

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Fasi geometriche, Fase di Berry ed Effetto Aharonov-Bohm

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:
Alessandro Antini

Sessione II
Anno Accademico 2014/2015

Abstract

Fasi geometriche, Fase di Berry ed Effetto Aharonov-Bohm

di Alessandro ANTINI

Un sistema sottoposto ad una lenta evoluzione ciclica è descritto da un'Hamiltoniana $\hat{H}(X_1(t), \dots, X_n(t))$ dipendente da un insieme di parametri $\{X_i\}$ che descrivono una curva chiusa nello spazio di appartenenza. Sotto le opportune ipotesi, il teorema adiabatico ci garantisce che il sistema ritornerà nel suo stato di partenza, e l'equazione di Schrödinger prevede che esso acquisirà una fase decomponibile in due termini, dei quali uno è stato trascurato per lungo tempo. Questo lavoro di tesi va ad indagare principalmente questa fase, detta fase di Berry o, più in generale, fase geometrica, che mostra delle caratteristiche uniche e ricche di conseguenze da esplorare: essa risulta indipendente dai dettagli della dinamica del sistema, ed è caratterizzata unicamente dal percorso descritto nello spazio dei parametri, da cui l'attributo geometrico. A partire da essa, e dalle sue generalizzazioni, è stata resa possibile l'interpretazione di nuovi e vecchi effetti, come l'effetto Aharonov-Bohm, che pare mettere sotto una nuova luce i potenziali dell'elettromagnetismo, e affidare loro un ruolo più centrale e fisico all'interno della teoria. Il tutto trova una rigorosa formalizzazione all'interno della teoria dei fibrati e delle connessioni su di essi, che verrà esposta, seppur in superficie, nella parte iniziale.

Indice

Abstract	i
Indice	iii
Introduzione	vii
1 Geometria e Topologia	1
1.1 Varietà differenziabili	1
1.1.1 Vettori tangenti	2
1.2 Forme differenziali	3
1.2.1 Forme su \mathbb{R}^n	3
1.2.2 Forme su varietà differenziabili	5
1.2.3 Forme differenziali a valori vettoriali	5
1.2.4 Pull-back di forme	6
1.2.5 Integrazione di forme	6
1.2.6 Derivata esterna e teorema di Stokes	7
1.3 Gruppi di Lie	8
1.3.1 Gruppo di trasformazioni di Lie	9
1.3.2 Sottogruppi ad un parametro	9
1.3.3 Algebra di Lie	10
1.3.4 Rappresentazione aggiunta	12
1.3.5 Forma di Maurer-Cartan	12
1.4 Fibrati	13
1.4.1 Fibrati principali	15
1.5 Connessioni su fibrati principali	16
1.5.1 Isomorfismo canonico tra \mathcal{G} e V_p	18
1.5.2 Connessione come 1-forma	19
1.5.3 Connessioni locali	20
1.5.4 Curvatura	22
1.5.5 Olonomia	22
1.5.6 Fibrato vettoriale associato ad un fibrato principale	23
2 La fase di Berry	25

2.1	Il teorema adiabatico	25
2.2	La fase di Berry	27
2.2.1	Fase dinamica	27
2.2.2	La fase geometrica	29
2.2.3	La fase di Berry come Oloonomia	31
2.2.4	Un esempio per la fase di Berry: sistemi dotati di spin in un campo magnetico esterno lentamente variabile	36
2.3	La fase di Aharonov-Anandan	41
3	Effetto Aharonov-Bohm	47
3.1	Potenziali e connessioni	47
3.2	L'effetto Aharonov-Bohm	50
3.2.1	L'effetto Aharonov-Bohm elettrico	51
3.2.2	L'effetto Aharonov-Bohm magnetico	52
3.2.3	L'effetto Aharonov-Bohm come fase di Berry	55
3.3	Verifiche sperimentali dell'effetto Aharonov-Bohm	56
3.3.1	L'esperimento di Chambers (1960)	56
3.3.2	L'esperimento di Tonomura (1986)	58
4	Conclusioni	61
A	Dimostrazione dell'equazione (2.27)	63
B	Calcolo della connessione $\tilde{\omega}$ della sezione 2.2.4	65
	Bibliografia	67
	Ringraziamenti	69

Ai miei genitori...

Introduzione

Dalla nascita della Meccanica Quantistica, per lungo tempo, ai fisici è sfuggito un aspetto tanto semplice quanto importante delle evoluzioni cicliche a cui un sistema può essere sottoposto. In particolare, se consideriamo un'evoluzione molto lenta, tanto che lo stato del sistema *appaia* imperturbato durante l'intero ciclo, ci aspettiamo naturalmente che, al termine di questo, il sistema ritorni nel suo stato originario. In meccanica quantistica il tutto trova una formulazione rigorosa nel cosiddetto teorema adiabatico.

Ma se quanto detto è valido per lo *stato* del sistema, cosa siamo in grado di dire riguardo la sua *fase*? L'equazione di Schrödinger prevede che il sistema nello stato $|\psi\rangle$ acquisisca, dopo un certo intervallo di tempo Δt , la fase

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_t^{t+\Delta t}\langle\psi(s)|\hat{H}(s)|\psi(s)\rangle ds\right\}$$

più una fase aggiuntiva a cui, per molto tempo, non è stato dato molto peso, perché dopotutto era “*solo una fase*” e poteva essere eliminata per mezzo di opportune ridefinizioni o trasformazioni. Sorprendentemente, però, se il ciclo si chiude, questa fase non risulta più eliminabile e ad accorgersene fu Michael Berry nel 1983, da cui il nome “fase di Berry”. Una particolarità di questa fase, che la distingue dall'altro termine previsto dall'equazione di Schrödinger, è il suo carattere fondamentalmente geometrico, che la rende indipendente, ad esempio, da come una certa evoluzione avviene a patto che questa avvenga adiabaticamente. Un'attenta analisi mostra come questa fase non sia altro che un esempio di *olonomia* associata al *trasporto parallelo* della fase definito dall'evoluzione adiabatica. Per comprendere meglio il concetto di olonomia possiamo immaginare un vettore su una superficie sferica che viene trasportato parallelamente (ad esempio imponendo che non ruoti rispetto alla direzione radiale) lungo un percorso chiuso (figura 1). Come è risaputo, il vettore generalmente non tornerà parallelo a se stesso nonostante la prescrizione imposta

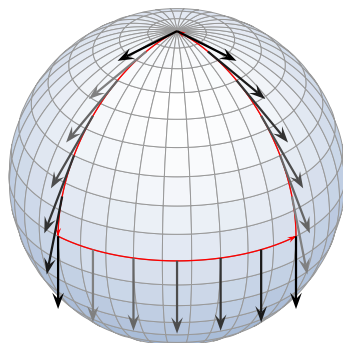


FIGURA 1: Un vettore trasportato parallelamente su una superficie sferica non ritorna generalmente parallelo a se stesso dopo aver descritto un percorso chiuso, ma risulterà ruotato di un certo angolo dipendente dal percorso stesso: l'angolo acquisito è un esempio di ologonia.

sul trasporto. Questo è un chiaro esempio di ologonia dovuto alla geometria (curva) dello spazio in cui il trasporto avviene.

È interessante considerare il caso del trasporto parallelo di un vettore sulla superficie di un cono (figura 2).

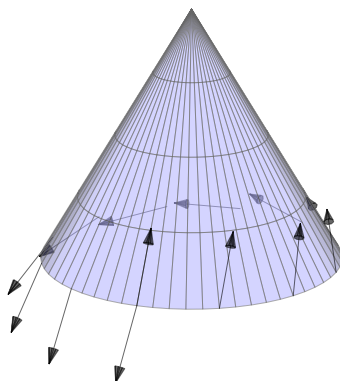


FIGURA 2: Un vettore trasportato parallelamente sulla superficie di un cono.

Essa è certamente curva e dunque ci aspettiamo di osservare effetti analoghi a quelli visti nel caso della superficie sferica, ma una particolarità del cono è che risulta piatto *quasi ovunque*: la *curvatura* ha origine nel suo vertice. Se infatti tagliassimo il cono lungo una linea congiungente il vertice con un punto della sua base otterremmo una superficie piatta, ovvero la porzione di un piano. Dunque un vettore “avverte” la curvatura della superficie durante il suo spostamento, senza necessariamente passare per il vertice, dove questa curvatura ha origine. Curiosamente possiamo considerare questa situazione come l'equivalente geometrico dell'effetto

Aharonov-Bohm: se una particella descrive un percorso chiuso attorno ad una regione in cui è confinato un campo magnetico, essa manifesterà la presenza di questo campo nell'acquisizione di una fase, senza necessariamente attraversare il campo e dunque interagire con esso. Classicamente questo effetto è del tutto inspiegabile: se una particella non interagisce con il campo magnetico nessun effetto può essere misurato. Eppure l'effetto c'è e ci suggerisce di reinterpretare i ruoli di campi e potenziali nella teoria dell'elettromagnetismo e di indagare più a fondo il carattere geometrico di quest'ultima. Non è un caso, infatti, che l'analogia con la curvatura del cono sia particolarmente calzante: i campi elettromagnetici si identificano con la curvatura di un fibrato principale, la struttura geometrica in cui sorgono naturalmente i concetti di trasporto parallelo, ologonomia, connessione e curvatura.

Nel primo capitolo saranno introdotti questi ed altri concetti matematici per ricavare poi, anche grazie a questi strumenti, la fase di Berry e la fase di Aharonov-Anandan (una generalizzazione della fase di Berry) nel secondo capitolo. Nel terzo capitolo vengono descritti alcuni esempi che danno luogo all'effetto Aharonov-Bohm e due esperimenti che ne forniscono la prova sperimentale.

Capitolo 1

Geometria e Topologia

In questo capitolo verranno introdotti alcuni strumenti matematici, presi in prestito dalla geometria differenziale e dalla topologia, che si dimostreranno fondamentali per la comprensione e la descrizione degli effetti che verranno indagati in questo lavoro. Il punto di arrivo sarà la definizione dei fibrati principali e delle connessioni su di essi che, come vedremo, saranno ampiamente utilizzati nei prossimi capitoli.

1.1 Varietà differenziabili

Un insieme M è detto *varietà n -dimensionale* se per ogni punto $q \in M$ esiste un aperto $U \subset M$ contenente q che è in corrispondenza biunivoca con un aperto di \mathbb{R}^n . Diremo dunque che M appare localmente come \mathbb{R}^n . Non è necessario, e sarebbe anzi limitativo, richiedere che questa corrispondenza sia globale. Dunque ogni aperto U_i di M è associato ad una mappa $\phi_i : U \rightarrow \phi_i(U) \subset \mathbb{R}^n$ che assegna ad ogni punto $q \in U_i$ delle coordinate $(x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q))$. Questa associazione $U_i \rightarrow \phi_i$ definisce la coppia (U_i, ϕ_i) che è detta *carta*. Se q appartiene all'intersezione $U_i \cap U_j$ di due aperti, deve esistere una *trasformazione di coordinate* $g_{ij} : \phi(U_i) \rightarrow \phi(U_j)$ che metta in relazione i due diversi sistemi di coordinate:

$$\begin{aligned} q \rightarrow (x^1(q), x^2(q), \dots, x^n(q)) &\equiv \mathbf{x}(q) && \text{per mezzo di } \phi_i \\ q \rightarrow (y^1(q), y^2(q), \dots, y^n(q)) &\equiv \mathbf{y}(q) && \text{per mezzo di } \phi_j \end{aligned}$$

allora

$$\mathbf{y}(q) = g_{ij}(\mathbf{x}(q))$$

dove chiaramente $g_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$.

Se esiste un sistema di carte $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, detto *atlante*, tale che ogni punto $q \in M$ appartiene almeno ad un aperto $U_i \in (U_i, \phi_i)$ e tale che ogni trasformazione da un sistema di coordinate all'altro è definito da funzioni C^k , allora la varietà M è detta *varietà di classe C^k* , e più in generale *varietà differenziabile* se $k \geq 2$.

1.1.1 Vettori tangenti

Definiamo una curva su una varietà differenziabile M come una mappa differenziabile $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, $\lambda \rightarrow q(\lambda)$, dove λ è il parametro che distingue, nella nostra definizione, due curve γ_1, γ_2 tali che $\gamma_1(I_1) = \gamma_2(I_2)$, ovvero due curve che geometricamente coincidono ma che sono percorse con "velocità" differenti. Se $\gamma(I) \subset U$ allora ϕ definisce una curva $\phi \circ \gamma$ su $\phi(U)$, i cui punti sono individuati dai vettori $(x^1(q(\lambda)), x^2(q(\lambda)), \dots, x^n(q(\lambda)))$. Una variazione $d\lambda$ del parametro lungo la curva, provoca una variazione dx^i delle coordinate che individuano i punti di questa. Le funzioni $dx^i(q(\lambda))/d\lambda$ definiscono quindi, in ogni punto della curva, le componenti del *vettore tangente* alla curva nel punto q .

Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione su M , allora $f \equiv \phi \circ f^1$ è una funzione differenziabile su \mathbb{R}^n e $g = f \circ \gamma$ definisce una funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} , ed è possibile considerare la derivata di g lungo la curva γ :

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Data l'arbitrarietà nella scelta di f scriviamo:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

ovvero l'operazione di derivazione $d/d\lambda$ lungo la curva nel punto $q(\lambda)$ è determinata, fissato un sistema di coordinate $\{x^i\}$, unicamente dalle componenti $dx^i(q(\lambda))/d\lambda$ del vettore $\mathbf{v}_{q(\lambda)}$ tangente alla curva nel punto q . Siamo portati dunque a trovare una corrispondenza tra vettori tangenti alle curve in q e derivate direzionali lungo

¹Per comodità la notazione utilizzata non distingue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ da $f : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$

le curve passanti in q :

$$\frac{d}{d\lambda}(f) = \mathbf{v}_{q(\lambda)}(f) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} \equiv \mathbf{v}_{q(\lambda)}.$$

Possiamo dotare lo spazio delle derivate direzionali lungo le curve passanti per un punto di una struttura lineare. Allora, se $d/d\lambda$, $d/d\mu$ sono due elementi di questo spazio e a , b sono due elementi di \mathbb{R} , definiamo in ogni punto q fissato:

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\mu} = \left(a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dove $(a dx^i/d\lambda + b dx^i/d\mu)$ saranno le componenti di un vettore tangente ad una qualche curva passante in q . Infatti data una curva e un punto q su di essa siamo sempre in grado di trovare un *unico* vettore tangente \mathbf{v}_q ma il contrario non è vero: dato un vettore \mathbf{v}_q esiste un'intera classe di equivalenza di curve tangenti al vettore in q . Dunque possiamo identificare ogni vettore tangente con la classe di equivalenza di curve tangenti ad esso. Allora questi vettori formeranno in q uno spazio vettoriale $T_q(M)$ isomorfo a \mathbb{R}^n , se n è la dimensione di M , che viene detto *spazio tangente* alla varietà M nel punto q .

1.2 Forme differenziali

1.2.1 Forme su \mathbb{R}^n

Sia \mathbb{R}^n uno spazio vettoriale reale n -dimensionale. L'insieme $(\mathbb{R}^n)^*$ di tutti i funzionali lineari $\tilde{\omega} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detto spazio duale. Ogni funzionale che appartiene a questo spazio è una *1-forma* su \mathbb{R}^n . Lo spazio duale diviene lineare se definiamo l'azione della somma di due 1-forme $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ su un arbitrario vettore \mathbf{v} come :

$$(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)(\mathbf{v}) = \tilde{\omega}_1(\mathbf{v}) + \tilde{\omega}_2(\mathbf{v})$$

e se definiamo la moltiplicazione per uno scalare λ tramite :

$$(\lambda \tilde{\omega})(\mathbf{v}) = \lambda \tilde{\omega}(\mathbf{v}).$$

Se $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base in \mathbb{R}^n possiamo costruire corrispondentemente una base $\{\tilde{e}^i\}$ ² nel duale $(\mathbb{R}^n)^*$ definendo l'azione degli elementi dell'ultima sugli elementi della prima :

$$\tilde{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$$

Dunque se $\mathbf{v} = v^j \mathbf{e}_j$ è un vettore di \mathbb{R}^n e $\tilde{\omega} = \omega_i \tilde{e}^i$ è una 1-forma di $(\mathbb{R}^n)^*$, il valore che questa assume su \mathbf{v} sarà : $\tilde{\omega}(\mathbf{v}) = \tilde{\omega}(v^j \mathbf{e}_j) = v^j \tilde{\omega}(\mathbf{e}_j) = v^j \omega_i \tilde{e}^i(\mathbf{e}_j) = v^j \omega_i \delta^i_j = v^i \omega_i$.

Equivalentemente possiamo costruire uno spazio lineare di applicazioni bilineari e antisimmetriche $\tilde{\omega} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dette *2-forme* :

$$\tilde{\omega}(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \lambda_1 \tilde{\omega}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2 \tilde{\omega}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$$

$$\tilde{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\tilde{\omega}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

$$(\lambda \tilde{\omega})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \lambda \tilde{\omega}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$(\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \tilde{\omega}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \tilde{\omega}_2(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

Ponendo $\omega_{ij} = \tilde{\omega}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, la 2-forma può essere espressa come :

$$\tilde{\omega} = \omega_{ij} \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j = \frac{1}{2} \omega_{ij} (\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j - \tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^i) = \frac{1}{2} \omega_{ij} \tilde{e}^i \wedge \tilde{e}^j$$

dove il prodotto \wedge è definito dall'ultima uguaglianza. Più in generale definiamo il *prodotto esterno* \wedge tra k 1-forme tramite :

$$(\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_1(\mathbf{v}_1) & \cdots & \tilde{\omega}_k(\mathbf{v}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\omega}_1(\mathbf{v}_k) & \cdots & \tilde{\omega}_k(\mathbf{v}_k) \end{vmatrix}$$

Notiamo che tramite il prodotto esterno di k 1-forme abbiamo costruito un'applicazione $\tilde{\omega} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$ k -lineare e completamente antisimmetrica, ovvero una *k-forma* :

$$\tilde{\omega}(\lambda_1 \mathbf{v}'_1 + \lambda_2 \mathbf{v}''_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \lambda_1 \tilde{\omega}(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) + \lambda_2 \tilde{\omega}(\mathbf{v}''_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$$

²Per convenzione gli indici che individuano gli elementi di una base di \mathbb{R}^n sono posti in basso, mentre gli indici che individuano gli elementi di una base di $(\mathbb{R}^n)^*$ sono posti in alto. Il contrario sarà vero per le componenti di questi vettori rispetto alle basi.

$$\tilde{\omega}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m) = (-1)^\nu \tilde{\omega}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$$

dove

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{se la permutazione } i, j, \dots, m \text{ è pari;} \\ 1, & \text{se la permutazione } i, j, \dots, m \text{ è dispari} \end{cases}$$

per la quale può essere, analogamente ai casi precedenti, definita la somma di due k -forme e la moltiplicazione per scalare per rendere vettoriale lo spazio che le contiene. Se $\{\mathbf{e}_l\}$ è la base scelta su \mathbb{R}^n , allora una k -forma può essere espressa come:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{k!} \omega_{ij\dots m} \tilde{e}^i \wedge \tilde{e}^j \wedge \dots \wedge \tilde{e}^m$$

dove $\omega_{ij\dots m} = \tilde{\omega}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_m)$. Notiamo che a causa dell'antisimmetria delle componenti $\omega_{ij\dots m}$ solo $C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ di queste sono indipendenti, dunque lo spazio a cui le k -forme appartengono è C_k^n -dimensionale.

1.2.2 Forme su varietà differenziabili

Definiamo *k-forma differenziale* un campo di k -forme su una varietà M che sia differenziabile rispetto a \mathbf{x} , se $\mathbf{x} = \phi(P)$, dove $P \in M$ e $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una mappa su M . Dunque in ogni punto di M è definita una k -forma $\tilde{\omega}(\mathbf{x}) : \bigotimes^k T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$ che opera sui vettori dello spazio tangente alla varietà M nel punto di coordinate \mathbf{x} :

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!} \omega_{ij\dots m}(\mathbf{x}) \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^j \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^m$$

dove $\{\tilde{d}x^l\}$ è la base duale relativa alla base coordinata $\{\frac{\partial}{\partial x^l} = \mathbf{e}_l\}$ su $T_x(M)$ e $\omega_{ij\dots m}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni differenziabili rispetto a \mathbf{x} .

