Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

H-gruppi e co-H-gruppi

Relatore:
Prof.ssa Francesca Cagliari

Correlatore:
Prof. Massimo Ferri

Presentata da:
Giulio Lo Monaco

Prima sessione
Anno accademico 2014/2015

H-gruppi e co-H-gruppi

Giulio Lo Monaco

Indice

Introduzione

Spesso in matematica ci si trova davanti alla necessità, o semplicemente si ha curiosità, di generalizzare un certo concetto. Ciò che se ne ricava può essere interessante per ragioni di vario tipo: trovare le condizioni minime o massime affinché qualcosa accada, studiare oggetti che si comportano in maniera simile ad altri oggetti ben noti, eliminare vincoli indesiderati, studiare le relazioni fra la struttura e il comportamento di un oggetto. Altrettanto spesso, viene introdotto un nuovo concetto inizialmente solo per la sua bellezza ed eleganza, e immancabilmente qualche decennio dopo tale oggetto si rivela utilissimo o addirittura indispensabile per scopi che nessuno aveva prima immaginato.
Quando ai primi del Novecento comparve l'algebra universale come nuova branca della matematica, ci si trovò davanti al preludio di una delle più grandi rivoluzioni mai avute in campo matematico. L'intera algebra astratta così com'era conosciuta fu considerata solo un particolare caso di una teoria molto più ampia, che prendeva in considerazione generiche strutture algebriche e ne studiava le proprietà indipendentemente dal tipo specifico di struttura. Le teorie dei gruppi, degli anelli, dei campi, l'algebra commutativa, l'algebra lineare e via dicendo divennero casi particolari della nuova teoria. Tuttavia, l'algebra universale godette di considerazione limitata, perché la vera rivoluzione venne fuori dalla topologia algebrica, con la nascita della teoria delle categorie. Essa contiene in sé non solo l'algebra universale, ma praticamente qualunque teoria matematica, ed è un ottimo esempio, probabilmente il migliore, sia di teoria che ne generalizza altre sia di astrazione inizialmente creduta fine a se stessa e successivamente posta alla base di tutta la matematica moderna come strumento necessario alla maggior parte dei suoi sviluppi ulteriori.
Un procedimento molto tipico della teoria delle categorie consiste nel prendere in considerazione le caratteristiche di una struttura di qualunque tipo, classicamente definita su un insieme, e trasporle esattamente su qualcosa che invece non è un insieme. Un caso particolare di questo procedimento riguarda la teoria dei gruppi interni, oggetti definiti in maniera tale da comportarsi

esattamente come dei gruppi, ma dotati di un sostegno che non è necessariamente un insieme, come per i gruppi classici. Se la conoscenza dei gruppi interni nella loro totalità e il loro comportamento in relazione ad altri oggetti è di interesse più che altro astratto, alcuni casi particolari si sono rivelati estremamente utili in varie aree matematiche, come ad esempio i gruppi topologici e gli H-gruppi, oltre ovviamente ai gruppi classici.
La teoria presentata in questa trattazione ha almeno due aspetti di una certa importanza in topologia algebrica. In primo luogo, permette di trovare gli spazi topologici più generali possibili il cui comportamento in relazione a tutti gli altri spazi topologici assomiglia molto da vicino a quello delle sfere, e questo non solo fornisce molte informazioni prima insperate su uno spazio topologico del genere, ma ci spiega anche esattamente perché le sfere si comportano in quel modo. In secondo luogo, fornisce dimostrazioni di notevole eleganza di alcuni risultati fondamentali in teoria dell'omotopia, quali l'esistenza dei gruppi di omotopia e la loro commutatività, oltre che condizioni sufficienti a garantire la commutatività anche del gruppo fondamentale.
Di recente, anche in robotica topologica si sono trovate applicazioni per oggetti come gli H-spazi, che garantiscono alcune informazioni su quanto dev'essere complesso un algoritmo che permetta a un robot di stabilire quali percorsi prendere per muoversi all'interno di essi. Tuttavia, questa parte di teoria non verrà qui trattata.
Tutto questo nel linguaggio dei gruppi interni, che unifica e semplifica lo studio di gruppi, gruppi topologici, H-gruppi e molte altre strutture simili inserendoli in un contesto molto più ampio.

Capitolo 1

Prodotti e coprodotti

Daremo per scontati i concetti di categoria, oggetto in una categoria, morfismo, funtore, e alcuni risultati in teoria delle categorie. Per le definizioni o le proposizioni, si veda il primo capitolo di [1].
Fondamentali per lo sviluppo della teoria sono i prodotti e i coprodotti in una categoria generica, che definiremo quindi esplicitamente.

Definizione 1.1. *Sia* $(X_i)_{i\in I}$ *una famiglia di oggetti in una categoria* $\mathcal{C}$*. Una coppia* $(P,(p_i)_{i\in I})$*, dove* P *è un oggetto di* $\mathcal{C}$ *e* $\forall i, p_i : P \to X_i$ *è un morfismo, è detta prodotto della famiglia* $(X_i)_{i\in I}$ *se per ogni altro oggetto* Q *con morfismi* $q_i : Q \to X_i$*, esiste un unico morfismo* $s : Q \to P$ *tale che per ogni* i *si abbia* $q_i = p_i \circ s$*.*

In altre parole, esiste ed è unico il morfismo s che renda commutativo il seguente diagramma per ogni i:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "s"] \arrow[dr, "q_i"] & \\ P \arrow[r, "p_i"] & X_i \end{tikzcd}$$

Del tutto analoga è la definizione di coprodotto, che non è altro che la nozione duale di quella di prodotto.

Definizione 1.2. *Sia* $(X_i)_{i\in I}$ *una famiglia di oggetti in una categoria* $\mathcal{C}$*. Una coppia* $(R,(r_i)_{i\in I})$*, dove* R *è un oggetto di* $\mathcal{C}$ *e* $\forall i, r_i : X_i \to R$ *è un morfismo, è detta coprodotto della famiglia* $(X_i)_{i\in I}$ *se per ogni altro oggetto* Q *con morfismi* $q_i : X_i \to Q$*, esiste un unico morfismo* $t : R \to Q$ *tale che per ogni* i *si abbia* $q_i = t \circ r_i$*.*

Deve quindi commutare il seguente diagramma per ogni i:

$$\begin{tikzcd} & Q \\ X_i \arrow[ur, "q_i"] \arrow[r, "c_i"] & R \arrow[u, dashed, "t"] \end{tikzcd}$$

Proposizione 1.3. *Quando esiste, il prodotto di una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ è unico a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Siano P e Q entrambi prodotti della stessa famiglia $(X_i)_{i \in I}$. Allora per ogni i commutano i tre diagrammi

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr] & \\ P \arrow[r] & X_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, dashed, "s"] & X_i \\ Q \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q \arrow[dd, dashed, "id_Q"] \arrow[dr] & \\ & X_i \\ Q \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

da cui si ottiene immediatamente, per unicità della fattorizzazione, che $s \circ r = id_Q$. Analogamente, otteniamo $r \circ s = id_P$, quindi P e Q sono isomorfi. □

Proposizione 1.4. *Quando esiste, il coprodotto di una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ è unico a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Del tutto analogamente a quanto visto per i prodotti. □

Quando si parla di un prodotto o di un coprodotto di una famiglia di oggetti, ha senso quindi chiamarlo *il* prodotto o *il* coprodotto.
Il prodotto di una famiglia $(X_i)_{i \in I}$ si indica con il simbolo $\prod_{i \in I} X_i$, il coprodotto si indica invece con $\coprod_{i \in I} X_i$. Se Q è un oggetto qualsiasi e $(q_i : Q \to X_i)_{i \in I}$ è una famiglia di morfismi, l'unica fattorizzazione attraverso il prodotto relativa ad essi si denota con $[q_i]_{i \in I}$, o più comunemente per il caso finito, con $(q_1, \ldots, q_n)$. Allo stesso modo, se $(q_i : X_i \to Q)_{i \in I}$ è una famiglia di morfismi, l'unica fattorizzazione attraverso il coprodotto relativa ad essi si denota con $\{q_i\}_{i \in I}$.
Mostriamo ora alcuni esempi di prodotti e coprodotti.

