono polinomi omogenei che chiamiamo **componenti omogenee** di grado  $k$  di  $g$ .

**Proposizione 13.** Sia  $g \in K[x_1, \dots, x_n]$  un polinomio di grado  $d$ .

(i) Scriviamo  $g$  come somma delle sue componenti omogenee  $g_i$  di grado  $i$ ,  $g = \sum_{i=0}^d g_i$ . Allora

$$\begin{aligned} g^h(x_0, \dots, x_n) &= \sum_{i=0}^d g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i} \\ &= g_d(x_1, \dots, x_n) + g_{d-1}(x_1, \dots, x_n) x_0 + \dots + g_0(x_1, \dots, x_n) x_0^d \end{aligned}$$

è un polinomio omogeneo di grado  $d$  in  $K[x_0, \dots, x_n]$ . Chiamiamo  $g^h$  l'**omogeneizzato** di  $g$  rispetto a  $x_0$ .

(ii) L'omogeneizzato di  $g$  rispetto a  $x_0$  può essere calcolato usando la seguente formula:

$$g^h = x_0^d \cdot g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right). \quad (3.1)$$

(iii) Il deomogeneizzato di  $g^h$  rispetto a  $x_0$  è  $g$ .

(iv) Sia  $F(x_0, \dots, x_n)$  un polinomio omogeneo e sia  $x_0^k$  la più grande potenza di  $x_0$  che divide  $F$ . Se  $f = F(1, x_1, \dots, x_n)$  è il deomogeneizzato di  $F$ , allora  $F = x_0^k \cdot f^h$ .

Osserviamo che, per ogni  $i$  fissato,  $i = 0, \dots, n$ , un polinomio  $g$  di grado  $d$  in  $K[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ , può essere omogeneizzato rispetto a  $x_i$  adattando la formula 3.1,  $g^{h_i} = x_i^d \cdot g\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ .

Analogamente, dato un polinomio omogeneo  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  di grado  $d$ , si può calcolare il deomogeneizzato  $F_i$  rispetto a  $x_i$ , tale che  $f(x_0, \dots, x_n) = F_i(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  e  $F_i \in K[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ .

## 3.2 Varietà proiettive

Il nostro obiettivo è costruire negli spazi proiettivi degli oggetti analoghi alle varietà affini.

Richiamando la definizione di varietà affine, potremmo chiederci se in uno spazio proiettivo ha senso considerare  $\mathbf{V}(f)$  per un polinomio  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$ .

Per esempio in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  proviamo a costruire  $\mathbf{V}(x_0 - x_1^2)$ : il punto  $P = [1, 1, 2]$  sembra appartenere a questo insieme, però ricordiamo che lo stesso punto può essere scritto come  $P = [1, 1, 2] = [3, 3, 6]$ , sostituendo queste coordinate nel polinomio otteniamo  $3 - 9 = -6 \neq 0$ , e abbiamo risultati diversi a seconda delle coordinate omogenee scelte. Ciò accade perché il polinomio scelto non è omogeneo, dimostreremo nella prossima proposizione che se delle coordinate omogenee di un punto annullano un polinomio omogeneo, allora tutte le coordinate omogenee del punto annullano il polinomio.

Osserviamo inoltre che anche per un polinomio omogeneo  $f$ , l'equazione  $f = c$  con  $c \neq 0$  non ha senso in  $\mathbb{P}^n(K)$ : infatti l'unica equazione che ha senso considerare è  $f = 0$ , perché fornisce un insieme di punti ben definito in  $\mathbb{P}^n(K)$ .

**Proposizione 14.** *Sia  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  un polinomio omogeneo e  $P \in \mathbb{P}^n(K)$ , se delle coordinate omogenee di  $P$  annullano  $f$  allora tutte le coordinate omogenee di  $P$  annullano  $f$ . Inoltre  $V(f) = \{P \in \mathbb{P}^n(K) \mid f(P) = 0\}$  è un sottoinsieme ben definito di  $\mathbb{P}^n(K)$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $[a_0, \dots, a_n]$  e  $[\lambda a_0, \dots, \lambda a_n]$  coordinate omogenee di  $P \in \mathbb{P}^n(K)$ , e assumiamo che  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ . Se  $f$  è omogeneo di grado  $k$ , ogni termine di  $f$  è della forma  $c x_0^{\alpha_0} \cdots x_n^{\alpha_n}$ , con  $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = k$ . Sostituendo  $x_i = \lambda a_i$ , questo termine diventa  $c(\lambda a_0)^{\alpha_0} \cdots (\lambda a_n)^{\alpha_n} = \lambda^k c a_0^{\alpha_0} \cdots a_n^{\alpha_n}$ . Sommando tutti i termini di  $f$  ricaviamo  $\lambda^k$  fattore comune, e abbiamo  $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^k f(a_0, \dots, a_n) = 0$ . Perciò se alcune coordinate omogenee di  $P$  annullano  $f$ , tutte le possibili coordinate omogenee di  $P$  annullano  $f$ , e l'insieme di tutti i punti che annullano  $f$  è ben definito.  $\square$

Queste premesse permettono di definire le varietà proiettive.

**Definizione 19.** *Sia  $K$  un campo e siano  $f_1, \dots, f_s \in K[x_0, \dots, x_n]$  polinomi omogenei. Poniamo*

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(K) \mid f_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ per ogni } 1 \leq i \leq s\}.$$

Chiamiamo  $V(f_1, \dots, f_s)$  la **varietà proiettiva** definita da  $f_1, \dots, f_s$ .

**Esempio 16.** *L' $i$ -esimo iperpiano all'infinito definito nella Sezione 1, è una varietà proiettiva, in particolare  $H_i = V(x_i)$ .*

*In generale, si chiamano iperpiani tutte le varietà proiettive definite da un polinomio di grado 1, mentre le varietà definite da più polinomi di grado 1 vengono chiamate varietà lineari.*

*Le varietà definite da un solo polinomio vengono chiamate ipersuperfici, a seconda del grado del polinomio avremo ipersuperfici quadriche (grado 2), cubiche (grado 3) o quartiche (grado 4).*

Studiamo ora la relazione che sussiste tra varietà affini e varietà proiettive. Nella sezione precedente abbiamo osservato che i sottoinsiemi  $U_i$  di  $\mathbb{P}^n(K)$  sono copie di  $K^n$ , quindi possiamo chiederci se le varietà affini di  $K^n \cong U_i$  sono in relazione con le varietà proiettive di  $\mathbb{P}^n(K)$ .

La proposizione seguente mostra come ottenere una varietà affine a partire da una varietà proiettiva.

**Proposizione 15.** *Sia  $V = V(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{P}^n(K)$  una varietà proiettiva. Allora per ogni  $i = 0, \dots, n$ ,  $W_i = V \cap U_i$  si identifica con la varietà affine  $V(g_1, \dots, g_s) \subset K^n$ , dove, per ogni  $1 \leq k \leq s$ ,  $g_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = f_k(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .*

In particolare  $V \cap U_i$  è la varietà affine che si ottiene deomogeneizzando rispetto a  $x_i$  le equazioni di  $V$ , e viene chiamata **porzione affine** di  $V$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $i = 0, \dots, n$  fissato, usiamo le mappe  $\phi_i : U_i \rightarrow K^n$  introdotte nella sezione precedente, per dimostrare che  $\phi(W_i) = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ .

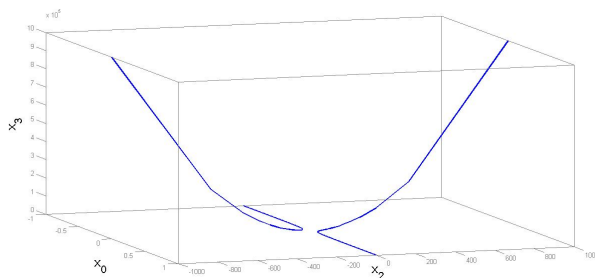
Sia  $P$  un punto  $P = [x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n] \in W_i = V \cap U_i$ , e  $\phi_i(P) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \phi_i(W_i)$ . Allora, per ogni  $k$ ,  $f_k(P) = 0$  e  $g_k(\phi_i(P)) = f_k(P) = 0$ , quindi  $\phi_i(P) \in \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ , perciò  $\phi(W_i) \subset \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ .

Per l'inclusione opposta, sia  $P = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$  e  $P_1 = [x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n]$ . Allora  $P_1 \in U_i$ , e per ogni  $k = 1, \dots, s$ ,  $g_k(P) = f_k(P_1) = 0$  quindi  $P_1 \in V \cap U_i = W_i$ . Osserviamo che  $\phi_i(P_1) = P \Rightarrow P \in \phi_i(W)$ .