1.2.3 Forme differenziali a valori vettoriali

Una k -forma $\tilde{\omega}$ a valori vettoriali è una mappa lineare e completamente antisimmetrica definita su \mathbb{R}^n a valori in un qualche spazio V . Se $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ è una base in V allora

possiamo esprimere $\tilde{\omega}$ come:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$$

dove $\tilde{\omega}^\alpha$ sono delle k -forme a valori reali.

Analogamente a quanto fatto in precedenza possiamo associare una k -forma $\tilde{\omega}(\mathbf{x}) : \bigotimes^k T_x(M) \rightarrow V$ ad ogni punto della varietà M e richiedere la differenziabilità rispetto a \mathbf{x} di questa associazione, definendo dunque una forma differenziale a valori vettoriali.

1.2.4 Pull-back di forme

Se $f : X \rightarrow Y$ è un diffeomorfismo tra due varietà differenziabili, possiamo associargli un'applicazione lineare $f'(x) : T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$ per ogni $x \in X$, che determina l'immagine $f'(x)\mathbf{v}_x$ dei vettori $\mathbf{v}_x \in T_x(X)$ in $T_{f(x)}(Y)$. Dunque se f mappa una curva su X in una curva su Y , questa applicazione, detta *differenziale* o anche *pushforward* di f , trasformerà i vettori tangenti dell'una nei vettori tangenti dell'altra. Il vettore $f'(x)\mathbf{v}_x$ può essere determinato in base alla sua azione su un'arbitraria funzione differenziabile $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo :

$$(f'(x)\mathbf{v}_x)(h) = \mathbf{v}_{f(x)}(h) = \mathbf{v}_x(h \circ f).$$

Possiamo adesso definire qualcosa di del tutto analogo per un campo di k -forme. Sia ancora $f : X \rightarrow Y$ un diffeomorfismo, e $\tilde{\omega}$ un campo di k -forme definito su Y , ovvero $\tilde{\omega}_y : \bigotimes^k T_y(Y) \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo il *pull-back* ($f^*\tilde{\omega}$) di $\tilde{\omega}$ come segue :

$$(f^*\tilde{\omega})_x(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \tilde{\omega}_{f(x)}(f'(x)\mathbf{v}_1, f'(x)\mathbf{v}_2, \dots, f'(x)\mathbf{v}_k).$$

1.2.5 Integrazione di forme

Se $\tilde{\omega}$ è una n -forma su una varietà n -dimensionale, allora essa è completamente definita da una funzione differenziabile $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n.$$

Scelta una funzione f , siamo in grado, tramite $\tilde{\omega}$, di associare ad un insieme linearmente indipendente di n vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n; \mathbf{v}_i \in T_x(M)\}$ il volume del parallelepipedo n -dimensionale che essi formano:

$$\tilde{\omega}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{x}) \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

Se l'insieme dei vettori viene scelto tale che $\mathbf{v}_l = \Delta x^l \partial/\partial x^l$, dove Δx^l è un numero piccolo, allora :

$$\tilde{\omega}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{x}) \tilde{d}x^1 \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^n \left(\Delta x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \Delta x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = f(\mathbf{x}) \Delta x^1 \dots \Delta x^n$$

individua il volume infinitesimo di una regione di M attorno a $\phi^{-1}(\mathbf{x})$ quando Δx^l tende a zero. Dunque il volume finito di una regione $U \subset M$ sarà dato dalla somma dei volumi infinitesimi costruiti attorno ai punti $\phi^{-1}(\mathbf{x})$ al variare di \mathbf{x} in $\phi(U)$:

$$\int_U \tilde{\omega} \equiv \int_{\phi(U)} f(\mathbf{x}) dx^1 \dots dx^n$$

che definisce più in generale l'integrale di una n -forma $\tilde{\omega}$ su U .

L'integrale di una k -forma $\tilde{\omega}$ su una varietà n -dimensionale M può essere definito [3] mediante il pull-back di $\tilde{\omega}$ tramite la mappa differenziabile $f : D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ che descrive un percorso k -dimensionale σ su M^3 :

$$\int_{\sigma} \tilde{\omega} = \int_D f^* \tilde{\omega},$$

dove D è un poliedro di \mathbb{R}^k .

1.2.6 Derivata esterna e teorema di Stokes

Per definire un'operazione di differenziale su k -forme, cominceremo col definirne l'azione su una 0-forma, ovvero una funzione $f : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tilde{d}f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(f).$$

La 1-forma $\tilde{d}f$ è detta gradiente della funzione f . Notiamo che questa operazione di differenziale ha aumentato di 1 il grado della 0-forma. Per analogia vogliamo che

³Con percorso k -dimensionale si intende l'immagine di f in M che è un aperto di una sottovarietà k -dimensionale di M , come ad esempio una curva su una superficie.

il differenziale di una k -forma dia una $(k + 1)$ -forma e che, se $\tilde{\alpha}$ è una p -forma e $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ sono q -forme :

1. $\tilde{d}(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) = (\tilde{d}\tilde{\beta}) + (\tilde{d}\tilde{\gamma})$,
2. $\tilde{d}(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) = (\tilde{d}\tilde{\alpha}) \wedge \tilde{\beta} + (-1)^p \tilde{\alpha} \wedge (\tilde{d}\tilde{\beta})$,
3. $\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{\alpha}) = 0$.

Si può mostrare [7] che queste proprietà, assieme alla definizione di \tilde{d} data sulle funzioni, determina univocamente l'azione di \tilde{d} , che è detta *derivata esterna*, su una k -forma qualunque. Ad esempio se f e g sono due funzioni e $\tilde{\omega} = 1/k! \omega_{i\dots j} \tilde{d}x^i \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^j$ è una k -forma allora :

$$\tilde{d}(f\tilde{d}g) = \tilde{d}f \wedge \tilde{d}g$$

e

$$\tilde{d}\tilde{\omega} = \frac{1}{k!} \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha_{i\dots j}) \tilde{d}x^m \wedge \tilde{d}x^i \wedge \dots \wedge \tilde{d}x^j.$$

Formuliamo adesso il potente teorema di Stokes che rende evidente come l'operazione di derivata esterna e di integrazione siano l'una l'inversa dell'altra, e che generalizza quindi il teorema fondamentale del calcolo. Dunque se $\tilde{\omega}$ è una $(n - 1)$ -forma su una varietà M n -dimensionale e $U \subset M$ si può mostrare che [10]:

$$\int_U \tilde{d}\tilde{\omega} = \int_{\partial U} \tilde{\omega} \tag{1.1}$$

dove ∂U è il bordo della regione U .

1.3 Gruppi di Lie

Un *gruppo di Lie* G è un gruppo che risulta anche una varietà differenziabile. Le due strutture devono essere naturalmente compatibili e questo sarà verificato a patto di richiedere la differenziabilità dell'operazione $\cdot : G \times G \rightarrow G$ che caratterizza il gruppo.

1.3.1 Gruppo di trasformazioni di Lie

Un *gruppo di trasformazioni* $\Phi_g : X \rightarrow X : g \in G$ è di Lie se l'associazione :

$$\Phi : G \times X \rightarrow X \quad (g, x) \mapsto \Phi(g, x)$$

è differenziabile e se le trasformazioni $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$ seguono le proprietà di un gruppo, ovvero :

$$\begin{cases} \Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h \\ \Phi_e \text{ è la trasformazione di identità.} \end{cases}$$

Diremo allora che:

- G opera *efficacemente* su X se $\Phi_g(x) = x$ per ogni $x \in X$ implica che $g = e$;
- G opera *liberamente* su X se $\Phi_g(x) \neq x$ a meno che $g = e$;
- G opera *transitivamente* su X se per ogni $x \in X$ e $y \in X$ esiste $g \in G$ tale che $\Phi_g(x) = y$.

1.3.2 Sottogruppi ad un parametro

Un *sottogruppo ad un parametro* di un gruppo di Lie è una curva differenziabile $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow G$ contenente l'elemento neutro del gruppo e . Inoltre :

$$\begin{cases} g(t)g(s) = g(t + s) \\ g(0) = e. \end{cases}$$

Se $g(t)$ definisce una curva su G , $\Phi_{g(t)}(x) = \Phi(g(t), x) = \Phi_x(g(t))$ definisce una curva su X passante per x . Fissato il parametro t della curva $g(t)$, esiste un solo vettore \mathbf{v}^4 tangente alla curva $\Phi_x(g(t))$ in ogni punto, dunque ne risulta un campo vettoriale su X detto *campo vettoriale di Killing* che soddisfa le seguenti equazioni :

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_x(g(t)) = \mathbf{v}(\Phi_x(g(t))) \\ \Phi_x(e) = x. \end{cases}$$

⁴Indicheremo ora con $\mathbf{v}(x) \in T_x(X)$ un vettore appartenente allo spazio tangente ad una varietà X nel punto x e con $\tilde{\omega}(x) \in T_x^*(X)$ una 1-forma appartenente allo spazio duale a $T_x(X)$.

1.3.3 Algebra di Lie

È sempre possibile definire i seguenti gruppi di trasformazioni che operano efficacemente e transitivamente su G stesso :

Traslazione sinistra

$$L_g : G \rightarrow G \text{ definita da } L_g(h) = gh$$

Traslazione destra

$$R_g : G \rightarrow G \text{ definita da } R_g(h) = hg.$$

Un campo vettoriale \mathbf{v} ed un campo di 1-forme $\tilde{\omega}$ su G sono detti *invarianti a sinistra*⁵ se:

$$\begin{aligned} L'_g(\mathbf{v}(h)) &= \mathbf{v}(gh) \\ (L_g^* \tilde{\omega})(h) &= \tilde{\omega}(h) \end{aligned} \quad \text{per ogni } g, h \in G;$$

o analogamente:

$$\begin{aligned} L'_g(\mathbf{v}(e)) &= \mathbf{v}(g). \\ (L_g^* \tilde{\omega})(e) &= \tilde{\omega}(e) \end{aligned} \quad \text{per ogni } g \in G.$$

Dunque dato un vettore $\mathbf{v}(e) \in T_e(G)$ e la mappa $L'_g : T_e(G) \rightarrow T_g(G)$ siamo in grado di costruire un campo vettoriale invariante a sinistra. Infatti se $L'_a(\mathbf{v}(e)) = \mathbf{v}(a) \forall a \in G$, allora :

$$L'_g(\mathbf{v}(h)) = L'_g(L'_h(\mathbf{v}(e))) = L'_{gh}(\mathbf{v}(e)) = \mathbf{v}(gh).$$

Questo implica che esiste una corrispondenza biunivoca tra i campi invarianti a sinistra³ e i vettori appartenenti allo spazio $T_e(G)$ ed ogni campo invariante può essere indentificato con il corrispondente vettore in questo spazio.

Si può mostrare [7] che l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra è chiuso rispetto all'operazione data dalle *parentesi di Lie*:⁶

$$L'_g[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [L'_g \mathbf{v}, L'_g \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

Dunque lo spazio vettoriale dei campi invarianti a sinistra assieme all'operazione di parentesi di Lie forma l'*algebra di Lie* \mathcal{G} del gruppo G . Se fissiamo una base $\{\mathbf{v}_\alpha\}$

⁵E in modo analogo a destra.

⁶ $[\mathbf{v}, \mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f))$, con $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

in questo spazio, esistono dei numeri $c_{\alpha\beta}^\gamma$ completamente caratterizzanti l'algebra \mathcal{G} tali che :

$$[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{v}_\gamma$$

detti *costanti di struttura* del gruppo di Lie. Questi numeri dipendono dalla base scelta, e si trasformano come lo componenti di un tensore $\binom{1}{2}$.

Mostriamo ora che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'algebra \mathcal{G} ed i sottogruppi ad un parametro di G . Sicuramente ad ogni elemento dell'algebra corrisponde una famiglia di curve integrali su G di cui una (e solo una) passante per l'elemento e con vettore γ tangente in questo punto. I punti su questa curva possono essere indicati tramite esponenziazione :

$$g_\gamma(t) = \exp(\gamma t)|_e.$$

e per come è definita l'esponenziazione sarà direttamente verificato che :

$$\begin{cases} g_\gamma(t)g_\gamma(s) = \exp(\gamma t)\exp(\gamma s)|_e = \exp(\gamma(t+s))|_e = g_\gamma(t+s) \\ g_\gamma(0) = e \end{cases}$$

come richiesto nella definizione di sottogruppo. Viceversa, se $g(t)$ è una curva definente un sottogruppo ad un parametro allora:

$$L_{g(t)}g(s) = g(t+s)$$

e

$$L'_{g(t)}\left(\frac{dg(s)}{ds}\right) = \frac{d(L_{g(t)}g(s))}{ds} = \frac{dg(s+t)}{ds} = \frac{dg(s+t)}{dt}$$

quindi ponendo $s = 0$:

$$L'_{g(t)}(\gamma) = \frac{dg(t)}{dt}$$

ovvero il vettore $\mathbf{v}(g(t)) = dg(t)/dt$ appartiene ad un campo invariante a sinistra, corrispondente all'elemento $\gamma \in T_e(G)$. Notiamo inoltre che i vettori di Killing $\mathbf{v}^L(h)$ su G relativi all'azione di L_g sono vettori invarianti a destra :

$$\mathbf{v}^L(h) = \left. \frac{d(L_{g(t)}(h))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(R_h(g(t)))}{dt} \right|_{t=0} = R'_h \left(\left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} \right) = R'_h(\gamma)$$

1.3.4 Rappresentazione aggiunta

La *realizzazione* di un gruppo G è un'associazione di ogni elemento $g \in G$ ad un elemento $\Phi_g : X \rightarrow X$ che appartiene ad un gruppo di trasformazioni. Se X è uno spazio vettoriale e dunque Φ_g rappresenta una trasformazione lineare, la realizzazione è detta *rappresentazione*. Ogni gruppo di Lie G ha una realizzazione come trasformazioni lineari nella sua stessa algebra di Lie \mathcal{G} . Questa rappresentazione è detta *rappresentazione aggiunta* ed è definita a partire dalla mappa :

$$(L_g \circ R_g^{-1})(h) = ghg^{-1}.$$

Infatti notiamo che una curva passante per e in G si trasforma sotto l'azione di questa mappa in un'altra curva passante per e . Dunque viene indotta un'applicazione lineare $Ad_g : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ e, in virtù dell'isomorfismo tra $T_e(G)$ e \mathcal{G} , anche un'applicazione $Ad_g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. La rappresentazione aggiunta dunque mappa g in Ad_g .

1.3.5 Forma di Maurer-Cartan

Definiamo ora la *forma canonica* o di *Maurer-Cartan* $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{mc}$ come una 1-forma a valori vettoriali nell'algebra di Lie di un gruppo, che associa ad ogni vettore $\mathbf{v}_g \in T_g(G)$ l'elemento $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{mc}(\mathbf{v}_g) = \hat{\gamma}$ di \mathcal{G} che corrisponde al vettore $\gamma = L'_g{}^{-1}\mathbf{v}_g \in T_e(G)$. Mostriamo adesso che questa connessione è invariante a sinistra e che il pull-back determinato da una traslazione destra soddisfa l'equazione :

$$(R_g^* \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{mc}) = Ad_{g^{-1}} \circ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{mc}.$$

Infatti :

$$\begin{aligned}
 (L_h^* \tilde{\theta}_{mc})(\mathbf{v}_{h^{-1}g}) &= \tilde{\theta}_{mc}(L'_h \mathbf{v}_{h^{-1}g}) && \text{in base alla definizione di } L_h^* \\
 &= (L'_{g^{-1}} \circ L'_h)(\mathbf{v}_{h^{-1}g}) && \text{in base alla definizione di } \tilde{\theta}_{mc} \\
 &= (L'_{g^{-1}h})^{-1}(\mathbf{v}_{h^{-1}g}) \\
 &= \tilde{\theta}_{mc}(\mathbf{v}_{h^{-1}g})
 \end{aligned}$$

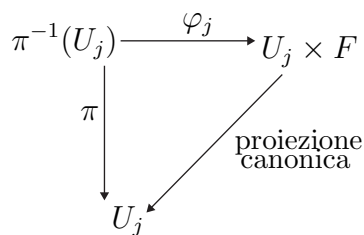
da cui l'invarianza a sinistra. Inoltre :

$$\begin{aligned}
 (R_h^* \tilde{\theta}_{mc})(\mathbf{v}_{gh^{-1}}) &= \tilde{\theta}_{mc}(R'_h \mathbf{v}_{gh^{-1}}) && \text{in base alla definizione di pull-back} \\
 &= (L'_{g^{-1}} \circ R'_h)(\mathbf{v}_{gh^{-1}}) && \text{in base alla definizione di } \tilde{\theta}_{mc} \\
 &= (L'_{h^{-1}} \circ L'_{hg^{-1}} \circ R'_h)(\mathbf{v}_{gh^{-1}}) \\
 &= (L'_{h^{-1}} \circ R'_h \circ L'_{hg^{-1}})(\mathbf{v}_{gh^{-1}}) \\
 &= (L'_{h^{-1}} \circ R'_h)(\tilde{\theta}_{mc}(\mathbf{v}_{gh^{-1}})) \\
 &= (Ad_{h^{-1}} \circ \tilde{\theta}_{mc})(\mathbf{v}_{gh^{-1}}).
 \end{aligned}$$

1.4 Fibrati

Il contesto matematico in cui sorge spontaneamente il concetto di olonomia è la teoria dei *fibrati*.

Un *fibrato* (E, B, π, F, G) consiste in uno spazio topologico B , che verrà detto *base* del fibrato, uno spazio topologico E , detto *spazio totale*, una mappa suriettiva e continua $\pi: E \rightarrow B$ tale che $\pi^{-1}(x)$, ovvero la *fibra* del fibrato al punto x , è omeomorfa ad uno spazio topologico F , chiamato *fibra caratteristica*, per ogni $x \in B$, ed infine un gruppo topologico G , il *gruppo di struttura*, di omeomorfismi di F in se stesso. Se U è un intorno aperto di $x \in B$, $\pi^{-1}(U)$ è omeomorfo al prodotto topologico $U \times F$ e dunque localmente un fibrato appare come un *fibrato banale* in cui l'omeomorfismo $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ ha la forma $\varphi(p) = (\pi(p), \check{\varphi}(p))$, dove $p \in E$, $\check{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow F$ è l'omeomorfismo tra fibra e fibra caratteristica. Inoltre il seguente diagramma è commutativo:



Se $\{U_j; j \in J\}$ è un ricoprimento aperto di B allora gli insiemi $\{U_j, \varphi_j\}$ formano una famiglia di *trivializzazioni locali* del fibrato.

Esiste inoltre una relazione tra i vari fibrati banali locali $U_j \times F$ ottenuti da un dato ricoprimento di B . Sia infatti $x \in U_j \cap U_k$, allora abbiamo due omeomorfismi differenti $\check{\varphi}_{j,x}$ e $\check{\varphi}_{k,x}$ da $F_x \equiv \pi^{-1}(x)$, alla fibra caratteristica F e $\check{\varphi}_{k,x} \circ \check{\varphi}_{j,x}^{-1} : F \rightarrow F$ risulta un elemento del gruppo di struttura G per ogni $x \in U_j \cap U_k$ ed ogni $j, k \in J$ (figura 1.1). Dunque la sovrapposizione $U_j \cap U_k$ degli aperti del ricoprimento induce delle mappe continue $g_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow G$, $g_{jk} = \check{\varphi}_{k,x} \circ \check{\varphi}_{j,x}^{-1}$ che soddisfano la seguente relazione:

$$g_{jk}(x)g_{ki}(x) = g_{ji}(x)$$

Queste mappe sono dette *funzioni di transizione* e contengono le informazioni riguardanti la topologia globale del fibrato. Il nastro di Möbius è un semplice esempio di fibrato non banale che appare localmente come un prodotto diretto tra $S^1 \times I$,

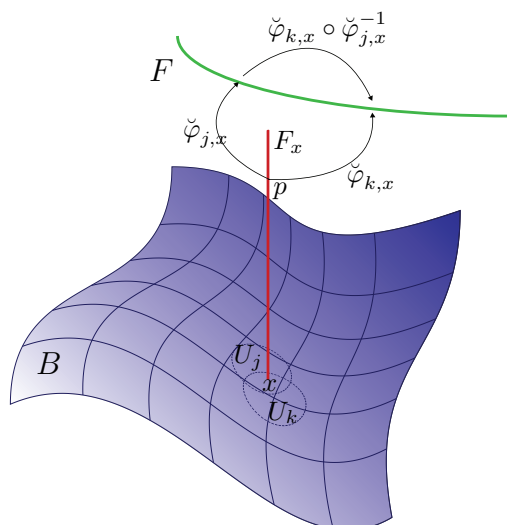


FIGURA 1.1: L'intersezione $U_j \cap U_k$ tra i due aperti contenenti x assieme alla trivializzazione locale ad essi associata ha definito un elemento di G ovvero l'omeomorfismo $\check{\varphi}_{k,x} \circ \check{\varphi}_{j,x}^{-1} : F \rightarrow F$.