Esempio 1.5. *In* **Set***, la categoria degli insiemi e delle funzioni fra di essi, il prodotto della famiglia $(X_i)_{i \in I}$ è l'insieme $\{(x_i)_{i \in I} | x_i \in X_i\}$, cioè il loro prodotto cartesiano, e le proiezioni p_j sono le funzioni che ad ogni elemento*

$(x_i)_{i\in I}$ associano la componente x_j. Infatti, per ogni altra famiglia di funzioni $(q_i : Q \to X_i)_{i\in I}$, l'unica funzione s tale che $\forall i, p_i \circ s = q_i$ è

$$s : Q \to \prod_{i\in I} X_i,\ \ s(a) = (q_i(a))_{i\in I}.$$

Il coprodotto è invece la cosiddetta unione disgiunta, e si può scrivere come $\{(x,i)|x \in X_i\}$, con le inclusioni $c_i : x \mapsto (x,i)$. Per ogni altra famiglia di funzioni $(q_i : X_i \to Q)_{i\in I}$, l'unica funzione t tale che $\forall i, t \circ c_i = q_i$ è

$$t : \coprod_{i\in I} X_i \to Q,\ \ t(x,j) = c_j(x).$$

Esempio 1.6. *In* **Grp***, la categoria dei gruppi e degli omomorfismi di gruppi, il prodotto della famiglia $(G_i)_{i\in I}$ è il gruppo che ha come sostegno il prodotto cartesiano di tutti i sostegni e l'operazione è definita componente per componente. Le proiezioni sulle componenti sono quelle ovvie, e l'unico omomorfismo che fattorizza una qualunque famiglia di omomorfismi $(q_i)_{i\in I}$ è definito come nel caso degli insiemi. Il fatto che sia in effetti un omomorfismo è garantito dal fatto che è definito in base ai vari q_i, che sono a loro volta degli omomorfismi.*
Il coprodotto è invece il prodotto libero di gruppi, cioè il gruppo che ha come elementi le sequenze finite di elementi dei vari G_i, e come operazione la concatenazione, quozientato con la relazione d'equivalenza definita dai seguenti criteri:

- *l'elemento neutro di ciascun gruppo è equivalente alla sequenza vuota;*
- *se una sequenza contiene consecutivamente due elementi appartenenti allo stesso gruppo, essa è equivalente alla sequenza ottenuta sostituendo tali elementi con il loro prodotto.*

Indicando con F il gruppo così costruito, le inclusioni sono gli omomorfismi $c_i : x \mapsto (x) \in F$ e l'unico omomorfismo che fattorizza una qualunque famiglia $(q_i : G_i \to H)_{i\in I}$ di omomorfismi è $F \ni (x_j) \mapsto q_j(x_j)$, esteso a tutto F in maniera ovvia.

Esempio 1.7. *In* **Top***, la categoria degli spazi topologici e delle mappe continue, il prodotto della famiglia $(X_i)_{i\in I}$ è lo spazio topologico che ha come sostegno il prodotto cartesiano di tutti i sostegni e la topologia è quella che ha come base l'insieme $\{\prod_{i\in I} A_i | A_i \text{è un aperto di } X_i \text{ e } \{i|A_i \neq X_i\} \text{ è un insieme finito}\}$. Le proiezioni sono quelle ovvie sulle componenti, che sono continue perché*

$$\forall j\ \forall U \text{aperto in } X_i\ p_j^{-1}(U) = \prod_{i\in I} U_i, \text{dove } U_j = U \text{e } U_i = X_i\ \forall i \neq j.$$

Inoltre, data una famiglia $(f_i : Y \to X_i)_{i\in I}$ *di mappe continue, l'unica fattorizzazione attraverso* $\prod_{i\in I} X_i$ *è la mappa*

$$f : Y \to \prod_{i\in I} X_i,\ f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$$

che è anch'essa continua, infatti preso un aperto nella base di $\prod_{i\in I} X_i$*, abbiamo*

$$f^{-1}(\prod_{i\in I} U_i) = \{y \in Y | \forall i \in I\ f_i(y) \in U_i\} = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in I | U_i \neq X_i} f_i^{-1}(U_i)$$

perché gli indici per cui $U_i = X_i$ *non influiscono sull'intersezione. Questa è un'intersezione finita di aperti, quindi un aperto di* Y*, e la mappa* f *è continua. Il coprodotto di spazi topologici è lo spazio che ha come sostegno l'unione disgiunta dei sostegni e come aperti le unioni disgiunte di aperti nei vari spazi. Le inclusioni e le fattorizzazioni sono del tutto analoghe a quanto visto nel caso degli insiemi.*

È ovvio che le nozioni di prodotto e coprodotto non dipendono dall'ordine in cui vengono presi gli oggetti della famiglia considerata. Infatti le condizioni di commutatività non ne tengono conto in nessun modo. Abbiamo perciò, nel caso particolare di famiglie di due elementi, il seguente risultato.

Proposizione 1.8. *Dati due oggetti* A *e* B *in una categoria, se il loro prodotto [coprodotto] esiste, c'è un isomorfismo canonico*

$$A \times B \cong B \times A$$
$$[A \coprod B \cong B \coprod A]$$

□

Proposizione 1.9. *Dati tre oggetti* A*,* B *e* C *in una categoria, se esiste il loro prodotto [coprodotto] ed esistono tutti i prodotti [coprodotti] binari, allora ci sono degli isomorfismi canonici*

$$A \times B \times C \cong (A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$$
$$[A \coprod B \coprod C \cong (A \coprod B) \coprod C \cong A \coprod (B \coprod C)]$$

□

Questo ci permette ci eliminare le parentesi quando consideriamo prodotti finiti in una qualsiasi categoria.

Consideriamo ora una famiglia vuota di oggetti in una categoria. Se esiste, il prodotto di tale famiglia è un oggetto T tale che per ogni altro oggetto A esista un unico morfismo $p : A \to T$, senza soddisfare nessun'altra condizione, dato che la famiglia è vuota. In questo caso I è detto oggetto terminale nella categoria.
Analogamente, il coprodotto di una famiglia vuota in una categoria è un oggetto I tale che per ogni altro oggetto A esista un unico morfismo $i : I \to A$. Esso è detto oggetto terminale nella categoria.

Capitolo 2

Gruppi interni

In una qualsiasi categoria con prodotti finiti è possibile indurre sugli oggetti una struttura analoga alla struttura di gruppo definita su un insieme sostegno, ne risulta quindi una generalizzazione della nozione di gruppo. Applicando infatti tale costruzione agli oggetti di **Set**, le strutture che si ottengono sono proprio i gruppi. Nel seguito, per semplicità, adotteremo le seguenti notazioni:

- indicheremo con 1 l'oggetto terminale, quando questo esiste;
- $\Delta : A \to A \times A$ è l'unica fattorizzazione (id_A, id_A) attraverso $A \times A$ di due volte id_A;
- se $a : A \to C$ e $b : B \to D$, indicheremo con $a \times b$ l'unica fattorizzazione attraverso $C \times D$, a meno di composizioni con le proiezioni $p_A : A \times B \to A$ e $p_B : A \times B \to B$;
- se $h : 1 \to H$, indicheremo ugualmente con h il morfismo $h \circ p$, dove p è l'unico morfismo da H a 1;

Sia quindi G un oggetto in una categoria $\mathcal{C}$ con prodotti finiti, quindi con un oggetto terminale.

Definizione 2.1. *Una quaterna (G, e, i, m) dove*

$$\begin{aligned} e &: 1 \to G \\ i &: G \to G \\ m &: G \times G \to G \end{aligned}$$

sono morfismi, è detta gruppo interno alla categoria $\mathcal{C}$ se commutano i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "id_G \times m"] \arrow[d, "m \times id_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e{,}id_G)"] \arrow[d, "(id_G{,}e)"'] \arrow[dr, "id_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(id_G \times i)\circ\Delta"] \arrow[d, "(i \times id_G)\circ\Delta"'] \arrow[dr, "e"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

In questo caso e è detto unità, i è detto inversione e m è detto moltiplicazione.

Esempio 2.2. *Nella categoria* **Set** *degli insiemi, i gruppi interni sono semplicemente i gruppi, come consegue dalla definizione di gruppo. La commutatività dei diagrammi nella definizione di gruppo interno significa infatti che la moltiplicazione dev'essere associativa, che esiste un elemento neutro e che ogni elemento ha un inverso rispetto ad esso.*

Il seguente risultato è conosciuto come argomento di Eckmann-Hilton, ed è uno strumento molto importante per lo studio dei gruppi interni così come in teoria dell'omotopia.

Teorema 2.3. *Sia G un insieme con due operazioni binarie interne, che indichiamo con $\cdot$ e $*$, che ammettano entrambe un'unità e tali che*

$$\forall a, b, c, d \in G, (a \cdot b) * (c \cdot d) = (a * c) \cdot (b * d).$$

Allora le due operazioni coincidono e sono associative e commutative.

Dimostrazione. Mostriamo che le due unità coincidono. Siano esse rispettivamente $1.$ e 1_*, allora

$$1. = 1. \cdot 1. = (1_* * 1.) \cdot (1. * 1_*) = (1_* \cdot 1.) * (1. \cdot 1_*) = 1_* * 1_* = 1_*$$

Siano ora $a, b \in G$. Allora

$$a \cdot b = (1 * a) \cdot (b * 1) = (1 \cdot b) * (a \cdot 1) = b * a = (b \cdot 1) * (1 \cdot a) = (b * 1) \cdot (1 * a) = b \cdot a$$

da cui si vede sia la coincidenza che la commutatività di $\cdot$ e $*$.
Infine, mostriamo l'associatività. Prendendo $a, b, c \in G$, abbiamo

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot (1 \cdot c) = (a \cdot 1) \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c).$$

□

Esempio 2.4. *Nella categoria* **Grp** *dei gruppi, i gruppi interni sono esattamente i gruppi abeliani. Infatti, dare un morfismo* $m : G \times G \to G$ *come nella definizione di gruppo interno (in effetti basta avere l'elemento neutro, infatti l'associatività e l'invertibilità seguono automaticamente), vuol dire definire un'operazione* $a * b := m(a, b)$ *con un elemento neutro, e inoltre per ogni* $a, b, c, d \in G$ *abbiamo*

$$(a \cdot b) * (c \cdot d) = m(a \cdot b, c \cdot d) = m((a, c) \cdot (b, d)) = m(a, c) \cdot m(b, d) = (a * c) \cdot (b * d)$$

per cui, per l'argomento di Eckmann-Hilton, l'operazione $\cdot$ *su* G *coincide con l'operazione* m *ed esse sono associative e commutative.*

Esempio 2.5. *Nella categoria* **Ab** *dei gruppi abeliani e degli omomorfismi fra essi, tutti gli oggetti hanno una struttura di gruppo interno.*

Esempio 2.6. *Nella categoria* **Top** *degli spazi topologici e delle funzioni continue, un gruppo interno è uno spazio con una struttura di gruppo definita sull'insieme sostegno, in modo tale che la moltiplicazione e l'inversione siano funzioni continue. Oggetti di questo tipo sono detti gruppi topologici.*

Esempio 2.7. *Nella categoria* $\mathbf{Top}_*$ *delle coppie* (X, x_0)*, dove* X *è uno spazio topologico e* $x_0 \in X$*, e delle funzioni continue che lasciano fissi tali punti, un gruppo interno è semplicemente un gruppo topologico in cui l'elemento neutro è costituito dal punto fisso.*

Anche in questo caso, esistono delle strutture definite dualmente rispetto a quelle di gruppo interno. Esse sono dette cogruppi interni a una categoria. Prendiamo un oggetto H in una categoria $\mathcal{C}$ con i coprodotti, e indichiamo con 0 l'oggetto iniziale e con ∇ l'unica fattorizzazione attraverso $H \coprod H$ di due volte id_H.