In conclusione, sappiamo che le mappe  $\phi_i$  sono corrispondenze biunivoche, quindi possiamo identificare  $W$  con  $\phi_i(W) = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ .  $\square$

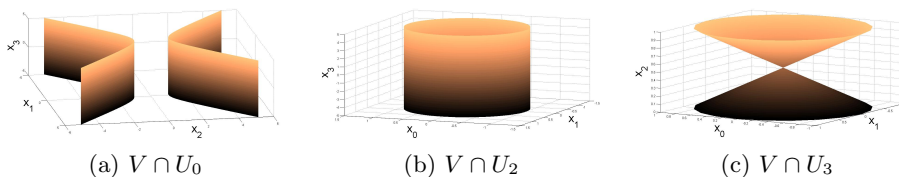
**Esempio 17.** Consideriamo la varietà proiettiva  $V = \mathbf{V}(x_1^2 - x_2x_0, x_1^3 - x_3) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Per calcolare  $W_0 = V \cap U_0$  deomogeneizziamo rispetto a  $x_0$  le equazioni di  $V$  e otteniamo la varietà affine  $\mathbf{V}(x_1^2 - x_2, x_1^3 - x_3) \subset \mathbb{R}^3$ , che riconosciamo essere la cubica gobba in  $\mathbb{R}^3$ .

Se vogliamo invece calcolare  $W_1 = V \cap U_1$  dobbiamo deomogeneizzare le equazioni di  $V$  rispetto a  $x_1$ , quindi otteniamo  $\mathbf{V}(1 - x_2x_0, 1 - x_3x_0^2)$ , che si parametrizza ponendo  $x_0 = t$ ,  $x_2 = 1/t$ ,  $x_3 = 1/t^2$  ed è rappresentata nella figura sotto.



**Esempio 18.** In  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , consideriamo la varietà  $V = \mathbf{V}(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2)$ . Vediamo che  $V \cap U_0 = \mathbf{V}(1 + x_1^2 - x_2^2)$ , è un cilindro iperbolico in  $\mathbb{R}^3$  (nella figura seguente (a)), mentre  $V \cap U_2 = \mathbf{V}(x_0^2 + x_1^2 - 1)$  è un cilindro (b). Il polinomio che definisce  $V$  non dipende da  $x_3$ , quindi in questo caso il deomogeneizzato è uguale al polinomio stesso, e  $V \cap U_3 = \mathbf{V}(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2)$ , che in  $\mathbb{R}^3$  è un cono (c).

Ora possiamo chiederci come ottenere una varietà proiettiva a partire da una varietà affine, cioè data una varietà affine in  $U_i$  se è possibile scriverla come  $V \cap U_i$  con  $V$  varietà proiettiva.



Un modo per costruire tale varietà proiettiva è omogeneizzare rispetto a  $U_i$  le equazioni che definiscono la varietà affine. Quindi fissiamo  $0 \leq i \leq n$  e prendiamo una varietà affine  $W = \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) \subset K^n$ . Siano  $g_1^h, \dots, g_s^h$  gli omogeneizzati rispetto a  $x_i$  dei polinomi  $g_1, \dots, g_s$ , allora  $V = \mathbf{V}(g_1^h, \dots, g_s^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$  è una varietà proiettiva. Inoltre, poiché il deomogeneizzato di  $g^h$  è  $g$ , dalla Proposizione 15, abbiamo  $V \cap U_i = W$ .

In questo modo però possiamo ottenere una varietà proiettiva diversa da quella che ci aspettiamo, come vediamo nel prossimo esempio.

**Esempio 19.** Consideriamo la cubica gobba  $W = \mathbf{V}(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3) \subset \mathbb{R}^3$ . Abbiamo già visto che se poniamo  $V = \mathbf{V}(x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , allora  $W = V \cap U_0$ . Dato che  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = U_0 \cup H$ , con  $H = \mathbf{V}(x_0)$  piano all'infinito, la differenza  $V - W$  è  $V \cap H$  e possiamo chiederci quali punti fanno parte di questo insieme. Calcoliamo  $V \cap H = \mathbf{V}(x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3, x_0)$ , vediamo che le equazioni si riducono a  $x_1^2 = 0, x_1^3 = 0, x_0 = 0$ . Quindi abbiamo la retta proiettiva  $\mathbf{V}(x_1, x_0) = V \cap H$ , e  $V = W \cup \mathbf{V}(x_1, x_0)$ .

Dato che la cubica gobba è una curva in  $\mathbb{R}^3$ , intuitivamente ci aspettiamo di avere un solo o un numero finito di punti all'infinito, non una retta intera. Questo indica che probabilmente la varietà  $V$  trovata omogeneizzando le equazioni di  $W$  è troppo grande, e vorremmo trovare una varietà proiettiva  $V'$  che contiene  $W$ , ma più piccola di  $V$ . Possiamo creare tale varietà  $V'$  omogeneizzando altri polinomi che si annullano su  $W$ , per esempio dalla parametrizzazione  $(t, t^2, t^3)$  di  $W$  ricaviamo  $x_1x_3 - x_2^2 \in \mathbf{I}(W)$ . Dato che  $x_1x_3 - x_2^2$  è già omogeneo, possiamo aggiungerlo alle equazioni di  $V$  e otteniamo  $V' = \mathbf{V}(x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3, x_1x_3 - x_2^2) \subset V$ . Chiamiamo  $f_1 = x_2 - x_1^2$ ,  $f_2 = x_3 - x_1^3$  e  $f_3 = x_1x_3 - x_2^2$ , allora  $V' \cap U_0 = \mathbf{V}(f_1, f_2, f_3)$ , e notiamo che  $f_3$  si può scrivere come combinazione di  $f_1$  e  $f_2$ , infatti  $f_3 = x_1f_2 - (x_2 + x_1^2)f_1$ , quindi  $\mathbf{V}(f_1, f_2, f_3) = \mathbf{V}(f_1, f_2) = W$ , ovvero la porzione affine di  $V'$  è la cubica gobba. Calcoliamo l'intersezione di  $V'$  con l'iperpiano all'infinito,  $V' \cap H = \mathbf{V}(x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3, x_1x_3 - x_2^2, x_0)$ , e ricaviamo le equazioni  $x_0 = 0, x_1^2 = 0, x_1^3 = 0, x_2^2 = 0$ , perciò  $V' \cap H = \mathbf{V}(x_0, x_1, x_2)$  che è un solo punto nello spazio proiettivo,  $[0, 0, 0, 1]$ .

Infine  $V' = W \cup \{[0, 0, 0, 1]\}$ , quindi aggiungendo a  $W$  solo un punto all'infinito abbiamo trovato una varietà proiettiva contenuta in  $V$ , e nella Sezione 5 dimostreremo che  $V'$  è proprio la più piccola varietà che contiene  $W$ .



### 3.3 Ideali omogenei

Seguendo il ragionamento fatto per le varietà affini, vorremmo costruire una varietà proiettiva associata a un ideale, ma abbiamo visto nella sezione precedente che le varietà proiettive sono definite da polinomi omogenei: ci chiediamo allora se dobbiamo considerare ideali costituiti solo da polinomi omogenei.

Non esistono però ideali del genere, poiché se due polinomi omogenei di grado diverso appartengono ad un ideale, la loro somma appartiene allo stesso ideale ma non è più un polinomio omogeneo.

Quindi anche un ideale generato da polinomi omogenei contiene molti polinomi non omogenei, ma questi, anche se non possono definire una varietà proiettiva, hanno delle caratteristiche particolari.

Consideriamo  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideale generato da polinomi omogenei, e  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$  una varietà proiettiva, allora tutte le coordinate omogenee di ogni punto di  $V$  annullano tutti i polinomi di  $I$ . Infatti tutti i polinomi  $g \in I$  sono della forma  $g = \sum_{j=1}^n A_j f_j$ , con  $A_j$  polinomi opportuni, e per ogni  $P \in V$ ,  $g(P) = 0$  poiché  $f_j(P) = 0$  per ogni  $j$ .

Inoltre dimostreremo che, anche se  $I$  contiene polinomi non omogenei, contiene pure le loro componenti omogenee, e questo ci induce a considerare una nuova classe di ideali, gli ideali omogenei.

**Definizione 20.** Un ideale  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  si dice **omogeneo** se per ogni  $f \in I$ , le componenti omogenee  $f_i$  di  $f$  appartengono a  $I$ .

**Teorema 15.** Sia  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideale. Allora  $I$  è un ideale omogeneo se e solo se  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , dove  $f_1, \dots, f_s$  sono polinomi omogenei.

*Dimostrazione.* Sia  $I$  un ideale omogeneo. Per il Teorema della base di Hilbert enunciato nel Capitolo 1, sappiamo che esistono polinomi  $F_1, \dots, F_t \in K[x_0, \dots, x_n]$  per cui  $I = \langle F_1, \dots, F_t \rangle$ . Questi polinomi non sono necessariamente omogenei, ma possiamo scriverli come somma delle loro componenti omogenee:  $F_j = \sum_i F_{ji}$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Chiamiamo  $I'$  l'ideale generato da tutti i polinomi omogenei  $F_{ji}$ . Si ha che  $I' \subset I$  poiché  $I$  è omogeneo, quindi ogni componente omogenea  $F_{ji}$  di  $F_j$  è contenuta in  $I$ . Viceversa  $I \subset I'$  dato che ogni  $F_j$  è somma di generatori di  $I'$ . Allora  $I = I'$ , cioè una base di  $I$  è costituita da polinomi omogenei.