$I \subset \mathbb{R}$, ma che rivela globalmente una torsione di natura topologica (figura 1.2), in contrasto con il cilindro che è globalmente definibile come un prodotto $S^1 \times I$.

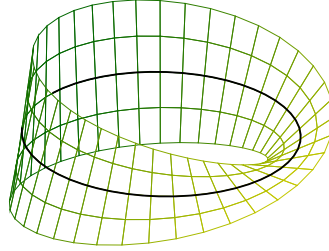


FIGURA 1.2: Un nastro di Möbius

1.4.1 Fibrati principali

Un fibrato in cui la fibra caratteristica F si identifica con il gruppo G e in cui G agisce su F tramite traslazioni sinistre è un *fibrato principale*. Definiamo l'azione da destra di G sul fibrato principale (E, B, π, G) nel modo seguente. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di B , $p \in F_x$, $x \in U_i$, e $g_i = \check{\varphi}_{i,x}(p)$. Definiamo in un primo momento l'azione di \tilde{R}_g su $\pi^{-1}(U_i)$:

$$\left(\tilde{R}_g p\right)_i = \check{\varphi}_{i,x}^{-1}(R_g g_i) = \check{\varphi}_{i,x}^{-1}(g_i g), \quad p \in \pi^{-1}(U_i).$$

Inoltre $\tilde{R}_{g_1} \tilde{R}_{g_2} p = \tilde{R}_{g_1 g_2} p$, e dunque il gruppo $\{\tilde{R}_g, g \in G\}$ è isomorfo a G ed esso agisce transitivamente su ciascuna fibra. Chiaramente $\tilde{R}_g p$ appartiene alla stessa fibra a cui appartiene p . Ora mostriamo che l'azione di \tilde{R}_g è indipendente dalla scelta degli aperti U_i ai quali x appartiene, e dunque può essere definita coerentemente su tutto E . Infatti se $p \in F_x$ e $x \in U_i \cap U_j$ abbiamo

$$\check{\varphi}_{j,x}(p) = g_j, \quad \check{\varphi}_{i,x}(p) = g_i, \quad g_i = \check{\varphi}_{i,x} \circ \check{\varphi}_{i,x}^{-1}(g_j)$$

Dato che per definizione G agisce su $F = G$ tramite traslazioni sinistre, l'azione di $g_{ij}(x) = \check{\varphi}_{i,x} \circ \check{\varphi}_{i,x}^{-1}$ su un elemento $g \in G$ è :

$$\check{\varphi}_{j,x} \circ \check{\varphi}_{i,x}^{-1}(g) = g_{ij}(x)g.$$

Dunque

$$g_i = g_{ij}(x)g_j$$

e

$$\begin{aligned} \left(\tilde{R}_g p\right)_j &= \check{\varphi}_{j,x}^{-1}(g_j g) \\ &= \check{\varphi}_{i,x}^{-1} \circ \check{\varphi}_{i,x} \circ \check{\varphi}_{j,x}^{-1}(g_j g) \\ &= \check{\varphi}_{i,x}^{-1}(g_{ij}(x)g_j g) \\ &= \check{\varphi}_{i,x}^{-1}(g_i g) \\ &= \left(\tilde{R}_g p\right)_i. \end{aligned}$$

Dunque l'indipendenza di \tilde{R}_g dalla scelta degli aperti contenenti la proiezione $\pi(p)$ di p sulla base ci permette di scrivere :

$$\tilde{R}_g(p) = \check{\varphi}_{i,x}^{-1} \circ R_g \circ \check{\varphi}_{i,x}(p).$$

In quanto seguirà considereremo il nostro fibrato come un fibrato $[C^\infty]$ differenziabile, nel quale dunque la base B , lo spazio totale E e la fibra caratteristica F sono varietà $[C^\infty]$ differenziabili, π è una mappa $[C^\infty]$ differenziabile e G è un gruppo di Lie. Inoltre ciascuna fibra sarà *diffeomorfa* alla fibra principale.

1.5 Connessioni su fibrati principali

In un fibrato principale (P, X, π, G) , dipendentemente dal ricoprimento $\{U_i\}$ di X , dalla costruzione delle mappe $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$ e dunque dalla particolare trivializzazione locale, ogni fibra risulta diffeomorfa alla fibra caratteristica G . Dunque se $C : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ è una curva definita su X non c'è modo di associare univocamente ad essa una curva \tilde{C} nello spazio P . Analogamente se $\mathbf{v}_p \in T_p(P)$ è un vettore che appartiene allo spazio tangente alla varietà P in p non c'è modo di confrontarlo con un secondo vettore $\mathbf{v}_{p'}$ che non appartenga allo stesso spazio $T_p(P)$, dato che il fibrato, come una qualunque varietà, non presenta naturalmente alcuna nozione di parallelismo tra vettori. Una *connessione* definita su P porta ad una corrispondenza tra due qualunque fibre lungo una curva C su X e, lungo la stessa, permette di *trasportare parallelamente* un qualunque punto $p \in \pi^{-1}(C)$.

La curva \tilde{C} descritta in P da questo trasporto parallelo viene detta *sollevamento orizzontale* della curva C (figura 1.3).

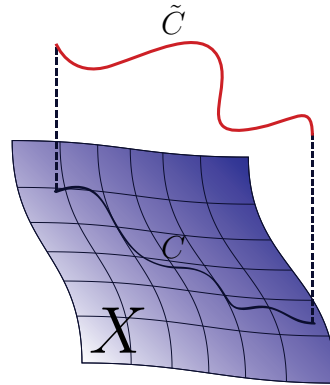


FIGURA 1.3: Sollevamento orizzontale \tilde{C} di una curva C su X

Per definire questo sollevamento è più conveniente fornire una regola per sollevare vettori da X in P , e dunque far corrispondere ad ogni vettore $\mathbf{v}_x \in T_x(X)$ per ogni $x \in X$, e ad ogni punto $p \in G_x \equiv \pi^{-1}(x)$, un vettore $\mathbf{v}_p \in T_p(P)$ chiamato *vettore orizzontale*, che si proietta tramite π' su \mathbf{v}_x . I possibili sollevamenti orizzontali \tilde{C} di una curva C in X sono dunque ottenuti come curve integrali in P .

Una connessione su P garantirà inoltre la compatibilità tra il trasporto parallelo e la struttura differenziabile di P e dunque la corrispondenza tra $T_x(X)$ e $T_p(P)$ dovrà essere differenziabile rispetto ad x . Ricordiamo a questo punto che sul fibrato principale è definita globalmente l'azione destra \tilde{R}_g e risulta dunque naturale richiedere che due diversi sollevamenti \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 di una curva C relativi ad una stessa connessione ma passanti per due diversi punti p_1 e p_2 appartenenti a G_x siano relazionati dall'azione di \tilde{R}_g .

Dunque siamo portati a definire una connessione su un fibrato principale (P, X, π, G) come una mappa $\sigma_p : T_x(X) \rightarrow T_p(P)$, $x \in \pi(p)$ per ogni $p \in P$ tale che :

1. σ_p è lineare;
2. $(\pi' \circ \sigma_p)(\mathbf{v}_x) = \mathbf{v}_x$ per ogni $\mathbf{v}_x \in T_x(X)$;
3. σ_p è differenziabile rispetto a p ;
4. $\sigma_{\tilde{R}_p} = \tilde{R}'_g \sigma_p$, $g \in G$.

Tramite la mappa σ_p abbiamo costruito su P un campo di spazi vettoriali $H_p = \sigma_p(T_x(X))$ che risultano essere isomorfi a $T_x(X)$ in virtù della proprietà (2) nella definizione di connessione, dove la restrizione di π' ad H_p svolge il ruolo dell'isomorfismo tra i due spazi. Lo spazio $T_p(G_x) \equiv V_p$ tangente alle fibre in un punto $p \in P, x = \pi(p)$ risulta invece mandato dall'applicazione π' in $\mathbf{0}$, ed è quindi costituito da *vettori verticali* \mathbf{v}_V complementari ai vettori orizzontali $\mathbf{v}_H \in H_p$. Lo spazio $T_p(P)$ si potrà di conseguenza esprimere come somma diretta degli spazi H_p e V_p ed ogni vettore $\mathbf{v} \in T_p(P)$ sarà univocamente decomposto nella somma di un vettore $\mathbf{v}_H \in H_p$ e $\mathbf{v}_V \in V_p$:

$$T_p(P) = H_p \oplus V_p, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_V.$$

Definiamo quindi, in presenza di una connessione, i due operatori che forniscono la parte verticale ed orizzontale di un vettore $\mathbf{v} \in T_p(P)$:

$$\begin{aligned} ver : T_p(P) &\rightarrow V_p, & \mathbf{v} &\mapsto ver(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_V; \\ hor : T_p(P) &\rightarrow H_p, & \mathbf{v} &\mapsto hor(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_H. \end{aligned}$$

1.5.1 Isomorfismo canonico tra \mathcal{G} e V_p

Mostriamo adesso che l'azione di \tilde{R}_g su P induce naturalmente un isomorfismo tra l'algebra di Lie \mathcal{G} del gruppo G e gli spazi V_p tangenti alle fibre. Sia infatti γ un elemento di $T_e(G)$. Esso si indentifica univocamente con un elemento $\hat{\gamma}$ dell'algebra \mathcal{G} , dato che la mappa L'_g associa ad ogni punto g un vettore invariante a sinistra tramite $\mathbf{v}(g) = L'_g(\gamma)$. Il campo che ne risulta è in corrispondenza biunivoca con un sottogruppo ad un parametro del gruppo G e dunque con una curva $g(s)$ passante per l'elemento e in $s = 0$. L'azione di $\tilde{R}_{g(s)}$ su p definisce una curva passante per p e del tutto contenuta nella fibra $G_{\pi(p)}$ ed in particolare un vettore (di *Killing*) tangente ad essa nel punto p definito da :

$$\mathbf{v}(p) = \left. \frac{d(\tilde{R}_{g(s)}(p))}{ds} \right|_{s=0} \quad \mathbf{v}(p) \in V_p.$$

Al variare di p viene dunque definito su P un campo vettoriale \mathbf{v} determinato univocamente da $\hat{\gamma} \equiv \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{G}$, e detto *campo vettoriale fondamentale*. È in questa corrispondenza $\hat{\mathbf{v}} \leftrightarrow \mathbf{v}$ che si esplica il naturale isomorfismo tra \mathcal{G} e V_p .

1.5.2 Connessione come 1-forma

Se sul fibrato è assegnata una connessione, dunque un campo di spazi H_p , siamo in grado di associare ad ogni vettore $\mathbf{v} \in T_p(P)$ un elemento dell'algebra \mathcal{G} tramite la corrispondenza tra la parte verticale $ver(\mathbf{v}) \in T_p(P)$ e l'elemento di \mathcal{G} individuato dall'isomorfismo appena introdotto. Questa associazione può essere operata da una 1-forma $\tilde{\omega}$ definita su P e a valori vettoriali nell'algebra \mathcal{G} :

$$\tilde{\omega}(\mathbf{v}) = \widehat{ver(\mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in T_p(P)$$

che, fissata una base $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ e $\{\tilde{e}^i\}$ rispettivamente per gli spazi \mathcal{G} e $T_p^*(P)$, può essere espressa come:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i^\alpha \tilde{e}^i \otimes \mathbf{e}_\alpha.$$

La proprietà di *equivarianza* (4) nella definizione di connessione, ci garantisce che \tilde{R}'_g preserva la decomposizione di \mathbf{v} in un parte orizzontale e verticale :

$$\tilde{R}'_g(\mathbf{v}) = (\tilde{R}'_g(\mathbf{v}))_H + (\tilde{R}'_g(\mathbf{v}))_V = \tilde{R}'_g(\mathbf{v}_H) + \tilde{R}'_g(\mathbf{v}_V)$$

da cui il pull-back di $\tilde{\omega}$ da parte di \tilde{R}'_g risulta:

$$(\tilde{R}'_g^* \tilde{\omega})(\mathbf{v}) = \tilde{\omega}(\tilde{R}'_g(\mathbf{v})) = \tilde{\omega}((\tilde{R}'_g(\mathbf{v}))_V) = \tilde{\omega}(\tilde{R}'_g(\mathbf{v}_V)).$$

Inoltre la restrizione di questa 1-forma $\tilde{\omega}$ sulla fibra $G_{\pi(p)}$, che è diffeomorfa al gruppo G , può essere identificata con la forma canonica di Maurer-Cartan e dunque per essa varrà la seguente legge di trasformazione :

$$(\tilde{R}'_g^* \tilde{\omega})(\mathbf{v}) = (Ad_{g^{-1}} \circ \tilde{\omega})(\mathbf{v}).$$

Il tutto ci permette di fornire una seconda definizione di connessione su fibrato principale, facendo uso in questo caso della definizione di una 1-forma $\tilde{\omega}$ su P a valori nell'algebra di Lie \mathcal{G} del gruppo G e tale che :

1. $\tilde{\omega}_p(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{u}}$ dove $\mathbf{u} \in V_p$ e $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{G}$ sono legati dall'isomorfismo introdotto in precedenza;
2. $\tilde{\omega}_p$ è differenziabile rispetto a p ;
3. $\tilde{\omega}_{\tilde{R}'_g(p)}(\tilde{R}'_g \mathbf{v}) = (Ad_{g^{-1}} \circ \tilde{\omega}_p)(\mathbf{v})$.

Tramite questa definizione gli spazi H_p dei vettori orizzontali sono forniti semplicemente dai nuclei delle forme $\tilde{\omega}_p : T_p(P) \rightarrow \mathcal{G}$:

$$H_p = \{\mathbf{v} \in T_p(P) : \tilde{\omega}_p(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

1.5.3 Connessioni locali

Data una connessione $\tilde{\omega}$ su P esiste un numero infinito di 1-forme $\tilde{\omega}_j$ definibili su un aperto U_j appartenente al ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di X ed a valori in \mathcal{G} , ciascuna corrispondente ad una particolare *sezione locale* di P . Una sezione locale è una mappa $f : U_j \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ differenziabile, ovvero un'associazione a livello locale di ogni punto della varietà di base ad un punto nella fibra sopra di esso. Chiaramente $(\pi \circ f) = Id$. Questa associazione non è generalmente possibile a livello globale, a meno che il fibrato sia banale, ma a livello locale ogni fibrato è banale e dunque ammette localmente delle sezioni. Le 1-forme $\tilde{\omega}_j$ su U_j possono essere quindi definite mediante il pull-back di $\tilde{\omega}$ tramite la particolare sezione f :

$$\tilde{\omega}_{j,x}(\mathbf{v}) = (f^*\tilde{\omega})_x(\mathbf{v}) = \tilde{\omega}_{f(x)}(f'(\mathbf{v}))$$

dove $x \in U_j$ e $\mathbf{v} \in T_x(X)$.

Viceversa se è data una particolare sezione f e una 1-forma $\tilde{\omega}_j$ su U_j esiste una sola connessione $\tilde{\omega}$ su $\pi^{-1}(U_j)$ tale che $f^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_j$. Sia infatti $\mathbf{v} \in T_{p_0}(P)$, $p_0 = f(x)$; decomponiamo \mathbf{v} come :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

dove $\mathbf{v}_1 = (f' \circ \pi')(\mathbf{v})$. Questo implica che \mathbf{v}_2 è verticale dato che $\pi'(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$. Definiamo quindi il valore di $\tilde{\omega}$ sul vettore \mathbf{v} tramite :

$$\tilde{\omega}_{p_0}(\mathbf{v}) = \tilde{\omega}_{j,x}(\pi'(\mathbf{v})) + \hat{\mathbf{v}}_2 \quad (1.2)$$

dove $\hat{\mathbf{v}}_2$ è ottenuto dall'isomorfismo tra \mathcal{G} e V_p . Estendiamo adesso la definizione di $\tilde{\omega}$ su ogni altro punto p della fibra tramite:

$$\tilde{\omega}_p(\mathbf{v}) = Ad_g \tilde{\omega}_{p_0}(\tilde{R}'_g^{-1}(\mathbf{v})) \quad \text{dove } p = \tilde{R}_g p_0. \quad (1.3)$$

Questa costruzione soddisfa la definizione di connessione data in precedenza. Se avessimo avuto una 1-forma $\tilde{\omega}_X$ definita su tutta la base X allora avremmo potuto costruire un numero infinito di connessioni $\tilde{\omega}$ su P dipendentemente dalla scelta fatta sulle sezioni locali f_i di ogni aperto U_i appartenente al ricoprimento di X . Infatti per mezzo di una decomposizione dell'unità $\{\chi_i\}$ relativa a quest'ultimo, possiamo costruire globalmente su P la seguente connessione $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega} = \sum_i (\chi_i \circ \pi) \tilde{\omega}_i \quad (1.4)$$

dove $\tilde{\omega}_i$ sono le connessioni appena costruite su $\pi^{-1}(U_i)$ tramite le sezioni locali f_i .

Di maggiore importanza è l'inverso del risultato trovato in precedenza, ovvero data una trivializzazione (U_i, φ_i) di P e una connessione $\tilde{\omega}$ su P , è possibile costruire un'unica famiglia di connessioni locali $\{\tilde{\omega}_i\}$ sulla base X . Per fare questo notiamo che esiste una sezione locale s_i canonicamente associata ad una particolare trivializzazione φ_i . Se infatti $\overline{Id} : U_i \rightarrow U_i \times G$ mappa x nella coppia (x, e) allora una sezione s_i è naturalmente definita come :

$$s_i = \varphi_i^{-1} \circ \overline{Id}.$$

Dunque poniamo :

$$\tilde{\omega}_i = s_i^* \tilde{\omega}.$$

Dato che una medesima connessione $\tilde{\omega}$ appare, dipendentemente dalla trivializzazione scelta, localmente diversa, deve esistere una qualche legge di trasformazione che leghi $\tilde{\omega}_{j,x}$ e $\tilde{\omega}_{k,x}$ se $x \in U_j \cap U_k$, dove U_j e U_k sono caratterizzati da due trivializzazioni diverse φ_j e φ_k . È possibile mostrare che [7]:

$$\tilde{\omega}_{j,x} = Ad_{g_{jk}(x)}^{-1} \tilde{\omega}_{k,x} + (g_{jk}^* \tilde{\theta}_{mc})_x$$

dove $g_{jk}(x) = \check{\varphi}_{k,x} \circ \check{\varphi}_{j,x}^{-1}$ sono le funzioni di transizione, o equivalentemente :

$$\tilde{\omega}_j(\mathbf{v}) = g_{jk}^{-1}(x) \tilde{\omega}_k(\mathbf{v}) g_{jk}(x) + g_{jk}^{-1}(x) g'_{jk}(x) \mathbf{v} \quad (1.5)$$

se $\mathbf{v} \in T_x(X)$ e G è un sottogruppo di $GL(n)$, ovvero il *gruppo generale lineare* di grado n , nel quale è possibile indentificare naturalmente le mappe lineari L_g e R_g con i loro differenziali L'_g e R'_g .

1.5.4 Curvatura

Se $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$ è una k -forma su P a valori vettoriali, definiamo la sua *derivata covariante esterna* come :

$$\tilde{D}\tilde{\phi}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k+1}) = \tilde{d}\tilde{\phi}(\text{hor}(\mathbf{v}_1), \text{hor}(\mathbf{v}_2), \dots, \text{hor}(\mathbf{v}_{k+1}))$$

Se $\tilde{\phi}$ è la connessione $\tilde{\omega}$ su P con valori nell'algebra \mathcal{G} , la sua derivata covariante $\tilde{\Omega} = \tilde{D}\tilde{\omega}$, che è una 2-forma, è detta *curvatura della connessione $\tilde{\omega}$* . Si può mostrare che [7] :

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{d}\tilde{\omega}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{\omega}(\mathbf{u}) \wedge \tilde{\omega}(\mathbf{v})$$

dove $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x(X)$.