Definizione 2.8. *La quaterna (*H*,* η*,* ι*,* μ*) dove*

$$\begin{aligned} \eta &: H \to 0 \\ \iota &: H \to H \\ \mu &: H \to H \coprod H \end{aligned}$$

sono morfismi, è detta cogruppo interno alla categoria $\mathcal{C}$ *se commutano i seguenti diagrammi:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"] & H \coprod H \arrow[d, "id_H \coprod \mu"] \\ H \coprod H \arrow[r, "\mu \coprod id_H"] & H \coprod H \coprod H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"] & H \coprod H \arrow[d, "\{\eta, id_H\}"] \\ H \coprod H \arrow[r, "\{id_H, \eta\}"] & H \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, "\eta"] & H \coprod H \arrow[d, "\nabla\circ(id_H \coprod \iota)"] \\
H \coprod H \arrow[r, "\nabla\circ(\iota \coprod id_H)"'] & H.
\end{tikzcd}$$

In questo caso, η è detto counità, ι è detto coinversione e μ è detto comoltiplicazione.

Esempio 2.9. *In* **Set** *esiste un unico cogruppo, cioè l'insieme vuoto. Infatti l'oggetto iniziale è l'insieme vuoto, ed essendo la counità una funzione dal cogruppo all'insieme vuoto, l'unico insieme per cui esiste una tale funzione è il vuoto.*

Esempio 2.10. *Anche in* **Top** *l'unico cogruppo è lo spazio vuoto. Infatti anche qui l'oggetto iniziale è il vuoto.*

Segue un'importante caratterizzazione dei gruppi interni, e una analoga dei cogruppi. Sia X un oggetto in una qualsiasi categoria $\mathcal{C}$, denotiamo con $\mathbf{Mor}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, e lo chiamiamo funtore covariante rappresentato da X, il funtore che ad ogni oggetto Y di $\mathcal{C}$ associa l'insieme **Mor**(X,Y), e ad ogni morfismo $f : Y \to Y'$ associa la funzione $\mathbf{Mor}(X, f) : \mathbf{Mor}(X, Y) \to \mathbf{Mor}(X, Y')$ definita con $\mathbf{Mor}(X, f)(g) = f \circ g$. Diamo una definizione del tutto analoga per il funtore controvariante $\mathbf{Mor}(-, X)$ rappresentato da X.

Teorema 2.11. *G è un gruppo interno a una categoria $\mathcal{C}$ se e solo il funtore rappresentabile controvariante* $\mathbf{Mor}(-, G)$ *fattorizza attraverso il funtore dimenticante* $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$.
Equivalentemente, G è un gruppo interno se e solo se $\forall X, \mathbf{Mor}(X, G)$ *è un gruppo e i morfismi in $\mathcal{C}$ inducono omomorfismi di gruppi.*

Dimostrazione. Sapendo che per ogni X il funtore rappresentabile $\mathbf{Mor}(X, -)$ preserva i limiti, è sufficiente applicarlo ai diagrammi che definiscono un gruppo interno, per avere la classica definizione di gruppo applicata all'insieme sostegno $\mathbf{Mor}(X, G)$.
Viceversa, consideriamo il funtore $Y : \mathcal{C} \to \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$, che associa ad ogni oggetto di $\mathcal{C}$ il corrispondente funtore rappresentabile controvariante e ad ogni morfismo $f : A \to B$ la trasformazione naturale che in ogni oggetto C è rappresentata dal morfismo $\mathbf{Mor}(C, f) : \mathbf{Mor}(C, A) \to \mathrm{Mor}(C, B)$. Per ogni X è definito un prodotto $\cdot_X : Y(G)(X) \times Y(G)(X) \to Y(G)(X)$ che definisce una struttura di gruppo su $\mathrm{Mor}(X, G) = Y(G)(X)$.
Prendiamo ora un morfismo $s : X \to W$, e consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
Y(G)(X) \times Y(G)(X) \arrow[r, "\cdot_X"] & Y(G)(X) \\
Y(G)(W) \times Y(G)(W) \arrow[r, "\cdot_W"] \arrow[u, "Y(G)(s)\times Y(G)(s)"] & Y(G)(W). \arrow[u, "Y(G)(s)"']
\end{tikzcd}$$

Esso commuta, infatti per ogni oggetto $(a, b) \in Y(G)(W) \times Y(G)(W)$ abbiamo

$$\cdot_X \circ (Y(G)(s) \times Y(G)(s))(a, b) = Y(G)(s)(a) \cdot_X Y(G)(s)(b),$$
$$Y(G)(s) \circ \cdot_W(a, b) = Y(G)(s)(a \cdot_W b)$$

che sono uguali, perché per ipotesi Y(G) fattorizza attraverso **Grp**, quindi Y(G)(s) è un omomorfismo di gruppi. Poiché Y preserva i limiti, possiamo riscrivere il diagramma, a meno di composizioni con isomorfismi naturali, in questo modo:

$$\begin{tikzcd}
Y(G \times G)(X) \arrow[r, "\cdot_X"] & Y(G)(X) \\
Y(G \times G)(W) \arrow[r, "\cdot_W"] \arrow[u, "Y(G\times G)(s)"] & Y(G)(W). \arrow[u, "Y(G)(s)"']
\end{tikzcd}$$

Allora i prodotti $\cdot_X$ definiscono una trasformazione naturale $\cdot : Y(G \times G) \Rightarrow Y(G)$. Per il lemma di Yoneda sappiamo che

$$\mathbf{Nat}(Y(G\times G), Y(G)) = \mathbf{Nat}(\mathbf{Mor}(-, G\times G), \mathbf{Mor}(-, G)) \cong \mathbf{Mor}(G\times G, G),$$

quindi esiste un unico morfismo $m : G \times G \to G$ associato a tale trasformazione naturale. Esso è la moltiplicazione che rende G un gruppo interno. □

È quindi possibile dare un'altra definizione di gruppo interno, che generalizza ulteriormente quella data in precedenza.

Definizione 2.12. *Un gruppo interno a una generica categoria $\mathcal{C}$ è un oggetto G tale che il funtore rappresentabile controvariante* $\mathbf{Mor}(-, G)$ *fattorizzi attraverso il funtore dimenticante* $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$. *Deve quindi commutare il diagramma di categorie*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Grp} \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, dashed, bend left] \arrow[r, "\mathbf{Mor}(-,G)"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

In una categoria con prodotti finiti, le due definizioni sono equivalenti, come abbiamo appena dimostrato.
Analogamente, abbiamo il seguente risultato nel caso dei cogruppi, e una loro definizione più generica.

Teorema 2.13. *H è un cogruppo interno a una categoria $\mathcal{C}$ se e solo se il funtore rappresentabile covariante $\mathbf{Mor}(H, -)$ fattorizza attraverso il funtore dimenticante $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$.*
Equivalentemente, H è un cogruppo interno se e solo se $\forall X, \mathbf{Mor}(H, X)$ è un gruppo e i morfismi in $\mathcal{C}$ inducono omomorfismi di gruppi.

Dimostrazione. Per ogni X, il funtore rappresentabile $\mathbf{Mor}(-, X)$ trasforma i coprodotti di famiglie finite nei corrispondenti prodotti, inoltre essendo controvariante inverte tutte le frecce. Applicandolo perciò ai diagrammi che definiscono un cogruppo, otteniamo la definizione classica di gruppo sull'insieme sostegno $\mathbf{Mor}(H, X)$.
Viceversa, la dimostrazione è analoga a quella fatta per i gruppi interni. Qui bisogna usare un funtore $Y^* : \mathcal{C} \to \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$, e la versione covariante del lemma di Yoneda. □

Anche in questo caso quindi è possibile dare una nuova definizione di cogruppo, più generale della prima ed equivalente ad essa se e solo se ci si pone in una categoria con i coprodotti finiti.

Definizione 2.14. *Un cogruppo interno a una generica categoria $\mathcal{C}$ è un oggetto H tale che il funtore rappresentabile covariante $\mathbf{Mor}(H, -)$ fattorizzi attraverso il funtore dimenticante $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$. Commuta quindi il diagramma di categorie*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Grp} \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, dashed, bend left] \arrow[r, "\mathbf{Mor}(H,-)"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Si ottengono immediatamente, dai teoremi appena dimostrati, le seguenti due immersioni.