Supponiamo ora  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  con  $f_1, \dots, f_s$  polinomi omogenei. Prendiamo  $F \in I$ ,  $F = \sum_j g_j f_j$ , con  $g_j$  opportuni polinomi. Possiamo scrivere ogni  $g_j$  come somma delle sue componenti omogenee:  $g_j = \sum_i g_{ji}$ . Ora i polinomi  $g_{ji}$  e  $f_j$  sono omogenei, e il loro prodotto  $h_{ji} = g_{ji} f_j$  è ancora un polinomio omogeneo. Adesso possiamo scrivere  $f$  come somma di polinomi omogenei,  $f = \sum_{j,i} h_{ji}$ , raggruppando i termini dello stesso grado otteniamo la decomposizione di  $f$  in componenti omogenee, ognuna delle quali è combinazione di  $f_j$ , quindi appartengono a  $I$ .  $\square$

Osserviamo alcune proprietà degli ideali omogenei, che ci saranno utili per costruire la corrispondenza con le varietà proiettive.

**Proposizione 16.** *Siano  $I$  e  $J$  ideali omogenei di  $K[x_0, \dots, x_n]$  e siano  $L = I + J$  l'ideale somma,  $M = I \cap J$  l'ideale intersezione e  $N = I \cdot J$  l'ideale prodotto. Allora  $L, M$  e  $N$  sono ideali omogenei.*

*Dimostrazione.* La Proposizione 3 nel Capitolo 2 afferma che i generatori dell'ideale somma  $L = I + J$  sono tutti i generatori degli ideali  $I$  e  $J$ . Sappiamo dal Teorema 15 che i generatori di  $I$  e  $J$  sono polinomi omogenei, quindi anche  $L$  è generato da polinomi omogenei perciò è un ideale omogeneo.

Consideriamo ora  $M = I \cap J$ ,  $\forall f \in M$ , abbiamo  $f \in I$  e  $f \in J$ . Siano  $f_j$  le componenti omogenee di  $f$ , dalla definizione di ideale omogeneo, per ogni  $j$ ,  $f_j \in I$  e  $f_j \in J \Rightarrow f_j \in M$ , quindi anche  $M$  è un ideale omogeneo.

Infine sia  $N = I \cdot J$ , dalla Proposizione 4 del Capitolo 2, i generatori dell'ideale prodotto  $N$  sono tutti i prodotti dei generatori degli ideali  $I$  e  $J$ . Sappiamo che i generatori di  $I$  e  $J$  sono polinomi omogenei, e il prodotto di polinomi omogenei è ancora un polinomio omogeneo quindi anche  $N$  è generato da polinomi omogenei perciò è un ideale omogeneo.  $\square$

Le prossime proposizioni caratterizzano gli ideali omogenei radicali e primi, che useremo per descrivere la corrispondenza con le varietà proiettive.

**Proposizione 17.** *Sia  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideale omogeneo, allora anche  $\sqrt{I}$  è un ideale omogeneo.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che se  $f \in \sqrt{I}$ , allora  $f^m \in I$  per qualche  $m \geq 1$ . Scriviamo  $f$  come somma di componenti omogenee:  $f = \sum_i f_i = f_{max} + \sum_{i < max} f_i$ , dove  $f_{max}$  è la componente omogenea di grado massimo di  $f$ . Sviluppamo la potenza  $f^m$ :

$$f^m = \left( f_{max} + \sum_{i < max} f_i \right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (f_{max})^{m-k} \left( \sum f_i \right)^k.$$

Poiché gli  $f_i$  hanno grado minore di  $f_{max}$ , il termine di grado massimo nella somma si ha per  $k = 0$ , cioè  $(f_{max})^m = (f^m)_{max}$ . Dato che  $I$  è un ideale omogeneo  $(f^m)_{max} = (f_{max})^m \in I$ , quindi  $f_{max} \in \sqrt{I}$ .

Se poniamo  $g = f - f_{max} \in \sqrt{I}$  e ripetiamo il procedimento, otteniamo  $g_{max} \in \sqrt{I}$ ; ma  $g_{max}$  è ancora una componente omogenea di  $f$ . Dato che  $f$  è una somma finita di monomi, applicando il ragionamento più volte vediamo che tutte le componenti omogenee di  $f$  stanno in  $\sqrt{I}$ , quindi per definizione  $\sqrt{I}$  è un ideale omogeneo.  $\square$

**Proposizione 18.** *Un ideale omogeneo  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  è primo se e solo se presi  $F, G$  polinomi omogenei tali che  $FG \in I$ , allora  $F \in I$  o  $G \in I$ . Inoltre un ideale omogeneo primo è radicale.*

*Dimostrazione.* Se  $I$  è un ideale omogeneo primo, la tesi vale banalmente.

Per dimostrare l'altra implicazione, consideriamo  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  ideale omogeneo tale che se  $F, G$  sono polinomi omogenei,  $FG \in I \Rightarrow F \in I$  o  $G \in I$ . Siano  $f, g \in K[x_0, \dots, x_n]$  polinomi di grado rispettivamente  $m$  e  $t$ , tali che  $fg \in I$ , scrivendoli come somma delle loro componenti omogenee abbiamo  $f = \sum_i f_i, g = \sum_i g_i$  e  $fg = \sum_j h_j$ , con  $h_j = \sum f_{j-k}g_k$ . Essendo  $I$  omogeneo, le componenti omogenee di  $fg$  appartengono a  $I$ ,  $h_j \in I$ , per ogni  $j$ . In particolare  $f_m g_t \in I$ , quindi per ipotesi  $f_m \in I$  o  $g_t \in I$ . Se entrambi appartengono a  $I$ , ripetiamo il ragionamento considerando  $f - f_m$  e  $g - g_t$  al posto di  $f$  e  $g$ . Altrimenti, supponiamo  $f_m \in I$  e  $g_t \notin I$ , e dimostriamo che tutte le componenti omogenee di  $f$  sono in  $I$  quindi  $f$  appartiene ad  $I$ . Procediamo per induzione, supponiamo di aver dimostrato che  $f_m, f_{m-1}, \dots, f_r \in I$ , allora calcoliamo la componente omogenea di  $fg$  di grado  $r-1+t$ :  $h_{r-1+t} = f_{r-1}g_t + (f_r g_{t-1} + f_{r+1}g_{t-2} + \dots) = f_{r-1}g_t + p$ , con  $p \in I$  per ipotesi induttiva. Anche  $f_{r-1}g_t \in I$ , ma  $g_t \notin I$  e rimane  $f_{r-1} \in I$ . Ricapitolando, avevamo  $fg \in I$ , abbiamo dimostrato che se  $g \notin I$  questo implica  $f \in I$ , quindi  $I$  è primo.

Abbiamo già dimostrato nella Sezione 7 del Capitolo 2 che un ideale primo è radicale.  $\square$

Preso un ideale qualsiasi, possiamo chiederci se esiste un ideale omogeneo associato e come trovarlo. Introduciamo per questo l'omogeneizzato di un ideale.

Considereremo ideali in  $K[x_1, \dots, x_n]$ , per poter omogeneizzare i polinomi rispetto a  $x_0$ .

**Definizione 21.** Sia  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  un ideale. Chiamiamo **omogeneizzato** di  $I$  l'ideale  $I^h = \langle f^h \mid f \in I \rangle \subset K[x_0, \dots, x_n]$ , dove  $f^h$  è l'omogeneizzato di  $f$ .

**Proposizione 19.** Per ogni ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ , l'omogeneizzato  $I^h \subset K[x_0, \dots, x_n]$  è un ideale omogeneo.

*Dimostrazione.* Per dimostrare questa proposizione utilizzeremo la condizione della catena ascendente, un teorema di cui diamo solo l'enunciato, ma una dimostrazione si può trovare in [CLO].

**Teorema 16 (Condizione della catena ascendente).** Ogni catena ascendente di ideali  $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$  in  $K[x_1, \dots, x_n]$  è stazionaria, ovvero esiste un intero positivo  $N$  tale che  $I_N = I_{N+1} = \dots$ .

Ora possiamo dimostrare la Proposizione 19. Dalla definizione  $I^h$  è un ideale generato da infiniti polinomi omogenei, possiamo ordinarli e scrivere  $I^h = \langle f_1^h, f_2^h, f_3^h, \dots \rangle$ . Consideriamo gli ideali  $I_j$  generati dai primi  $j$  polinomi generatori di  $I^h$ :  $I_1 = \langle f_1^h \rangle, I_2 = \langle f_1^h, f_2^h \rangle, \dots$ . Abbiamo creato una catena ascendente di ideali poiché  $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ , e dal Teorema 16 esiste un  $N$  per

cui  $I_N = I_{N+1} \cdots$ , quindi avremo  $I^h = I_N$ , cioè abbiamo trovato una base di  $N$  polinomi omogenei per  $I^h$ , quindi  $I^h$  è omogeneo.  $\square$

Osserviamo che la dimostrazione della Proposizione 19 non costruisce esplicitamente una base per l'ideale  $I^h$ , poiché in generale non è banale trovarla e non basta omogeneizzare i generatori di  $I$  per ottenere una base di  $I^h$ . Infatti consideriamo l'ideale della cubica gobba affine,  $I = \langle f_1, f_2 \rangle = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ , e omogeneizzando  $f_1$  e  $f_2$ , otteniamo l'ideale  $J = \langle x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3 \rangle \subset \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ . Vogliamo dimostrare che  $I^h \neq J$ : consideriamo innanzitutto il polinomio  $f_3 = f_2 - x_1f_1 = x_3 - x_1x_2 \in I$ , allora  $f_3^h = x_0x_3 - x_1x_2 \in I^h$ . Se  $f_3^h$  appartenesse a  $J$ , potremmo scrivere  $f_3^h = A_1f_1^h + A_2f_2^h$ , per certi polinomi  $A_1$  e  $A_2$ . Ma  $f_3^h$  è un polinomio omogeneo di grado 2, mentre  $f_2^h$  è omogeneo di grado 3, quindi il polinomio  $A_2$  deve essere nullo. Rimane  $f_3^h = A_1f_1^h$ , con  $f_1^h$  e  $f_3^h$  omogenei di grado 2, quindi  $A_1$  deve essere costante. Ciò è impossibile perché  $f_3^h$  non è un multiplo di  $f_1^h$ , quindi  $f_3^h \notin J$ , e  $I^h \neq J$ .