Come per la connessione $\tilde{\omega}$, anche la curvatura $\tilde{\Omega}$ sarà rappresentata da delle forme $\tilde{\Omega}_j$ definite localmente su $\pi^{-1}(U_j)$, per una data trivializzazione (U_j, φ_j) , tramite :

$$\tilde{\Omega}_j = s_j^* \tilde{\Omega}.$$

che saranno esprimibili per mezzo delle $\tilde{\omega}_j$ come:

$$\tilde{\Omega}_j = \tilde{d}\tilde{\omega}_j + \tilde{\omega}_j \wedge \tilde{\omega}_j, \quad (1.6)$$

e che si trasformeranno per un cambio di trivializzazione come :

$$\tilde{\Omega}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = Ad_{g_{ji}^{-1}(x)} \tilde{\Omega}_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (1.7)$$

o equivalentemente, nel caso in cui G sia un sottogruppo di $GL(n)$:

$$\tilde{\Omega}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{ji}^{-1}(x) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) g_{ji}(x) \quad (1.8)$$

1.5.5 Olonomia

Sia $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$ una curva su X tale che $\gamma_x(0) = \gamma_x(1) = x$. Se siamo in presenza di una connessione sul fibrato (P, X, π, G) possiamo sollevare la curva γ_x su P per mezzo di un trasporto parallelo dei punti $p \in G_x$. Dato che in X la curva è chiusa, un punto $\tilde{\gamma}_x(0) = p_0$ che descrive la curva $\tilde{\gamma}_x$ in P viene, al termine del trasporto, fatto corrispondere ad un punto $\tilde{\gamma}_x(1) = p_1$ che appartiene

alla stessa fibra di partenza. Dunque una curva chiusa su X , che parte e termina in x , definirà una mappa $\gamma_x : G_x \rightarrow G_x$ che, come conseguenza delle proprietà della connessione, commuterà con l'azione di \tilde{R}_g . Generalmente $p_0 \neq p_1$, e dunque si parla di *anonomia* (figura 1.4).

L'insieme Γ_x di tutte le mappe costruite in x in questo modo forma un gruppo, detto *gruppo di ologonomia* della connessione $\tilde{\omega}$ con punto di partenza x . Questo gruppo può essere inoltre identificato con un sottogruppo di G , dato che ad ogni elemento γ_x di Γ_x possiamo associare quell'elemento $a_{\gamma_x} \in G$ tale che :

$$\tilde{\gamma}_x(1) = a_{\gamma_x} \tilde{\gamma}_x(0). \quad (1.9)$$

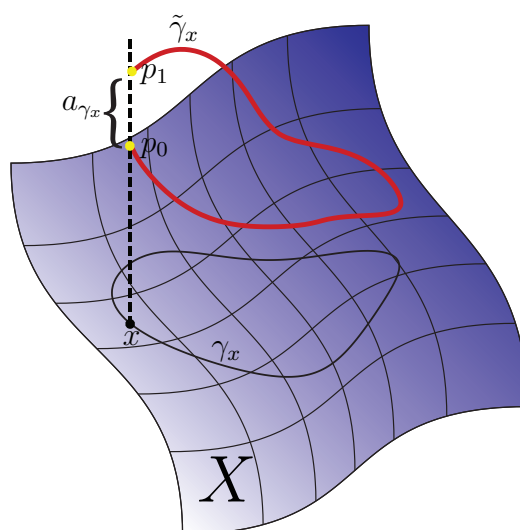


FIGURA 1.4: Anonomia: il sollevamento orizzontale di una curva chiusa in X non è generalmente un'altra curva chiusa in P .

1.5.6 Fibrato vettoriale associato ad un fibrato principale

Un *fibrato vettoriale* (E, X, π_1, F, G) è un fibrato in cui la fibra caratteristica F è uno spazio vettoriale.

Un *fibrato vettoriale* (E, X, π_1, F, G) è detto *associato ad un fibrato principale* (P, X, π, G) tramite una rappresentazione ρ su F del gruppo di struttura G se quest'ultima fornisce le funzioni di transizione su E come immagini delle funzioni di transizione su P . Dunque data una famiglia di trivializzazioni locali $\{U_i, \Phi_i\}$ di

P , le funzioni di transizione sul fibrato vettoriale saranno:

$$\check{\phi}_{j,x} \circ \check{\phi}_{k,x}^{-1} = \rho(\check{\Phi}_{j,x} \circ \check{\Phi}_{k,x}^{-1}) \quad \text{con } x \in U_j \cap U_k$$

e dunque applicazioni lineari da F in F .

Tramite il trasporto parallelo di un elemento $p_1 \in \pi^{-1}(x_1)$ lungo una curva su X , è possibile definire il trasporto parallelo di un vettore $\mathbf{v}_1 \in \pi_1^{-1}(x_1)$ lungo la stessa curva. Infatti se $p_2 \in \pi^{-1}(x_2)$ è il trasporto parallelo di p_1 , il trasporto parallelo $\mathbf{v}_2 \in \pi_1^{-1}(x_2)$ di \mathbf{v}_1 è definito come :

$$\check{\phi}_{i,x_2}(\mathbf{v}_2) = \rho(\check{\Phi}_{i,x_2}(p_2) \circ [\check{\Phi}_{i,x_1}(p_1)]^{-1})\check{\phi}_{i,x_1}(\mathbf{v}_1) \quad (1.10)$$

ed è possibile mostrare [7] che questo trasporto non dipende da p_1 né dalla trivializzazione locale scelta.

Capitolo 2

La fase di Berry

In questo capitolo, dopo aver introdotto il teorema adiabatico, verrà ricavata la fase di Berry, e se ne fornirà un esempio per un semplice sistema dotato di spin in un campo magnetico esterno. Parte della trattazione utilizzerà direttamente gli strumenti introdotti nel capitolo precedente. Si concluderà con una generalizzazione di questa fase ottenuta da Aharonov-Anandan, che abbandona le ipotesi del teorema adiabatico.

2.1 Il teorema adiabatico

In quanto segue supporremo che $\hat{H}(t)$ sia un'Hamiltoniana dipendente dal tempo t e che dunque descriva l'evoluzione di un sistema quantistico immerso in un ambiente a sua volta evolvente. Supporremo:

- i)* che lo spettro di $\hat{H}(t)$ sia discreto,
- ii)* gli autovalori $E_j(t)$ siano funzioni continue di t ,
- iii)* gli autovalori rimangano distinti per ogni t : $E_j(t) \neq E_k(t)$,
- iv)* le derivate dP_j/dt , d^2P_j/dt^2 siano continue,

dove $P_j(t)$ è il proiettore nell'autospazio relativo al j -esimo autovalore $E_j(t)$ di $\hat{H}(t)$ al tempo t . Se l'evoluzione avviene in un intervallo di tempo $T = t_1 - t_0$ poniamo $t = t_0 + sT$ dove $0 \leq s \leq 1$: adesso il parametro T descrive la velocità con la quale questa evoluzione avviene. Se $\hat{U}(t, t_0)$ è l'operatore di evoluzione che soddisfa

l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} = \hat{H}(t)\hat{U}(t, t_0); \quad \hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I}$$

ponendo $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_T(s)$ questa diventa :

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_T(s)}{ds} = T\hat{H}(s)\hat{U}_T(s); \quad \hat{U}_T(0) = \mathbb{I}.$$

Il teorema adiabatico afferma che [8]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{U}_T(s)P_j(0) = P_j(s) \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{U}_T(s) \quad \forall j.$$

In altre parole se l'evoluzione avviene in tempi molto lunghi ($T \rightarrow \infty$) e se il sistema in questione si trova in un autostato di $\hat{H}(0)$, al tempo s questo sarà ancora nel corrispondente autostato di $\hat{H}(s)$, ottenuto dal primo per continuità. È necessario dunque poter associare con continuità ad ogni s un autostato di $\hat{H}(s)$:

$$\hat{H}(s) |n(s)\rangle = E_n(s) |n(s)\rangle$$

In realtà questo è vero solo approssimativamente. Non sarà infatti mai possibile ottenere un'evoluzione perfettamente adiabatica e dunque possiamo sfruttare i risultati del teorema adiabatico solo quando l'evoluzione è abbastanza lenta da permetterci di considerare come trascurabili le transizioni negli altri autostati di $\hat{H}(s)$ con l'evolvere del sistema.

Fisicamente questo lento cambiamento dell'Hamiltoniana può essere osservato per sistemi che possono essere separati in due parti, descritte rispettivamente da un insieme di variabili che variano nel tempo con velocità molto diverse. In questo caso la parte "veloce" del sistema potrà essere descritta considerando le variabili "lente" come parametri fissati. Quando questi variano nel tempo determinano un'evoluzione (lenta) dell'Hamiltoniana associata alla parte del sistema velocemente variabile.

2.2 La fase di Berry

2.2.1 Fase dinamica

Consideriamo un'Hamiltoniana $\hat{H}(\mathbf{R})$ che dipende da un certo numero di parametri $\mathbf{R} = (X_1, X_2, \dots)$. Per ogni dato valore di \mathbf{R} possiamo scegliere una base ortonormale di autostati di $\hat{H}(\mathbf{R})$:

$$\hat{H}(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R}) |n(\mathbf{R})\rangle, \quad (2.1)$$

$$\langle m(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle = \delta_{m,n} \quad (2.2)$$

L'evoluzione temporale dello stato $|\psi(t)\rangle$ di un sistema immerso in un ambiente descritto da questo tipo di Hamiltoniana può essere valutata parametrizzando temporalmente la variazione dei parametri $\mathbf{R}(t)$ da cui essa dipende e risolvendo l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle}{dt} = \hat{H}(\mathbf{R}(t)) |\psi(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (2.3)$$

Se la variazione di questi parametri è abbastanza lenta possiamo lavorare nell'approssimazione adiabatica e affermare che approssimativamente in ogni istante t il sistema si troverà nello stato :

$$|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle = e^{i\eta(\mathbf{R}(t))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad \text{se inizialmente } |\psi(\mathbf{R}(0))\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle$$

dove $\eta(\mathbf{R}(t))$ ¹ è una fase che deve essere determinata.

Se sostituiamo l'espressione per $|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle$ in (2.3) otteniamo:

$$i\hbar \frac{d|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle}{dt} = i\hbar \left(i\dot{\eta}(t) |n(\mathbf{R}(t))\rangle + \frac{d}{dt} |n(\mathbf{R}(t))\rangle \right) e^{i\eta(\mathbf{R}(t))}$$

e

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t)) |\psi(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) e^{i\eta(\mathbf{R}(t))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle$$

¹Per poter scrivere $|\psi(\mathbf{R}(0))\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle$ è stato scelto $\eta(0) = 0$

da cui, moltiplicando a sinistra per $\langle n(\mathbf{R}(t)) |$ e integrando rispetto al tempo, otteniamo:

$$\eta(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt' + \int_0^t \langle n(\mathbf{R}(t')) | \frac{d}{dt'} | n(\mathbf{R}(t')) \rangle dt'.$$

Notiamo che la condizione $\langle n(\mathbf{R}(t)) | n(\mathbf{R}(t)) \rangle = 1$ implica che $\langle n(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} | n(\mathbf{R}(t)) \rangle$ è immaginario puro, infatti

$$\frac{d}{dt} \langle n | n \rangle = \left\langle \frac{dn}{dt} \middle| n \right\rangle + \left\langle n \middle| \frac{dn}{dt} \right\rangle = 0.$$

e quindi $\eta(\mathbf{R}(t))$ può essere espressa come :

$$\eta(\mathbf{R}(t)) = \underbrace{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt'}_{\gamma_d} - \underbrace{Im \int_0^t \langle n(\mathbf{R}(t')) | \frac{d}{dt'} | n(\mathbf{R}(t')) \rangle dt'}_{\gamma_g} \quad (2.4)$$

$$= \gamma_d(\mathbf{R}(t)) + \gamma_g(\mathbf{R}(t)). \quad (2.5)$$

Dunque al tempo t lo stato $|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle$ sarà:

$$|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle = e^{i\gamma_d(\mathbf{R}(t))} e^{i\gamma_g(\mathbf{R}(t))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (2.6)$$

Notiamo adesso che la (2.1) ci lascia del tutto liberi nell'assegnazione della fase di ciascun autovettore $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$. Dunque operando una trasformazione di fase (o di *gauge*) del tipo:

$$|n(\mathbf{R}(t))\rangle \rightarrow |n(\mathbf{R}(t))\rangle' = e^{i\zeta_n(\mathbf{R}(t))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad (2.7)$$

la (2.6) diviene:

$$|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle = e^{i\gamma_d(\mathbf{R}(t))} e^{i\gamma_g(\mathbf{R}(t))} e^{i\zeta_n(\mathbf{R}(t))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle'.$$

dove $\zeta_n(\mathbf{R}(t))$ è una funzione arbitraria ad un sol valore definita a meno di un multiplo di 2π . Dunque con un'opportuna scelta della fase di $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ è possibile eliminare il contributo di γ_g nella fase. Questo equivale a porre nella (2.4) :

$$Im \langle n(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} | n(\mathbf{R}(t)) \rangle = 0 \quad (2.8)$$

ottenendo così :

$$|\psi(\mathbf{R}(t))\rangle = e^{i\gamma_d(\mathbf{R}(t))} |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (2.9)$$

La fase risultante γ_d è detta *fase dinamica*.

2.2.2 La fase geometrica

Per oltre mezzo secolo si è pensato che fosse sempre possibile eliminare la fase γ_g tramite un'opportuna trasformazione di fase del tipo (2.7). In un articolo del 1984 Michael Berry mostrò che generalmente non è così [4][11].

Per convincerci di ciò riprendiamo momentaneamente l'espressione che abbiamo trovato per γ_g :

$$\gamma_g(\mathbf{R}(t)) = -Im \int_0^t \langle n(\mathbf{R}(t')) | \frac{d}{dt'} |n(\mathbf{R}(t'))\rangle dt'$$

Notiamo prima di tutto che può essere riespressa come :

$$\gamma_g(\mathbf{R}(t)) = -Im \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R}$$

Vediamo adesso come essa si trasforma sotto una trasformazione di gauge del tipo (2.7):

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle &\rightarrow \langle n(\mathbf{R}) |' \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle' = \langle n(\mathbf{R}) | e^{-i\zeta_n(\mathbf{R})} \nabla_{\mathbf{R}} (e^{i\zeta_n(\mathbf{R})} |n(\mathbf{R})\rangle) \\ &= \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle + e^{-i\zeta_n(\mathbf{R})} (\nabla_{\mathbf{R}} e^{i\zeta_n(\mathbf{R})}) \\ &= \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle + i \nabla_{\mathbf{R}} \zeta_n(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Da cui:

$$\gamma_g \rightarrow \gamma_g' = \gamma_g - \zeta_n(\mathbf{R}(t)) + \zeta_n(\mathbf{R}(0)). \quad (2.10)$$

Consideriamo ora un'evoluzione ciclica, in cui dunque $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)$ e :

$$|\psi(\mathbf{R}(T))\rangle = e^{i\gamma_d(T)} e^{i\gamma_g(T)} |n(\mathbf{R}(0))\rangle \quad (2.11)$$

$$\gamma_d(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(\mathbf{R}(t')) dt' \quad (2.12)$$

$$\gamma_g(T) = -Im \oint_C \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (2.13)$$

dove C è la curva descritta nello spazio dei parametri \mathbf{R} dall'evoluzione. Se provassimo ad eliminare $\gamma_g(T)$ tramite una trasformazione di fase ci accorgeremmo che ogni tentativo è destinato a fallire. Infatti dato che $\zeta_n(\mathbf{R}(t))$ è una funzione monodroma, allora necessariamente avremo $\zeta_n(\mathbf{R}(T)) = \zeta_n(\mathbf{R}(0))$ a meno di multipli di 2π . Secondo la (2.10) allora :

$$\gamma_g(T) \rightarrow \gamma'_g(T) = \gamma_g(T) - \zeta_n(\mathbf{R}(T)) + \zeta_n(\mathbf{R}(0)) = \gamma_g(T)$$

dunque la fase $\gamma_g(T)$ calcolata per un'evoluzione ciclica risulta essere indipendente da ogni trasformazione di fase operata sulla base ortonormale $|n(\mathbf{R})\rangle$. Essa è dunque un *invariante di gauge* e prende il nome di *fase geometrica* o anche *fase di Berry*. Il carattere geometrico di questa fase è manifesto in (2.13) che non dipende dal tempo o da qualunque altro parametro utilizzato per descrivere la curva C nello spazio dei parametri \mathbf{R} , e dunque dai dettagli del moto², ma solo dalla geometria dello spazio in cui questo moto avviene. Il fatto che questa fase non possa essere eliminata non implica che sia sempre presente. Esistono infatti casi in cui essa è semplicemente zero, ad esempio nel caso in cui la curva C non racchiude nessuna area, come presto vedremo, e nel caso in cui $|n(\mathbf{R})\rangle$ possono essere scelti reali.

Per valutare direttamente $\langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle$ è necessario che le basi $|n(\mathbf{R})\rangle$ siano a singolo valore in ogni punto \mathbf{R} di interesse. Questo però non è sempre possibile, e dipende fondamentalmente dalla topologia dello spazio dei parametri. In generale però è possibile effettuare questa associazione localmente e spesso questo è tutto quello che ci basta. Per eliminare queste eventuali difficoltà possiamo esprimere l'integrale in (2.13) in modo che la sua indipendenza dalla scelta di fase fatta su $|n(\mathbf{R})\rangle$ sia evidente. Supponiamo per semplicità che \mathbf{R} sia un vettore con sole tre componenti, allora, lasciando alla prossima sezione la generalizzazione di questi

²A patto che il moto sia abbastanza lento da garantire l'approssimazione adiabatica.

risultati, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \gamma_g(C) &= -Im \oint_{C=\partial S} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \\
 &= -Im \iint_S \nabla \times \langle n(\mathbf{R}) | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{S} \\
 &= -Im \iint_S \langle \nabla n(\mathbf{R}) | \times | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{S} \\
 &= -Im \iint_S \sum_{m \neq n} \langle \nabla n(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{S}
 \end{aligned}$$

dove è stato utilizzato il teorema di Stokes in \mathbb{R}^3 e dunque S indica una qualunque superficie avente come bordo la curva C . Il caso $m = n$ nella sommatoria non dà alcun contributo perché $\langle n | \nabla n \rangle$ è immaginario puro.

Questa nuova espressione risulta essere del tutto indipendente dalla fase scelta per $|n(\mathbf{R})\rangle$ e quindi il problema di monodromicità delle basi viene meno. Se infatti $\langle n | \nabla n \rangle$ sotto una trasformazione di gauge si trasforma come $\langle n | \nabla n \rangle \rightarrow \langle n | \nabla n \rangle + i \nabla \zeta_n$, allora evidentemente il suo rotore sarà indipendente dalla fase ζ_n introdotta. Notiamo inoltre che se la curva C non racchiude nessuna area la fase è nulla, come precedentemente anticipato.

Possiamo esprimere $\langle m | \nabla n \rangle$ in termini degli autovalori dell'Hamiltoniana $\hat{H}(\mathbf{R})$:

$$\langle m | \nabla n \rangle = \frac{\langle m | \nabla \hat{H} | n \rangle}{(E_n - E_m)} \quad m \neq n,$$

per cui la fase geometrica è anche esprimibile come :

$$\gamma_g(C) = -Im \iint_S \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R}) | \nabla \hat{H}(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla \hat{H}(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle}{(E_n(\mathbf{R}) - E_m(\mathbf{R}))^2} \cdot d\mathbf{S}.$$

2.2.3 La fase di Berry come Olonomia

In questa sezione ricaveremo nuovamente la fase di Berry, seguendo in parte l'interpretazione di questa fase proposta da B. Simon [12][9][11]. Vedremo che essa non è altro che l'olonomia associata ad una connessione che è naturalmente definita su un opportuno fibrato dall'adiabaticità della trasformazione. In questa sezione vengono utilizzati tutti gli strumenti matematici faticosamente introdotti nel Capitolo 1. Ne risulterà una generalizzazione elegante dei risultati ottenuti in precedenza.

