ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea triennale in Matematica

CURVE DI TERZO GRADO NEL PIANO E NELLO SPAZIO

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MONICA IDA'

Presentata da:
ELISA NEGRINI

I Sessione
2014/2015

Indice

Introduzione **i**

1 Premesse **1**

1.1 Curve algebriche 1

1.2 Punti multipli di una curva 3

1.2.1 Molteplicità di intersezione 3

1.2.2 Tangenti principali a una curva affine in un suo punto 9

2 Hessiana e flessi **13**

2.1 Esistenza di un punto di flesso 14

3 Il birapporto **19**

4 Le cubiche non singolari **25**

4.1 Classificazione proiettiva 25

5 Le cubiche singolari **35**

5.1 Classificazione proiettiva delle cubiche singolari irriducibili 35

5.2 Classificazione proiettiva delle cubiche singolari riducibili 41

6 Proiezioni della cubica gobba **43**

6.1 Proiezione della cubica gobba da un suo punto 45

6.2 Proiezione della cubica gobba da un punto esterno 48

6.2.1 Proiezione della cubica gobba da un punto esterno: la cuspide . . 48

6.2.2 Proiezione della cubica gobba da un punto esterno: il nodo 52

Introduzione

Questa tesi tratta di argomenti di geometria proiettiva e in particolare di curve algebriche proiettive.
Nei capitoli da 1 a 5 si parla di curve algebriche proiettive nel piano: si è interessati a classificare le cubiche del piano proiettivo complesso, cioè le curve algebriche proiettive rappresentate da polinomi omogenei di grado 3 a coefficienti nel campo complesso.
Il primo capitolo è diviso in due sezioni ed elenca alcune premesse fondamentali per la comprensione degli argomenti trattati successivamente. Nella prima parte del capitolo vengono definite le curve algebriche piane ed elencate le loro proprietà. Nella seconda parte si affronta lo studio delle tangenti a una curva piana, definendo la molteplicità di intersezione di una retta e una curva in un punto, e si definiscono i punti singolari di una curva piana. Infine si descrive un metodo pratico per calcolare la tangente in un punto semplice, o le tangenti principali in un punto $m - uplo$ a una curva piana.
Nel secondo capitolo viene definita l'hessiana di una curva piana e si dimostra che i flessi di una curva proiettiva sono i punti che la curva ha in comune con la sua hessiana. Ciò sarà fondamentale nella classificazione delle cubiche proiettive non singolari esposta nel capitolo 4.
Il terzo capitolo è dedicato allo studio del birapporto e del modulo di una quaterna di punti di una retta proiettiva, necessario per poter introdurre il modulo di una cubica nel capitolo successivo.
Si entra a questo punto nella parte centrale della tesi.
Il quarto capitolo è dedicato alla classificazione proiettiva delle cubiche piane non singolari. Si mostra che ogni cubica non singolare è proiettivamente equivalente a una cubica di equazione affine nota, data da un polinomio contenente un parametro complesso la

cui unica limitazione è di non poter assumere i valori 0 e 1. Grazie al fatto che tale parametro può variare tra infiniti valori complessi, è possibile dimostrare che esistono infinite classi di equivalenza proiettiva per le cubiche piane non singolari, a differenza di quanto avviene per curve proiettive di grado 2 o 1. Si studiano inoltre nel corso del capitolo le proprietà fondamentali dei punti di flesso di una cubica piana non singolare.
Il quinto capitolo, diviso in due sezioni, è dedicato alla classificazione delle cubiche singolari nel piano. Nella prima sezione vengono classificate le cubiche singolari irriducibili. Si mostra che tali cubiche possono essere ricondotte a due classi di equivalenza proiettive: la prima classe contiene le cubiche con un nodo, cioè un punto doppio con tangenti principali distinte, la seconda classe contiene invece le cubiche con una cuspide, cioè un punto doppio con tangenti principali coincidenti. Nella seconda sezione si classificano le cubiche singolari riducibili. La classificazione è fatta in base ai gradi che possono assumere i fattori in cui spezza il polinomio i cui zeri rappresentano la cubica.
Nel sesto capitolo si esce dal piano e si studiano le proiezioni piane della cubica gobba di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, cioè una curva cubica non contenuta in un piano che può essere espressa in forma parametrica. Nella prima parte del capitolo si analizzano le proiezioni piane della cubica gobba di centro un punto della cubica stessa. Il risultato di tale proiezione è una conica non degenere di $\mathbb{P}^2$.
La seconda parte è invece dedicata allo studio delle proiezioni piane della cubica gobba di centro un punto esterno alla cubica. In questo caso l'immagine della proiezione è una cubica piana singolare con un nodo oppure con una cuspide a seconda dei casi.
In questo elaborato, dunque, si dà una classificazione di tutte le cubiche piane proiettive e si studiano le cubiche piane singolari tramite proiezioni piane della cubica gobba.

Capitolo 1

Premesse

In questo capitolo richiamerò alcuni teoremi e definizioni che serviranno in seguito per lo studio delle cubiche.
Si rimanda a [S] per dimostrazioni e approfondimenti.
Indicherò con $\mathbb{C}[x_0, ...x_n]$ l'anello dei polinomi a coefficienti complessi nelle variabili $x_0, ..., x_n$; $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ denoterà lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$.

1.1 Curve algebriche

Definizione 1.1.
Una *curva algebrica* piana affine è una classe di equivalenza di polinomi non costanti di $\mathbb{C}[X, Y]$ modulo la proporzionalità.
Se $f(X, Y)$ è un rappresentante di tale classe, l'equazione $f(X, Y) = 0$ si dice *equazione della curva.*
Si chiama invece *supporto della curva* il sottoinsieme $\mathscr{C} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ costituito dai punti che soddisfano l'equazione della curva.
Il grado del polinomio F che definisce la curva è detto *grado della curva* e si denota con $\deg(\mathscr{C})$.

Definizione 1.2.
Una *curva algebrica* piana proiettiva è una classe di equivalenza dei polinomi omogenei di $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ modulo la proporzionalità.

Se $F(x_0, x_1, x_2)$ è un rappresentante di tale classe, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}^*$,
$\lambda F(x_0, x_1, x_2) = 0$ si dice *equazione della curva*.
Si chiama invece *supporto della curva* il sottoinsieme costituito dai punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che soddisfano l'equazione della curva; quindi se $P = [p_0, p_1, p_2]$ è un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, P è un punto del supporto se e solo se $F(p_0, p_1, p_2) = 0$. La definizione ha senso perché se scegliamo come coordinate omogenee di P $\delta p_0, \delta p_1, \delta p_2$ con $\delta \in \mathbb{C}^*$, si ha che $F(p_0, p_1, p_2) = 0$ se e solo se $F(\delta p_0, \delta p_1, \delta p_2) = 0$, proprio perché F è un polinomio omogeneo.
Il grado del polinomio F che definisce la curva è detto *grado della curva* e si denota con $\deg(\mathscr{C})$.

Notazione 1. Sia $[F(x_0, x_1, x_2)]$ una curva algebrica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Denoteremo, con abuso di notazione, con $\mathscr{C}$ sia la curva che il supporto della curva, e scriveremo:

$$\mathscr{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Definizione 1.3.
Consideriamo una curva algebrica proiettiva $\mathscr{C}$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di grado n e di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$.
$\mathscr{C}$ si dice *irriducibile* se $F(x_0, x_1, x_2)$ è un polinomio irriducibile di $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$; altrimenti si dice *riducibile*.
Se il polinomio F si fattorizza come

$$F(x_0, x_1, x_2) = F_1(x_0, x_1, x_2) \cdot ... \cdot F_k(x_0, x_1, x_2)$$

allora, dette $\mathscr{C}_1, ..., \mathscr{C}_k$ le curve di equazioni $F_1(x_0, x_1, x_2) = 0, ..., F_k(x_0, x_1, x_2) = 0$, sussiste tra i supporti la relazione $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup ... \cup \mathscr{C}_k$, e le curve irriducibili $\mathscr{C}_1, ..., \mathscr{C}_k$ sono dette *componenti irriducibili* di $\mathscr{C}$. Infine, se $F_j(x_0, x_1, x_2)$ è un fattore multiplo di $F(x_0, x_1, x_2)$ di molteplicità λ_j, la corrispondente componente irriducibile di $\mathscr{C}$ è detta *componente multipla di molteplicità* λ_j.
La curva $\mathscr{C}$ si dice *ridotta* se non ha componenti multiple.
Analoghe definizioni si danno nel caso affine.

Due curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, rispettivamente di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ si dicono *affinemente equivalenti* , rispettivamente *proiettivamente equivalenti* se esiste una affinità, rispettivamente proiettività che porta l' una nell'altra.