**Proposizione 20.** *Un ideale  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  è primo se e solo se  $I^h \subset K[x_0, \dots, x_n]$  è primo.*

*Dimostrazione.* Sia  $I$  primo, e siano  $f^h, g^h \in K[x_0, \dots, x_n]$  polinomi omogenei tali che  $f^hg^h \in I^h$ . Allora  $fg \in I$ , il che implica  $f \in I$  o  $g \in I$ . Quindi avremo  $f^h \in I^h$  o  $g^h \in I^h$ , dalla Proposizione 18, essendo  $I^h$  ideale omogeneo, è primo.

Ora ipotizziamo  $I^h$  ideale primo, e siano  $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$  polinomi tali che  $fg \in I$ . Allora, utilizzando la formula 3.1 per calcolare l'omogeneizzato, se  $f$  ha grado  $d$  e  $g$  ha grado  $m$ ,  $fg$  ha grado  $d+m$  e  $(fg)^h = x_0^{d+m}fg\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ ,  $f^hg^h = x_0^df\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)x_0^mg\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = x_0^{d+m}f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ . Quindi  $(fg)^h = f^hg^h \in I^h$ , essendo  $I^h$  primo, abbiamo  $f^h \in I^h$  o  $g^h \in I^h$ , perciò  $f \in I$  o  $g \in I$ , che implica  $I$  primo.  $\square$

### 3.4 Corrispondenza ideali omogenei-varietà

Ora che abbiamo definito gli ideali omogenei e le varietà proiettive, per costruire una corrispondenza dobbiamo studiare la versione proiettiva delle funzioni **V** e **I** studiate nel caso affine.

Scriveremo  $\mathbf{V}_a$  e  $\mathbf{I}_a$  per denotare la versione affine, e  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  per quella proiettiva.

**Proposizione 21.** *Sia  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideale omogeneo, e supponiamo che  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , con  $f_1, \dots, f_s$  polinomi omogenei. Definiamo*

$$\mathbf{V}(I) = \{P \in \mathbb{P}^n(K) \mid f(P) = 0 \forall f \in I\},$$

allora  $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$  è una varietà proiettiva.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione 2 del Capitolo 1 nel caso affine.  $\square$

**Proposizione 22.** Sia  $V \in \mathbb{P}^n(K)$  una varietà proiettiva e poniamo

$$I(V) = \{f \in K[x_0, \dots, x_n] \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0 \forall [a_0, \dots, a_n] \in V\}.$$

Se  $K$  è infinito, allora  $I(V)$  è un ideale omogeneo di  $K[x_0, \dots, x_n]$ .

*Dimostrazione.* Si dimostra che  $I(V)$  è un ideale nello stesso modo del Lemma 3 del Capitolo 1.

Ora dimostriamo che è un ideale omogeneo. Sia  $f \in I(V)$  e fissiamo un punto  $P \in V$ . Per ipotesi tutte le coordinate omogenee di  $P$  annullano  $f$ , quindi  $\forall \lambda \neq 0$ ,  $f(a_0, \dots, a_n) = f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ . Scrivendo  $f$  come somma delle sue componenti omogenee, abbiamo  $f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_i f_i(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \sum_i \lambda^i f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$ ,  $\forall \lambda \neq 0$ . Questo è possibile solo se  $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \forall i$ , ovvero ogni componente omogenea  $f_i$  di  $f$  si annulla in  $P$ . Questo mostra che  $f_i \in I(V)$ , quindi  $I(V)$  è omogeneo.  $\square$

**Teorema 17.** Sia  $K$  un campo infinito. Le mappe

$$I: \text{ varietà proiettive} \longrightarrow \text{ ideali omogenei}$$

e

$$V: \text{ ideali omogenei} \longrightarrow \text{ varietà proiettive}$$

invertono le inclusioni. Inoltre, per ogni varietà proiettiva  $V$ ,  $V(I(V)) = V$ , cioè  $I$  è iniettiva.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga al caso affine, si veda il Lemma 5 del Capitolo 2.  $\square$

Possiamo subito applicare il Teorema 17 per dimostrare che ogni varietà proiettiva può essere scritta come unione di componenti irriducibili. Definiamo le *varietà proiettive irriducibili* come nel caso affine, vale a dire una varietà proiettiva è irriducibile se non può essere scritta come unione di due varietà proiettive più piccole.

**Lemma 7.** Data una catena discendente di varietà proiettive  $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$  in  $\mathbb{P}^n(K)$ , esiste un intero  $N$  tale che  $V_N = V_{N+1} = \dots$ .

*Dimostrazione.* Applicando  $I$  alla catena di varietà, poiché inverte le inclusioni otteniamo una catena ascendente di ideali,  $I(V_1) \subset I(V_2) \subset I(V_3) \dots$ . Dal Teorema 16 sappiamo che esiste un intero  $N$  tale che  $I(V_N) = I(V_{N+1}) = \dots$ , applichiamo  $V$  alla catena ed essendo  $I$  iniettiva otteniamo  $V_N = V_{N+1} = \dots$ .  $\square$

**Proposizione 23.** *Ogni varietà proiettiva  $V \subset \mathbb{P}^n(K)$  può essere scritta in modo unico (a meno dell'ordine) come unione finita di varietà proiettive irriducibili,  $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ , con  $V_i \not\subset V_j$  per  $i \neq j$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue facilmente a partire dal Lemma precedente, in modo analogo alle dimostrazioni dei Teoremi 11 e 12 del Capitolo 2 nel caso affine.  $\square$

Studiamo ora le versioni proiettive dei Nullstellensatz, che serviranno, come nel caso affine, a creare una corrispondenza biunivoca in un campo algebricamente chiuso tra una classe di ideali e una classe di varietà.

**Teorema 18 (Nullstellensatz debole proiettivo).** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso e sia  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideale omogeneo. Allora sono equivalenti:*

(i)  $\mathbf{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(K)$  è vuoto;

(ii) Esiste un  $r \geq 1$  tale che  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ ;

(iii) Per ogni  $1 \leq i \leq n$ , esiste un intero  $m_i \geq 0$  tale che  $x_i^{m_i} \in I$ .

*Dimostrazione.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Chiamiamo  $V = \mathbf{V}(I)$  e definiamo il cono affine di  $V$ ,  $C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset K^{n+1}$ , la varietà affine associata all'ideale  $I$ . Dato che  $I$  è un ideale omogeneo, possiamo scrivere  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  con  $f_1, \dots, f_s$  polinomi omogenei, e  $C_V = \mathbf{V}_a(I) = \mathbf{V}_a(f_1, \dots, f_s)$ . Sia  $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0) \in C_V$ , allora  $\forall i = 1, \dots, s$ ,  $f_i(a_0, \dots, a_n) = 0$  ed essendo  $f_i$  polinomi omogenei,  $\forall \lambda \neq 0$  anche  $f_i(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$ . Inoltre poiché esistono dei punti in cui si annullano, gli  $f_i$  sono polinomi non costanti e omogenei, quindi anche  $(0, \dots, 0)$  di  $K^{n+1}$  appartiene a  $C_V$ . Quindi se esiste un punto  $P$  che appartiene a  $C_V$ , allora tutta la retta passante per  $P$  e per l'origine appartiene a  $C_V$ . Possiamo considerare i punti di questa retta, tranne l'origine, come coordinate omogenee del punto  $P \in \mathbb{P}^n(K)$ , abbiamo visto che tutte le coordinate omogenee di  $P$  annullano i polinomi  $f_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, s$ , quindi  $P \in V$ . Ciò contraddice l'ipotesi, quindi non esiste un punto  $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0) \in C_V$  e necessariamente  $C_V \subset \{(0, \dots, 0)\}$ .