Sia $\hat{H}(q)$ un'Hamiltoniana dipendente da un insieme di parametri q che variano in una varietà differenziabile M . Ad ogni punto $q \in M$ possiamo associare uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_q generato dagli autostati normalizzati di \hat{H} in q , definiti dalle equazioni:

$$\hat{H}(q) |\phi_k(q)\rangle = E_k(q) |\phi_k(q)\rangle \quad (2.14)$$

$$\langle \phi_k(q) | \phi_m(q) \rangle = \delta_{k,m} \quad (2.15)$$

dove richiediamo che gli autovalori $E_k(q)$ siano discreti e non degeneri per ogni q . Si può supporre, senza alcuna perdita di generalità, che $E_n(q) = 0$ per un qualche n e dunque in particolare avremo:³

$$\hat{H}(q) |\phi_n(q)\rangle = 0. \quad (2.16)$$

Dato che l'equazione (2.14) non determina la fase di ogni $|\phi_k(q)\rangle$ siamo liberi di effettuare questa scelta. Notiamo adesso che nel compiere questa scelta stiamo implicitamente operando sulla struttura di un fibrato, ed in particolare di un fibrato vettoriale associato ad un fibrato principale. Infatti possiamo riconoscere in M la varietà di base di questo fibrato e nei sottospazi di Hilbert generati dagli autovettori $|\phi_k(q)\rangle$ le sue fibre, a loro volta diffeomorfe alla fibra caratteristica identificata con uno spazio di Hilbert unidimensionale. Il fibrato principale a cui esso è associato è caratterizzato dal gruppo di struttura $U(1)$, la rappresentazione del quale fornisce le trasformazioni di fase tra vettori appartenenti ad uno stesso sottospazio di \mathcal{H}_q . Possiamo dunque determinare un ricoprimento $\{U_i\}$ di M e associare con continuità una fase alle basi $|\phi_k(q)\rangle_i$, con $q \in U_i$, tramite una sezione locale $f_{k,i} : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$. Un'associazione globalmente definita sul fibrato è possibile solamente nel caso in cui il fibrato è banale, in caso contrario siamo limitati a questa associazione locale. Se $q \in U_j \cap U_k$ allora sappiamo che esistono delle funzioni di transizione che mettono in relazione le due diverse fasi corrispondenti ad un dato vettore $|\phi_k(q)\rangle$, nelle due differenti trivializzazioni locali:

$$|\phi_k(q)\rangle_j = e^{i\alpha_{jk}(q)} |\phi_k(q)\rangle_k.$$

³Basta infatti ridefinire $\hat{H}'(q) = (\hat{H} - E_n \hat{I})(q)$. Vedere anche 2.3.

Sia adesso $\gamma(s) : [0, 1] \rightarrow M$ una curva su M , e $|\psi(0)\rangle$ un vettore di norma unitaria che appartiene allo spazio $\mathcal{H}_{\gamma(0)}$ generato dai vettori $|\phi_k(\gamma(0))\rangle$ ed in particolare al sottospazio generato dal vettore $|\phi_n(\gamma(0))\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle = e^{i\eta(0)} |\phi_n(\gamma(0))\rangle,$$

allora siamo in grado di trasportare parallelamente questo vettore lungo la curva γ se, per ogni s , è possibile associare univocamente un vettore normalizzato $|\psi(s)\rangle$ che appartiene allo sottospazio generato dal vettore $|\phi_n(\gamma(s))\rangle$ in $\mathcal{H}_{\gamma(s)}$:

$$|\psi(s)\rangle = e^{i\eta(s)} |\phi_n(\gamma(s))\rangle. \quad (2.17)$$

In altri termini vogliamo sollevare la curva γ nel fibrato, e cercare quella corrispondenza tra fibre discussa nella sezione 1.5. In virtù della proprietà di equivarianza, e dunque della commutatività tra l'azione di \tilde{R}_g e il sollevamento orizzontale, vogliamo che questo trasporto parallelo obbedisca a:

$$\eta(0) \rightarrow \eta(0) + \beta \Rightarrow \eta(s) \rightarrow \eta(s) + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Un trasporto parallelo risulta ben definito se richiediamo che $Im \langle \psi | d\psi/ds \rangle = 0$. Dato che $Re \langle \psi | d\psi/ds \rangle = 0$ per l'unitarietà della norma di $|\psi\rangle$, questa condizione può essere riespressa più semplicemente come:

$$\left\langle \psi \left| \frac{d\psi}{ds} \right. \right\rangle = 0 \quad (2.18)$$

che implica inoltre:

$$\langle \psi(s) | \psi(s + \delta s) \rangle = 1 + O((\delta s)^2).$$

Se la sola condizione (2.18) non dovesse determinare univocamente $|\psi(s + \delta s)\rangle$ dato $|\psi(s)\rangle$, allora saremmo in grado di riscontrare una differenza solamente nella fase associata a $|\psi(s + \delta s)\rangle \equiv |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle$ e $|\psi(s + \delta s)\rangle' \equiv |\psi\rangle + |\delta\psi\rangle'$, dato che l'unitarietà della norma deve essere soddisfatta, e dunque:

$$|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle' = e^{i\mu} (|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle), \quad \delta s \rightarrow 0 \Rightarrow \mu \rightarrow 0, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

e all'ordine più basso:

$$|\delta\psi\rangle' = i\mu|\psi\rangle + |\delta\psi\rangle.$$

Se entrambi i vettori $|\psi(s + \delta s)\rangle$ e $|\psi(s + \delta s)\rangle'$ soddisfano la (2.18), allora :

$$i\mu\langle\psi|\psi\rangle = 0 \Rightarrow \mu = 0,$$

da cui l'univocità del vettore associato a $|\psi(s)\rangle$ dal trasporto parallelo definito tramite la (2.18). Adesso ponendo $|\psi(0)\rangle = |\phi_n(0)\rangle$ e dunque $\eta(0) = 0$, e derivando rispetto a s la (2.17):

$$\left|\frac{d\psi(s)}{ds}\right\rangle = i\frac{d\eta(s)}{ds}|\psi(s)\rangle + e^{i\eta(s)}\left|\frac{d\phi_n(s)}{ds}\right\rangle$$

la (2.18) ci fornisce un'equazione per $\eta(s)$:

$$\frac{d\eta(s)}{ds} = i\left\langle\phi_n(s)\left|\frac{d\phi_n}{ds}\right.\right\rangle. \quad (2.19)$$

Dunque questa equazione descrive il trasporto parallelo del vettore $|\psi(s)\rangle$ stabilendo per ogni s qual è la fase associata al vettore $|\phi_n(\gamma(s))\rangle$. In altre parole abbiamo definito una connessione nel nostro fibrato principale e coerentemente con la teoria discussa nel Capitolo 1 dovremmo essere in grado di esprimere questa connessione tramite una 1-forma. Localmente infatti siamo in grado di costruire le seguenti 1-forme:

$$\tilde{\omega}_i = \left\langle\phi_n\left|\tilde{d}\phi_n\right.\right\rangle_i \quad (2.20)$$

che in un sistema di coordinate locale sono esprimibili come :

$$\tilde{\omega}_i = \left\langle\phi_n\left|\frac{\partial\phi_n}{\partial q^k}\right.\right\rangle_i \tilde{d}q^k$$

dove il pedice i ci ricorda che le forme $\tilde{\omega}_i$ sono definite solamente su aperti U_i di M . L'equazione (2.19) per $\eta(s)$ può essere ora riespressa in termini dei valori che queste 1-forme assumono sui vettori $\dot{\gamma}(s)$ tangenti alla curva γ :

$$\frac{d\eta(s)}{ds} = i\tilde{\omega}_i(\dot{\gamma}(s))$$

Se q appartiene alla sovrapposizione di due aperti U_j e U_k , sappiamo che esiste una trasformazione di fase che relaziona le due basi $|\phi_n(q)\rangle_j$ e $|\phi_n(q)\rangle_k$ viste in questi due "sistemi di coordinate" differenti:

$$|\phi_n(q)\rangle_j = e^{i\zeta_n(q)} |\phi_n(q)\rangle_k. \quad (2.21)$$

Allora è immediato mostrare che le due 1-forme $\tilde{\omega}_j$ e $\tilde{\omega}_k$, sotto la trasformazione (2.21), si trasformano proprio come previsto dalla (1.5):

$$\tilde{\omega}_j = \tilde{\omega}_k + i\tilde{d}\zeta_n. \quad (2.22)$$

Ancora nel Capitolo 1 abbiamo visto come a partire da una famiglia di connessioni locali sia possibile costruire un'unica 1-forma $\tilde{\omega}$ definita globalmente sul fibrato tramite (1.2)(1.3)(1.4), e tale che fornisca le singole connessioni locali tramite il pull-back relativo ad una data sezione locale.

Se adesso chiudiamo la curva γ :

$$\gamma(0) = \gamma(1) = q_0,$$

allora la fase acquisita dallo stato $|\psi\rangle$ dopo il trasporto parallelo lungo γ sarà:

$$\eta(\gamma) = i \int_0^1 \tilde{\omega}_i(\dot{\gamma}) ds = i \oint_{\gamma} \tilde{\omega}_i \quad (2.23)$$

la cui invarianza rispetto a trasformazioni di fase può essere esplicitata utilizzando il teorema di Stokes per le forme differenziali (1.1) :

$$\oint_{\gamma} \tilde{\omega}_i = \int_{\Sigma} \tilde{d}\tilde{\omega}_i. \quad (2.24)$$

Notiamo dalla (1.6) che $\tilde{d}\tilde{\omega}_i$ coincide con la curvatura locale $\tilde{\Omega}_i$, essendo $U(1)$ un gruppo commutativo e dunque $\tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_i = 0$. Possiamo eliminare il pedice i in quanto questa risulta essere invariante rispetto a trasformazioni di fase come mostra la (1.8) e come può essere esplicitamente verificato sfruttando un'espressione esplicita per $\tilde{\Omega}$ in un sistema di coordinate:

$$\tilde{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{\partial \phi_n}{\partial q^i} \middle| \frac{\partial \phi_n}{\partial q^j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_n}{\partial q^j} \middle| \frac{\partial \phi_n}{\partial q^i} \right\rangle \right) \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^j$$

In definitiva la fase (2.23) è la fase di Berry se ammettiamo, come abbiamo tacitamente fatto fino ad ora, che $|\psi(s)\rangle$ è lo stato di un sistema inizialmente nell'autostato $|\phi_n(0)\rangle$ di \hat{H} che è soggetto ad un'evoluzione ciclica nell'approssimazione adiabatica. Per convincerci è necessario mostrare come la legge per il trasporto parallelo richiesta in questa trattazione possa essere ricavata dall'equazione di Schrödinger nell'ipotesi di adiabaticità dell'evoluzione. Quest'ultima ci garantisce che:

$$i\hbar \frac{d}{ds} |\psi(s)\rangle = \hat{H} |\psi(s)\rangle = 0 \quad \text{per ogni } s \quad (2.25)$$

dato che $|\psi(s)\rangle$ è nello stesso stato di $|\phi_n(s)\rangle$ in ogni istante e $E_n(s) = 0$. Proiettando dunque $\langle\psi(s)|$ su (2.25) otteniamo esattamente la (2.18). Lo stato del sistema, al termine dell'evoluzione ciclica, sarà dunque:

$$|\psi(1)\rangle = e^{i\eta(\gamma)} |\psi(0)\rangle \quad (2.26)$$

Risulta adesso evidente dal confronto tra (1.9) e (2.26) che questa fase risulta essere un elemento del gruppo di ologonia della connessione in q_0 .

Prima di terminare questa sezione esplicitiamo l'equivalenza tra alcuni dei risultati trovati in questa sezione e in quella precedente :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_i &\leftrightarrow \langle n(\mathbf{R}) | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle \\ \tilde{\Omega} &\leftrightarrow \sum_{m \neq n} \langle \nabla n(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle \\ \left\langle \psi(s) \left| \frac{d\psi}{ds} \right. \right\rangle &\leftrightarrow \langle n(\mathbf{R}(t)) | \frac{d}{dt} | n(\mathbf{R}(t)) \rangle \end{aligned}$$

2.2.4 Un esempio per la fase di Berry: sistemi dotati di spin in un campo magnetico esterno lentamente variabile

Un'applicazione della teoria esposta nelle sezioni precedenti può essere trovata nella descrizione dell'evoluzione di un sistema quantistico dotato di un momento magnetico di spin $\boldsymbol{\mu}_s$ interagente con un campo magnetico esterno \mathbf{B} lentamente variabile, tale da mantenere affidabile l'approssimazione adiabatica [5]. Il campo magnetico esterno \mathbf{B} evolve in modo tale da mantenere il suo modulo costante e la sua direzione continuamente variabile, dunque se indichiamo con \mathbf{R} il versore che individua

la direzione di \mathbf{B} , questo può essere espresso come :

$$\mathbf{B}(t) = B\mathbf{R}(t),$$

dove è stata resa esplicita la dipendenza dal tempo. L'Hamiltoniana $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$ del sistema sarà dunque :

$$\hat{H}(\mathbf{R}(t)) = -\hat{\boldsymbol{\mu}}_s \cdot \mathbf{B}(t) = k\mathbf{R}(t) \cdot \hat{\mathbf{S}}$$

dove $\hat{\mathbf{S}}$ è l'operatore del momento di spin e $k = -\frac{Bg\mu_b}{\hbar}$, μ_b magnetone di Bohr e g fattore di Landé. Dunque il ruolo di parametro variabile è affidato al versore \mathbf{R} che appartiene ad una varietà bidimensionale, ovvero la sfera unitaria S^2 . Come è risaputo non possiamo trovare una mappa che ricopra tutta la sfera, quindi utilizzando le coordinate sferiche :

$$\mathbf{R}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

escludiamo necessariamente i vettori $\pm\mathbf{e}_3$ che puntano verso i poli. Allora, come in (2.1), possiamo associare ad ogni coppia (θ, ϕ) , e quindi ad ogni punto \mathbf{R} dello spazio dei parametri, un autostato normalizzato $|n(\mathbf{R})\rangle$ di $\hat{H}(\mathbf{R})$, definito a meno di una fase, con autovalore $k\hbar n$:

$$k\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{S}} |n(\mathbf{R})\rangle = k\hbar n |n(\mathbf{R})\rangle.$$

dove n è il numero quantico per la componente del momento angolare di spin lungo la direzione del campo magnetico esterno. È possibile ottenere questi autovettori a partire da rotazioni opportune di un autostato fissato, ricavandone dunque una parametrizzazione in termini di (θ, ϕ) . Sia ad esempio $|n(\mathbf{e}_3)\rangle$ l'autovettore relativo alla componente di $\hat{\mathbf{S}}$ lungo \mathbf{e}_3 , $\hat{S}_3 = \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{e}_3$, allora possiamo ottenere un arbitrario autovettore $|n(\mathbf{R}(\theta, \phi))\rangle \equiv |n(\theta, \phi)\rangle$ a partire dalle seguenti rotazioni di $|n(\mathbf{e}_3)\rangle$:

$$|n(\theta, \phi)\rangle = \hat{U}(\theta, \phi) |n(\mathbf{e}_3)\rangle = \hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(\theta)\hat{U}_3(-\phi) |n(\mathbf{e}_3)\rangle$$

dove:

$$\hat{U}_3(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\phi\hat{S}_3},$$

$$\hat{U}_2(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_2}$$

descrivono rispettivamente le rotazioni indipendenti di un vettore $|n(\mathbf{R})\rangle$ di un angolo ϕ e θ attorno agli assi \mathbf{e}_3 e \mathbf{e}_2 , che corrispondono alle rotazioni di \mathbf{R} su S^2 date da (figura 2.1):

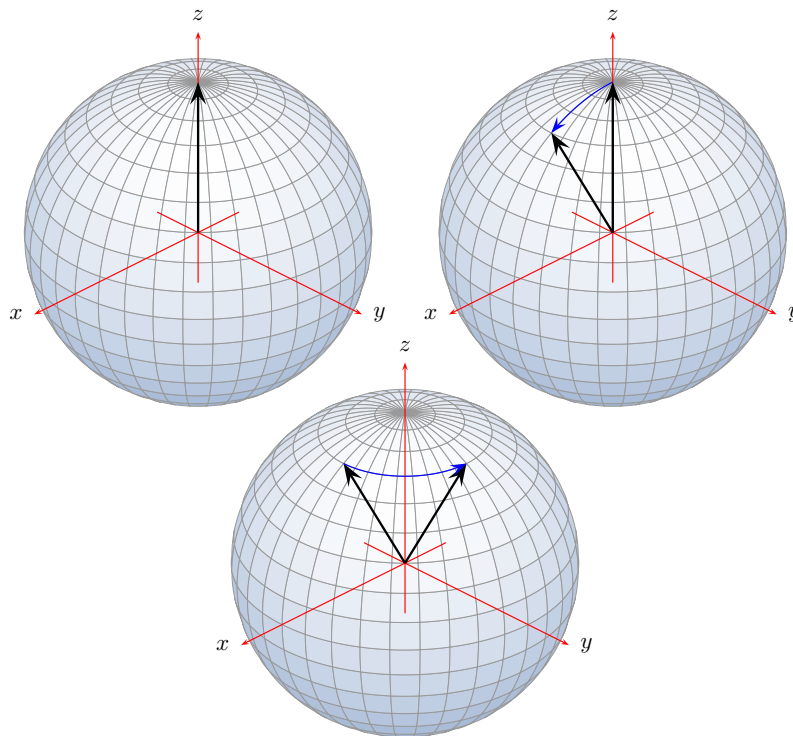


FIGURA 2.1: Rotazione del vettore $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ tramite l'applicazione delle tre matrici $U_3(-\phi)$, $U_2(\theta)$ e $U_3(\phi)$

$$U_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dunque i vettori $|n(\theta, \phi)\rangle$ così ottenuti verificheranno:⁴

$$k\mathbf{R}(\theta, \phi) \cdot \hat{\mathbf{S}} |n(\theta, \phi)\rangle = k\hbar n |n(\theta, \phi)\rangle. \quad (2.27)$$

Notiamo adesso che non siamo in grado di associare ad ogni coppia (θ, ϕ) un unico vettore $|n(\theta, \phi)\rangle$. Infatti questa associazione è univoca per tutti i punti di S^2 ad eccezione del punto al polo opposto rispetto a quello individuato da \mathbf{e}_3 .⁵ Infatti da (A.1) abbiamo:

$$\hat{U}_2(\pi)\hat{S}_3\hat{U}_2(-\pi) = -\hat{S}_3$$

e

$$\hat{U}_2(\pi)\hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(-\pi) = \hat{U}_3(-\phi)$$

e quindi :

$$\begin{aligned} |n(\pi, \phi)\rangle &= \hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(\pi)\hat{U}_3(-\phi) |n(\mathbf{e}_3)\rangle \\ &= \hat{U}_2(\pi)\hat{U}_3(-2\phi) |n(\mathbf{e}_3)\rangle \\ &= \hat{U}_2(\pi)e^{2in\phi} |n(\mathbf{e}_3)\rangle, \end{aligned}$$

ovvero al polo individuato da $-\mathbf{e}_3$ è associato un vettore $|n(\pi, \phi)\rangle$ per ogni valore di $\phi \in [0, 2\pi]$. Operando una trasformazione di fase:

$$|n(\mathbf{e}_3)\rangle \rightarrow e^{-2in\phi} |n(\mathbf{e}_3)\rangle \quad (2.28)$$

renderemmo a singolo valore l'autovettore associato al polo $-\mathbf{e}_3$ ma perderemmo di conseguenza questa proprietà in \mathbf{e}_3 . Dunque non è possibile definire globalmente un'associazione (2.1) univoca, ma solo localmente, ed ogni autostato nelle due *trivializzazioni* sarà relazionato da funzioni di transizione, o trasformazioni di fase, del tipo espresso in (2.28).