Teorema 2.15. *Data una categoria $\mathcal{C}$, la sottocategoria dei gruppi interni è equivalente a una sottocategoria di $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Grp})$. La sottocategoria dei cogruppi interni è equivalente a una sottocategoria di $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Grp})$.* □

Proposizione 2.16. *Un qualsiasi funtore rappresentabile da $\mathbf{Grp}$ in $\mathbf{Grp}$ è isomorfo a una potenza dell'identità.*

Per la dimostrazione, si veda [3].

Esempio 2.17. *In* **Grp** *i cogruppi sono tutti e soli i gruppi liberi. Sia F(X) il gruppo libero sull'insieme X, mostriamo che per ogni gruppo G si può definire una struttura di gruppo su* **Mor***(F(X),G). Per la proprietà universale dei gruppi liberi, l'insieme* $\mathbf{Mor}_{\mathbf{Grp}}(F(X),G)$ *è in biezione con l'insieme* $\mathbf{Mor}_{\mathbf{Set}}(X,G)$*. Abbiamo allora* $\mathbf{Mor}_{\mathbf{Grp}}(F(X),G) \cong G^X$*, che è un gruppo, quindi induce in maniera ovvia una struttura di gruppo. Inoltre, se* $f : G \to G'$ *è un omomorfismo, esso induce un omomorfismo da* G^X *a* G'^X*, che a sua volta ne induce uno da* **Mor***(F(X),G) a* **Mor***(F(X),G'). Sfruttando le biezioni canoniche* $\mathbf{Mor}(F(X),G) \cong G^X$ *e* $\mathbf{Mor}(F(X),G') \cong G'^X$*, si verifica che tale omomorfismo è proprio* **Mor***(F(X),f).*
Viceversa, sia H un gruppo tale che il funtore **Mor***(H,-) fattorizzi attraverso* **Grp***. Vogliamo mostrare che H è libero. Per la proposizione precedente, esso è isomorfo a una potenza del funtore identità, cioè esiste un cardinale* κ *tale che per ogni gruppo G,* $\mathbf{Mor}(H,G) \cong G^\kappa$ *che è in biezione con* $\mathbf{Mor}(X_\kappa,G)$*, dove* X_κ *è un insieme di cardinalità* κ*. Per la proprietà universale dei gruppi liberi abbiamo che* $\mathbf{Mor}_{\mathbf{Set}}(X_\kappa,G) \cong \mathbf{Mor}_{\mathbf{Grp}}(F(X_\kappa),G)$*. Poiché questo vale per ogni gruppo G, abbiamo ottenuto un isomorfismo naturale fra i funtori* **Mor***(H,-) e* $\mathbf{Mor}(F(X_\kappa),-)$*, che per il lemma di Yoneda induce un unico isomorfismo* $H \cong F(X_\kappa)$*.*

È un fatto noto che un sottogruppo di un gruppo libero è a sua volta libero. Tuttavia la dimostrazione di questo risultato, che è possibile trovare in [4], è molto complicata se si fa solo uso di strumenti della teoria dei gruppi. Usando la caratterizzazione dei gruppi liberi appena vista, è possibile darne una dimostrazione molto più immediata.

Proposizione 2.18. *Se G è un gruppo libero e K un suo sottogruppo, allora K è un gruppo libero.*

Dimostrazione. Indichiamo, nel prodotto libero $G * G$, ogni elemento $u \in G$ con u' se visto come elemento del primo fattore, u'' se come elemento del secondo fattore. Consideriamo gli omomorfismi

$$\begin{aligned} \mu : G \to G * G,\ \mu(u) = u'u'' \\ \eta : G \to G,\ \eta(u) = 1 \\ \iota : G \to G,\ \iota(u) = u^{-1}. \end{aligned}$$

Si verifica immediatamente che G è un cogruppo con μ come moltiplicazione, η come counità e ι come coinversione. Restringendo tali omomorfismi al sottogruppo K, è evidente che i diagrammi di cogruppo valgono ancora. Quindi K è un cogruppo, e per la caratterizzazione è un gruppo libero. □

Capitolo 3

Costruzioni topologiche

Analizzeremo adesso il caso particolare di gruppi nella categoria d'omotopia. Le costruzioni che vengono fuori in ambiente topologico hanno grande rilevanza in teoria dell'omotopia. Nel seguito, per semplicità, denoteremo con F^X e F_X rispettivamente per i funtori **Mor**(-,X) e **Mor**(X,-), e quando sarà possibile dare per scontato l'oggetto X scriveremo $f^* = \mathbf{Mor}(f, X)$ e $f_* = \mathbf{Mor}(X, f)$. Se $(X, *)$ è uno spazio topologico puntato, denotiamo inoltre con $j_1 : X \to X \times X$ e $j_2 : X \to X \times X$ le funzioni che ad ogni $x \in X$ associano rispettivamente $j_1(x) = (x, *)$ e $j_2(x) = (*, x)$.
Definiamo ora gli oggetti principali che verranno studiati, gli H-spazi e gli H-gruppi, a cui corrispondono dualmente i co-H-spazi e i co-H-gruppi.

Definizione 3.1. *Si dice che un diagramma di spazi e funzioni continue in* **Top** *oppure in* $\mathbf{Top}_*$ *commuta a meno di omotopia se presi due oggetti qualunque e due sequenze di morfismi che partono da uno dei due oggetti e arrivano nell'altro, le loro composizioni sono funzioni omotope.*

Definizione 3.2. *Si dice H-spazio una coppia (X,m), dove X è uno spazio puntato e $m : X \times X \to X$ è una funzione continua tale che i diagrammi*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "id"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_2"] \arrow[dr, "id"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ & X \end{tikzcd}$$

commutino a meno di omotopia.
Un H-spazio si dice inoltre associativo se il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "m\times id"] \arrow[d, "id\times m"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X \times X \arrow[r, "m"] & X \end{tikzcd}$$

commuta a meno di omotopia, e si dice commutativo se, chiamando $t : X \times X \to X \times X$ *la funzione t(x, x')=(x',x), il diagramma*

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "m"] & & X \times X \arrow[dl, "m"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commuta a meno di omotopia.

Definizione 3.3. *Si dice H-gruppo un H-spazio associativo con una funzione* $i : X \to X$ *tale che, denotando con* $*$ *la funzione costante da* X *in se stesso, i diagrammi*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(id,i)"] \arrow[dr, "*"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "(i,id)"] \arrow[dr, "*"] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ & X \end{tikzcd}$$

commutino a meno di omotopia.

Ricordiamo che si dice magma un insieme con un'operazione binaria interna, e che un magma è unitario se ha un elemento neutro, associativo se l'operazione è associativa, commutativo se l'operazione è commutativa. Un magma associativo quindi non è altro che un semigruppo, mentre un magma associativo unitario è un monoide.

Osservazione 3.4. *Dire che diagrammi in* **Top** *oppure in* $\mathbf{Top}_*$ *commutano a meno di omotopia vuol dire che essi commutano in* **HTop** *e* $\mathbf{HTop}_*$*, cioè rispettivamente la categoria degli spazi topologici e classi di omotopia fra funzioni continue e la categoria degli spazi puntati e classi di omotopia di funzioni continue che preservano i punti base.*
Un H-spazio può quindi essere visto come un magma unitario interno a $\mathbf{HTop}_*$*, un H-spazio associativo come un monoide interno a* $\mathbf{HTop}_*$*, mentre un H-gruppo è un gruppo interno a* $\mathbf{HTop}_*$*. I diagrammi che lo definiscono infatti sono esattamente quelli che definiscono in generale un gruppo interno, trasposti nel caso particolare della categoria di omotopia.*

Definizione 3.5. *Se (X,m) e (Y,n) sono H-spazi, una mappa* $h : X \to Y$ *è detta H-mappa se il seguente diagramma è commutativo a meno di omotopia:*

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "h\times h"] \arrow[d, "m"] & Y \times Y \arrow[d, "n"] \\ X \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Esempio 3.6. *Le sfere S^1, S^3 e S^7 sono esempi di H-spazi. S^1 può infatti essere descritta come l'insieme di tutti i numeri complessi di modulo 1, ereditando quindi la struttura moltiplicativa di gruppo da $\mathbb{C}$. Allo stesso modo S^3 eredita una struttura di gruppo dall'algebra $\mathbb{H}$ dei quaternioni, e S^7 dall'algebra $\mathbb{O}$ degli ottonioni. S^1 ed S^3 sono quindi anche gruppi topologici, mentre S^7 è solo un H-spazio, perché la moltiplicazione fra ottonioni non è associativa (si veda [5] per le algebre dei quaternioni e degli ottonioni).*
È stato dimostrato inoltre che queste sono le uniche sfere ad essere H-spazi.