Sappiamo che  $\mathbf{I}_a$  inverte le inclusioni, quindi  $\mathbf{I}_a(\{(0, \dots, 0)\}) \subset \mathbf{I}_a(C_V)$ . Dal caso affine abbiamo l'uguaglianza  $\mathbf{I}_a(\{(0, \dots, 0)\}) = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ , dal Nullstellensatz forte affine  $\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) = \sqrt{I}$ , quindi  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset \sqrt{I}$ . Per concludere vogliamo dimostrare che esiste un  $r$  per cui  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ . I generatori dell'ideale  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r$  sono tutti i prodotti del tipo  $x_0^{k_0} \dots x_n^{k_n}$  con  $k_0 + \dots + k_n = r$ . Abbiamo detto che  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset \sqrt{I}$ , in particolare per ogni  $i = 0, \dots, n$ ,  $x_i \in \sqrt{I} \Rightarrow x_i^{m_i} \in I$  per degli interi  $m_i$ . Scegliendo un intero  $r > \sum_i m_i$ , per tutti gli  $i$ ,  $x_i^r \in I$ , inoltre considerando  $k_0, \dots, k_n$  interi tali che  $k_0 + \dots + k_n = r$ , anche  $x_0^{k_0} \dots x_n^{k_n}$  appartiene a  $I$ . Quindi i generatori dell'ideale  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r$  appartengono a  $I$  perciò tutto l'ideale è contenuto in  $I$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Ovvvia, perché se  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subset I$ , allora  $x_i^r \in I, \forall i$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Per ipotesi esistono degli interi  $m_i$  tali che  $x_i^{m_i} \in I \forall i$ , e anche tutto l'ideale  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset I$ . Applicando  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(x_0, \dots, x_n) = \emptyset$  perché l'unico punto che annulla contemporaneamente  $x_0, \dots, x_n$  è  $(0, \dots, 0) \notin \mathbb{P}^n(K)$ . Quindi  $\mathbf{V}(I) \subset \emptyset \Rightarrow \mathbf{V}(I) = \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 19 (Nullstellensatz forte proiettivo).** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso e sia  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideale omogeneo. Se  $V = \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(K)$  è una varietà proiettiva non vuota, allora  $\mathbf{I}(V) = \sqrt{I}$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo, come nella dimostrazione del teorema precedente, il cono affine di  $V$ ,  $C_V = \mathbf{V}_a(I) \subset K^{n+1}$ . Vogliamo innanzitutto dimostrare che  $\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V)$ , se  $V \neq \emptyset$ . Sia  $f \in \mathbf{I}_a(C_V)$ ; dato  $P \in V$ , sappiamo che tutte le coordinate omogenee di  $P$  sono in  $C_V$ , quindi tutte le coordinate omogenee di  $P$  annullano  $f$ . Per definizione, questo implica che  $f \in \mathbf{I}(V)$ , e di conseguenza  $\mathbf{I}_a(C_V) \subset \mathbf{I}(V)$ .

Ora supponiamo  $f \in \mathbf{I}(V)$ . Dato che ogni punto diverso da zero di  $C_V$  fornisce coordinate omogenee per un punto in  $V$ , ne segue che  $f$  si annulla nei punti di  $C_V \setminus \{0\}$ . Rimane quindi da mostrare che  $f$  si annulla nell'origine. Poiché  $\mathbf{I}(V)$  è un ideale omogeneo, anche le componenti omogenee  $f_i$  di  $f$  si annullano in  $V$ . In particolare la componente omogenea  $f_0$  di grado zero, cioè il termine costante di  $f$ , si deve annullare in tutti i punti di  $V \neq \emptyset$ . Necessariamente deve essere  $f_0 = 0$ , che significa che  $f$  si annulla nell'origine. Perciò  $f \in \mathbf{I}_a(C_V)$ , e  $\mathbf{I}_a(C_V) \supset \mathbf{I}(V)$ .

Abbiamo quindi dimostrato che  $\mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V)$ , dalla forma affine del Nullstellensatz forte sappiamo che  $\sqrt{I} = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I))$ , concludiamo la dimostrazione con la seguente catena di uguaglianze:

$$\sqrt{I} = \mathbf{I}_a(\mathbf{V}_a(I)) = \mathbf{I}_a(C_V) = \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)).$$

$\square$

Osserviamo che, a differenza del caso affine, il Nullstellensatz debole proiettivo sembra associare alla varietà vuota molti ideali, in realtà possiamo dimostrare che gli unici ideali radicali omogenei  $I$  tali che  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$  sono  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  e  $K[x_0, \dots, x_n]$ .

Infatti  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$  implica che per ogni  $i = 0, \dots, n$  una potenza di  $x_i$  sta in  $I$  che è radicale, quindi  $x_i \in I$ . Essendo  $I$  ideale, per ogni  $g \in K[x_0, \dots, x_n]$  abbiamo  $x_i \cdot g \in I$ , che implica che tutto l'ideale generato da  $x_i$  è contenuto in  $I$ , per ogni  $i$ . Perciò  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \subset I$ . Ma dalla Proposizione 10 del Capitolo 2,  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  è un ideale massimale in  $K[x_0, \dots, x_n]$ , quindi o  $I = K[x_0, \dots, x_n]$  o  $I = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ .

Restringendoci a varietà proiettive non vuote e ideali radicali omogenei particolari, possiamo rendere biunivoca la corrispondenza descritta nel Teorema 17.

**Teorema 20.** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso. Se ci restringiamo a varietà proiettive non vuote e ideali radicali omogenei propriamente contenuti in  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ , allora*

$$\mathbf{I}: \begin{array}{l} \text{varietà proiettive} \\ \text{non vuote} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{ideali radicali omogenei} \\ \text{contenuti in } \langle x_0, \dots, x_n \rangle \end{array}$$

$$\text{e} \quad \mathbf{V}: \begin{array}{l} \text{ideali radicali omogenei} \\ \text{contenuti in } \langle x_0, \dots, x_n \rangle \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{varietà proiettive} \\ \text{non vuote} \end{array}$$

*sono biezioni che invertono le inclusioni, in particolare sono una l'inversa dell'altra.*

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che se  $I$  è un ideale omogeneo proprio, allora  $I \subset \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ . Supponiamo  $f \in I$ , allora tutte le componenti omogenee  $f_i$  di  $f$  sono in  $I$ , in particolare la componente omogenea di grado 0,  $f_0 \in I$ . Dobbiamo avere  $f_0 = 0$ , poiché se fosse  $f_0 = c \in I$ , allora  $1/c \cdot c = 1 \in I$  e  $I = K[x_0, \dots, x_n]$ . Quindi  $f$  è somma di polinomi di grado  $\geq 1$  e si può scrivere come combinazione di  $x_i$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$ . Perciò  $I \subset \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ .

Con queste premesse, il resto della dimostrazione segue dalla dimostrazione del Teorema 5 del Capitolo 2 nel caso affine.  $\square$

Grazie ai Teoremi 17 e 20 possiamo riformulare le operazioni su ideali omogenei nelle corrispondenti operazioni su varietà proiettive, che si corrispondono come le operazioni studiate nel Capitolo 2 nel caso affine.

**Proposizione 24.** *Siano  $I$  e  $J$  ideali omogenei in  $K[x_0, \dots, x_n]$ , allora:*

- *alla somma di ideali corrisponde l'intersezione di varietà:*

$$\mathbf{V}(I + J) = \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$$

- *al prodotto di ideali corrisponde l'unione di varietà:*

$$\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$$

- *all'intersezione di ideali corrisponde l'unione di varietà:*

$$\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che la Proposizione 16 della Sezione 3 ci assicura che  $I + J$ ,  $I \cdot J$  e  $I \cap J$  sono ideali omogenei, quindi è possibile applicare la funzione  $\mathbf{V}$  e ottenere delle varietà proiettive.

D'altra parte, ricordando che  $I$  e  $J$  sono generati da polinomi omogenei, e che il prodotto di polinomi omogenei è ancora un polinomio omogeneo, si dimostra come nel Lemma 1 del Capitolo 1 che  $\mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$  e  $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$  sono varietà proiettive.

Il resto della dimostrazione è uguale al caso affine, si vedano rispettivamente i Teoremi 6, 7 e 8 nel Capitolo 2.  $\square$



**Proposizione 25.** *Sia  $I \subset K[x_0, \dots, x_n]$  un ideale omogeneo radicale, allora  $I$  è primo se e solo se  $V = \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{P}^n(K)$  è una varietà proiettiva irriducibile.*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $I$  ideale omogeneo primo, e assumiamo  $V = V_1 \cup V_2$ , con  $V_1 \neq V$  e  $V_1, V_2$  varietà proiettive. Vogliamo dimostrare  $V = V_2$ , innanzitutto  $V_2 \subset V$ , ora proviamo  $V \subset V_2$ . Dato che  $V_1 \subsetneq V$ , applicando  $\mathbf{I}$  abbiamo  $\mathbf{I}(V) \subsetneq \mathbf{I}(V_1)$ , essendo  $I$  radicale  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I \subsetneq \mathbf{I}(V_1)$ . Possiamo considerare  $f \in \mathbf{I}(V_1) - I$  e  $g \in \mathbf{I}(V_2)$ , allora  $fg \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$  poiché  $\mathbf{V}(I) = V_1 \cup V_2$ . Siccome  $I$  è primo,  $f \in I$  o  $g \in I$ , ma abbiamo assunto che  $f \notin I$  perciò rimane  $g \in I$  e vale l'inclusione  $\mathbf{I}(V_2) \subset I$ , applicando  $\mathbf{V}$  otteniamo  $V = \mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) \subset \mathbf{V}(\mathbf{I}(V_2)) = V_2$ . Quindi  $V = V_2$  e  $V$  irriducibile.