Fissata dunque una di queste due parametrizzazioni, otteniamo la connessione (2.20):

$$\tilde{\omega} = \langle n(\theta, \phi) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\theta, \phi) \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (2.29)$$

⁴Vedere Appendice A

⁵Nota: per quest'ultimo l'associazione è unica perché se $\theta = 0$ allora $\hat{U}(0, \phi)$ non dipende da ϕ

che si riduce semplicemente a:⁶

$$\tilde{\omega} = -in(\cos \theta - 1)\tilde{d}\phi. \quad \theta \neq \pi$$

Passando all'altra parametrizzazione otteniamo invece:

$$\tilde{\omega}' = -in(\cos \theta + 1)\tilde{d}\phi. \quad \theta \neq 0$$

Osserviamo che la (2.22) è compatibile con il nostro risultato, infatti :

$$\tilde{\omega}' = -(in(\cos \theta - 1)\tilde{d}\phi + i2n\tilde{d}\phi) = \tilde{\omega} + i\tilde{d}(-2n\phi).$$

Sappiamo che la 2-forma di curvatura associata alla nostra connessione è invariante rispetto a trasformazioni di fase, e dunque indipendente dalla parametrizzazione scelta:

$$\tilde{\Omega} = \tilde{d}\tilde{\omega} = \tilde{d}\tilde{\omega}' = in \sin \theta \tilde{d}\theta \wedge \tilde{d}\phi.$$

Finalmente, la fase di Berry risulta:

$$\gamma_g(C) = i \oint_C \tilde{\omega} = i \int_{\Sigma} \tilde{\Omega} = -n \int_{\Sigma} \sin \theta \tilde{d}\theta \wedge \tilde{d}\phi = -n \int_{\Sigma} d\Omega = -n\Omega(C)$$

dove $\Omega(C)$ ⁷ è l'angolo solido sotteso dalla curva $C = \partial\Sigma$ descritta su S^2 durante l'evoluzione ciclica.

Notiamo che la fase acquisita non dipende dallo spin S , ma solo dalla componente di questo lungo il campo \mathbf{B} . Se consideriamo ad esempio un fermione con spin semintero $s = 1/2$, una rotazione completa del campo \mathbf{B} su un piano contenente l'origine di S^2 provoca un cambiamento del segno della funzione d'onda che descrive lo stato di questa particella, in quanto $\Omega(C) = 2\pi$ e $e^{\gamma_g(C)} = -1$. Lo stesso effetto può essere indotto su un particella con spin intero, ad esempio $n = 1$, facendo variare \mathbf{B} lungo la superficie di un cono con angolo al vertice di $2\pi/3$, dato che in questo caso $\Omega = \pi$ (figura 2.2). Infine notiamo che curiosamente $-n\Omega(C)$ è il flusso attraverso Σ di un campo centrale della forma:

$$-\frac{n}{r^2}\mathbf{R}(\theta, \phi)$$

⁶Vedere Appendice B

⁷Da non confondere con la curvatura $\tilde{\Omega}$

che coincide con la forma del campo magnetico prodotto da un monopolo.

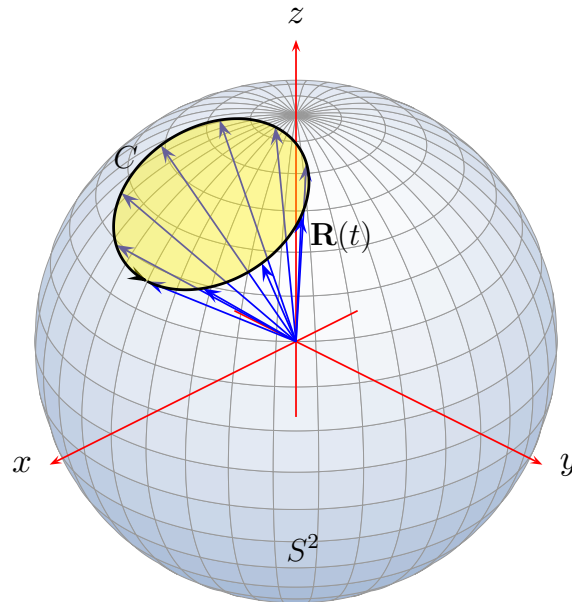


FIGURA 2.2: La lenta rotazione di $\mathbf{R}(t)$ (in blu) descrive un cono nello spazio e traccia una curva su S^2

2.3 La fase di Aharonov-Anandan

Passiamo ora alla trattazione di una generalizzazione della fase di Berry, ottenuta da Aharonov-Anandan [1][11]. Seguiremo principalmente la strada seguita in 2.2.3 per ottenere la fase di Berry, facendo le opportune generalizzazioni per il caso di un sistema sottoposto ad un'evoluzione ciclica ma non necessariamente adiabatica.

Una delle principali differenze tra l'approccio di Berry e di Aharonov-Anandan va ricercata nella nello spazio di base che caratterizza il fibrato nel quale viene descritta geometricamente l'evoluzione. Come sappiamo, la varietà di base che abbiamo fino ad ora considerato si identificava con lo spazio M dei parametri, dai quali dipendeva l'Hamiltoniana $\hat{H}(q)$, $q \in M$. Aharonov e Anandan considerano invece, come varietà di base, lo spazio degli stati quantici, ovvero lo *spazio di Hilbert proiettivo* $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, i cui elementi sono classi di equivalenza di stati $|\psi\rangle$ che si differenziano solo per la fase o una costante di normalizzazione :

$$|\psi\rangle = c|\psi'\rangle \Rightarrow |\psi\rangle \sim |\psi'\rangle, \quad c \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{|\psi\rangle \langle\psi| = [|\psi\rangle]_{\sim}; |\psi\rangle \in \mathcal{H}\}$$

dove con $[\psi]_{\sim}$ si indica la classe di equivalenza di appartenenza dell'elemento rappresentativo $|\psi\rangle\langle\psi|$.

La fase di Aharonov-Anandan verrà definita per evoluzioni cicliche (generiche) di stati quantistici che descrivono un'unica curva nello spazio $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ [5]. Questo vuol dire che dovremmo essere in grado di associare univocamente una fase geometrica a tutte quelle (infinite) evoluzioni cicliche corrispondenti a differenti Hamiltoniane e che dunque disegnano diverse curve C nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , ma che sostanzialmente descrivono una stesso problema fisico, rappresentato dall'unica curva chiusa \tilde{C} proiettata su $\mathcal{P}(\mathcal{H})$.

Consideriamo allora una curva chiusa $\tilde{C}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, e supponiamo che sia completamente contenuta in un aperto U di $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Sappiamo che è possibile definire su questo aperto una sezione locale $f_\phi : U \rightarrow \mathcal{H}$ tale che l'immagine di $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ tramite f_ϕ sia una curva chiusa in \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} f_\phi(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|) &= |\phi(t)\rangle, \\ |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| &= |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)|. \end{aligned}$$

In altre parole abbiamo scelto un ket $|\phi(t)\rangle^8$ che rappresenti in \mathcal{H} lo stato $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, per ogni t e tale che, se T è il periodo dell'evoluzione, $|\psi(T)\rangle\langle\psi(T)| = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| \Rightarrow |\phi(T)\rangle = |\phi(0)\rangle$. Se adesso consideriamo una particolare Hamiltoniana \hat{H} tale che la curva $|\psi(t)\rangle$ in \mathcal{H} definita dall'equazione di Schrödinger corrispondente

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

si proietti in $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, ci aspettiamo in generale che questa curva non si chiuda, ovvero che $|\psi(T)\rangle \neq |\psi(0)\rangle$. Come in precedenza vogliamo calcolare la fase acquisita da $|\psi(0)\rangle$ durante questa evoluzione, ma vogliamo esplicitarne solo quella parte dipendente dalla geometria dello spazio $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ e non da qualunque altro dettaglio del moto, come ad esempio la particolare scelta fatta sull'Hamiltoniana \hat{H} . Infatti ponendo $|\psi(t)\rangle = e^{i\mu(t)} |\phi(t)\rangle$ e ripercorrendo la stessa strada vista in 2.2.1 otteniamo:

$$\mu(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle\phi(t')| \hat{H}(t') |\phi(t')\rangle dt' + i \int_0^t \langle\phi(t')| \frac{d}{dt'} |\phi(t')\rangle dt'. \quad (2.30)$$

ovvero la fase acquisita da $|\psi(t)\rangle$ dipende esplicitamente da \hat{H} . Per convincercene

⁸Confrontare con 2.2.3. Nel caso corrente $|\phi(t)\rangle$ non è necessariamente l'autostato di una qualche Hamiltoniana.

possiamo, ad esempio, operare una trasformazione su \hat{H} del tipo:

$$\hat{H}(t) \rightarrow \hat{H}'(t) = \hat{H}(t) + \lambda(t)\hat{I} \quad \text{dove } \lambda(t) \in \mathbb{R}, \quad (2.31)$$

che chiaramente non modifica in sostanza la fisica del problema, dato che $|\psi(t)'\rangle$ differisce da $|\psi(t)\rangle$ solo per un fattore di fase⁹, ininfluenza al fine della caratterizzazione dello stato fisico $|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$ corrispondente, ma che non lascia allo stesso modo invariata la fase dinamica che si trasforma come :

$$-\frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle\phi(t')|\hat{H}(t')|\phi(t')\rangle dt' \rightarrow -\frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle\phi(t')|\hat{H}(t')|\phi(t')\rangle dt' - \frac{1}{\hbar} \int_0^t \lambda(t')dt'.$$

Possiamo, però, fissare una qualunque delle Hamiltoniane $\hat{H}(t)$ legate, per esempio, dalle trasformazioni (2.31), o che più in generale determinano una curva $|\psi(t)\rangle$ in \mathcal{H} proiettabile su $|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$ in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$, e definire :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i \int_0^t \langle\phi(t')|\hat{H}(t')|\phi(t')\rangle dt'} |\psi(t)\rangle. \quad (2.32)$$

Notiamo che $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ soddisfa l'equazione :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \left(\hat{H}(t) - \langle\phi(t)|\hat{H}(t)|\phi(t)\rangle \right) |\tilde{\psi}(t)\rangle \quad (2.33)$$

e dunque, ponendo $|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i\eta(t)} |\phi(t)\rangle$, la fase (2.30) che $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ acquista risulta essere indipendente da \hat{H} . Se operassimo adesso una trasformazione (2.31) su $\hat{H}(t)$ otterremmo ancora la stessa definizione per $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, che risulta dunque *indipendente* da ogni dettaglio che non caratterizzi unicamente l'evoluzione fisicamente rilevante dello stato definito da $|\tilde{\psi}(t)\rangle \langle\tilde{\psi}(t)|$, che coincide naturalmente con $|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$, essendo $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ e $|\psi(t)\rangle$ legati dalla sola trasformazione di fase (2.32).

Notiamo che in 2.2.3 l'autovalore $E_n(q)$ relativo all'autostato $|\phi_n(q)\rangle$ è stato supposto nullo, tramite la ridefinizione di $\hat{H}(q)$ come $\hat{H}(q) \rightarrow \hat{H}(q) - E_n \hat{I}$. Appare adesso evidente che così facendo ci siamo ricondotti semplicemente all'equazione (2.33), dove $\langle\phi(t)|\hat{H}(t)|\phi(t)\rangle = E_n$ dato che in quella circostanza $|\phi(t)\rangle$ era un autostato di $\hat{H}(t)$.

⁹Per la precisione $|\psi(t)'\rangle = e^{-i/\hbar \int_0^t \lambda(t')dt'} |\psi(t)\rangle$

La fase acquisita da $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, dopo un'evoluzione ciclica, risulta dunque :

$$\eta(T) = \eta(C) = i \int_0^T \langle \phi(t) | \frac{d}{dt} | \phi(t) \rangle dt = i \oint_C \langle \phi | d\phi \rangle. \quad (2.34)$$

ed è detta *fase di Aharonov-Anandan*.

Del tutto simile alla fase di Berry (2.23), con essa condivide il carattere unicamente geometrico, indipendente, nel caso corrente, non solo dalla parametrizzazione della curva $C(t) = |\phi(t)\rangle$ e da ogni trasformazione di gauge (2.22), ma anche dalla scelta dell'Hamiltoniana, a patto che questa descriva la stessa curva $|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ in $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Inoltre la fase di Berry è solo un'approssimazione della fase di Aharonov-Anandan sotto le condizioni di validità del teorema adiabatico.

Forniamo adesso un esempio [1][11] che mette in evidenza l'indipendenza della fase geometrica di Aharonov-Anandan dalle diverse Hamiltoniane che inducono una stessa evoluzione.

Possiamo considerare ancora il caso di una particella dotata di spin, ad esempio un fermione con $s=1/2$, immersa in un campo magnetico esterno. Supponiamo, a differenza di quanto fatto nella sezione 2.2.4, che il campo magnetico \mathbf{B} non dipenda dal tempo e che sia diretto lungo la direzione individuata dal versore \mathbf{e}_3 . L'Hamiltoniana, in questo caso, è semplicemente :

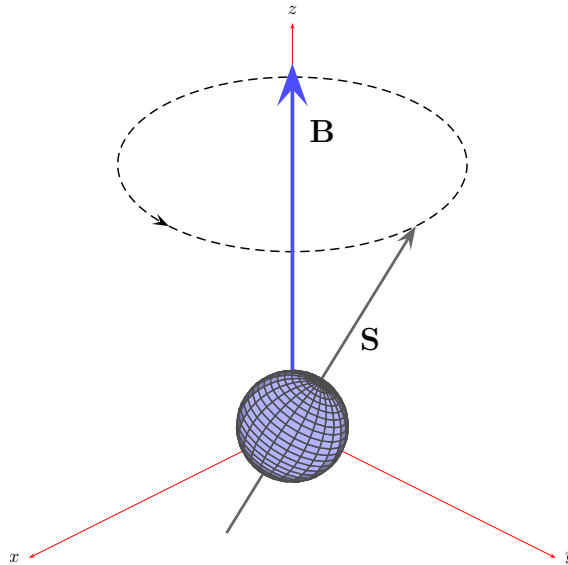


FIGURA 2.3: Rappresentazione della precessione dello spin di una particella attorno alla direzione del campo magnetico \mathbf{B} . L'angolo solido sotteso dalla curva tratteggiata fornisce la fase geometrica.

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} = -\frac{g\mu_b}{\hbar} B \hat{S}_3 \quad (2.35)$$

dove $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ è il momento magnetico di spin. Se lo stato dello spin della particella nell'istante iniziale è:

$$|\psi(0)\rangle = \cos(\theta/2) |\uparrow\rangle + \sin(\theta/2) |\downarrow\rangle,$$

con

$$\begin{aligned} \hat{S}_3 |\uparrow\rangle &= +\frac{1}{2}\hbar |\uparrow\rangle \\ \hat{S}_3 |\downarrow\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar |\downarrow\rangle, \end{aligned}$$

allora in un istante t successivo esso sarà :

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\theta/2) e^{i\frac{\mu_b B t}{\hbar}} |\uparrow\rangle + \sin(\theta/2) e^{-i\frac{\mu_b B t}{\hbar}} |\downarrow\rangle$$

ovvero lo spin precederà attorno alla direzione del campo magnetico con una frequenza di Larmor $\omega_L = 2\mu_b B/\hbar$. Dunque dopo un tempo $T = \frac{\pi\hbar}{\mu_b B}$, lo stato $|\psi(t)\rangle$ ha completato un'evoluzione ciclica, e la fase totale $\eta(T)$ acquisita sarà:

$$\begin{aligned} \langle\psi(T)|\psi(0)\rangle &= \cos^2(\theta/2) e^{i\pi} + \sin^2(\theta/2) e^{-i\pi} \\ &= e^{i\pi} - 2i \sin^2(\theta/2) \left(\frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2i} \right) \\ &= e^{i\pi} \Rightarrow \eta(T) = \pi, \end{aligned}$$

della quale la parte dinamica è:

$$\begin{aligned} \eta_d(T) &= \frac{1}{\hbar} \int_0^T \langle\psi(t)| \hat{H} |\psi(t)\rangle dt \\ &= \frac{2\mu_b B}{\hbar^2} \left(\cos^2(\theta/2) \int_0^T \langle\uparrow| \hat{S}_3 |\uparrow\rangle dt + \sin^2(\theta/2) \int_0^T \langle\downarrow| \hat{S}_3 |\downarrow\rangle dt \right) \\ &= \frac{\mu_b B}{\hbar} T (\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)) \\ &= \pi \cos \theta, \end{aligned}$$

dunque la fase geometrica di Aharonov-Arandan può essere ottenuta sottraendo

dalla fase totale la fase dinamica:

$$\eta_g(T) = \pi(1 - \cos \theta). \quad (2.36)$$

Geometricamente la (2.36) non è altro che l'angolo solido sotteso dalla curva tracciata dallo spin $|\psi(t)\rangle$ su una sfera (figura 2.3 e 2.2). Riotteniamo dunque lo stesso risultato trovato da Berry nel caso studiato nella sezione 2.2.4. Ciò che accomuna i due casi è l'evoluzione dello spin della particella che, in un caso e nell'altro, compie una certa rotazione, causata però da diverse configurazioni dell'ambiente esterno. Nel caso corrente il campo magnetico \mathbf{B} è uniforme e costante, e lo spin si limita a precedere attorno ad esso, invece, nel caso studiato in precedenza, il campo magnetico $\mathbf{B}'(t)$ ruota lentamente¹⁰ attorno ad un asse e, nell'approssimazione adiabatica, lo spin lo segue descrivendo la stessa traiettoria del campo. Dunque due *diverse* Hamiltoniane descrivono la *stessa* evoluzione, e come conseguenza la fase geometrica ad essa associata è *unica*.

¹⁰Lentamente significa che $\omega_L \gg \omega$, dove ω è la frequenza dell'orbita di $\mathbf{B}'(t)$

Capitolo 3

Effetto Aharonov-Bohm

In questo capitolo verranno descritti alcuni semplici problemi che danno luogo all'effetto Aharonov-Bohm, e verrà mostrato come questo effetto sia intimamente legato alla manifestazione di una fase geometrica, che appare come una conseguenza naturale della struttura geometrica che può essere riconosciuta alla base dell'elettromagnetismo. Verranno infine discussi alcuni esperimenti che hanno portato ad una verifica definitiva dell'effetto.

3.1 Potenziali e connessioni

Gli strumenti matematici introdotti nel primo capitolo si sono dimostrati fondamentali per una formalizzazione dei risultati ottenuti fino ad adesso. L'applicazione di questi strumenti in fisica, in realtà, va ben oltre quella appena vista.

Le fasi geometriche (2.23) e (2.34) hanno una forma del tutto simile e sono espresse in termini di ologonomia come integrali di 1-forme che si identificano con le connessioni (locali) definite sul fibrato. Queste connessioni hanno la proprietà di trasformarsi in un modo particolare quando è applicata una trasformazione di fase ad una sezione del fibrato :

$$|\phi\rangle \rightarrow |\phi\rangle' = e^{i\zeta} |\phi\rangle \quad \Rightarrow \quad \tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega}' = \tilde{\omega} + i d\zeta. \quad (3.1)$$

Abbiamo fatto riferimento a queste trasformazioni anche con il nome di *trasformazioni di gauge* perché non è un caso che somiglino molto alle trasformazioni ammesse dai potenziali A^0, \mathbf{A} dell'elettromagnetismo. Questi infatti non determinano

univocamente i campi elettromagnetici \mathbf{E}, \mathbf{B} tramite

$$\mathbf{E} = -\nabla A^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (3.2)$$

in quanto una trasformazione di gauge

$$A^0 \rightarrow A'^0 = A^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \alpha, \quad (3.3b)$$

dove $\alpha \equiv \alpha(t, \mathbf{x})$ è una funzione continua e differenziabile delle coordinate spazio-temporali, lascia invariati i campi \mathbf{E}, \mathbf{B} come può essere verificato immediatamente sostituendo A'^0, \mathbf{A}' in (3.2). L'Hamiltoniana di una particella con carica e e massa m in un campo (3.2) è data da:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eA^0 \quad (3.4)$$

e l'equazione di Schrödinger risultante

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \right) |\psi\rangle = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 |\psi\rangle$$

sarà invariante rispetto alle possibili trasformazioni di gauge (3.3) se $|\psi\rangle$ si trasforma come :

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{i\frac{e}{\hbar c}\alpha} |\psi\rangle. \quad (3.5)$$

Se dunque definiamo il quadripotenziale $\bar{\mathbf{A}} = A^\mu \mathbf{e}_\mu = (A^0, \mathbf{A})$ otteniamo l'1-forma¹ $\tilde{A} = A_\nu \tilde{dx}^\nu$ dove $A_0 = A^0$ e $A_i = -A^i$. Le (3.3) possono allora essere più sinteticamente espresse come:

$$\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}' = \tilde{A} - \tilde{d}\alpha, \quad (3.6)$$

e ponendo $\tilde{\omega} = -i\frac{e}{\hbar c}\tilde{A}$ e $\zeta = -\frac{e}{\hbar c}\alpha$ vengono ritrovate le (3.1). Come già rimarcato, questa equivalenza non è casuale e in effetti matematicamente il potenziale vettore \tilde{A} come 1-forma e una connessione locale $\tilde{\omega}$ sono *identici*. Questo ci suggerisce di trattare il potenziale vettore \tilde{A} come una connessione locale su un fibrato principale $U(1)$ avente come base lo spazio-tempo e, di conseguenza, reinterpretare l'elettromagnetismo geometricamente.