Se X è un H-spazio e Y uno spazio qualunque, allora è possibile dare all'insieme **Mor**(Y,X) una struttura di magma unitario nella seguente maniera. Siano f e g due morfismi da Y a X, definiamo

$$f + g = m \circ (f, g)$$

e passando alle classi di omotopia, abbiamo

$$[f] + [g] = [f + g].$$

Questa è un'operazione binaria interna ben definita sull'insieme $\mathbf{Mor}_{\mathbf{HTop}_*}(Y, X)$ che ha $*$ come elemento neutro, infatti

$$f + * = m \circ (f, *) = m \circ j_1 \circ f \simeq f$$
$$* + f = m \circ (*, f) = m \circ j_2 \circ f \simeq f.$$

Abbiamo definito una struttura di magma unitario su $\mathbf{Mor}(Y, X)$. Se X è un H-spazio associativo, **Mor**(Y,X) risulta essere un monoide con l'operazione così definita, infatti tale operazione è associativa:

$$(f + g) + h = m \circ (f + g, h) = m \circ (m \circ (f, g), h) = m \circ (m \times id) \circ (f, g, h) \simeq$$
$$\simeq m \circ (id \times m) \circ (f, g, h) = m \circ (f, m \circ (g, h)) = m \circ (f, g + h) = f + (g + h)$$

Analogamente si dimostra che un H-spazio commutativo induce una struttura di monoide commutativo su **Mor**(Y,X), e che un H-gruppo induce una struttura di gruppo. Questa è proprio la struttura di gruppo costruita nel teorema di caratterizzazione dei gruppi interni, nel caso particolare di $\mathbf{HTop}_*$.
Abbiamo ora dei risultati analoghi a quelli visti per gruppi interni in categorie generiche. Indichiamo con $\mathbf{Set}_*$ la categoria degli insiemi puntati e funzioni

che preservano il punto base. Ricordiamo inoltre che si dice magma un insieme con un'operazione binaria interna, e che un magma è detto unitario se ha un elemento neutro, associativo se l'operazione è associativa e commutativo se l'operazione è commutativa. Osserviamo che un magma associativo non è altro che un semigruppo, e un magma associativo unitario è un monoide.

Teorema 3.7.

1. *X è un H-spazio se e solo se il funtore* $F^X : \mathbf{HTop}_* \to \mathbf{Set}_*$ *fattorizza attraverso la categoria* $\mathbf{Mgm}_*$ *dei magmi unitari.*
2. *X è un H-spazio associativo [commutativo] se e solo se il funtore* F^X : $\mathbf{HTop}_* \to \mathbf{Set}_*$ *fattorizza attraverso la categoria* **Mon** *dei monoidi [la categoria* $\mathbf{CommMgm}_*$ *dei magmi commutativi unitari].*
3. *X è un H-gruppo se e solo se il funtore* $F^X : \mathbf{HTop}_* \to \mathbf{Set}_*$ *fattorizza attraverso* **Grp**.

Dimostrazione. Sia (X,m) un H-spazio, e Y un qualsiasi spazio puntato. Abbiamo già visto che **Mor**(Y,X) è un magma unitario, mostriamo ora che una mappa $f : X \to X'$ induce un omomorfismo di gruppi. Siano [a] e [b] classi di equivalenza in **Mor**(Y,X), abbiamo:

$$f^*(a+b) = (a+b) \circ f = m \circ (a, b) \circ f = m \circ (af, bf) = af + bf = f^*(a) + f^*(b)$$

quindi vale anche per le classi di equivalenza.
Viceversa, sia X uno spazio in $\mathbf{HTop}_*$ tale che per ogni altro spazio **Mor**(Y,X) abbia un'operazione binaria interna con un elemento neutro dato dalla mappa costante, che chiamiamo [$*$], e che ogni mappa fra spazi induca una funzione che preserva l'operazione e l'elemento neutro. Consideriamo ora le proiezioni canoniche $p_1, p_2 \in \mathbf{Mor}(X \times X, X)$, e definiamo una moltiplicazione m tramite $[m] = [p_1] + [p_2]$. Se $j_1, j_2 : X \to X \times X$ sono le inclusioni, abbiamo

$$j_1^*(m) \simeq j_1^*(p_1 + p_2) = j_1^*(p_1) + j_1^*(p_2) = (p_1 \circ j_1) + (p_2 \circ j_1) \simeq id + * \simeq id$$

quindi $[m \circ j_1] = [id]$. Analogamente, $[m \circ j_2] = [id]$, e X è un H-spazio.
Per l'associatività e la commutatività, le dimostrazioni sono analoghe, per l'invertibilità si pone [i]=-[id]. D'altronde, per gli H-gruppi il teorema è un caso particolare della caratterizzazione di generici gruppi interni. □

Proposizione 3.8. *Siano* (X, m) *e* (X', m') *due H-spazi, e* $h : X \to X'$ *una H-mappa. Allora* $h_* : \mathbf{Mor}(Y, X) \to \mathbf{Mor}(Y, X')$ *è un omomorfismo di magmi unitari, per ogni* Y *spazio puntato. In particolare, se* X *e* X' *sono H-gruppi,* h_* *è un omomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Siano $[a], [b] \in \mathbf{Mor}(Y, X)$, allora

$$h_*(a+b) = h \circ (a+b) = h \circ m \circ (a,b) \simeq m' \circ (h \times h) \circ (a,b) = m' \circ (ha, hb) = \\ = ha + hb = h_*(a) + h_*(b)$$

□

Gli H-spazi e gli H-gruppi formano due sottocategorie di $\mathbf{HTop}_*$, prendendo come morfismi le classi di omotopia di H-mappe. La categoria degli H-spazi viene generalmente indicata con $\mathcal{H}$, quella degli H-gruppi con $\mathcal{HG}$. Ovviamente, $\mathcal{HG}$ è una sottocategoria piena di $\mathcal{H}$.

Corollario 3.9. *Preso un qualunque spazio puntato Y (non necessariamente un H-spazio), esistono un funtore $F_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathbf{Mgm}_*$ e un funtore $F_{\mathcal{HG}} : \mathcal{HG} \to \mathbf{Grp}$, entrambi rappresentati da Y.*

Definiamo ora gli oggetti duali degli H-spazi e degli H-gruppi, e studiamone le proprietà. Osserviamo che in $\mathbf{Top}_*$ e in $\mathbf{HTop}_*$ il coprodotto fra due spazi W e Z esiste sempre ed è omeomorfo all'unione disgiunta dei due spazi quozientata con la relazione d'equivalenza che identifica i due punti base, e si usa scrivere $W \coprod Z = W \vee Z$. Si può anche pensare $W \vee Z \subseteq W \times Z$ sottoinsieme che contiene tutti i punti della forma $(w, *_Z)$ oppure $(*_W, z)$, come si dimostra banalmente, e in questo caso si indicano con q_1 e q_2 le restrizioni a $W \vee Z$ delle proiezioni canoniche del prodotto sui singoli spazi.

Definizione 3.10. *Si dice co-H-spazio una coppia (Y, μ), dove Y è uno spazio puntato e $\mu : Y \to Y \vee Y$ è una funzione continua tale che i diagrammi*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "id"'] & Y \vee Y \arrow[d, "q_1"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "id"'] & Y \vee Y \arrow[d, "q_2"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

commutino a meno di omotopia.
Un co-H-spazio si dice inoltre associativo se il diagramma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"] & Y \vee Y \arrow[d, "\mu \vee id"] \\ Y \vee Y \arrow[r, "id \vee \mu"] & Y \vee Y \vee Y \end{tikzcd}$$

commuta a meno di omotopia, e si dice commutativo se, chiamando $s : Y \vee Y \to Y \vee Y$ la funzione $s(y, *) = (*, y), s(*, y) = (y, *)$, il diagramma

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ Y \vee Y \arrow[rr, "s"] & & Y \vee Y \end{tikzcd}$$

commuta a meno di omotopia.

Definizione 3.11. *Si dice co-H-gruppo un co-H-spazio associativo cono una funzione $\iota : Y \to Y$ tale che, denotando con $*$ la funzione costante da Y in se stesso, i diagrammi*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "*"'] & Y \vee Y \arrow[d, "id \coprod \iota"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "*"'] & Y \vee Y \arrow[d, "\iota \coprod id"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

commutino a meno di omotopia.

Definizione 3.12. *Se (X, μ) e (Y, ν) sono co-H-spazi, una mappa $\lambda : X \to Y$ è detta co-H-mappa se il seguente diagramma è commutativo a meno di omotopia:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mu"] & Y \arrow[d, "\nu"] \\ X \vee X \arrow[r, "\lambda \vee \lambda"] & Y \vee Y \end{tikzcd}$$

Anche nel caso dei co-H-spazi è possibile dare una caratterizzazione in termini di strutture di gruppo definite sugli insiemi di morfismi.
Denotiamo $\{f, g\} = f \coprod g$ per due morfismi f e g, e osserviamo che in $\mathbf{Top}_*$ si ha $\{f, g\}(x, *) = f(x), \{f, g\}(*, y) = g(y)$. Prendiamo quindi un co-H-spazio Y e uno spazio qualunque X, e definiamo un'operazione su **Mor**(Y,X) tramite

$$f + g = \{f, g\} \circ \mu$$

passando poi al quoziente sulle classi di omotopia.
Anche in questo caso la mappa costante $*$ è l'elemento neutro del magma unitario così definito, e l'associatività, la commutatività e l'invertibilità nel co-H-spazio di partenza si preservano nella struttura di **Mor**(Y,X). Analogamente a quanto visto per gli H-spazi, quindi, abbiamo un teorema di caratterizzazione anche per gli oggetti duali.

Teorema 3.13.

1. *Y è un co-H-spazio se e solo se il funtore $F_Y : \mathbf{HTop}_* \to \mathbf{Set}_*$ fattorizza attraverso $\mathbf{Mgm}_*$.*

2. *Y è un co-H-spazio associativo se e solo se il funtore F_Y : $\mathbf{HTop}_* \to \mathbf{Set}_*$ fattorizza attraverso* **Mon**.

3. *Y è un co-H-spazio commutativo se e solo se il funtore F_Y : $\mathbf{HTop}_* \to \mathbf{Set}_*$ fattorizza attraverso* $\mathbf{CommMgm}_*$.