Teorema 1.1.1.
Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due curve algebriche piane, affini o proiettive, di gradi n e m rispettivamente.
Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ non hanno infiniti punti in comune, esse ne hanno al più nm.
Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono curve proiettive, esse hanno almeno un punto in comune.

Per la dimostrazione si veda [S], 33.1.

Teorema 1.1.2.
Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due curve algebriche piane, affini o proiettive.
Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ hanno infiniti punti in comune e $\mathscr{D}$ è irriducibile, allora $\mathscr{D}$ è una componente irriducibile di $\mathscr{C}$.

Per la dimostrazione si veda [S], 33.2.

Corollario 1.1.3.
Se due curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ algebriche piane, affini o proiettive di gradi n e m rispettivamente hanno $mn + 1$ o più punti in comune, allora hanno una componente irriducibile in comune.

Per la dimostrazione si veda [S], 33.3.

1.2 Punti multipli di una curva

1.2.1 Molteplicità di intersezione

Definizione 1.4.
Sia $\mathscr{C} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ una curva di equazione $f(X,Y) = 0$ di grado n e consideriamo la retta r di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} X = a + Lt \\ Y = b + Mt \end{cases} \quad \textit{con} \quad (L, M) \neq (0, 0)$$

L'intersezione di r e $\mathscr{C}$ si ottiene studiando l'*equazione risolvente*:

$$f(a + Lt, b + Mt) = 0$$

Il polinomio $g(t) := f(a+Lt, b+Mt)$ è identicamente nullo se la retta r è una componente di $\mathscr{C}$, altrimenti g è un polinomio di grado n che ha n radici contate con molteplicità. Se $t_0, ...t_s$ sono le radici a due a due distinte, i punti di intersezione di r e $\mathscr{C}$ sono $(a + lt_0, b + mt_0), ..., (a + lt_s, b + mt_s)$.
Sia dunque $P \in r,\ P = (a + lt_0, b + mt_0)$.
La *molteplicità di intersezione* di $\mathscr{C}$ ed r in P, denotata con $I(\mathscr{C}, r, P)$, è definita così:

$$I(\mathscr{C}, r, P) := \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathscr{C} \\ \infty & \text{se } r \subseteq \mathscr{C} \\ m & \text{se } t_0 \ \textit{è radice di molteplicità } m \textit{ per } g \end{cases}$$

Si dimostra ([S], 33.4) che questa definizione è ben posta e non dipende dalla parametrizzazione della retta r.

Definizione 1.5.
Sia $\mathscr{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ di grado n e sia r una retta assegnata mediante i suoi due punti $P = [p_0, p_1, p_2]$ e $Q = [q_0, q_1, q_2]$:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases} \quad \textit{con} \quad rg \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 2$$

L'intersezione di r e $\mathscr{C}$ è data dall' *equazione risolvente*:

$$F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2) = 0$$

Come nel caso affine, il polinomio $g(\lambda, \mu) := F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2)$ è identicamente nullo se la retta r è una componente di $\mathscr{C}$, altrimenti g è un polinomio omogeneo in λ e μ di grado n che ha n radici contate con molteplicità, dove si intende che una radice è una classe di equivalenza $[\lambda, \mu]$ modulo la proporzionalità, cioè le radici di $g(\lambda, \mu)$ sono pensate come punti di $\mathbb{P}^1$.

Se $[\lambda_0,\mu_0],...,[\lambda_s,\mu_s]$ sono le radici a due a due distinte, i punti di intersezione di r e $\mathscr{C}$ sono $[\lambda_0 p_0+\mu_0 q_0, \lambda_0 p_1+\mu_0 q_1, \lambda_0 p_2+\mu_0 q_2],...,[\lambda_s p_0+\mu_s q_0, \lambda_s p_1+\mu_s q_1, \lambda_s p_2+\mu_s q_2]$.
Sia dunque $P \in r$, $P = [\lambda_0 p_0+\mu_0 q_0, \lambda_0 p_1+\mu_0 q_1, \lambda_0 p_2+\mu_0 q_2]$.
La *molteplicità di intersezione* di $\mathscr{C}$ ed r in P, denotata con $I(\mathscr{C},r,P)$, è definita così:

$$I(\mathscr{C},r,P) := \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathscr{C} \\ \infty & \text{se } r \subseteq \mathscr{C} \\ m & \text{se } [\lambda_0,\mu_0] \ \textit{è radice di molteplicità } m \textit{ per } g \end{cases}$$

Anche in questo caso si dimostra che la definizione è ben posta ([S], 33.6).

Teorema 1.2.1.
Siano $\mathscr{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva di grado n e r una retta che non è sua componente. Allora

$$\sum_{P \in r} I(\mathscr{C},r,P) = n$$

Per la dimostrazione si veda [S], 33.5.

Definizione 1.6.
Sia $\mathscr{C}$ una curva algebrica affine o proiettiva e sia P un punto del piano. La *molteplicità di P per $\mathscr{C}$*, indicata con $m_P(\mathscr{C})$, è il minimo delle molteplicità di intersezione in P di $\mathscr{C}$ con r, al variare di r tra tutte le rette del fascio di centro P, ossia

$$m_P(\mathscr{C}) := min_{r \ni P} I(\mathscr{C},r,P)$$

Si ha che $0 \leq m_P(\mathscr{C}) \leq deg(\mathscr{C})$ e $m_P(\mathscr{C}) = 0$ se e solo se $P \notin \mathscr{C}$.
Se $m_P(\mathscr{C}) = 1$, P è un *punto semplice* per $\mathscr{C}$
Se $m_P(\mathscr{C}) > 1$, P è un *punto singolare* per $\mathscr{C}$.
In particolare diremo che P è un *punto m-uplo* se $m_P(\mathscr{C}) = m$.
La curva $\mathscr{C}$ si dice *non singolare* se tutti i suoi punti sono semplici e *singolare* se ha almeno un punto singolare.

Struttura locale di una curva piana

Studiamo la struttura di una curva affine $\mathscr{C}$ di equazione $f(X,Y)=0$ in un suo punto $P=(a,b)$.
Sia r una retta passante per P di equazioni parametriche

$$\begin{cases} X = a + Lt \\ Y = b + Mt \end{cases} \quad \textit{con} \quad (L,M) \neq (0,0)$$

sostituendo tali X e Y nell'equazione di $\mathscr{C}$ e sviluppando con Taylor in un intorno di $t=0$ ottengo, dato che $f(a,b)=0$:

$$\begin{aligned} & f(a+Lt, b+Mt) = \\ & = (f_X(a,b)L + f_Y(a,b)M)t + \frac{f_{XX}(a,b)L^2 + 2f_{XY}(a,b)LM + f_{YY}(a,b)M^2}{2!}t^2 + ... \\ & ... + \frac{\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{X^{r-k}Y^k}(a,b)L^{r-k}M^k}{r!}t^r + ... \end{aligned}$$

dove $f_X(a,b), f_{XY}(a,b)$ *ecc.*. indicano le derivate parziali di $f(X,Y)$ rispetto alle variabili indicate, calcolate in P.
Si deduce che la condizione necessaria e sufficiente affinché $t=0$ sia una radice di molteplicità m per $f(a+Lt, b+Mt)$, ovvero che il punto P sia un punto semplice se $m=1$, $m-$ *uplo* per $\mathscr{C}$ se $m>1$ è che:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{X^{r-k}Y^k}(a,b)L^{r-k}M^k = 0 \qquad \textit{per } r=1,...,m-1 \textit{ e per ogni scelta di } (M,L)$$

e che

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f_{X^{m-k}Y^k}(a,b)L^{m-k}M^k \neq 0 \qquad \textit{per almeno una scelta di } (M,L)$$

Queste condizioni equivalgono all'annullarsi in P di tutte le derivate parziali di $f(X,Y)$ fino all'ordine $m-1$ perchè $\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f_{X^{r-k}Y^k}(a,b)L^{r-k}M^k$ è un polinomio in L e M che deve essere identicamente nullo e ciò accade solo se i suoi coefficienti sono tutti nulli, e al non annullarsi in P di almeno una derivata parziale di $f(X,Y)$ di ordine m.