¹Nello spazio di Minkowski la metrica è $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e il quadrivettore \mathbf{x} è (ct, x^1, x^2, x^3)

Il primo a rendersi conto che questa reinterpretazione era possibile fu il matematico Hermann Weyl nel 1918. Weyl inizialmente prese in considerazione la possibilità che l'olonomia dovuta al trasporto parallelo di un vettore potesse manifestarsi non solo nel cambiamento della sua originale direzione ma anche della sua lunghezza, e che questo cambiamento Δl lungo una curva γ fosse dato dall'integrale di una 1-forma

$$\Delta l(\gamma) = e^{\Gamma(\gamma)} \quad \text{dove} \quad \Gamma(\gamma) = - \oint_{\gamma} \omega_{\mu} \tilde{d}x^{\mu} \quad (3.7)$$

analogamente a (2.23). Weyl individuò nel potenziale vettore elettromagnetico \tilde{A} la connessione che avrebbe dato luogo a (3.7). Questo primo tentativo era però destinato al fallimento. Come fece notare Einstein, infatti, se davvero fosse possibile assegnare arbitrariamente ad ogni punto dello spazio-tempo una unità di lunghezza e di conseguenza trasportare parallelamente questa scelta, allora sarebbe del tutto impossibile per un osservatore effettuare delle misurazioni oggettive, in quanto la lunghezza di un metro o l'intervallo temporale registrato da un orologio dipenderebbero non solo dalla loro posizione attuale ma anche dalla loro storia passata. Quest'idea venne riproposta all'incirca dieci anni dopo, quando ormai era diventato naturale pensare in termini di meccanica ondulatoria e, con l'introduzione del fattore i in (3.7), l'olonomia dovuta al trasporto parallelo poteva essere associata non alla lunghezza, bensì alla fase e^{-in} di una funzione d'onda:

$$\eta(\gamma) = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\gamma} \tilde{A} \quad (3.8)$$

Certamente nessuno presentò obiezioni simili a quelle di Einstein, dato che la differenza di fase acquisita da strumenti di misura non avrebbe avuto effetti rilevanti sulla misura stessa. Nacque così la prima *teoria di gauge*, alla quale seguirono dopo diversi anni altre teorie analoghe volte alla descrizione di altre interazioni fondamentali associate a gruppi di simmetria non abeliani².

In questa nuova prospettiva è possibile dunque interpretare non solo il potenziale vettore \tilde{A} come una connessione locale su un fibrato principale ma di conseguenza anche i campi \mathbf{E}, \mathbf{B} come espressione della curvatura di questo fibrato. Infatti sappiamo che in un fibrato dotato di un gruppo di struttura abeliano la curvatura

²A differenza del gruppo abeliano $U(1)$ associato all'elettromagnetismo.

$\tilde{\Omega} \equiv \tilde{F}$ è semplicemente la derivata esterna di una connessione locale:

$$\tilde{d}\tilde{A} = \tilde{F}$$

e come tale risulta essere *gauge invariante*:

$$\tilde{A} \rightarrow \tilde{A} - \tilde{d}\alpha \quad \Rightarrow \quad \tilde{F} \rightarrow \tilde{d}\tilde{A} - \underbrace{\tilde{d}(\tilde{d}\alpha)}_0 = \tilde{d}\tilde{A} = \tilde{F}.$$

In un sistema di coordinate $\{x^\nu\}$ possiamo esprimere \tilde{F} come:

$$\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A} = \tilde{d}\left(A_\nu \tilde{d}x^\nu\right) = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \tilde{d}x^\mu \wedge \tilde{d}x^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) \tilde{d}x^\mu \wedge \tilde{d}x^\nu \quad (3.9)$$

che tramite (3.2) può essere esplicitata in termini di \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, introducendo la quadricorrente $J^\mu \equiv (\rho, \mathbf{J})$, le equazioni di Maxwell possono essere espresse tramite:

$$\tilde{d}\tilde{F} = 0 \quad (3.10a)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu. \quad (3.10b)$$

3.2 L'effetto Aharonov-Bohm

I potenziali A^0 e \mathbf{A} furono originariamente introdotti con il solo scopo di rendere più pratico il calcolo dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , ai quali era esclusivamente assegnato un significato fisico. I potenziali sono sempre stati considerati come un mero strumento matematico. Alla base di questa “discriminazione” c’era evidentemente l’ambiguità a loro associata dovuta alla libertà di essere ridefiniti per mezzo di trasformazioni di gauge, trasformazioni che, come è stato mostrato, non producono, nell’universo classico e apparentemente in quello quantistico, alcun effetto fisicamente misurabile e dunque rilevante. È in effetti sempre possibile, ma non necessario, esprimere le equazioni del moto classiche, così come le equazioni di Maxwell (3.10), per mezzo

dei soli campi \mathbf{E} , \mathbf{B} . Utilizzando però il formalismo Hamiltoniano, che in meccanica quantistica è necessario, nelle equazioni trovano spazio solamente i potenziali A^0 e \mathbf{A} che non risultano quindi eliminabili:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \frac{e}{mc} \nabla \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - e \nabla A^0\end{aligned}$$

dove H è data da (3.4). Ovviamente ciò non è bastato a far sorgere qualche dubbio riguardo un ruolo che i potenziali avrebbero potuto acquistare nella teoria quantistica perché, per il resto, tutto funzionava precisamente come nell'elettromagnetismo classico.

Quando Weyl presentò la sua teoria di gauge dell'elettromagnetismo nessuno pensò di riproporre una rivisitazione dell'obiezione di Einstein, chiedendosi se la differenza di fase (3.8) fosse una quantità misurabile. Probabilmente, in quel caso, l'effetto Aharonov-Bohm sarebbe nato trent'anni prima [14].

Dunque alla base dell'effetto Aharonov-Bohm c'è la fase (3.8), che più esplicitamente possiamo esprimere come:

$$\eta(\gamma) = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\gamma} \tilde{A} = \frac{e}{\hbar} \oint_{\gamma} A^0 dt - \frac{A^i}{c} dx_i, \quad (3.11)$$

e che può avere, nei casi che andremo ora a descrivere, degli effetti misurabili.

3.2.1 L'effetto Aharonov-Bohm elettrico

L'effetto Aharonov-Bohm elettrico può essere osservato, sulla base di (3.11), quando delle cariche elettriche vengono fatte interagire con potenziali elettrostatici. Consideriamo, ad esempio [2], un fascio coerente di elettroni che viene separato in due singoli fasci in maniera che questi entrino rispettivamente in due lunghi conduttori cilindrici cavi prima di essere ricombinati e fatti interferire coerentemente su F (figura 3.1). Si suppone che la lunghezza dei tubi cilindrici sia molto più grande della lunghezza del pacchetto d'onda elettronico, ma che quest'ultima sia molto più grande della lunghezza d'onda degli elettroni. Il potenziale in ogni tubo è mantenuto a zero fino a quando entrambi i fasci sono penetrati completamente all'interno dei conduttori. A questo punto il potenziale viene fatto variare per poi tornare a zero in maniera differente nei due tubi, in un tempo τ minore del tempo impiegato

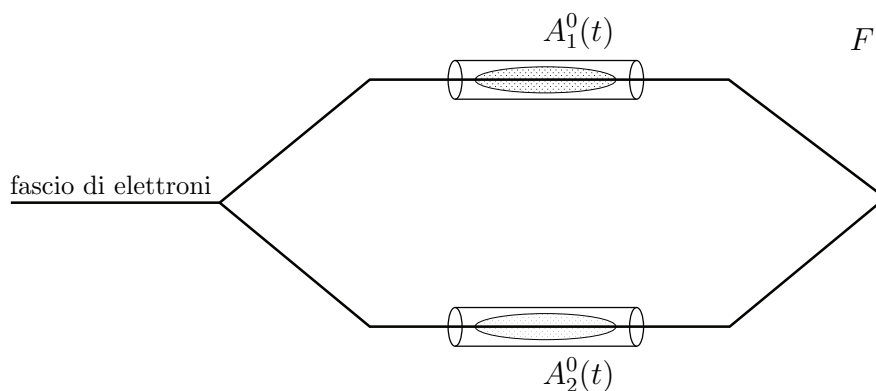


FIGURA 3.1: Schematizzazione dell'apparato sperimentale per l'osservazione dell'effetto Aharonov-Bohm elettrico

dal fascio per fuoriuscire dal tubo. Il tutto è studiato affinché gli elettroni non interagiscano mai con un campo elettrico. Se allora $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_1(t, \mathbf{x}) + \psi_2(t, \mathbf{x})$ è la funzione d'onda descrivente il sistema complessivo, le funzioni d'onda $\psi_1(t, \mathbf{x})$ e $\psi_2(t, \mathbf{x})$ dei singoli fasci saranno :

$$\psi_1(t, \mathbf{x}) = e^{-i\eta_1(\tau)}\psi_{0,1}(t, \mathbf{x}) \quad \psi_2(t, \mathbf{x}) = e^{-i\eta_2(\tau)}\psi_{0,2}(t, \mathbf{x}),$$

dove $e^{-i\eta_1(\tau)}$ e $e^{-i\eta_2(\tau)}$ sono le fasi acquisite per effetto dei potenziali $A_1^0(t)$ e $A_2^0(t)$ variabili nel tempo:

$$\eta_1(\tau) = \frac{e}{\hbar} \int_0^\tau A_1^0(t) dt \quad \eta_2(\tau) = \frac{e}{\hbar} \int_0^\tau A_2^0(t) dt$$

ed evidentemente $\psi_{0,1}(t, \mathbf{x})$ e $\psi_{0,2}(t, \mathbf{x})$ sono le funzioni d'onda dei fasci in assenza di ogni potenziale. Dato che essi acquisiscono due fasi differenti durante il processo, la figura di interferenza osservata ne risulterà influenzata. Dunque concludiamo che quantisticamente il potenziale elettrostatico può avere degli effetti misurabili sugli elettroni, nonostante questi non abbiano interagito con alcun campo.

3.2.2 L'effetto Aharonov-Bohm magnetico

L'effetto a cui si fa maggiormente riferimento è tuttavia l'effetto Aharonov-Bohm magnetico.

Consideriamo un solenoide di raggio R percorso da corrente e infinitamente esteso lungo una direzione che facciamo coincidere con l'asse z (figura 3.2). In queste con-

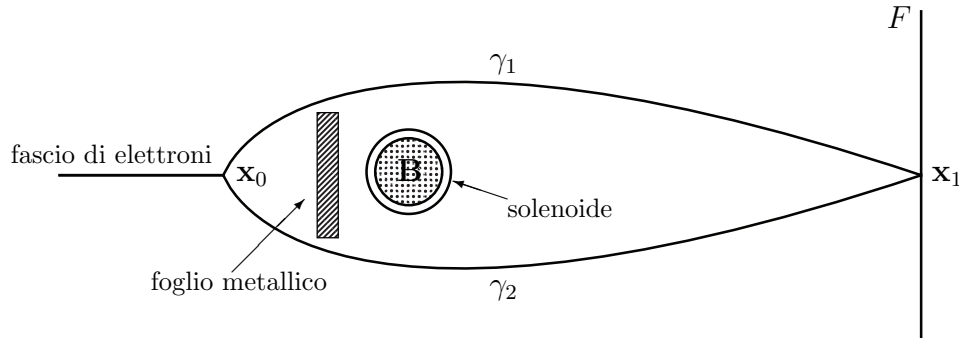


FIGURA 3.2: Schematizzazione dell'apparato sperimentale per l'osservazione dell'effetto Aharonov-Bohm magnetico. Il foglio metallico scherma il solenoide dal fascio di elettroni

dizioni ideali il campo magnetico $\mathbf{B} = B^z \mathbf{e}_z$, prodotto dalla corrente nel solenoide, dovrebbe essere confinato all'interno del solenoide stesso ed essere identicamente nullo in tutta la regione esterna. Tuttavia in questa regione, dove $\mathbf{B} = 0$, sarà presente un campo \mathbf{A} non nullo. Infatti se C è una curva chiusa circolare di raggio r contenuta in un piano perpendicolare all'asse del solenoide, e tale da racchiudere quest'ultimo, allora per il teorema di Stokes:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = B_z \pi R^2 = \Phi,$$

dove $\Phi \neq 0$ è il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie Σ che ha come bordo C . Per la simmetria del problema, \mathbf{A} dipenderà unicamente dalla coordinata r e possiamo porre $\mathbf{A} = A^\theta \mathbf{e}_\theta$, dove $A^\theta = \Phi/2\pi r$ per $r \geq R$. Questo potenziale non può essere eliminato ovunque per mezzo di un'opportuna trasformazione di gauge. Infatti se volessimo porre $\mathbf{A}' = 0$ allora:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\zeta(r, \theta, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\zeta(r, \theta, z) = -\frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta,$$

dove (r, θ, z) indicano un sistema di coordinate cilindriche. Utilizzando l'espressione per il gradiente in queste coordinate

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

otteniamo:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = -\frac{\Phi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \zeta(\theta) = -\frac{\Phi}{2\pi}\theta + \text{costante},$$

che non definisce una corretta trasformazione di gauge, in quanto $\zeta(\theta) \neq \zeta(\theta + 2\pi)$ e dunque la funzione d'onda trasformata $\psi' = e^{i\frac{e}{\hbar c}\zeta}\psi$ non risulta a singolo valore.

Se adesso consideriamo un fascio coerente di elettroni, questo potrà essere descritto dalla funzione d'onda $\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\eta(\mathbf{x})}\psi_0(t, \mathbf{x})$, dove $\psi_0(t, \mathbf{x})$ è la soluzione per il caso $\mathbf{A}, \mathbf{B} = 0$ e

$$\eta(\mathbf{x}) = -\frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}.$$

La fase acquisita η dipenderà unicamente dagli estremi di integrazione solo nel caso in cui moto è confinato nella regione in cui $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. La regione in cui $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, però, non è semplicemente connessa, e in generale l'integrale che definisce η dipende dal percorso che collega \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} . Utilizzando due fasci di elettroni separati che, come in (3.2.1), sono fatti ricombinare in \mathbf{x}_1 passando dai due lati opposti del solenoide, possiamo esprimere la funzione d'onda totale $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_1(t, \mathbf{x}) + \psi_2(t, \mathbf{x})$ come:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\eta_1(\gamma_1)}\psi_{0,1}(t, \mathbf{x}) + e^{-i\eta_2(\gamma_2)}\psi_{0,2}(t, \mathbf{x})$$

dove γ_1 e γ_2 sono le curve su un piano perpendicolare all'asse del solenoide lungo le quali avviene il moto dei singoli fasci, e che collegano il punto \mathbf{x}_0 con il punto \mathbf{x}_1 dove avviene la ricombinazione. Allora la differenza di fase dei due fasci in \mathbf{x}_1 sarà:

$$\begin{aligned} \eta_1(\gamma_1) - \eta_2(\gamma_2) &= -\frac{e}{\hbar c} \left(\int_{\gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right) \\ &= \frac{e}{\hbar c} \left(\int_{-\gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right) \\ &= \frac{e}{\hbar c} \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \frac{e}{\hbar c} \Phi \\ &= 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

dove $\gamma = \gamma_2 \cup (-\gamma_1)$ e $\Phi_0 = hc/e$. Dunque, anche in questo caso, la presenza di un potenziale $\mathbf{A} \neq 0$ nella regione in cui è confinato il moto può avere degli effetti misurabili, riscontrabili nel cambiamento della figura di interferenza degli elettroni al variare del flusso Φ nel solenoide. Notiamo che se Φ/Φ_0 è un intero non sarà

osservato alcun effetto.

3.2.3 L'effetto Aharonov-Bohm come fase di Berry

M.V. Berry [4][11], Aharonov e Anandan [1][11] mostrarono che l'effetto Aharonov-Bohm è nient'altro che un caso particolare delle loro fasi geometriche.³

Consideriamo per semplicità [9] il caso ideale di una particella negativamente carica che è soggetta ad un potenziale che la confina in una "scatola" unidimensionale di larghezza $R\Delta$, dove R è il raggio di una circonferenza centrata sull'asse di un solenoide percorso da corrente, della quale la scatola ne rappresenta un arco, e $0 < \Delta < 2\pi$ è un angolo. Il potenziale \mathbf{A} in tutta la regione esterna sarà come nel caso precedente $\mathbf{A} = \Phi/(2\pi r)\mathbf{e}_\theta$. La posizione della scatola lungo la circonferenza è individuata dalla coordinata θ_0 di un suo estremo, e nella nostra trattazione questa coordinata rappresenterà il parametro da cui dipende l'Hamiltoniana

$$\hat{H}(\theta_0) = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2i\frac{\Phi}{\Phi_0}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\Phi^2}{\Phi_0^2} \right) + \Theta(R(\theta - \theta_0))\Theta(R(\theta_0 + \Delta - \theta))$$

dove $\Phi_0 = \frac{e}{hc}$ e $\Theta(x)$ è la funzione di Heaviside.

Fissato θ_0 , le autofunzioni $\phi_n(\theta; \theta_0)$ dell'Hamiltoniana $\hat{H}(\theta_0)$ sono fornite dalle soluzioni dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2i\frac{\Phi}{\Phi_0}\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{E_n}{E_0} - \frac{\Phi^2}{\Phi_0^2} \right) \right) \phi_n(\theta; \theta_0) = 0,$$

con le condizioni al contorno:

$$\phi_n(\theta; \theta_0) = 0 \quad \text{per} \quad \theta - \theta_0 \notin [0, \Delta],$$

dove E_n sono gli autovalori corrispondenti e $E_0 = \hbar^2/(2mR^2)$. Le soluzioni (ϕ_n, E_n) sono:

$$\begin{aligned} \phi_n(\theta; \theta_0) &= \sqrt{\frac{2}{R\Delta}} \sin \left[\frac{\pi n}{\Delta}(\theta - \theta_0) \right] e^{i\Phi/\Phi_0(\theta - \theta_0)} && \text{se } \theta - \theta_0 \in [0, \Delta] \\ E_n &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar\pi n}{R\Delta} \right)^2 && n \neq 0. \end{aligned}$$

³In una prospettiva geometrica dell'elettromagnetismo

La connessione (2.20) sarà dunque:

$$\left\langle \phi_n(\theta; \theta_0) \left| \tilde{d}\phi_n(\theta; \theta_0) \right. \right\rangle = -i \frac{\Phi}{\Phi_0} \tilde{d}\theta_0.$$

Dunque, ammesso che la scatola venga trasportata lentamente attorno al solenoide per mantenere valida l'ipotesi adiabatica e che dunque siano trascurabili le transizioni ad altri $|\phi_k\rangle$, la fase di Berry sarà:

$$\eta(C) = \frac{\Phi}{\Phi_0} \oint_C \tilde{d}\theta_0 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

identica alla *fase di Aharonov-Bohm* (3.12).

3.3 Verifiche sperimentali dell'effetto Aharonov-Bohm

Alle conclusioni a cui arrivarono Aharonov e Bohm seguì un lungo (e non del tutto ad oggi concluso) dibattito, che poteva essere spento solamente da una verifica sperimentale chiara e priva di ambiguità.