4. *Y è un co-H-gruppo se e solo se il funtore F_Y : $\mathbf{HTop}_* \to \mathbf{Set}_*$ fattorizza attraverso* **Grp**.

□

Anche i co-H-spazi e i co-H-gruppi formano due sottocategorie di $\mathbf{HTop}_*$, denotate con $\mathcal{CH}$ e $\mathcal{CHG}$, la seconda delle quali è una sottocategoria piena della prima.

Esempio 3.14. *Le sfere di qualunque dimensione sono co-H-spazi, e in effetti, sono anche tutte co-H-gruppi, come mostreremo più avanti. Questo equivale al fatto che i gruppi di omotopia di uno spazio puntato sono effettivamente dei gruppi in senso classico e che ogni mappa $f : X \to X'$ induce un omorfismo $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(X')$ sui gruppi di omotopia. Infatti per il teorema di caratterizzazione dire che S^n è un co-H-gruppo equivale a definire una struttura di gruppo all'insieme $\pi_n(X) = \mathbf{Mor}(S^n, X)$ in modo tale che ogni mappa fra spazi puntati induca un omomorfismo di gruppi.*

Abbiamo visto le proprietà fondamentali degli H-spazi e dei co-H-spazi, e in particolare quelle degli H-gruppi e dei co-H-gruppi. Vediamo ora come interagiscono fra loro questi oggetti.
Sappiamo che ogni H-spazio X induce un'operazione binaria interna con elemento neutro su $\mathbf{Mor}(Z, X)$ e che ogni co-H-spazio Y ne induce una su $\mathbf{Mor}(Y, Z)$, e questo vale per ogni spazio puntato Z. Vediamo adesso cosa succede sulle operazioni indotte rispettivamente da un H-spazio X e da un co-H-spazio Y su $\mathbf{Mor}(Y, X)$.

Proposizione 3.15. *Se (X,m) è un H-spazio e (Y, μ) è un co-H-spazio, allora le operazioni $+_m$ e $+_\mu$ indotte su* **Mor***(Y,X) sono uguali, associative e commutative.*

Dimostrazione. Per ogni $[f], [g], [h], [k] \in \mathbf{Mor}(Y, X)$ vogliamo verificare l'uguaglianza

$$([f] +_m [g]) +_\mu ([h] +_m [k]) = ([f] +_\mu [h]) +_m ([g] +_\mu [k]).$$

Denotando come al solito con Δ le fattorizzazioni dell'identità attraverso i prodotti e con ∇ quelle attraverso i coprodotti, abbiamo che un rappresentante del membro a sinistra è

$$(f +_m g) +_\mu (h +_m k) = \{f +_m g, h +_m k\} \circ \mu = \{m \circ (f, g), m \circ (h, k)\} \circ \mu =$$
$$= m \circ \{(f, g), (h, k)\} \circ \mu$$

e un rappresentante del membro a destra è

$$(f +_\mu h) +_m (g +_\mu k) = m \circ (f +_\mu h, g +_\mu k) = m \circ (\{f, h\} \circ \mu, \{g, k\} \circ \mu) =$$
$$= m \circ (\{f, h\}, \{g, k\}) \circ \mu.$$

Si verifica direttamente che $\{(f, g), (h, k)\} = (\{f, h\}, \{g, k\})$, da cui l'identità che volevamo mostrare. Segue immediatamente, per l'argomento di Eckmann-Hilton, che le due operazioni coincidono e sono associative e commutative. □

Corollario 3.16. *Se X è un H-spazio e Y un co-H-gruppo, oppure se X è un H-gruppo e Y è un co-H-spazio, allora* **Mor***(Y,X) è un gruppo abeliano.*

□

Definiamo ora altri oggetti di grande interesse in teoria dell'omotopia, con i quali fra l'altro dimostreremo alcuni risultati importanti sulla struttura dei gruppi di omotopia.

Definizione 3.17. *Se X è uno spazio puntato, si dice spazio dei cammini chiusi, e si scrive ΩX, lo spazio topologico che ha come sostegno l'insieme $\{l : [0, 1] \to X | l(0) = l(1) = *\} \subseteq \mathbf{Mor}([0, 1], X)$ e ha la topologia compatta-aperta. Inoltre ogni mappa $g : X \to X'$ induce una mappa $\Omega g : \Omega X \to \Omega X'$ sugli spazi dei cammini chiusi, data da $\Omega g(l) = g \circ l$.*

Proposizione 3.18. *Per ogni spazio puntato X, ΩX è un H-gruppo.*

Dimostrazione. Definiamo una mappa $m : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ con

$$m(l, l')(t) = \begin{cases} l(2t) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ l'(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

e una mappa $i : \Omega X \to \Omega X$ con

$$i(l)(t) = l(1 - t).$$

Bisogna mostrare che i diagrammi che definiscono un H-gruppo commutano a meno di omotopia. Definiamo perciò esplicitamente le omotopie necessarie.

- $id \simeq m \circ j_1$ tramite l'omotopia $H : \Omega X \times [0,1] \to \Omega X$

$$H(l,s)(t) = \begin{cases} l(\frac{2t}{2-s}) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2-s}{2} \\ * & \text{se } \frac{2-s}{2} \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

- $m \circ (m \times id) \simeq m \circ (id \times m)$ tramite l'omotopia $K : \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \times [0,1] \to \Omega X$

$$K(l,l',l'',s)(t) = \begin{cases} l(\frac{4t}{1+s}) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{4} \\ l'(4t-1-s) & \text{se } \frac{s+1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{s+2}{4} \\ l''(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{se } \frac{s+2}{4} \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

- $* \simeq m \circ (id, i)$ tramite l'omotopia $M : \Omega X \to \Omega X$

$$M(l,s)(t) = \begin{cases} l(2st) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ l(2s(1-t)) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

□

Osservazione 3.19. *Poiché i cammini in ΩX sono chiusi, passando al quoziente su $[0,1]$ secondo la relazione d'equivalenza che identifica gli estremi si ottiene uno spazio omeomorfo a ΩX, e dal momento che tale quoziente di $[0,1]$ è omeomorfo a S^1, si può anche vedere ΩX come $\mathbf{Mor}(S^1, X)$.*

Osservazione 3.20. *Lo spazio dei cammini chiusi, come abbiamo visto, è un gruppo interno a $\mathbf{HTop}_*$. Passando al quoziente sulle classi di omotopia ne risulta un gruppo topologico. Tuttavia, tale gruppo topologico è dotato della topologia discreta, che è di scarso interesse in quanto qualunque funzione fra spazi discreti è continua, e questo fa sì che ogni gruppo può essere visto come un gruppo topologico, una volta dotato della topologia discreta. Per questo motivo, il gruppo quoziente così ottenuto è sempre considerato privo di topologia. Esso è esattamente il gruppo fondamentale.*

Osservazione 3.21. *Abbiamo definito un funtore $\Omega : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$. Tuttavia, poiché per ogni mappa coinvolta nella costruzione di ΩX ci interessa solo la sua classe d'omotopia, tale funtore si può anche pensare come $\Omega : \mathbf{HTop}_* \to \mathbf{HTop}_*$, definito con $\Omega = \mathbf{Mor}(S^1, -)$.*

Proposizione 3.22. *Il funtore $\Omega : \mathbf{HTop}_* \to \mathcal{HG}$ è ben definito.*

Dimostrazione. Sappiamo già che per ogni spazio puntato il corrispettivo spazio dei cammini chiusi è un H-gruppo. Dobbiamo mostrare che per ogni mappa puntata $f : X \to X'$, Ωf è una H-mappa, cioè che $\Omega f \circ m \simeq m' \circ (\Omega f \times \Omega f)$.
Per ogni $l, l' \in \Omega X \times \Omega X, \Omega f \circ m(l, l') = f \circ m(l, l')$ è il cammino dato da

$$f \circ m(l, l')(t) = \begin{cases} f \circ l(2t) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ f \circ l'(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Questa è proprio la definizione di $m' \circ (f \circ l, f \circ l') = m' \circ (\Omega f \times \Omega f)(l, l')$, quindi le due mappe sono uguali, e a maggior ragione omotope. □

Definizione 3.23. *Sia X uno spazio puntato, si dice sospensione di X, e si scrive ΣX, lo spazio $(X \times [0,1])/(X \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1] \cup X \times \{1\})$. Ogni mappa $f : X \to X'$ induce una mappa $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma X'$ sulle sospensioni, data da $\Sigma f([a,t]) = [f(a), t]$.*

Proposizione 3.24. *Per ogni spazio puntato X, ΣX è un co-H-gruppo.*

Dimostrazione. Definiamo una mappa $\mu : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$,

$$\mu([a,t]) = \begin{cases} ([a, 2t], *) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ (*, [a, 2t-1]) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

e una mappa $\iota : \Sigma X \to \Sigma X$,

$$\iota([a,t]) = ([a, 1-t]).$$

Mostriamo che i diagrammi che definiscono un co-H-gruppo commutano a meno di omotopia, definendo esplicitamente le omotopie necessarie.