Nel caso di una curva proiettiva $\mathscr{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$, il ragionamento è analogo: una retta r passante per i punti distinti $P = [p_0, p_1, p_2]$ e $Q = [q_0, q_1, q_2]$, ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases}$$

Sia $P \in \mathscr{C}$. Sostituendo nell'equazione di $\mathscr{C}$ ottengo un polinomio omogeneo in λ e μ : $F(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \lambda p_2 + \mu q_2) = 0$.
Il punto P corrisponde alla radice $[\lambda, \mu] = [1, 0]$, cioè, deomogeneizzando rispetto a λ, alla radice $t = 0$ di $F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2)$.
Sviluppando tale polinomio con Taylor per t in un intorno di 0 otteniamo, denotando con F_i la $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, con $F_{i,j}$ la $\frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}$ *ecc...*:

$$F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2) = [\sum_i F_i(P)q_i]t + \frac{\sum\limits_{j,k} F_{j,k}(P)q_j q_k}{2!}t^2 + ...$$

Anche in questo caso condizione necessaria e sufficiente affinché $t = 0$ sia una radice di molteplicità m per $F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2)$, ovvero che il punto $P = [p_0, p_1, p_2]$ sia un punto semplice se $m = 1$ o $m - uplo$ se $m > 1$ per $\mathscr{C}$, è che siano nulle in P tutte le derivate parziali di $F(x_0, x_1, x_2)$ fino all'ordine $m - 1$ e che sia diversa da zero in P almeno una derivata parziale di ordine m.
Si nota che, siccome $F(x_0, x_1, x_2)$ e le sue derivate parziali sono polinomi omogenei, affinché si annullino in P, sia F che tutte le derivate parziali di $F(x_0, x_1, x_2)$ fino all'ordine $m - 1$ basta richiedere che siano nulle in P le derivate parziali di ordine $m - 1$.
In effetti per ogni polinomio omogeneo $q(y_1, ...y_n)$ di grado k , vale la seguente uguaglianza (identità di Eulero):

$$kq = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_i} y_i$$

e dunque l'annullarsi in P delle derivate parziali $m - 1$-esime assicura l'annullamento in P delle derivate di ordine inferiore.

Ciò si riassume nella seguente:

Proposizione 1.2.2.
1) Sia $\mathscr{C} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la curva di equazione $f(X,Y) = 0$. Un punto $P \in \mathscr{C}$ ha molteplicità m per $\mathscr{C}$ se e solo se in P si annullano tutte le derivate parziali di $f(X,Y)$ fino all'ordine $m-1$ e almeno una delle derivate di ordine m non si annulla in P.
2) Sia $\mathscr{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Un punto $P \in \mathscr{C}$ ha molteplicità m per $\mathscr{C}$ se e solo se in P si annullano tutte le derivate parziali di $F(x_0, x_1, x_2)$ di ordine $m-1$ e almeno una delle derivate di ordine m non si annulla in P.

Per la dimostrazione si veda [S], 34.6.

In particolare abbiamo le seguenti proposizioni:

Proposizione 1.2.3.
Sia $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ una curva di equazione $f(X,Y) = 0$. Un punto $P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è un punto semplice per $\mathscr{C}$ se e solo se $P \in \mathscr{C}$ e almeno una delle derivate parziali prime di $f(X,Y)$ è diversa da zero in P.
Viceversa P è singolare per $\mathscr{C}$ se e solo se $P \in \mathscr{C}$ ed entrambe le derivate parziali prime di $f(X,Y)$ si annullano in P.

Per la dimostrazione si veda [S], 34.2.

Proposizione 1.2.4.
Sia $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Un punto $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è un punto semplice per $\mathscr{C}$ se e solo se $P \in \mathscr{C}$ e almeno una delle derivate parziali prime di $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ è diversa da zero in P.
Viceversa P è singolare per $\mathscr{C}$ se e solo se tutte e tre le derivate parziali prime di $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ si annullano in P.

Per la dimostrazione si veda [S], 34.3.

1.2.2 Tangenti principali a una curva affine in un suo punto

Sia P un punto di una curva affine $\mathscr{C}$ di equazione $f(X,Y)=0$.
Supponiamo che $P=(0,0)$ e scriviamo $f(X,Y)$ come somma di polinomi omogenei:

$$f(X,Y)=F_0+F_1(X,Y)+F_2(X,Y)+...$$

dove $F_0=f(0,0)=0$ e $F_r(X,Y), r\geq 1$ è somma di tutti i monomi di grado r di $f(X,Y)$.
Considero quindi la retta per $P=(0,0)$ in forma parametrica: il suo generico punto ha coordinate $(X=Lt, Y=Mt)$; sostituisco queste coordinate nell'equazione della curva ottenendo un polinomio in L e M. Sviluppando con Taylor e uguagliando i coefficienti di t^r per $r=1,...,deg(f)$ ottengo:

$$F_r(L,M)=\frac{\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}f_{X^{r-k}Y^k}(0,0)L^{r-k}M^k}{r!}$$

Così se l'origine è un punto di molteplicità m per la curva $\mathscr{C}$, per quanto mostrato sopra nello studio dei punti di una curva affine, deve valere $F_1=...=F_{m-1}=0,\ F_m\neq 0.$, e $m(\mathscr{C})$ è uguale al minimo grado dei monomi non nulli di $f(X,Y)$.
Chiediamoci se ci sono, e quali sono, le rette per P che hanno molteplicità di intersezione maggiore di m con $\mathscr{C}$ in P; si vede subito che sono le rette:

$$\begin{cases} X=Lt\\ Y=Mt\end{cases}$$

per cui (M,L) verificano $F_m(L,M)=0$.
Se $m=1$, cioè se il punto è semplice per $\mathscr{C}$, esiste quindi una sola retta r per P tale che $I(\mathscr{C},r,P)\geq 2$, cioè la retta tale che

$$f_X(0,0)L+f_y(0,0)M=0$$

Tale retta è detta retta tangente a $\mathscr{C}$ in P; r ha equazione cartesiana:

$$\frac{\partial f}{\partial X}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial Y}(0,0)=0$$

Se $m>1$, cioè P è un punto multiplo per $\mathscr{C}$, le rette

$$r:\begin{cases} X=Lt\\ Y=Mt\end{cases}$$

che verificano $I(\mathscr{C}, r, P) > m$ sono esattamente quelle i cui punti (X, Y) verificano $F_m(X, Y) = 0$; questa è un'equazione di grado m, ed essendo F_m omogeneo di grado m e il campo su cui lavoriamo $\mathbb{C}$, $F_m(X, Y)$ si spezza nel prodotto di m fattori lineari omogenei contati con molteplicità:

$$(M_1X - L_1Y) \cdot ... \cdot (M_mX - L_mY) = 0 \tag{1.1}$$

Quindi 1.1 è l'equazione complessiva delle m rette, eventualmente non distinte, la cui molteplicità di intersezione con $\mathscr{C}$ in P è $> m$; tali rette sono dette le *tangenti principali* a $\mathscr{C}$ nel suo punto singolare P.
Le equazioni delle tangenti principali si ottengono, come appena visto, eguagliando a zero i fattori lineari del polinomio omogeneo $F_m(X, Y)$: nel caso in cui tali fattori siano distinti, l'origine è un punto $m-$*uplo* ordinario per $\mathscr{C}$, altrimenti è non ordinario.

Nel caso generale in cui $P = (a, b)$ ci si riconduce al caso precedente mediante la seguente traslazione di P nell'origine:

$$\begin{cases} X' = X - a \\ Y' = Y - b \end{cases} \quad \textit{da cui} \quad \begin{cases} X = X' + a \\ Y = Y' + b \end{cases}$$

Sostituendo questi (X, Y) nell'equazione di $\mathscr{C}$ ottengo una nuova curva $\mathscr{C}'$ che ha il punto P nell'origine.
Come fatto sopra, calcolo le equazioni delle tangenti principali a $\mathscr{C}'$ nell' origine e applicando la traslazione $\begin{cases} X' = X - a \\ Y' = Y - b \end{cases}$ ottengo le equazioni delle tangenti principali a $\mathscr{C}$ in P.

Riassumiamo tutto quanto appena detto nelle seguenti:

Definizione 1.7.
Se P è semplice per $\mathscr{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, l'unica retta τ tale che $I(\mathscr{C}, \tau, P) \geq 2$ si chiama *retta tangente a $\mathscr{C}$ in P.*
Se $P = (a, b)$ è semplice per $\mathscr{C} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, la retta tangente a $\mathscr{C}$ in P ha equazione :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) = 0.$$

Definizione 1.8.
Sia $\mathscr{C}$ una curva algebrica affine o proiettiva e sia $P \in \mathscr{C}$ un suo punto m-uplo con $m > 1$.
Una retta r tale che $I(\mathscr{C}, r, P) > m_P(\mathscr{C})$ è detta *tangente principale a $\mathscr{C}$ in P* . L'insieme delle tangenti principali a $\mathscr{C}$ in P è detto *cono tangente* a $\mathscr{C}$ in P.
Se $P = (a, b)$ il cono tangente ha equazione:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f_{X^{m-i}Y^i}(a,b)(X-a)^{m-i}(Y-b)^i = 0$$

Osservazione 1. Se P è un punto semplice per la curva, le nozioni di tangente e di tangente principale in P coincidono.