Sia ora  $I$  ideale omogeneo radicale e  $\mathbf{V}(I) = V$  varietà irriducibile. Consideriamo  $f, g$  polinomi omogenei tali che  $fg \in I$ , possiamo definire le varietà proiettive  $V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$  e  $V_2 = V \cap \mathbf{V}(g)$ .  $fg \in I$  implica che  $V = V_1 \cup V_2$ , ma  $V$  irriducibile dunque  $V = V_1$  o  $V = V_2$ . Nel primo caso  $V = V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$  e  $f$  si annulla su  $V$ , quindi  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ , nel secondo caso risulta  $g \in I$ , e per la Proposizione 18  $I$  è primo.  $\square$

Dalla precedente proposizione segue il

**Corollario 5.** *Se  $K$  è un campo algebricamente chiuso, le funzioni  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}$  inducono una corrispondenza biunivoca tra varietà non vuote irriducibili di  $\mathbb{P}^n(K)$  e ideali omogenei primi di  $K[x_0, \dots, x_n]$  propriamente contenuti in  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ .*

Nel caso affine avevamo osservato che i punti di  $K^n$  corrispondono agli ideali massimali di  $K[x_1, \dots, x_n]$ , ma questa relazione non si mantiene passando al proiettivo. Infatti, lavorando in  $K$  campo algebricamente chiuso, gli unici ideali massimali sono del tipo  $\langle x_0 - a_0, \dots, x_n - a_n \rangle$ , quindi l'unico ideale omogeneo massimale in  $K[x_0, \dots, x_n]$  è  $I = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ , e abbiamo dimostrato che a  $I$  è associata la varietà vuota.

### 3.5 Chiusura proiettiva di varietà affini

Nella Sezione 2 abbiamo mostrato che da ogni varietà proiettiva si possono ricavare delle varietà affini. In questa sezione invece vorremmo trovare una varietà proiettiva a partire da una affine. Abbiamo già notato nell'Esempio 19 della Sezione 2 che il modo più intuitivo non fornisce la varietà che ci aspettiamo, per questo vogliamo un metodo per costruire la più piccola varietà proiettiva che contiene una varietà affine data.

**Definizione 22.** *Data una varietà affine  $W \subset K^n$ , definiamo **chiusura proiettiva** di  $W$  la varietà proiettiva  $\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$ , dove  $\mathbf{I}_a(W)^h \subset K[x_0, \dots, x_n]$  è l'omogeneizzato dell'ideale  $\mathbf{I}_a(W)$ .*

Studiamo le proprietà della chiusura proiettiva di una varietà affine.

**Proposizione 26.** *Sia  $W \subset K^n$  una varietà affine e sia  $\overline{W} \subset \mathbb{P}^n(K)$  la sua chiusura proiettiva. Allora:*

1.  $\overline{W} \cap U_0 = \overline{W} \cap K^n = W$ ;
2.  $\overline{W}$  è la più piccola varietà proiettiva di  $\mathbb{P}^n(K)$  che contiene  $W$ ;
3.  $W$  è irriducibile se e solo se  $\overline{W}$  è irriducibile;
4. Nessuna componente irriducibile di  $\overline{W}$  giace nell'iperpiano all'infinito  $\mathbf{V}(x_0) \subset \mathbb{P}^n(K)$ .

*Dimostrazione.*

1. Fissata  $x_0$  variabile rispetto a cui si omogeneizza, consideriamo l'omogeneizzato dell'ideale associato a  $W$ ,  $\mathbf{I}_a(W)^h = \langle f^h | f \in \mathbf{I}_a(W) \rangle$ , e ricordiamo che  $U_0$  è l'insieme dei punti di  $\mathbb{P}^n(K)$  del tipo  $[1, x_1, \dots, x_n]$  e che  $f(x_1, \dots, x_n) = f^h(1, x_1, \dots, x_n)$ , allora abbiamo la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \overline{W} \cap U_0 &= \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h) \cap U_0 = \mathbf{V}(\langle f^h | f \in \mathbf{I}_a(W) \rangle) \cap U_0 \\ &= \mathbf{V}_a(\langle f^h(1, x_1, \dots, x_n) | f \in \mathbf{I}_a(W) \rangle) = \mathbf{V}_a(\langle f | f \in \mathbf{I}_a(W) \rangle) \\ &= \mathbf{V}_a(\mathbf{I}_a(W)) = W. \end{aligned}$$

2. Dobbiamo provare che se  $V$  è una varietà proiettiva che contiene  $W$ , allora  $\overline{W} \subset V$ . Supponiamo che  $V = \mathbf{V}(F_1, \dots, F_s)$ , allora gli  $F_i$  si annullano in  $V$ , di conseguenza i loro deomogeneizzati  $f_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n)$  si annullano in  $W$ . Così,  $f_i \in \mathbf{I}_a(W)$  e  $f_i^h \in \mathbf{I}_a(W)^h$ . Questo mostra che  $f_i^h$  si annulla in  $\overline{W} = \mathbf{V}(\mathbf{I}_a(W)^h)$ , ma sappiamo dalla Proposizione 13 della Sezione 1 che  $F_i = x_0^{e_i} f_i^h$  per un intero  $e_i$ , quindi  $F_i$  si annulla in  $\overline{W}$ , e poiché vale per ogni  $i$ ,  $\overline{W} \subset V$ .
3. Sia  $W$  irriducibile, e sia  $\overline{W} = W_1 \cup W_2$ , con  $\overline{W} \neq W_1$ . Dal punto 1. sappiamo che  $W = \overline{W} \cap U_0 = (W_1 \cup W_2) \cap U_0 = (W_1 \cap U_0) \cup (W_2 \cap U_0)$ . Ma o  $W = W_1 \cap U_0$  o  $W = W_2 \cap U_0$ , dato che  $\overline{W} \neq W_1$ , rimane  $W = W_2 \cap U_0$ , cioè  $\overline{W} = W_2$ , quindi  $\overline{W}$  varietà irriducibile.

Per l'altra implicazione, sia  $\overline{W}$  irriducibile e  $W = V_1 \cup V_2$ , con  $V_1$  e  $V_2$  varietà affini e  $V_1 \neq W$ . Consideriamo le chiusure proiettive di  $V_1$  e  $V_2$ , dal punto 1 sappiamo che  $V_1 = \overline{V}_1 \cap U_0$  e  $V_2 = \overline{V}_2 \cap U_0$ . Abbiamo la catena di uguaglianze:

$$\overline{W} \cap U_0 = W = V_1 \cup V_2 = (\overline{V}_1 \cap U_0) \cup (\overline{V}_2 \cap U_0) = (\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2) \cap U_0.$$

Il punto 2 afferma che  $\overline{V}_1$ , rispettivamente  $\overline{V}_2$ , è la più piccola varietà proiettiva che contiene  $V_1$ , rispettivamente  $V_2$ ; quindi  $\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2$  è la più

piccola varietà che contiene  $V_1 \cup V_2 = W$ , ovvero è la chiusura proiettiva di  $W$ . Perciò  $\overline{W} = \overline{V_1} \cup \overline{V_2}$ , ma  $\overline{W}$  è irriducibile, quindi  $\overline{W} = \overline{V_1}$  o  $\overline{W} = \overline{V_2}$ . Nel primo caso avremmo  $W = \overline{W} \cap U_0 = \overline{V_1} \cap U_0 = V_1$  che è impossibile, dunque vale il secondo caso  $W = \overline{W} \cap U_0 = \overline{V_2} \cap U_0 = V_2$  e risulta  $W$  irriducibile.

4. Sia  $\overline{W} = V_1 \cup \dots \cup V_m$  la decomposizione minimale di  $\overline{W}$  in componenti irriducibili. Supponiamo che una di queste, per esempio  $V_1$ , sia contenuta nell'iperpiano all'infinito  $\mathbf{V}(x_0)$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} W &= \overline{W} \cap U_0 = (V_1 \cup \dots \cup V_m) \cap U_0 \\ &= (V_1 \cap U_0) \cup ((V_2 \cup \dots \cup V_m) \cap U_0) \\ &= (V_2 \cup \dots \cup V_m) \cap U_0. \end{aligned}$$

Quindi  $V_2 \cup \dots \cup V_m$  è una varietà proiettiva che contiene  $W$ , e per la minimalità della chiusura proiettiva,  $\overline{W} = V_2 \cup \dots \cup V_m$ , quindi  $V_1 \subset V_2 \cup \dots \cup V_m$ . Questo è impossibile perché  $V_1$  è una componente irriducibile di  $\overline{W}$ , perciò nessuna componente irriducibile di  $\overline{W}$  giace in  $\mathbf{V}(x_0)$ .