- $id \simeq q_1 \circ \mu$ tramite l'omotopia $\Theta : \Sigma X \times [0,1] \to \Sigma X$

$$\Theta([a,t], s) = \begin{cases} ([a, \frac{2t}{2-s}) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2-s}{2} \\ * & \text{se } \frac{2-s}{2} \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

- $(\mu \vee id) \circ \mu \simeq (id \vee \mu) \circ \mu$ tramite l'omotopia $\Lambda : \Sigma X \times [0,1] \to \Sigma X \vee \Sigma X \vee \Sigma X$

$$\Lambda([a,t], s) = \begin{cases} ([a, \frac{4t}{1+s}], *, *) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{4} \\ (*, [a, 4t-1-s], *) & \text{se } \frac{s+1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{s+2}{4} \\ (*, *, [a, \frac{4t-s-2}{2-s}]) & \text{se } \frac{s+2}{4} \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

- $* \simeq \{id, \iota\} \circ \mu$ tramite l'omotopia $\Xi : \Sigma X \times [0,1] \to \Sigma X$

$$\Xi([a,t],s) = \begin{cases} [a, 2st] & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ [a, 2s(1-t)] & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

□

Osservazione 3.25. *Analogamente al caso del funtore Ω, anche Σ può essere visto come un funtore dalla categoria di omotopia in se stessa.*

Proposizione 3.26. *Il funtore $\Sigma : \mathbf{HTop}_* \to \mathcal{CHG}$ è ben definito.*

Dimostrazione. Sappiamo che ogni sospensione è un co-H-gruppo. Dobbiamo mostrare che le mappe indotte sulle sospensioni sono co-H-mappe. Sia $f : X \to X'$ una mappa puntata, mostriamo che $\mu' \circ \Sigma f \simeq (\Sigma f \vee \Sigma f) \circ \mu$.

$$\mu' \circ \Sigma f([a,t]) = \mu'([f(a),t]) = \begin{cases} ([f(a), 2t], *) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ (*, [f(a), 2t-1]) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1; \end{cases}$$

$$(\Sigma f \vee \Sigma f) \circ \mu([a,t]) = \begin{cases} \Sigma f \vee \Sigma f([a,2t],*) = ([f(a),2t],*) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \Sigma f \vee \Sigma f(*,[a,2t-1]) = (*,[f(a),2t-1]) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

quindi le due mappe sono uguali $\forall [a,t] \in \Sigma X$. □

Segue immediatamente, da quanto visto sugli H-gruppi e sui co-H-gruppi che se X e Y sono due spazi puntati allora $\mathbf{Mor}(\Sigma X, Y)$ e $\mathbf{Mor}(X, \Omega Y)$ sono gruppi. Definiamo ora una mappa $\kappa : \mathbf{Mor}(\Sigma X, Y) \to \mathbf{Mor}(X, \Omega Y)$ in questo modo: per ogni mappa $f : \Sigma X \to Y$ la mappa $\kappa(f) : X \to \Omega Y$ associa ad ogni $a \in X$ il cammino

$$\kappa(f)(a)(t) = f([a,t]).$$

Proposizione 3.27. *L'applicazione $\kappa : \mathbf{Mor}(\Sigma X, Y) \to \mathbf{Mor}(X, \Omega Y)$ è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\forall f, g : \Sigma X \to Y, \kappa(f+g) = \kappa(\{f,g\} \circ \mu)$ cioè $\forall a \in X$ è il cammino definito con

$$\kappa(\{f,g\} \circ \mu)(a)(t) = \{f,g\} \circ \mu([a,t]) = \begin{cases} \{f,g\}([a,2t],*) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \{f,g\}(*,[a,2t-1]) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f([a,2t]) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g([a,2t-1]) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

mentre $\kappa(f)+\kappa(g)=m\circ(\kappa(f),\kappa(g))$ che $\forall a\in X$ è il cammino definito con

$$m\circ(\kappa(f),\kappa(g))(a)(t)=m\circ(\kappa(f)(a),\kappa(g)(a))(t)=\begin{cases}\kappa(f)(a)(2t) & \text{se } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\\ \kappa(g)(a)(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}f([a,2t]) & \text{se } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}\\ g([a,2t-1]) & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

quindi $\kappa(f+g)=\kappa(f)+\kappa(g)$ e κ è un omomorfismo. Resta da dimostrare che è biettivo.
Definiamo l'applicazione $\bar{\kappa}:\mathbf{Mor}(X,\Omega Y)\to\mathbf{Mor}(\Sigma X,Y)$ mandando ogni mappa $h:X\to\Omega Y$ in $\bar{\kappa}(h):\Sigma X\to Y$ tale che $\forall a\in X, t\in[0,1], \bar{\kappa}(h)([a,t])=h(a)(t)$ e mostriamo che è un'inversa di κ. Siano $f:\Sigma X\to Y, h:X\to\Omega Y$, allora

$$\kappa(\bar{\kappa}(h))(a)(t)=\bar{\kappa}(h)([a,t])=h(a)(t)$$
$$\bar{\kappa}(\kappa(f))([a,t])=\kappa(f)(a)(t)=f([a,t])$$

quindi κ è biettiva. □

Essendo $\mathcal{HG}$ e $\mathcal{CHG}$ sottocategorie di $\mathbf{HTop}_*$, i funtori Ω e Σ possono essere iterati. Indichiamo tali funtori iterati n volte con Ω^n e Σ^n.

Proposizione 3.28. *Se X è uno spazio puntato, allora $\forall n\geqslant 2, \Omega^n X$ è un H-gruppo commutativo e $\Sigma^n X$ è un co-H-gruppo commutativo.*

Dimostrazione. Per ogni spazio Y, $\mathbf{Mor}(Y,\Omega^n)\cong\mathbf{Mor}(\Sigma Y,\Omega^{n-1}X)$ per la proposizione precedente. Inoltre, se $n\geqslant 2$, $\Omega^{n-1}X$ è un H-gruppo, quindi a secondo membro abbiamo un gruppo abeliano. Per la caratterizzazione degli H-gruppi commutativi abbiamo il risultato.
Analogamente, $\mathbf{Mor}(\Sigma^n X,Y)\cong\mathbf{Mor}(\Sigma^{n-1}X,\Omega Y)$ e $\Sigma^{n-1}X$ è un co-H-gruppo, quindi il secondo membro è un gruppo abeliano, e otteniamo il risultato dalla caratterizzazione dei co-H-gruppi commutativi. □

Introduciamo ora alcune notazioni. Se S^n è la sfera n-dimensionale, ovvero l'insieme $\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}|\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2}=1\}$, definiamo la semisfera superiore $S^n_+=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in S^n|x_{n+1}\geqslant 0\}$ e la semisfera inferiore $S^n_-=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in S^n|x_{n+1}\leqslant 0\}$. Evidentemente si ha $S^n_+\cup S^n_-=S^n$ e $S^n_+\cap S^n_-=S^{n-1}$. Sia inoltre $\bar{D}^n$ la palla chiusa di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.29. *Se $n\geqslant 1, S^n$ è omeomorfa a ΣS^{n-1}.*

Dimostrazione. Abbiamo due omeomorfismi $h_+ : \bar{D}^n \to S^n_+$ e $h_- : \bar{D}^n \to S^n_-$, dati da

$$\begin{aligned} h_+(x) &= (x, \sqrt{1-|x|^2}) \\ h_-(x) &= (x, -\sqrt{1-|x|^2}). \end{aligned}$$

Denotando, per ogni spazio $X, C_0(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1])$ e $C_1(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{1\} \cup \{*\} \times [0,1])$, la palla chiusa è inoltre omeomorfa a $C_0(S^{n-1})$ e a $C_1(S^{n-1})$. Infatti la mappa

$$\lambda : S^{n-1} \times [0,1] \to \bar{D}^n, \lambda(x,t) = (1-t) * + tx$$

è costante sull'insieme $X \times \{0\} \cup \{*\} \times [0,1]$ e iniettiva sul resto del dominio, induce perciò un omeomorfismo sul quoziente, che è proprio $C_0(S^{n-1})$. Analogamente si ha il risultato per $C_1(S^{n-1})$. In particolare, abbiamo ottenuto che $C_0(S^{n-1}) \cong S^n_-$ e $C_1(S^{n-1}) \cong S^{n-1}_+$.
Possiamo ora vedere ΣS^{n-1} come l'unione disgiunta di $C_0(S^{n-1})$ e $C_1(S^{n-1})$ amalgamata su S^{n-1}, tramite l'omeomorfismo

$$\Sigma S^{n-1} \ni [x,t] \mapsto \begin{cases} [x, 2t] \in C_0(S^{n-1}) & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ [x, 2t-1] \in C_1(S^{n-1}) & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

In definita, quello che abbiamo ottenuto è

$$\Sigma S^{n-1} \cong C_0(S^{n-1}) \cup_{S^{n-1}} C_1(S^{n-1}) \cong S^n_- \cup_{S^{n-1}} S^n_+ = S^n.$$

□

Corollario 3.30. *Le sfere di dimensione qualunque sono co-H-gruppi. Questo è equivalente ad affermare che i gruppi di omotopia sono ben definiti per ogni spazio puntato.*

Teorema 3.31. *Per ogni spazio X e $\forall n \geqslant 2$, i gruppi di omotopia $\pi_n(X)$ sono abeliani.*

Dimostrazione. Se $n \geqslant 2$, allora $\mathbf{Mor}(S^n, X) \cong \mathbf{Mor}(\Sigma S^{n-1}, X) \cong \mathbf{Mor}(S^{n-1}, \Omega X) \cong \mathbf{Mor}(\Sigma S^{n-2}, \Omega X)$, che è un gruppo abeliano. □

Questo risultato di notevole importanza, in quanto fornisce informazioni fondamentali sulla struttura dei gruppi di omotopia, vale per ogni spazio puntato, come abbiamo visto. Nel caso di H-spazi e co-H-spazi, abbiamo risultati notevoli anche per quanto riguarda il gruppo fondamentale.