Proposizione 1.2.5.
Sia P un punto di molteplicità $m_P(\mathscr{C})$ per la curva piana $\mathscr{C}$. Il numero di tangenti principali distinte ξ a $\mathscr{C}$ in P è tale che $1 \leq \xi \leq m_P(\mathscr{C})$.

Per la dimostrazione si veda [S], 34.7.

Definizione 1.9.
Sia P un punto di molteplicità $m_P(\mathscr{C})$ per la curva piana $\mathscr{C}$ e sia ξ il numero di tangenti principali distinte a $\mathscr{C}$ in P.
Se $\xi = m_P(\mathscr{C}) \geq 2$, P si dice *punto multiplo ordinario*, altrimenti si dice *punto multiplo non ordinario.*

Osserviamo inoltre che se una curva $\mathscr{C} \in \mathbb{P}^2$ ha equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ e P è un suo punto semplice, la retta tangente a $\mathscr{C}$ in P ha equazione:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P)x_2 = 0$$

Capitolo 2

Hessiana e flessi

Definizione 2.1.
Un punto semplice P di una curva affine o proiettiva $\mathscr{C}$ è detto *flesso* se $I(\mathscr{C}, \tau, P) \geq 3$.
Un flesso si dice *di specie* k (≥ 1) se $I(\mathscr{C}, \tau, P) = k + 2$.
Un flesso è detto *ordinario* se $k = 1$, *non ordinario* se $k \geq 2$.

Definizione 2.2.
Sia $\mathscr{C}$ una curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ di grado $n \geq 3$ e sia $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.
Si chiama *matrice hessiana di F* la matrice

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 x_2} \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 x_0} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 x_2} \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 x_0} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Si chiama *hessiana*, o *curva hessiana*, di $\mathscr{C}$, la curva, che denoteremo con $H(\mathscr{C})$, di equazione $det\, H(\mathbf{x}) = 0$.
Si noti che $deg(H(\mathbf{x})) = 3(n-2)$.

2.1 Esistenza di un punto di flesso

In questa sezione vogliamo dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.1.1.
I flessi di una curva proiettiva $\mathscr{C}$ sono i punti non singolari che la curva ha in comune con la sua hessiana.

Notazione 2.
Nel seguito $\mathscr{C}$ è una curva proiettiva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$.
Indichiamo, come al solito, con F_i la derivata parziale di F rispetto alla coordinata x_i e con F_{ij} la derivata seconda di F rispetto alle coordinate x_i, x_j.

Definizione 2.3.
Sia $deg\mathscr{C} \geq 2$ e sia P un punto semplice per $\mathscr{C}$.
Si chiama *conica osculatrice* a $\mathscr{C}$ nel punto P la conica Γ di equazione:

$$\Gamma : \sum_{i,j} F_{ij}(P)x_i x_j = 0$$

Proposizione 2.1.2.
Sia $\mathscr{C}$ una curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ di grado $n \geq 2$. Sia $P = [p_0, p_1, p_2]$ un punto semplice di $\mathscr{C}$, sia τ la tangente a $\mathscr{C}$ in P e Γ la conica osculatrice a $\mathscr{C}$ in P. Allora
1) $P \in \Gamma$.
2) Se $\mathscr{C}$ è liscia nel punto P, allora Γ è liscia nel punto P e la tangente a Γ in P è uguale alla tangente a $\mathscr{C}$ in P.

Dimostrazione.
1) Per ipotesi $P \in \mathscr{C}$ quindi $F(P) = 0$. Si ha che $P \in \Gamma$ se e solo se $g(P) = 0$: calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}
g(P) &= F_{00}(P)p_0^2 + 2F_{01}(P)p_0p_1 + 2F_{02}(P)p_0p_2 + 2F_{12}(P)p_1p_2 + F_{11}(P)p_1^2 + F_{22}(P)p_2^2 = \\
&= p_0(F_{00}(P)p_0 + F_{01}(P)p_1 + F_{02}(P)p_2) + p_1(F_{10}(P)p_0 + F_{11}(P)p_1 + F_{12}(P)p_2) + \\
&+ p_2(F_{20}(P)p_0 + F_{21}(P)p_1 + F_{22}(P)p_2)
\end{aligned}$$

Applicando due volte l'identità di Eulero ai tre addendi si ottiene:

$$\begin{aligned} g(P) &= p_0((n-1)F_0(P)) + p_1((n-1)F_1(P)) + p_2((n-1)F_2(P)) = \\ &= (n-1)(p_0F_0(P) + p_1F_1(P) + p_2F_2(P)) = \\ &= n(n-1)F(P) \end{aligned}$$

ed essendo $F(P) = 0$ per ipotesi, anche $g(P) = 0$ quindi $P \in \Gamma$.

2) Supponiamo P liscio per $\mathscr{C}$, cioè $(F_0(P), F_1(P), F_2(P)) \neq (0, 0, 0)$; quindi la retta tangente a $\mathscr{C}$ in P ha equazione:

$$F_0(P)x_0 + F_1(P)x_1 + F_2(P)x_2 = 0.$$

Poniamo

$$g(x_0, x_1, x_2) := \sum_{i,j} F_{i,j}(P)x_ix_j.$$

Per mostrare che Γ è liscia in P, calcoliamo le derivate prime di g in P e facciamo vedere che non sono tutte nulle.

$$g_0 = 2F_{00}(P)x_0 + F_{01}(P)x_1 + F_{10}(P)x_1 + F_{02}(P)x_2 + F_{20}(P)x_2$$

Siccome $F_{ij} = Fji$ abbiamo:

$$\begin{aligned} g_0 &= 2F_{00}(P)x_0 + 2F_{01}(P)x_1 + 2F_{02}(P)x_2 \\ g_0(P) &= 2F_{00}(P)p_0 + 2F_{01}(P)p_1 + 2F_{02}(P)p_2 = \\ &= 2(\frac{\partial}{\partial x_0}(\frac{\partial F}{\partial x_0})(P)p_0 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial F}{\partial x_0})(P)p_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial F}{\partial x_0})(P)p_2) \end{aligned}$$

utilizzando l'identità di Eulero, e ricordando che $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ è un polinomio omogeneo di grado $m-1$, otteniamo :

$$g_0(P) = 2(n-1)F_0(P).$$

Con calcoli analoghi otteniamo risultati simili per $g_1(P)$ e $g_2(P)$ quindi:

$$(g_0(P), g_1(P), g_2(P)) = 2(n-1)(F_0(P), F_1(P), F_2(P)) \neq (0, 0, 0)$$

perchè P punto liscio per $\mathscr{C}$ per ipotesi. Quindi P è punto liscio per Γ
Infine la tangente a Γ in P è proprio τ, infatti la tangente a Γ in P ha equazione

$$g_0(P)x_0 + g_1(P)x_1 + g_2(P)x_2 = 0$$

Sostituendo a $g_0(P), g_1(P), g_2(P)$ le espressioni trovate sopra in funzione di $F_0(P), F_1(P), F_2(P)$ otteniamo:

$$2(n-1)(F_0(P)x_0 + F_1(P)x_1 + F_2(P)x_2) = 0$$

da cui, siccome $n - 1 \neq 0$, otteniamo:

$$F_0(P)x_0 + F_1(P)x_1 + F_2(P)x_2 = 0$$

che è proprio l'equazione di τ.

□

Proposizione 2.1.3.
Sia $\mathscr{C}$ una curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, $deg\mathscr{C} \geq 2$ e sia $P \in \mathscr{C}$ un punto semplice per $\mathscr{C}$.
Sia τ la tangente a $\mathscr{C}$ in P, Γ la conica osculatrice a $\mathscr{C}$ in P e sia $Q \in \mathbb{P}^2$, $Q = [q_1, q_2, q_3]$ tale che $Q \in \tau$ e $Q \neq P$.
Allora P è di flesso per $\mathscr{C}$ se e solo se $Q \in \Gamma$.