3.3.1 L'esperimento di Chambers (1960)

Il primo esperimento venne messo in atto da R.G. Chambers [6] contemporaneamente alla formulazione teorica dell'effetto da parte di Aharonov e Bohm. La configurazione dell'esperimento rispecchia sostanzialmente quella descritta nella sezione 3.2.2, nella quale, però, il solenoide è sostituito da un sottile filamento magnetico di ferro, che va più facilmente incontro alla necessità di creare flussi localizzati in una regione molto piccola, dettata dalla massima separazione ottenibile dei fasci di elettroni. Il campo magnetico all'interno di questo filamento è tale da produrre un flusso che non è costante lungo la direzione z , ma che, con buona approssimazione, aumenta linearmente con z :

$$\frac{d\Phi}{dz} = \text{costante}.$$

Il fascio è separato in due da un biprisma elettrostatico che consiste in una fibra di quarzo f e due piatti metallici e collegati a terra (figura 3.3). Applicando un

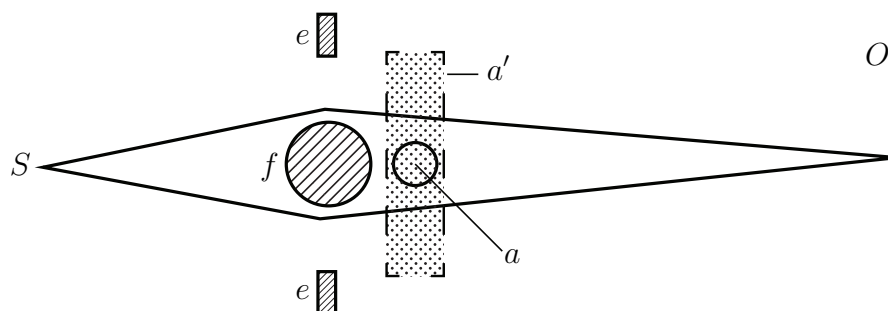


FIGURA 3.3: Schematizzazione dell'apparato utilizzato da Chambers per la verifica dell'effetto Aharonov-Bohm.

potenziale positivo sulla fibra di quarzo è possibile regolare l'angolo di separazione dei fasci. Nell'apparato utilizzato da Chambers venne utilizzato un filamento di $1 \mu\text{m}$ di diametro e una fibra f di $1.5 \mu\text{m}$ che venne disposta rispettivamente a 6.7 cm e 13.4 cm dalla sorgente S del fascio e dallo schermo O sul quale vengono osservate le figure di interferenza.

Prima di effettuare le misurazioni sull'interferenza in presenza del solo filamento, venne osservata l'interferenza prodotta da un campo uniforme e costante lungo la direzione z , confinato in una regione rettangolare a' come in figura. Facendo interferire in questa configurazione i due fasci di elettroni, si osservò una figura di interferenza che differiva da quella prodotta nel caso in cui il campo era spento solamente per una rigida traslazione complessiva (figura 3.4a). Dunque sia il profilo

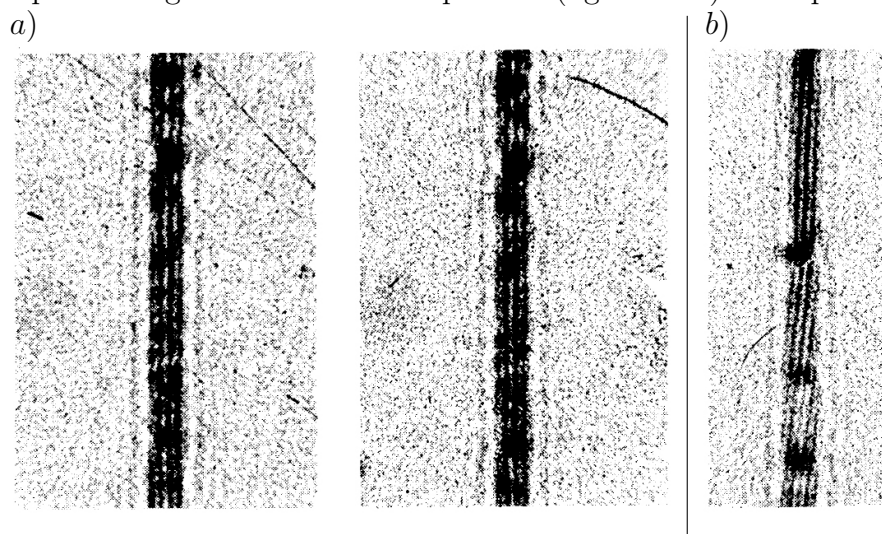


FIGURA 3.4: a) Spostamento della figura di interferenza per effetto dell'interazione dei fasci con un campo \mathbf{B} non nullo nella regione a' . b) Figura di interferenza prodotta utilizzando come sorgente del flusso il sottile filamento magnetico.

Immagini originali tratte dall'articolo di Chambers [6].

che le *frange* di interferenza venivano spostate della stessa quantità. Lo spostamento del profilo può essere semplicemente spiegato tramite l'interazione dei fasci con il campo non nullo nella regione a' , che si suppone ovviamente attraversata dal fascio. Lo spostamento delle frange, invece, ha una natura del tutto quantomeccanica, e non può essere spiegata come effetto di una forza di Lorentz sulle particelle, e quindi tramite una loro interazione con un qualche campo. A dimostrazione di ciò, venne eliminato il campo in quella regione di a' che risulta essere nell'*ombra* della fibra f , ed effettivamente si osservò uno spostamento delle frange ma non del profilo della figura di interferenza rispetto al caso in cui il campo era presente in tutta la regione a' . Dunque una *variazione del flusso* produsse un cambiamento nella fase dei fasci, e quindi nelle frange di interferenza.

Utilizzando il sottile filamento magnetizzato, e dunque confinando il campo (non più costante) nella regione a , si osservò una figura di interferenza con frange leggermente pendenti verso un lato (figura 3.4b), apparentemente spiegabili unicamente come un effetto della variazione del flusso $\Phi(z)$ con l'altezza. In realtà, proprio a causa di questo campo $\mathbf{B}(z)$ variabile, è necessario ammettere l'esistenza di una componente radiale nella regione esterna al filamento

$$\mathbf{B}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi(z)}{dz} \mathbf{e}_r$$

la cui presenza, secondo alcuni, potrebbe aver determinato completamente la figura di interferenza prodotta, rendendo di conseguenza non conclusivo l'intero esperimento.

3.3.2 L'esperimento di Tonomura (1986)

All'esperimento di Chambers ne seguirono altri che mostravano risultati analoghi e che, allo stesso modo, non potevano considerarsi del tutto conclusivi, data l'inevitabile interazione delle particelle utilizzate con i campi residui in quelle regioni in cui idealmente sarebbero dovuti essere nulli. Tutti questi esperimenti non erano quindi in grado di isolare il solo effetto predetto da Aharonov e Bohm.

Un esperimento definitivo si prefiggeva di:

- i)* eliminare ogni campo residuo,
- ii)* schermare efficacemente la sorgente del flusso dal fascio.

Evidentemente la *i*) è la richiesta più difficile da soddisfare. L'apparato ideale proposto da Aharonov e Bohm richiede l'utilizzo di un solenoide rettilineo *infinitamente* lungo che, ovviamente, non può essere realizzato. Dato che le linee del campo magnetico \mathbf{B} si chiudono sempre in se stesse è difficile ottenere un campo abbastanza debole al di fuori di un solenoide di lunghezza finita. Una soluzione intelligente consiste nell'utilizzare una sorgente del flusso differente, come ad esempio un solenoide toroidale. La geometria del toro è tale da permettere alle linee del campo di chiudersi in se stesse all'*interno* del solenoide, lasciando, idealmente, la regione esterna libera da ogni campo residuo. Nella pratica, però, anche questa soluzione potrebbe non essere all'altezza della precisione richiesta in questo tipo di esperimento, che vuol togliere ogni dubbio sulla possibile interazione delle particelle con un campo. La soluzione definitiva venne attuata da Tonomura *et al.* [13] sotto suggerimento di C.N. Yang. Per diminuire drasticamente le perdite del flusso all'*esterno* del toroide si pensò di rivestire quest'ultimo con uno strato di materiale superconduttore che, al di sotto della temperatura critica, è in grado di precludere la penetrazione di ogni campo per effetto Meissner. Più nel dettaglio, come sorgente del flusso, venne utilizzato un sottile strato (200 Å) di *Permalloy* magnetizzato (80% Ni e 20%Fe) di forma toroidale, ricoperto da uno strato (2500 Å) di niobio (Nb), un metallo con proprietà superconduttive al di sotto della temperatura $T_c = 9.2$ K, e da uno strato (500-2000 Å) di rame per prevenire la penetrazione del fascio al suo interno. Un aspetto importante dell'utilizzo di un superconduttore per la schermatura dei campi è la quantizzazione del flusso che ne consegue. Infatti quando nel materiale superconduttore avviene l'effetto Meissner le linee del campo originariamente all'interno della regione cava restano "intrappolate" in essa, e il flusso residuo Φ risulta essere quantizzato:

$$\Phi = n \frac{hc}{2e} = n \frac{\Phi_0}{2} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Dunque lo spostamento relativo delle frange di interferenza venne osservato tramite tecniche di olografia elettronica tra due fasci di elettroni passanti rispettivamente all'esterno dell'anello toroidale e all'interno del buco. Evidentemente se il niobio è portato al di sotto della temperatura critica T_c e dunque il flusso è quantizzato secondo la (3.13), la differenza di fase predetta da Aharonov e Bohm (3.12) è:

$$\eta = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n \frac{\Phi_0}{2\Phi_0} = n\pi$$

e dunque *osservabile*, nello spostamento delle frange, per n dispari, e *non osservabile*

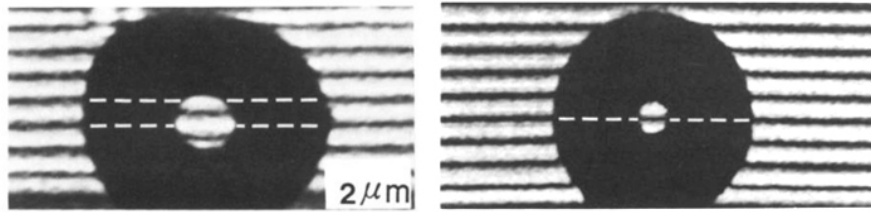


FIGURA 3.5: Interferenza prodotta a $T = 4.5$ K per n dispari (sinistra) e n pari (destra). Immagini originali tratte dall'articolo di Tonomura [13].

per n pari, in pieno accordo con i risultati trovati (figura 3.5).

Capitolo 4

Conclusioni

La fase di Berry e, più in generale, le fasi geometriche hanno trovato subito moltissime applicazioni nei più disparati ambiti della fisica. La loro scoperta ha permesso di predire nuovi effetti e di spiegarne altri già conosciuti da tempo in una prospettiva più ampia. L'effetto Aharonov-Bohm è certamente uno di questi. L'aspetto più sorprendente di questo effetto sta nell'aver messo in una nuova luce i potenziali elettromagnetici. Abbiamo visto come l'invarianza di gauge di una grandezza distingue ciò a cui può essere assegnato un significato fisico da ciò che ha "solamente" una valenza matematica, e i potenziali certamente sembrano appartenere a quest'ultima categoria. L'effetto Aharonov-Bohm, però, mostra come questi possano avere degli effetti misurabili, essendo gli unici campi non nulli presenti nelle regioni in cui è confinato il moto di un sistema. È evidente che classicamente questo effetto non può avere una controparte. Nel mondo classico una particella carica può interagire solamente con i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , e la manifestazione di questa interazione è la forza di Lorentz $F = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$, che è chiaramente nulla sulle cariche considerate negli esempi precedenti. Non a caso, quindi, questo effetto prende forma nella fase di una funzione d'onda, che è una grandezza esclusivamente quantomeccanica. Gli autori stessi dell'articolo [2] erano ovviamente consapevoli della piccola rivoluzione concettuale che le loro semplici considerazioni avrebbero portato o che, quantomeno, era necessaria una reinterpretazione del ruolo dei campi nella teoria dell'elettromagnetismo. Si stava facendo avanti l'idea che i potenziali A^0 , \mathbf{A} potessero sostituire i campi \mathbf{E} , \mathbf{B} nel loro ruolo di quantità fisiche fondamentali dell'elettromagnetismo, e questa visione era avvalorata dalla presenza ineliminabile dei potenziali nelle equazioni fondamentali. A voler salvare la centralità di \mathbf{E} , \mathbf{B} si è costretti ad abbandonare l'idea di una loro azione strettamente locale, ovvero accettare la possibilità che una

particella senta la presenza di un campo non nullo che è ad una distanza finita da essa. In quest'ottica l'effetto Aharonov-Bohm sarebbe descrivibile come l'azione non locale del campo \mathbf{B} all'interno del solenoide sul fascio degli elettroni. Ma questa azione non locale è incompatibile con le attuali teorie di campo che si basano sul principio opposto. Siamo dunque portati a considerare i potenziali come le vere grandezze fondamentali e, nonostante non siano essi direttamente osservabili, lo sono i loro effetti, ad esempio, sulla fase di un sistema, esprimibili tramite quantità come $\oint A_\mu \tilde{d}x^\mu$ che risultano essere invarianti per trasformazioni di gauge.

Appendice A

Dimostrazione dell'equazione (2.27)

Mostriamo in questa appendice che la (2.27) è valida, ovvero che per opportune rotazioni di un autovettore di $\hat{H}(\mathbf{R})$ otteniamo ancora un autovettore di $\hat{H}(\mathbf{R})$. Partiamo da alcune proprietà del momento angolare $\hat{\mathbf{S}}$ che possono essere ricavate a partire dalle relazioni di commutazione $[\hat{S}_i, \hat{S}_k] = i\hbar\epsilon_{ikl}\hat{S}_l$:

$$\hat{U}_2(\theta)\hat{S}_3\hat{U}_2(-\theta) = \hat{S}_3 \cos \theta + \hat{S}_1 \sin \theta, \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{U}_3(\phi)\hat{S}_1\hat{U}_3(-\phi) = \hat{S}_1 \cos \phi + \hat{S}_2 \sin \phi, \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{U}_3(\phi)\hat{S}_2\hat{U}_3(-\phi) = -\hat{S}_1 \sin \phi + \hat{S}_2 \cos \phi. \quad (\text{A.3})$$

Infatti sfruttando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^B A e^{-B} = A + [B, A] + \frac{1}{2!} [B [B, A]] + \frac{1}{3!} [B [B [B, A]]] + \dots,$$

la (A.1), ad esempio, diventa :

$$\begin{aligned} \hat{U}_2(\theta)\hat{S}_3\hat{U}_2(-\theta) &= \hat{S}_3 + \left(-i\frac{\theta}{\hbar}\right) [\hat{S}_2, \hat{S}_3] + \frac{1}{2!} \left(-i\frac{\theta}{\hbar}\right)^2 [\hat{S}_2 [\hat{S}_2, \hat{S}_3]] + \dots \\ &= \hat{S}_3 + \theta\hat{S}_1 - \frac{\theta^2}{2!}\hat{S}_3 - \frac{\theta^3}{3!}\hat{S}_1 + \dots \\ &= \hat{S}_3 \cos \theta + \hat{S}_1 \sin \theta. \end{aligned}$$

Usando queste proprietà otteniamo :

$$\begin{aligned}
k\hbar n |n(\mathbf{e}_3)\rangle &= k\hat{S}_3 |\mathbf{e}_3\rangle \\
&= k\hat{S}_3\hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(-\theta)\hat{U}_3(-\phi) |n(\theta, \phi)\rangle \\
&= k\hat{U}_3(\phi)\hat{S}_3\hat{U}_2(-\theta)\hat{U}_3(-\phi) |n(\theta, \phi)\rangle \\
&= k\hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(-\theta)(\hat{S}_3 \cos \theta + \hat{S}_1 \sin \theta)\hat{U}_3(-\phi) |n(\theta, \phi)\rangle \\
&= k \left(\hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(-\theta)\hat{U}_3(-\phi)\hat{S}_3 \cos \theta + \hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(-\theta)\hat{S}_1\hat{U}_3(-\phi) \sin \theta \right) |n(\theta, \phi)\rangle \\
&= k\hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(-\theta)\hat{U}_3(-\phi) \left(\hat{S}_3 \cos \theta + \hat{S}_1 \sin \theta \cos \phi + \hat{S}_2 \sin \theta \sin \phi \right) |n(\theta, \phi)\rangle \\
&= \hat{U}_3(\phi)\hat{U}_2(-\theta)\hat{U}_3(-\phi)k\mathbf{R}(\theta, \phi) \cdot \hat{\mathbf{S}} |n(\theta, \phi)\rangle
\end{aligned}$$

da cui la (2.27).

Appendice B

Calcolo della connessione $\tilde{\omega}$ della sezione 2.2.4

Da (2.29) :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= \langle n(\theta, \phi) | \nabla_{\mathbf{R}} n(\theta, \phi) \rangle \cdot \tilde{d}\mathbf{R} \\ &= \langle n(\mathbf{e}_3) | \hat{U}^\dagger(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{U}(\theta, \phi) | n(\mathbf{e}_3) \rangle \tilde{d}\theta \\ &\quad + \langle n(\mathbf{e}_3) | \hat{U}^\dagger(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{U}(\theta, \phi) | n(\mathbf{e}_3) \rangle \tilde{d}\phi.\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} \hat{U}(\theta, \phi) &= \frac{\partial}{\partial \theta} e^{-\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{S}_2} e^{\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} \\ &= -\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{S}_2} \hat{S}_2 e^{\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \phi} \hat{U}(\theta, \phi) &= \frac{\partial}{\partial \phi} e^{-\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{S}_2} e^{\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \hat{S}_3 e^{-\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{S}_2} e^{\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} + \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{S}_2} e^{\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} \hat{S}_3 \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left(\hat{S}_3 \hat{U}(\theta, \phi) - \hat{U}(\theta, \phi) \hat{S}_3 \right)\end{aligned}$$

da cui, sfruttando le proprietà del momento angolare in (A.1), (A.2) e (A.3):

$$\begin{aligned}\hat{U}^\dagger(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{U}(\theta, \phi) &= -\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} \hat{S}_2 e^{\frac{i}{\hbar} \phi \hat{S}_3} \\ &= -\frac{i}{\hbar} (\hat{S}_2 \cos \phi - \hat{S}_1 \sin \phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{U}^\dagger(\theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{U}(\theta, \phi) &= -\frac{i}{\hbar} (\hat{U}^\dagger(\theta, \phi) \hat{S}_3 \hat{U}(\theta, \phi) - \hat{U}^\dagger(\theta, \phi) \hat{U}(\theta, \phi) \hat{S}_3) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[-(\hat{S}_1 \cos \phi + \hat{S}_2 \sin \phi) \sin \theta + \hat{S}_3 (\cos \theta - 1) \right]\end{aligned}$$

Notiamo che $\hat{S}_1 |n(\mathbf{e}_3)\rangle$ e $\hat{S}_2 |n(\mathbf{e}_3)\rangle$ sono vettori ortogonali a $|n(\mathbf{e}_3)\rangle$, e quindi non contribuiscono ulteriormente nel calcolo di $\tilde{\omega}$, mentre $\hat{S}_3 |n(\mathbf{e}_3)\rangle = n\hbar |n(\mathbf{e}_3)\rangle$ per come abbiamo definito $|n(\mathbf{e}_3)\rangle$. Dunque:

$$\tilde{\omega} = -in(\cos \theta - 1) \tilde{d}\phi$$

e analogamente :

$$\tilde{\omega}' = -in(\cos \theta + 1) \tilde{d}\phi.$$

Bibliografia

- [1] Aharonov, Y., Anandan, J. : *Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution*, Phys. Rev. Lett. 58, 1593, (1987).
- [2] Aharonov, Y., Bohm, D.: *Significance of Electromagnetic Potentials in Quantum Theory*, Phys. Rev. 115, 485, (1959).
- [3] Arnold, V. I.: *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1978).
- [4] Berry, M.V.: *Quantum phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. London, 392, 45-57, (1984).
- [5] Böhm, A.: *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*, Springer-Verlag, New York, 3rd edition, (1998).
- [6] Chambers, R.G.: *Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux*, Phys. Rev. Lett. 5, 3, (1960).
- [7] Choquet-Bruhat, Y., Dewitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M.: *Analysis, Manifolds and Physics*, Part I: Basics, North-Holland, Amsterdam, 2nd edition, (1982).
- [8] Messiah, A.: *Quantum Mechanics*, Vol.2, North-Holland, Amsterdam, (1962).
- [9] Morandi, G.: *The Role of Topology in Classical and Quantum Physics*, Springer-Verlag, Germany, (1992).
- [10] Schutz, B.: *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1980).
- [11] Shapere, A., Wilczek, F.: *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, Singapore, (1989).

- [12] Simon, B.: *Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase*, Phys. Rev. Lett. 51, 2167, (1983).
- [13] Tonomura, A., Osakabe, N., Matsuda, T., Kawasaki, T., Endo, J., Yano, S., Yamada, H.: *Evidence for Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electron Wave*, Phys. Rev. Lett. 56, 792, (1986).
- [14] Yang, C. N.: *Vector Potential, Gauge Field and Connection on a Fiber Bundle*, Vol. 3, Tsinghua Science and Technology, pp. 861–870, (1998).

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare alla Prof. Ercolessi per le sue indicazioni e la disponibilità che ha dimostrato.