Sia G un gruppo qualunque, e consideriamo il prodotto libero $G * G$. Indicheremo un elemento $g \in G$ con g' se visto come elemento del primo fattore e g'' se visto come elemento del secondo fattore del prodotto libero. Ogni elemento $\xi \in G*G$ si può quindi scrivere come $\xi = \prod_{i=1}^{k} g_i'\gamma_i''$, dove $g_i, \gamma_i \in G$. Consideriamo ora le proiezioni $p_1, p_2 : G * G \to G$ date da $p_1(\xi) = \prod g_i$ e $p_2(\xi) = \prod \gamma_i$. Il sottoinsieme $E_G = \{\xi \in G * G | p_1(\xi) = p_2(\xi)\}$ è evidentemente un sottogruppo di $G*G$, e dalla definizione segue che $\xi \in E_G$ se e solo se $\gamma_k^{-1} \cdots \gamma_1^{-1} g_1 \cdots g_k = 1$. Per ogni $u \in G$ definiamo ora $\xi_u = u'u'' \in E_G$ e consideriamo il sottoinsieme $\Xi_G = \{\xi_u | u \neq 1\}$.

Proposizione 3.32. *Il gruppo E_G è libero generato da Ξ_G.*

Dimostrazione. È ovvio che gli elementi di Ξ_G sono indipendenti fra loro. Vogliamo ora scrivere $\xi = \prod_{i=1}^{k} g_i'\gamma_i'' \in E_G$ come prodotto di elementi di Ξ_G. Definiamo $\delta_1 = g_1$ e per $1 \leqslant i \leqslant k$

$$\begin{aligned} \delta_{2i} &= \gamma_i^{-1} \cdots \gamma_1^{-1} g_1 \cdots g_i \\ \delta_{2i+1} &= \gamma_i^{-1} \cdots \gamma_1^{-1} g_1 \cdots g_{i+1}. \end{aligned}$$

Mostriamo che $\xi = \prod_{i=1}^{k} \xi_{2i-1}\xi_{2i}^{-1}$. Indicando, per semplicità di notazione, $g^{-1} = \bar{g}$, si ha

$$\xi_{\delta_1}\xi_{\delta_1}^{-1} = \delta_1'\delta_1''\bar{\delta}_2''\bar{\delta}_2' = g_1'g_1''\bar{g}_1''\gamma_1''\bar{g}_1'\gamma_1' = g_1'\gamma_1''\bar{\delta}_2'$$

e per $i > 1$

$$\begin{aligned} &\xi_{\delta_{2i-1}}\xi_{\delta_{2i}}^{-1} = \delta_{2i-1}'\delta_{2i-1}''\bar{\delta}_{2i}''\bar{\delta}_{2i}' = \\ &= \bar{\gamma}_{i-1}' \cdots \bar{\gamma}_1' g_1' \cdots g_i' \bar{\gamma}_{i-1}'' \cdots \bar{\gamma}_1'' g_1'' \cdots g_i'' \bar{g}_i'' \cdots \bar{g}_1'' \gamma_1'' \cdots \gamma_i'' \bar{g}_i' \cdots \bar{g}_1' \gamma_1' \cdots \gamma_i' = \\ &= \bar{\gamma}_{i-1}' \cdots \bar{\gamma}_1' g_1' \cdots g_i' \gamma_i'' \bar{g}_i' \cdots \bar{g}_1' \gamma_1' \cdots \gamma_i' = \delta_{2i-2}' g_i' \gamma_i'' \bar{\delta}_{2i}' \end{aligned}$$

quindi

$$\prod_{i=1}^{k} \xi_{2i-1}\xi_{2i}^{-1} = g_1'\gamma_1''\bar{\delta}_2' \cdots \delta_{2k-2}' g_k'\gamma_k''\bar{\delta}_{2k}' = g_1'\gamma_1'' \cdots g_k'\gamma_k''\bar{\delta}_{2k}' = g_1'\gamma_1'' \cdots g_k'\gamma_k''$$

perché $\delta_{2k} = 1$. Siccome gli ξ_u sono indipendenti, tale scrittura per ξ è unica, ed essendo ξ arbitrario E_G è libero. □

Teorema 3.33. *Il gruppo fondamentale di un H-spazio è abeliano. Il gruppo fondamentale di un co-H-spazio è libero.*

Dimostrazione. Se X è un H-spazio il risultato discende direttamente dal fatto che S^1 è un co-H-gruppo, e il gruppo dei morfismi da un co-H-gruppo a un H-spazio è sempre abeliano.
Supponiamo che X sia un co-H-spazio, e sia $G = \pi_1(X)$. Per il teorema di Seifert-van Kampen sappiamo che $\pi_1(X \vee X) \cong G * G$. Siano $\mu : X \to X \vee X$ la comoltiplicazione e $q_1, q_2 : X \vee X \to X$ le proiezioni sulle componenti. Poiché $q_j \circ \mu \simeq id$, l'omomorfismo indotto $\mu_* : G \to G * G$ è tale che $p_j \circ \mu_* = id : G \to G$, cioè $\mu_*(G) \subseteq E_G$. Quindi G è isomorfo a un sottogruppo di E_G, che per la proposizione precedente è libero, e i sottogruppi di un gruppo libero sono a loro volta liberi. $\square$

Bibliografia

[1] Borceux, Francis: Handbook of categorical algebra. 1. Basic category theory. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 50. *Cambridge University Press, Cambridge, 1994.*

[2] Spanier, Edwin H.: Algebraic topology. Corrected reprint. *Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.*

[3] Bergman, George M.; Hausknecht, Adam O.: Co-groups and co-rings in categories of associative rings. Mathematical Surveys and Monographs, 45. *American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.*

[4] Magnus, Wilhelm; Karrass, Abraham; Solitar, Donald: Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations. Reprint of the 1976 second edition. *Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.*

[5] Conway, John H.; Smith, Derek A.: On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry. *A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003.*

[6] Arkowitz, Martin: Introduction to homotopy theory. Universitext. *Springer, New York, 2011.*

[7] Arkowitz, Martin: Co-H-spaces. *Handbook of algebraic topology*, 1143-1173, *North-Holland, Amsterdam, 1995.*

[8] Borceux, Francis; Bourn, Dominique: Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories. Mathematics and its Applications, 566. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.*

Ringraziamenti

Poche settimane sono occorse per scrivere questa tesi, e non sono molte le persone con le quali la mia interazione è stata caratterizzata dall'avere quest'obiettivo in mente. Un ringraziamento va quindi intanto alla professoressa Cagliari e al professor Ferri per la loro costante disponibilità e la loro capacità di trasmettere la passione per quello di cui si occupano.

Tuttavia le ultime, poche settimane che segnano la conclusione della mia carriera universitaria a Bologna non sono che il frutto di tre anni di permanenza in questa città meravigliosa, tre anni intensi che rappresentano, e sono convinto che continueranno a rappresentare, un punto focale della mia vita che serberò sempre gelosamente in memoria. Desidero perciò ringraziare anche tutti coloro che hanno reso possibile il mio soggiorno a Bologna e che lo hanno reso piacevole e stimolante.

La mia più profonda gratitudine va innanzitutto a Nello e Carla, con i quali posso vantare il più stretto rapporto di parentela che esista, e che da ventidue anni costituiscono il mio principale sostegno affettivo, morale ed economico, e a Piero, che insieme a loro ha contribuito più di chiunque altro a rendermi quello che sono oggi, e che è stato per me un compagno di giochi, un confidente e uno stimatissimo estimatore.

Fra l'enorme numero di persone che ho frequentato e che nella mia mente sono indissolubilmente legate a questa città, dove stringere rapporti sociali è come respirare, ricorderò sempre con piacere Giulio, l'omonimo dalle simili capacità, Karim, per tante serate di costruttivo nonsense, Jacopo, per la sua apertura ad ogni tipo di proposta, Alice, per essere stata mia complice in molte occasioni, Stefano, per interminabili conversazioni sugli argomenti più astrusi, Simone, per la sua presenza o assenza in casa, Brigida, per le sue ventate di fiducia durante i momenti più bui, Maddalena, per tanti battibecchi sempre finiti con risate, Lucia, la più ingestibile fra le vicine di stanza, Alberto, per innumerevoli serate a base di amaro, Giulia, per tanti complimenti fallacemente mascherati da insulti, Andrea, per il suo incredibile modo di essere amico di chiunque, Luca, per aver sopportato lunghe telefonate di chiarimenti, Marco, per tante logorroiche bevute di birra, Mirta, per aver riso

con me davanti ai peggiori film, Paolo, per la continua ed energica ricerca del contesto giusto, Raffaella, affettuosa viaggiatrice dalle idee bizzarre, Osama, per le sue ottime cene di pesce, Giulia, per aver condiviso le sue storie sentimentali, Chiara e Marella, degne sostitute nella casa che mi vide arrivare a Bologna, Raffaele, per aver appoggiato diverse mie idee improvvise, e tanti altri che certamente sto dimenticando, nella folta cerchia di persone che ho avuto il piacere di definire amiche.
Un grosso grazie va infine a Bologna, città che mi è cara e che resterà per me un punto di riferimento affettivo e culturale negli anni a venire, da qualunque altra città io la stia pensando con un largo sorriso sulle labbra.