Dimostrazione.
Ricordiamo che P è di flesso se $I(\mathscr{C}, \tau, P) \geq 3$.
La tangente τ passante per P e Q ha equazioni parametriche :

$$\begin{cases} x_0 = \mu p_0 + \lambda q_0 \\ x_1 = \mu p_1 + \lambda q_1 \\ x_2 = \mu p_2 + \lambda q_2 \end{cases}$$

Siccome mi interessa studiare $I(\mathscr{C}, \tau, P)$, cioè mi interessa studiare la curva in un intorno di P, posso usare un solo parametro non omogeneo $t := \frac{\lambda}{\mu}$, posto $\mu \neq 0$. In questo modo l'unico punto perso è il punto Q e il generico punto appartenente a $\tau \setminus \{Q\}$ è $P + tQ$.

Per calcolare la molteplicità di intersezione che ci interessa, sostituiamo il generico punto di τ nell'equazione di $\mathscr{C}$ e sviluppiamo con Taylor in un intorno di t=0:

$$F(P + tQ) = F(p_0 + tq_0, p_1 + tq_1, p_2 + tq_2) =$$
$$= F(P) + (\sum_i F_i(P)q_i)t + \frac{1}{2}(\sum_{i,j} F_{ij}(P)q_iq_j)t^2 + \, termini\, di\, grado\, \geq 3$$

Per ipotesi $F(P) = 0$ e siccome $Q \in \tau$ anche $\sum_i F_i(P)q_i = 0$ perché per la proposizione 1.2.4, τ ha equazione $\sum_i F_i(P)x_i = 0$. Allora:

$$F(P + tQ) = \frac{1}{2}(\sum_{i,j} F_{ij}(P)q_iq_j)t^2 + \, termini\, di\, grado\, \geq 3$$

Allora P di flesso per $\mathscr{C}$ se e solo se $I(\mathscr{C}, \tau, P) \geq 3$ cioè se nello sviluppo di Taylor di $F(P + tQ)$ posso raccogliere t elevato almeno al grado 3 e ciò è possibile se e solo se $\sum_{i,j} F_{ij}(P)q_iq_j = 0$, che equivale a dire che $Q \in \Gamma$ perché, per definizione, Γ ha equazione $\sum_{i,j} F_{ij}(P)x_ix_j = 0$.

□

Corollario 2.1.4.
Nelle notazioni e ipotesi della proposizione 2.1.3, abbiamo che P è di flesso per $\mathscr{C}$ se e solo se Γ è degenere.

Dimostrazione.
Nella proposizione 2.1.3, abbiamo dimostrato che P punto di flesso per $\mathscr{C} \Leftrightarrow \forall Q \in \tau$, $Q \neq P$, $Q \in \Gamma$; l'ultima condizione equivale a dire che $\tau \subset \Gamma$.
D'altra parte per la proposizione 2.1.2 Γ è liscia in P perché lo è $\mathscr{C}$ e la tangente a Γ in P è proprio τ e quindi $\tau \subset \Gamma \Leftrightarrow \Gamma$ degenere.

□

Teorema 2.1.5.
I flessi di una curva proiettiva $\mathscr{C}$ di grado ≥ 3 sono i punti non singolari che la curva ha in comune con la sua hessiana.

Dimostrazione.
Sia $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$.
Sia $P \in \mathscr{C}$ non singolare. Per il corollario 2.1.4 P è di flesso per $\mathscr{C}$ se e solo se Γ è degenere, ma Γ ha equazione

$$^t\mathbf{x}(H(P))\mathbf{x} = 0.$$

Allora Γ degenere $\Leftrightarrow det(H(P)) = 0 \Leftrightarrow P \in H(\mathscr{C})$, cioè $P \in \mathscr{C}$ è di flesso se e solo se appartiene all'hessiana di $\mathscr{C}$.

□

Da questo teorema e dal teorema 1.1.1 si deduce il seguente:

Corollario 2.1.6.
Una curva proiettiva non singolare di grado $n \geq 3$ ha almeno un flesso e ne ha al più $3n(n-2)$.

Capitolo 3

Il birapporto

Definizione 3.1.
Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione 2 e siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(\mathrm{V})$ con P_1, P_2, P_3 distinti.
Il *birapporto* di P_1, P_2, P_3, P_4 presi in quest'ordine è definito nel modo seguente:

$$\begin{cases} \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \qquad se \quad y_0 \neq 0 \\ \infty \qquad se \quad y_0 = 0 \end{cases}$$

dove y_0 e y_1 sono le coordinate omogenee di P_4 nel riferimento proiettivo in cui P_1 e P_2 sono i punti fondamentali e P_3 è il punto unità.

Osservazione 2.
Fissato in $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ un riferimento proiettivo rispetto al quale i quattro punti assegnati hanno coordinate $P_i = [a_i, b_i]$ per i=1,...,4, allora è facile vedere che abbiamo la seguente espressione per il loro birapporto:
Se $P_2 \neq P_4$,

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{(a_1b_4 - b_1a_4)(a_2b_3 - b_2a_3)}{(a_2b_4 - b_2a_4)(a_1b_3 - b_1a_3)}$$

Se $P_2 = P_4$, $\quad \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \infty$

Se poi $a_i \neq 0$ per i=1,...,4, le coordinate non omogenee dei punti P_i sono date da $z_i = \frac{b_i}{a_i}$ e si deduce dall'espressione precedente che

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)} \tag{3.1}$$

infatti se $a_1a_2a_3a_4 \neq 0$, moltiplicando e dividendo l'espressione del birapporto per $a_1a_2a_3a_4$ si ottiene:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(a_1b_4 - a_4b_1)(a_3b_3 - a_2b_3)a_1a_2a_3a_4}{(a_1b_3 - a_3b_1)(a_4b_2 - a_2b_4)a_1a_2a_3a_4} =$$
$$\frac{(a_1b_4 - a_4b_1)}{a_1a_4} \cdot \frac{(a_3b_3 - a_2b_3)}{a_3a_2} \cdot \frac{1}{\frac{(a_1b_3 - a_3b_1)}{a_1a_3} \cdot \frac{(a_4b_2 - a_2b_4)}{a_2a_4}} =$$
$$(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1}) \cdot (\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_3}{a_3}) \cdot \frac{1}{(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}) \cdot (\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_4}{a_4})} =$$
$$\frac{(\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_1}{a_1}) \cdot (\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_2}{a_2})}{(\frac{b_3}{a_3} - \frac{b_1}{a_1}) \cdot (\frac{b_4}{a_4} - \frac{b_2}{a_2})}$$

e posto $z_i = \frac{b_i}{a_i}$ per i = 1,2,3,4, si ottiene la 3.1.

Tramite il birapporto è possibile stabilire se due quaterne di punti sono protettivamente equivalenti; in effetti, vale il seguente teorema:

Teorema 3.0.7.
Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due rette proiettive e siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti di $\mathbb{P}(V)$ e Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 punti di $\mathbb{P}(V')$ con P_1, P_2, P_3 distinti e Q_1, Q_2, Q_3 distinti.
Allora $\exists!$ f: $\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$ isomorfismo proiettivo tale che $f(P_i) = Q_i$ $\forall i = 1, .., 4$ se e solo se $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$

Per la dimostrazione si veda [S], 27.7.

Osservazione 3. Il birapporto di quattro punti di una retta proiettiva $\mathbb{P}$(V) dipende dall'ordine in cui essi vengono considerati; se P_1, P_2, P_3, P_4 sono distinti, è definito il birapporto di una loro qualsiasi permutazione.

Detto $\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$ non è difficile verificare che si hanno le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&\beta = \beta(P_1,P_2,P_3,P_4) = \beta(P_2,P_1,P_4,P_3) = \beta(P_3,P_4,P_1,P_2) = \beta(P_4,P_3,P_2,P_1)\\
&\frac{1}{\beta} = \beta(P_1,P_2,P_4,P_3) = \beta(P_2,P_1,P_3,P_4) = \beta(P_3,P_4,P_2,P_1) = \beta(P_4,P_3,P_1,P_2)\\
&1-\beta = \beta(P_1,P_3,P_2,P_4) = \beta(P_3,P_1,P_4,P_2) = \beta(P_2,P_4,P_1,P_3) = \beta(P_4,P_2,P_3,P_1)\\
&\frac{1}{1-\beta} = \beta(P_1,P_3,P_4,P_2) = \beta(P_3,P_1,P_2,P_4) = \beta(P_4,P_2,P_1,P_3) = \beta(P_2,P_4,P_3,P_1)\\
&\frac{\beta-1}{\beta} = \beta(P_1,P_4,P_2,P_3) = \beta(P_4,P_1,P_3,P_2) = \beta(P_2,P_3,P_1,P_4) = \beta(P_3,P_2,P_4,P_1)\\
&\frac{\beta}{\beta-1} = \beta(P_1,P_4,P_3,P_2) = \beta(P_4,P_1,P_2,P_3) = \beta(P_3,P_2,P_1,P_4) = \beta(P_2,P_3,P_4,P_1)
\end{aligned}$$

Quindi, i 24 birapporti che si possono ottenere permutando 4 punti distinti si riducono a 6 i quali, in generale, risultano distinti.
Dunque a una quaterna di punti distinti di $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ non è associato un unico valore del birapporto; tale problema è risolto introducendo il *modulo* di una quaterna di punti, il quale è indipendente dall'ordine dei punti scelti.