□

**Esempio 20.** Calcoliamo la chiusura proiettiva di una parabola in  $\mathbb{R}^2$ ,  $V = \mathbf{V}_a(x_2 - x_1^2)$ . L'ideale associato a  $V$  è  $\mathbf{I}_a(V) = \langle x_2 - x_1^2 \rangle = \langle f \rangle$ , chiamiamo  $J = \langle x_2 x_0 - x_1^2 \rangle = \langle f^h \rangle$  e diciamo che  $\mathbf{I}_a(V)^h = J$ .

Infatti, sia  $g \in J$ , allora  $g$  è multiplo di  $f^h$ , e per definizione,  $\mathbf{I}_a(V)^h$  è generato da tutti gli omogeneizzati dei polinomi di  $\mathbf{I}_a(V)$ , in particolare  $f^h$  è uno dei generatori, quindi  $g \in \mathbf{I}_a(V)^h$  e abbiamo  $J \subset \mathbf{I}_a(V)^h$ .

Sia ora  $g \in \mathbf{I}_a(V)^h$ , sappiamo che esistono  $f_1^h, \dots, f_N^h$  polinomi omogenei che formano una base di  $\mathbf{I}_a(V)^h$ , quindi  $g$  si scriverà  $g = \sum_{i=1}^N A_i f_i^h$ . Dalla definizione di ideale omogeneizzato, per ogni  $i$ ,  $f_i^h \in \mathbf{I}_a(V)^h \Rightarrow f_i \in \mathbf{I}_a(V)$ , quindi  $f_i = B_i f$  con  $B_i$  polinomi opportuni. Omogeneizzando,  $f_i^h = B_i^h f^h$ , e sostituendo abbiamo  $g = \sum_{i=1}^N A_i B_i^h f^h = f^h \cdot \left( \sum_{i=1}^N A_i B_i \right)$ , perciò  $g \in J$  e  $\mathbf{I}_a(V)^h \subset J$ .

Dalla definizione, la chiusura proiettiva di  $V$  è  $\overline{V} = \mathbf{V}(x_2 x_0 - x_1^2)$ . Vediamo che  $\overline{V} \cap U_0 = \mathbf{V}_a(x_2 - x_1^2) = V$ , e i punti all'infinito si trovano intersecando con l'iperpiano  $H_0$ ,  $\overline{V} \cap H_0 = \mathbf{V}(x_2 x_0 - x_1^2, x_0)$ , rimangono le equazioni  $x_0 = 0, x_1^2 = 0$ , e la varietà diventa  $\overline{V} \cap H_0 = \mathbf{V}(x_0, x_1) = \{[0, 0, 1]\}$ . Quindi per ottenere la chiusura proiettiva di  $V$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  basta aggiungere un punto a  $V$ ,  $\overline{V} = V \cup [0, 0, 1]$ .

La definizione di chiusura proiettiva richiede di conoscere l'ideale associato alla varietà affine,  $\mathbf{I}_a(W)$ , mentre il prossimo teorema permette di calcolare la chiusura proiettiva di  $W$  direttamente da ogni ideale  $I$  che definisce  $W = \mathbf{V}_a(I)$ . Notiamo però che vale solo in un campo algebricamente chiuso.

**Teorema 21.** *Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso e sia  $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$  un ideale. Allora  $\mathbf{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$  è la chiusura proiettiva di  $\mathbf{V}_a(I) \subset K^n$ .*

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $W = \mathbf{V}_a(I) \subset K^n$  e  $Z = \mathbf{V}(I^h) \subset \mathbb{P}^n(K)$ . Adattando la dimostrazione del punto 1 della Proposizione 26, abbiamo che  $Z$  è una varietà proiettiva contenente  $W$ .

Per provare che  $Z$  è la più piccola di queste varietà, procediamo come nel punto 2 della Proposizione 26. Sia  $V = \mathbf{V}(F_1, \dots, F_s)$  una varietà proiettiva che contiene  $W$ . Come nel ragionamento precedente, per ogni  $i = 1, \dots, s$ , il deomogeneizzato  $f_i = F_i(1, x_1, \dots, x_n)$  sta in  $\mathbf{I}_a(W)$ . Poiché  $K$  è algebricamente chiuso, il Nullstellensatz implica che  $\mathbf{I}_a(W) = \sqrt{I}$ , cosicché  $f_i^m \in I$  per qualche intero  $m$ . Questo ci dice che  $(f_i^m)^h \in I^h$ , e, di conseguenza,  $(f_i^m)^h$  si annulla nei punti di  $Z$ . Utilizzando la formula 3.1 per l'omogeneizzazione di un polinomio,  $f^h = x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$  e otteniamo  $(f_i^m)^h = (f_i^h)^m$ , infatti

$$(f^h)^m = \left( x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \right)^m = x_0^{dm} f^m\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = (f^m)^h.$$

Di conseguenza  $f_i^h$  si annulla in  $Z$ . Allora, dato che  $F_i = x_0^{e_i} f_i^h$ , anche  $F_i$  si annulla in  $Z$ . Possiamo quindi concludere che  $Z \subset W$ . Questo mostra che  $Z$  è la più piccola varietà proiettiva che contiene  $W$ . Dato che la chiusura proiettiva  $\overline{W}$  ha la stessa proprietà per la Proposizione 26, allora  $Z = \overline{W}$ .  $\square$

**Esempio 21.** *Il teorema precedente non vale in campi non algebricamente chiusi, come si nota in questo esempio.*

Consideriamo  $I = \langle x_1^2 + x_2^4 \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2]$ . Allora  $W = \mathbf{V}_a(I)$  è il punto  $(0, 0)$ , e la sua chiusura proiettiva è  $\overline{W} = \{[1, 0, 0]\} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , poiché è la più piccola varietà proiettiva che contiene  $W$ .

Per applicare il Teorema 21 consideriamo  $I^h$ , e si dimostra come nell'Esempio 20 che  $I^h$  è generato dall'omogeneizzato di  $x_1^2 + x_2^4$ ,  $I^h = \langle x_1^2 x_0^2 + x_2^4 \rangle$ . Calcoliamo  $\mathbf{V}(I^h)$ , poiché lavoriamo in  $\mathbb{R}$  otteniamo le equazioni  $x_1 = 0, x_2 = 0$  o  $x_0 = 0, x_2 = 0$ , che conducono a  $\mathbf{V}(I^h) = \{[0, 1, 0], [1, 0, 0]\}$ . Quindi  $\mathbf{V}(I^h)$  dovrebbe essere la chiusura proiettiva di  $W$ , che però è diversa dalla chiusura proiettiva  $\overline{W}$  trovata in precedenza.

**Esempio 22.** *Nell'Esempio 19 della Sezione 2 abbiamo affermato che la più piccola varietà proiettiva che contiene la cubica gobba affine è  $V' = \mathbf{V}(x_2 x_0 - x_1^2, x_3 x_0^2 - x_1^3, x_1 x_3 - x_2^2) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , formata dall'unione tra la cubica gobba e il punto  $[0, 0, 0, 1]$ . Ora mostriamo che questa è proprio la chiusura proiettiva della cubica gobba.*

Consideriamo  $I = \langle x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$  l'ideale della cubica gobba in  $\mathbb{R}^3$ . Dimostriamo innanzitutto che se  $J = \langle x_1^2 - x_2, x_1 x_2 - x_3, x_1 x_3 - x_2^2 \rangle = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ , allora  $I = J$  e  $\mathbf{V}_a(I) = \mathbf{V}_a(J)$ , quindi anche  $J$  è un ideale associato alla cubica gobba.

Notiamo che  $g_1 = -f_1$ ,  $g_2 = -f_2 + x_1 f_1$  e  $g_3 = x_1 f_2 - (x_2 + x_1) f_1$ , infatti

$$\begin{aligned} -f_2 + x_1 f_1 &= -(x_3 - x_1^3) + x_1(x_2 - x_1^2) = -x_3 + x_1^3 + x_1 x_2 - x_1^3 \\ &= x_1 x_2 - x_3 = g_2; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_1 f_2 - (x_2 + x_1) f_1 &= x_1(x_3 - x_1^3) - (x_2 + x_1)(x_2 - x_1^2) \\ &= x_1 x_3 - x_1^4 - x_2^2 + x_1^4 = x_1 x_3 - x_2^2 = g_3. \end{aligned}$$

Da ciò si ricava  $I \subset J$  perché ogni polinomio  $g \in I$  è del tipo  $g = A_1 f_1 + A_2 f_2 = -A_1 g_1 + A_2(-x_1 g_1 - g_2)$ , quindi  $g$  si scrive come combinazione di  $g_1, g_2, g_3$  e  $g \in J$ . Viceversa se  $g \in J$  allora  $g = B_1 g_1 + B_2 g_2 + B_3 g_3 = -B_1 f_1 + B_2(x_1 f_1 - f_2) + B_3(x_1 f_2 - (x_2 + x_1) f_1)$  e si ha  $g \in I$ , dunque  $I = J$ .

Vogliamo trovare una base per l'omogeneizzato di  $I$ , e visto che  $I = J$  avremo  $I^h = J^h$ . Chiamiamo  $G = \langle g_1^h, g_2^h, g_3^h \rangle$  l'ideale generato dagli omogeneizzati di  $g_1, g_2, g_3$  (osserviamo che  $g_3$  è omogeneo quindi  $g_3 = g_3^h$ ), e dimostriamo che  $J^h = G$ .