Definizione 3.2.
Siano P_1, P_2, P_3, P_4 punti distinti di $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ retta proiettiva e sia $\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$ il birapporto di tali punti nell'ordine scritto. Si consideri la funzione razionale:

$$j(s) = \frac{(s^2-s+1)^3}{s^2(s-1)^2} \quad \textit{con}\, s \in \mathbb{C} \setminus \{\, 0, 1\};$$

il valore della funzione $j(s)$ in β, cioè $j(\beta)$, è detto il *modulo della quaterna* $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e si denota con $j(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Il modulo di una quaterna di punti è invariante rispetto all'ordine dei punti; in effetti vale il seguente lemma:

Lemma 3.0.8.
Siano β *e* $\beta' \in \mathbb{C} \setminus \{ 0, 1\}$.
Si ha $j(\beta) = j(\beta')$ *se e solo se* $\beta' \in \{\beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{(\beta-1)}{\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}\}$.

Dimostrazione.
Si calcola facilmente che:

$$j(\beta) = j(\beta^{-1}) = j(1-\beta) = j(\frac{1}{1-\beta}) = j(\frac{\beta-1}{\beta}) = j(\frac{\beta}{\beta-1})$$

Infatti:

$$j(\beta^{-1}) = \frac{(\beta^{-2}-\beta^{-1}+1)^3}{\beta^{-2}(\beta^{-1}-1)^2} = \frac{(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\beta}+1)^3}{\frac{1}{\beta^2}(\frac{1}{\beta}-1)^2} = \frac{(\frac{1-\beta+\beta^2}{\beta^2})^3}{\frac{1}{\beta^2}(\frac{1-\beta}{\beta^2})^2} = \frac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2} = j(\beta)$$

Analogamente si dimostrano le altre uguaglianze.

D'altra parte $j(\beta) = j(\beta')$ se e solo se $q(\beta') = 0$, con

$$q(X) = (X^2 - X + 1)^3 - j(\beta)X^2(X-1)^2.$$

Questo è un polinomio monico di sesto grado in X .

Poiché le sei costanti $\beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{(\beta-1)}{\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}$ sono radici di $q(X)$, per l'osservazione iniziale, se queste sono distinte, sono tutte e sole le radici di $q(X)$ e dunque segue la tesi.
Infine con un calcolo diretto si verifica che i valori di β per cui le sei costanti non sono distinte sono $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}, -\xi, -\xi^2$ con $\xi = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ radice primitiva cubica di 1.

Per $\beta = -1, 2, \frac{1}{2}$ si ha $j(\beta) = \frac{27}{4}$ e $q(X) = (X+1)^2(X-2)^2(X-\frac{1}{2})^2$,

per $\beta = -\xi, -\xi^2$ si ha $j(\beta) = 0$ e $q(X) = (X^2 - X + 1)^3 = (X+\xi)^3(X+\xi^2)^3$

e siccome in entrambe i casi le radici di $q(X)$ sono solo quelle appartenenti all'insieme dei valori $\beta, \frac{1}{\beta}, 1-\beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{(\beta-1)}{\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}$, il lemma è dimostrato.

□

Definizione 3.3.
Nel caso in cui $j(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{27}{4}$, la quaterna (P_1, P_2, P_3, P_4) si dice *armonica*, se invece $j(P_1, P_2, P_3, P_4) = 0$ la quaterna (P_1, P_2, P_3, P_4) si dice *equiarmonica*

Per completare la discussione riguardo al birapporto di quatto punti, vediamo quale è la condizione necessaria e sufficiente affinché due quaterne siano protettivamente equivalenti:

Teorema 3.0.9.
Due quaterne non ordinate di punti distinti $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ *e* $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ *di una retta proiettiva* $\mathbb{P}(V)$ *sono proiettivamente equivalenti se e solo se* $j(P_1, P_2, P_3, P_4) = j(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.

Dimostrazione.
Se $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ sono proiettivamente equivalenti, allora esiste $f \in PGL(\mathbb{P}(V))$ tale che $\{f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$.
Per il teorema 3.0.7 sull' equivalenza proiettiva di due quaterne di punti si ha che $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4))$ e dunque
$j(P_1, P_2, P_3, P_4) = j(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = j(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.

Viceversa, se $j(\beta) = j(P_1, P_2, P_3, P_4) = j(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = j(\beta')$, per il lemma sappiamo che $\beta' \in \{\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{(\beta-1)}{\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}\}$ e siccome questi sono i 6 birapporti che possiamo ottenere permutando i punti di una quaterna, possiamo supporre che, eventualmente scambiando tra loro alcuni Q_i, valga

$$\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta'(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \beta'$$

e dunque per il teorema 3.0.7 di equivalenza proiettiva di due quaterne di punti segue che $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ sono proiettivamente equivalenti.

$\square$

Capitolo 4

Le cubiche non singolari

In questo capitolo affrontiamo lo studio delle cubiche non singolari e la loro classificazione proiettiva.

4.1 Classificazione proiettiva

Teorema 4.1.1.
Ogni cubica non singolare $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *è proiettivamente equivalente ad una cubica di equazione affine:*

$$y^2 = x(x-1)(x-c)$$

per qualche $c \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$.

Dimostrazione.
Siccome $\mathscr{C}$ è non singolare,per il corollario 2.1.6, essa possiede almeno un punto di flesso, sia P.
Scelgo ora un riferimento proiettivo tale che P abbia coordinate $[0, 0, 1]$ e la tangente di flesso sia la retta $r : X_0 = 0$.
Sia $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una equazione per $\mathscr{C}$.
Scriviamo $F(x_0, x_1, x_2)$ come il generico polinomio di terzo grado:

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^3 + bx_0^2x_1 + cx_0^2x_2 + dx_0x_2^2 + ex_0x_1^2 + mx_0x_1x_2 + nx_1^3 + hx_2^3 + kx_1x_2^2 + lx_1^2x_2$$

deomogeneizzando rispetto a x_2, l'equazione di $\mathscr{C}$ diventa (qui $X = \frac{x_0}{x_2}$, $Y = \frac{x_1}{x_2}$):

$$aX^3 + bX^2Y + cX^2 + dX + eXY^2 + mXY + nY^3 + h + kY + lY^2 = 0$$

e il punto P diventa l'origine degli assi nel piano affine, cioè nella carta affine U_2.
Imponendo le condizioni su $\mathscr{C}$ date dalle ipotesi fatte su P abbiamo:

- $(0,0) \in \mathscr{C}$ cioè $f(0,0) = 0$ da cui si ricava $h = 0$.

- $r : X = 0$ è la tangente inflessionale in $(0,0)$, quindi
  $\frac{\partial f}{\partial X}(0,0) \neq 0$ da cui si ricava $d \neq 0$.
  $\frac{\partial f}{\partial Y}(0,0) = 0$ da cui si ricava $k = 0$.

- infine siccome P di flesso per $\mathscr{C}$ deve essere $I(\mathscr{C}, r, P) \geq 3$, ma essendo $deg\mathscr{C} = 3$, si avrà $I(\mathscr{C}, r, P) = 3$ da cui si ottiene: $l = 0$.

Otteniamo così, dividendo per d e riomogeneizzando:

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^3 + bx_0^2x_1 + cx_0^2x_2 + x_0x_2^2 + ex_0x_1^2 + mx_0x_1x_2 + nx_1^3$$

Osserviamo che siccome la cubica è non singolare, $n \neq 0$ perché se g fosse nullo potrei raccogliere x_0 e quindi $\mathscr{C}$ conterrebbe una retta.
Deomogeneizzando rispetto a x_0 otteniamo (qui $X' = \frac{x_1}{x_0}$, $Y' = \frac{x_2}{x_0}$) come equazione per $\mathscr{C} \cap U_0$:

$$a + bX' + cY' + Y'^2 + eX'^2 + mX'Y' + nX'^3 = 0$$

Da cui si ottiene che $\mathscr{C}$ ha equazione:

$$Y'^2 + mX'Y' + cY' = G(X')$$

dove $G(X') = nX'^3 + eX'^2 + bX' + a$ è un polinomio di terzo grado in X' (con $n \neq 0$).
Applicando l'affinità

$$\begin{cases} X' = x \\ Y' = y - \frac{m}{2}x - \frac{c}{2} \end{cases}$$

si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&(y-\frac{m}{2}x-\frac{c}{2})^2+m(x)(y-\frac{m}{2}x-\frac{c}{2})+c(y-\frac{m}{2}x-\frac{c}{2})=G(x)\\
&y^2-\frac{m^2}{4}x^2-\frac{mc}{2}x-\frac{c^2}{4}=G(x)\\
&y^2=nx^3+(e+\frac{m^2}{4})x^2+(b+\frac{mc}{2})x+a+\frac{c^2}{4}
\end{aligned}
$$

Ponendo $g(x) := nx^3+(e+\frac{m^2}{4})x^2+(b+\frac{mc}{2})x+a+\frac{c^2}{4}$
otteniamo la curva di equazione

$$y^2=g(x)$$

Tale curva è non singolare, dunque il polinomio g ha tre radici distinte $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{C}$.
Allora $g(x)$ è della forma $g(x)=n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$ con $n\neq 0$.
Infine applicando l'affinità :

$$\begin{cases} x=(\alpha_2-\alpha_1)X'+\alpha_1\\ y=\delta Y' \end{cases}$$

dove δ è scelto tale che $\delta^2=n(\alpha_2-\alpha_1)^3$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&g(x)=n((\alpha_2-\alpha_1)X'+\alpha_1-\alpha_1)((\alpha_2-\alpha_1)X'+\alpha_1-\alpha_2)((\alpha_2-\alpha_1)X'+\alpha_1-\alpha_3)\\
&g(x)=n(\alpha_2-\alpha_1)X'(\alpha_2-\alpha_1)(X'-1)(\alpha_2-\alpha_1)(X'+\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_1})\\
&g(x)=n(\alpha_2-\alpha_1)^3X'(X'-1)(X'-\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1})
\end{aligned}
$$

Da cui posto $c=\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$ ($\alpha_2\neq\alpha_1$ quindi c è ben definito, $\alpha_1\neq\alpha_3$, $\alpha_2\neq\alpha_3\Rightarrow c\neq 0$) si ha che l'equazione della curva è diventata:

$$n(\alpha_2-\alpha_1)^3(Y')^2=n(\alpha_2-\alpha_1)^3X'(X'-1)(X'-c)$$

e rinominati $X'=x$ e $Y'=y$ si ha:

$$y^2=x(x-1)(x-c).$$

$\square$

Osservazione 4. Da questo teorema si ricava che due cubiche non singolari appartengono alla stessa classe proiettiva se sono entrambe proiettivamente equivalenti a una cubica di equazione $y^2 = x(x-1)(x-c)$, ma ancora non sappiamo quali cubiche nella forma $y^2 = x(x-1)(x-c)$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ siano protettivamente equivalenti tra loro.
Ora dobbiamo stabilire quante sono le classi di equivalenza proiettiva.

Dal corollario 2.1.6 segue che una cubica non singolare possiede al più nove flessi distinti.
Ma in realtà per le cubiche non singolari abbiamo il seguente risultato più preciso:

Teorema 4.1.2.
1) Una cubica non singolare $\mathscr{C}$ possiede esattamente nove flessi, che hanno la proprietà che una retta che ne contiene due, ne contiene un terzo.
2) Dati comunque due flessi A e B di $\mathscr{C}$, esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ che trasforma $\mathscr{C}$ in se stessa e scambia tra loro A e B lasciando fisso il flesso allineato con A e B.

Dimostrazione.
1) Grazie al teorema precedente sappiamo che ogni cubica è protettivamente equivalente ad una cubica affine della forma $Y^2 = X(X-1)(X-c), c \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ o, equivalentemente, della forma $f(X,Y) = 0$ dove

$$f(X,Y) = Y^2 - X^3 + (c+1)X^2 - cX.$$

É quindi sufficiente dimostrare il teorema per tali cubiche.
Si vede dall'equazione di $\mathscr{C}$ che un punto di flesso è il punto improprio $[0,0,1]$, infatti omogeneizzando rispetto a x_0 si ottiene la curva di equazione (qui $X = \frac{x_1}{x_0}$, $Y = \frac{x_2}{x_0}$):

$$x_0x_2^2 - x_1^3 + (c+1)x_0x_1^2 - cx_0^2x_1 = 0$$

Deomogeneizzando rispetto a x_2 e detti $x = \frac{x_0}{x_2}$ e $y = \frac{x_1}{x_2}$, la curva diventa:

$$y^3 - (c+1)xy^2 + cx^2y - x = 0$$

Siccome il termine noto è assente ma il complesso dei termini di primo grado è diverso da zero, l'origine è un punto semplice per $\mathscr{C}$ e per trovare la tangente in tale punto basta azzerare il complesso dei termini di primo grado.
La tangente nell'origine è quindi la retta $s : x = 0$.
Si verifica che $I(\mathscr{C}, s, (0,0)) = 3$, quindi l'origine è un punto di flesso per $\mathscr{C}$.
I flessi di $\mathscr{C}$ si ricavano calcolando le intersezioni di $\mathscr{C}$ e della sua hessiana h(X,Y) (vedi proposizione 2.1.1).
L' hessiana di $\mathscr{C}$ ha equazione $H(x_0, x_1, x_2) = 0$, dove:

$$H(x_0,x_1,x_2) = det \begin{pmatrix} -2cx_1 & 2(c+1)x_1 - 2cx_0 & 2x_2 \\ 2(c+1)x_1 - 2cx_0 & -6x_1 + 2(c+1)x_0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2x_0 \end{pmatrix} =$$

$$= 8((c+1)x_0 - 3x_1)(-cx_1x_0 - x_2^2) - 8x_0((c+1)x_1 - cx_0)^2$$

Deomogeneizzando H rispetto a x_0 si ottiene

$$\frac{h(X,Y)}{8} = (Y^2 + cX)[3X - (c+1)] - [(c+1)X - c]^2$$

Il risultante di f e $\frac{h}{8}$, rispetto a Y è:

$$R(X) = (3X^4 - 4(c+1)X^3 + 6cX^2 - c^2)^2 \tag{4.1}$$

Le radici di $R(X)$ sono le ascisse dei punti della carta U_0 comuni a $\mathscr{C}$ e alla sua hessiana, cioè sono i flessi di $\mathscr{C}$ con $x_0 \neq 0$.
Vogliamo mostrare che il polinomio $q(X) = 3X^4 - 4(c+1)X^3 + 6cX^2 - c^2$ di cui $R(X)$ è il quadrato ha quattro radici distinte; per questo scopo, calcoliamo il discriminante di $q(X)$, cioè il risultante di $q(X)$ e della sua derivata prima, constatando che è non nullo, in particolare vale:

$$c^4[(c+1)^2 - 4c]^2 = c^4(c-1)^4 \neq 0$$

e quindi $q(X)$ ha quattro radici distinte a_1, a_2, a_3, a_4 tutte non nulle (si veda ad esempio [S], A.15 e A.17).
I punti di $\mathscr{C}$ con ascisse a_i, i = 1,2,3,4 rappresentano, allora, quattro punti comuni tra f e h ovvero quattro flessi di $\mathscr{C}$. Siccome però sia in f che in h la Y compare solo al quadrato, ogni a_i corrisponde a due punti su $\mathscr{C}$ (a_i, b_i) e $(a_i, -b_i)$ con $b_1^2 = a_i(a_i - 1)(a_i - c)$.

Si osservi che $b_i \neq -b_i \, \forall \, i = 1, 2, 3, 4$ perché se $b_i = 0$ si ha $a_i(a_i - 1)(a_i - c) = 0$, cioè $a_i = 0$ oppure $a_i = 1$ oppure $a_i = c$; ma sostituendo $a_i = 1$ o $a_i = c$ in 4.1, si trova che $c = 1$ che non è possibile, e sappiamo che $a_i \neq 0$.
Si deduce quindi che sono flessi di $\mathscr{C}$:
$[0, 0, 1]$, (a_i, b_i), $(a_i, -b_i)$ per $i = 1, 2, 3, 4$ e, dato che questi sono esattamente nove, no ce ne sono altri con $x_0 \neq 0$.
Siano ora assegnati due flessi di $\mathscr{C}$.
Possiamo supporre che uno di essi sia $[0, 0, 1]$ e l'altro sia (a_1, b_1). Allora il flesso $(a_1, -b_1)$ è allineato con $[0, 0, 1]$ e (a_1, b_1).
La prima parte del teorema è così dimostrata.