Sia  $f \in G$ , allora  $f$  si scrive come combinazione di  $g_1^h, g_2^h, g_3^h$ ,  $J^h$  per definizione è generato da tutti gli omogeneizzati dei polinomi di  $J$ ; in particolare da  $g_1^h, g_2^h, g_3^h$ , quindi  $f \in J^h$  e  $G \subset J^h$ . Per l'inclusione opposta, consideriamo  $g \in J^h$ . Sappiamo che esistono dei polinomi  $p_1^h, \dots, p_s^h$  che formano una base finita di generatori per  $J^h$ , tali che per ogni  $i$ ,  $p_i \in J$ . Quindi per ogni  $i = 1, \dots, s$ ,  $p_i = A_i g_1 + B_i g_2 + C_i g_3$ , per opportuni polinomi  $A_i, B_i, C_i$ . Supponiamo che  $A_i g_1$  sia di grado  $d_1$ ,  $B_i g_2$  di grado  $d_2$  e  $C_i g_3$  di grado  $d_3$ , e sia  $d = \max\{d_1, d_2, d_3\}$ , allora omogeneizzando abbiamo

$$\begin{aligned} p_i^h &= x_0^d p_i \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) = x_0^d \cdot (A_i g_1 + B_i g_2 + C_i g_3) \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \\ &= x_0^d \cdot \left[ A_i g_1 \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) + B_i g_2 \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) + C_i g_3 \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \right] \\ &= x_0^{d-d_1} \left[ x_0^{d_1} A_i g_1 \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \right] + x_0^{d-d_2} \left[ x_0^{d_2} B_i g_2 \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \right] + \\ &\quad + x_0^{d-d_3} \left[ x_0^{d_3} C_i g_3 \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \right] \\ &= x_0^{d-d_1} (A_i g_1)^h + x_0^{d-d_2} (B_i g_2)^h + x_0^{d-d_3} (C_i g_3)^h \\ &= x_0^{d-d_1} A_i^h g_1^h + x_0^{d-d_2} B_i^h g_2^h + x_0^{d-d_3} C_i^h g_3^h. \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^s q_i p_i^h = \sum_i q_i (x_0^{d-d_1} A_i^h g_1^h + x_0^{d-d_2} B_i^h g_2^h + x_0^{d-d_3} C_i^h g_3^h) = \\ &= g_1^h \left( \sum_i q_i x_0^{d-d_1} A_i^h \right) + g_2^h \left( \sum_i q_i x_0^{d-d_2} B_i^h \right) + g_3^h \left( \sum_i q_i x_0^{d-d_3} C_i^h \right) \end{aligned}$$

Cioè  $g$  si può scrivere come combinazione di  $g_1^h, g_2^h, g_3^h$  quindi appartiene a  $G$ , e possiamo concludere  $J^h = \langle g_1^h, g_2^h, g_3^h \rangle$ .

Dal Teorema 21, chiamiamo  $V = \mathbf{V}_a(J)$  la cubica gobba affine, allora la chiusura proiettiva di  $V$  è  $\bar{V} = \mathbf{V}(J^h)$ . Vediamo che  $\bar{V} = V'$ , poiché  $\bar{V} \cap U_0 = V$  e  $\bar{V} \cap H_0 = \mathbf{V}(x_1^2 - x_0x_2, x_1x_2 - x_0x_3, x_1x_3 - x_2^2, x_0) = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_0) = [0, 0, 0, 1]$ . Quindi per trovare la chiusura proiettiva della cubica gobba basta aggiungere un solo punto all'infinito.

La cubica gobba che abbiamo portato come esempio ripetutamente, fa parte di una famiglia di curve molto ampia, le *curve razionali normali*. In  $K^n$  le curve razionali normali sono definite dall'immagine della parametrizzazione  $\phi : K \rightarrow K^n$ ,  $\phi(t) = (t, t^2, t^3, \dots, t^n)$ . La parametrizzazione  $\phi$  definisce una varietà affine, poiché si ricavano le equazioni  $x_2 = x_1^2$ ,  $x_3 = x_1^3$ , ...,  $x_n = x_1^n$  e la varietà affine è  $C_n = \mathbf{V}_a(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3, \dots, x_n - x_1^n) \subset K^n$ . Notiamo che per  $n = 3$  otteniamo  $C_3 = \mathbf{V}_a(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3)$  che è la cubica gobba.

Avendo definito nuove varietà affini, possiamo cercarne la chiusura proiettiva. Vediamo, come nell'Esempio 19 della Sezione 2, che omogeneizzando le equazioni non troviamo la chiusura proiettiva. Infatti considerando  $C_4$  in  $K^4$ , la varietà proiettiva ottenuta omogeneizzando le equazioni è  $W = \mathbf{V}(x_2x_0 - x_1^2, x_3x_0^2 - x_1^3, x_4x_0^3 - x_1^4)$ , e  $W \cap U_0 = C_4$ , ma  $W \cap H_0 = \mathbf{V}(x_1, x_0)$ , che non rispecchia quello che ci aspettiamo dal comportamento di una curva all'infinito.

Le curve razionali normali in  $\mathbb{P}^n(K)$  si ottengono dalla parametrizzazione proiettiva  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $\varphi(t_0, t_1) = (t_0^n, t_0^{n-1}t_1, \dots, t_1^n)$ . Osserviamo che per  $n = 3$  la parametrizzazione è  $(t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3)$ , che porta alle equazioni:

$$\begin{cases} x_0 = t_0^3 \\ x_1 = t_0^2t_1 \\ x_2 = t_0t_1^2 \\ x_3 = t_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1x_2 = x_0x_3 \\ x_1^2 = x_0x_2 \\ x_1x_3 = x_2^2 \end{cases}$$

La varietà ottenuta è  $C'_3 = \mathbf{V}(x_1x_2 - x_0x_3, x_1^2 - x_0x_2, x_1x_3 - x_2^2)$ , ed è proprio la chiusura proiettiva della cubica gobba, già descritta nell'Esempio 22.

Notiamo inoltre che le equazioni trovate sono le stesse che si ottengono dal porre uguali a zero i determinanti dei minori di ordine 2 della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Questo risultato si può estendere alla dimensione  $n$ , infatti la curva razionale normale in  $\mathbb{P}^n(K)$  è la varietà definita dalle equazioni ottenute dall'annullarsi dei determinanti dei minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Cioè imponiamo che la matrice 3.2 abbia rango 1, e le equazioni che così si ottengono sono  $F_{i,j}(x) = x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1}$ , con  $1 \leq i \leq j \leq n-1$ . Da qui si nota che le curve razionali normali sono tutte individuate dall'intersezione di quadriche.

Infine, possiamo generalizzare quanto già osservato per la curva  $C_3$ , ovvero le curve razionali normali in  $\mathbb{P}^n(K)$  sono le chiusure proiettive delle rispettive curve razionali normali affini. Verifichiamolo per esempio per  $n=4$ , abbiamo la parametrizzazione  $(t_0^4, t_0^3 t_1, t_0^2 t_1^2, t_0 t_1^3, t_1^4)$  e le equazioni sono date dai determinanti dei minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

quindi

$$C'_4 = \mathbf{V}(x_0 x_2 - x_1^2, x_0 x_3 - x_1 x_2, x_0 x_4 - x_1 x_3, x_1 x_3 - x_2^2, x_1 x_4 - x_2 x_3, x_2 x_4 - x_3^2).$$

Calcoliamo le intersezioni  $C'_4 \cap U_0$  e  $C'_4 \cap H_0$ :

$$C'_4 \cap U_0 = \mathbf{V}_a(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1 x_2, x_4 - x_1 x_3, x_1 x_3 - x_2^2, x_1 x_4 - x_2 x_3, x_2 x_4 - x_3^2),$$

da cui si ricava la parametrizzazione  $x_1 = t$ ,  $x_2 = t^2$ ,  $x_3 = t^3$ ,  $x_4 = t^4$  che rappresenta  $C_4$ . Invece  $C'_4 \cap H_0 = \mathbf{V}(x_0, x_1, x_2, x_3) = [0, 0, 0, 0, 1]$ , quindi  $C'_4 = C_4 \cup [0, 0, 0, 0, 1]$ , abbiamo aggiunto a  $C_4$  un solo punto perciò, essendo la più piccola varietà proiettiva che contiene  $C_4$ ,  $C'_4$  ne è la chiusura proiettiva.





# Bibliografia

- [RH] Robin Hartshorne, “Algebraic Geometry”, Springer-Verlag, 1977
- [CLO] David Cox, John Little, Donald O’Shea, “Ideals, varieties, and algorithms”, Springer, 1996
- [JH] Joe Harris, “Algebraic Geometry, A first course”, Springer-Verlag, 1992
- [S] Edoardo Sernesi, “Geometria 1”, Bollati Boringhieri, 1989
- [E] Philippe Ellia, “Un’introduzione light alla geometria algebrica”, 2006,  
<http://web.unife.it/utenti/philippe.ellia/Docs/IntroLight-GA-2006.pdf>