2) Siano A e B due flessi qualsiasi di $\mathscr{C}$ e sia C il terzo flesso allineato con A e B. Possiamo supporre $C = [0, 0, 1]$ e quindi $A = (a_i, b_i)$ e $B = (a_i, -b_i)$ per qualche i. Si vede immediatamente che la proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tale che $\varphi(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, -x_2)$ scambia tra loro A e B lasciando invariato il flesso C.
Ciò termina la seconda parte della dimostrazione. □

Teorema 4.1.3 (Salmon, 1851)**.**
Sia $\mathscr{C}$ una cubica non singolare di $\mathbb{P}^2$ e sia P un suo flesso.
Allora $\mathscr{C}$ possiede esattamente quattro tangenti distinte che contengono P, inclusa la tangente in P. Il loro modulo (pensando al fascio di rette di centro P come un $\mathbb{P}^1$ e le quattro rette tangenti a P come punti del $\mathbb{P}^1$) è indipendente dalla scelta di P.

Dimostrazione.
Supponiamo per il momento che la cubica $\mathscr{C}$ abbia equazione affine $Y^2 = X(X-1)(X-c)$ per qualche $c \neq \{0, 1\}$ e che il flesso P abbia coordinate $P = [0, 0, 1]$. Troviamo le tangenti a $\mathscr{C}$ in P: la cubica omogeneizzata rispetto a x_0 ha equazione:

$$\mathscr{C} : x_0 x_2^2 - x_1^3 + (c+1) x_1^2 x_0 - c x_0^2 x_1 = 0$$

La generica retta in forma parametrica passante per P ha equazione:

$$r : \begin{cases} x_0 = l_0 s \\ x_1 = l_1 s \\ x_2 = l_2 s + t \end{cases} \qquad \textit{con } [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

Calcoliamo ora $\mathscr{C} \cap r$ sostituendo le equazioni di r nell'equazione cartesiana di $\mathscr{C}$.

$$s(s^2(l_0 l_2^2 - l_1^3 + (c+1)l_1^2 l_0 - c l_0^2 l_1) + 2 l_0 l_2 s t + l_0 t^2) = 0$$

Risolvo rispetto a s e ottengo:

- $s = 0$, cioè ogni retta r del fascio di centro P incontra $\mathscr{C}$ in P almeno una volta;
- $s^2(l_0 l_2^2 - l_1^3 + (c+1)l_1^2 l_0 - c l_0^2 l_1) + 2 l_0 l_2 s t + l_0 t^2 = 0$
  Deomogenieizzando rispetto a t si ha un'equazione di secondo grado in $\frac{s}{t}$ con discriminante:
  $$\Delta = l_1 l_0 (l_1^2 - (c+1) l_1 l_0 + c l_0^2)$$

La retta r è tangente a $\mathscr{C}$ in un punto diverso da $[l_0, l_1, l_2]$ se e solo se $\Delta = 0$, cioè se e solo se:

- $l_1 = 0$
- $l_0 = 0$
- $l_1^2 - (c+1) l_1 l_0 + c l_0^2 = 0$
  le cui radici in $\mathbb{P}^1$ sono: $l_1 = c l_0$ e $l_1 = l_0$

Si trovano così le rette di equazioni $x_1 = 0,\ x_0 = 0,\ x_1 = c x_0,\ x_1 = x_0$.

Si ora $\mathscr{C}$ una cubica non singolare qualsiasi e sia $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ una proiettività che trasforma $\mathscr{C}$ in una cubica di equazione $Y^2 = X(X-1)(X-c)$ in modo che il punto di flesso P vada in $\varphi(P) = [0,0,1]$ (questo è possibile grazie a 4.1.2).
Poiché le tangenti a $\mathscr{C}$ passanti per P e le tangenti a $\varphi(\mathscr{C})$ passanti per $[0,0,1]$ si corrispondono biunivocamente, la prima parte del teorema è dimostrata.

Infine il modulo delle quattro tangenti passanti per P è lo stesso delle loro trasformate prese nello stesso ordine: questo perché φ induce una proiettività tra i due fasci di rette $\mathscr{G}$ e $\mathscr{H}$ di centri rispettivamente P e $[0,0,1]$, che sono due $\mathbb{P}^1$, e poiché il modulo è invariante per proiettività si ha la tesi.

□

Definizione 4.1.
Il modulo comune delle quaterne di tangenti passanti per i flessi di una cubica non singolare $\mathscr{C}$ di $\mathbb{P}^2$ si chiama *modulo della cubica* e si indica con $j(\mathscr{C})$.

Osservazione 5.
Sia $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una cubica non singolare proiettivamente equivalente alla cubica di equazione affine $Y^2 = X(X-1)(X-c)$, e siano: $q_1 : x_1 = 0$; $q_2 : x_0 = 0$; $q_3 : x_0 = x_1$; $q_4 : x_1 = cx_0$, le quattro tangenti uscenti da $P = [0,0,1]$.
Allora

$$j(\mathscr{C}) = j(c) = \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2} \tag{4.2}$$

In effetti, se la cubica $\mathscr{C}$ ha equazione affine $Y^2 = X(X-1)(X-c)$, allora $c = \beta(0,1,\infty,c)$. Inoltre, l'applicazione ψ che alle rette del fascio $\mathscr{G}$ passanti per $[0,0,1]$ associa il loro punto di intersezione con la retta $r : x_2 = 0$ è un isomorfismo di rette proiettive. Si ha:

$$\begin{aligned}
\psi(q_1) &= [1,0,0]\\
\psi(q_2) &= [0,1,0]\\
\psi(q_3) &= [1,1,0]\\
\psi(q_4) &= [1,c,0]
\end{aligned}$$

e usando su r la coordinata affine $\frac{x_1}{x_0}$ si ha quindi $\beta(q_1,q_2,q_3,q_4) = c$.
Dunque c è anche il birapporto delle quattro corrispondenti rette tangenti a $\mathscr{C}$ e passanti per [0,0,1].
Così $j(\mathscr{C}) = j(c) = \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2}$.

Corollario 4.1.4.
Due cubiche non singolari $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di $\mathbb{P}^2$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se $j(\mathscr{C}) = j(\mathscr{C}')$.

Dimostrazione.
Se $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono proiettivamente equivalenti allora entrambe sono equivalenti alla stessa cubica di equazione affine $Y^2 = X(X-1)(X-c)$ e quindi per l'osservazione 4.2 $j(\mathscr{C}) = j(c) = j(\mathscr{C}')$.

Viceversa, supponiamo che $j(\mathscr{C}) = j(\mathscr{C}')$.
Allora esistono c e $c' \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ tali che $j(c) = j(c')$ e $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ sono rispettivamente proiettivamente equivalenti alle cubiche di equazioni affini

$$Y^2 = X(X-1)(X-c)$$

$$Y^2 = X(X-1)(X-c')$$

Se $c \neq c'$, allora c' è una delle seguenti cinque espressioni in c:

$$\frac{1}{c} \quad , \quad 1-c \quad , \quad \frac{1}{1-c} \quad , \quad \frac{c}{c-1} \quad , \quad \frac{c-1}{c}$$

Risulta sufficiente determinare una proiettività che trasforma

$$Y^2 = X(X-1)(X-c) \qquad in \qquad Y^2 = X(X-1)(X-c')$$

nei casi in cui $c' = \frac{1}{c}$ e $c' = 1-c$; negli altri casi le proiettività si ottengono componendo opportunamente queste due.
Se $c' = \frac{1}{c}$, sia $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha^2 = c^3$; la proiettività cercata è quella corrispondente alla sostituzione :

$$\begin{cases} X \to cX \\ Y \to \alpha Y \end{cases}$$

infatti

$$\begin{aligned}(\alpha Y)^2 =& cX(cX-1)(cX-c)\\ c^3Y^2 =& c^3X^3 - c^3X^2 - c^2X^2 + c^2X\\ Y^2 =& X(X^2 - X - \frac{1}{c}X + \frac{1}{c})\\ Y^2 =& X(X-1)(X-\frac{1}{c})\\ Y^2 =& X(X-1)(X-c')\end{aligned}$$

Se invece $c' = 1 - c$ la proiettività cercata è quella corrispondente alla sostituzione :

$$\begin{cases} X \to -X+1 \\ Y \to iY \end{cases}$$

infatti

$$\begin{aligned}(iY)^2 =& (-X+1)((-X+1)-1)((-X+1)-c)\\ -Y^2 =& (-X+1)(-X)(-X+1-c)\\ Y^2 =& X(X-1)(X-(1-c))\\ Y^2 =& X(X-1)(X-c')\end{aligned}$$

□

Osservazione 6.
Sia $\mathscr{M} = \{$classi di equivalenza proiettiva di cubiche non singolari $\}$.
Il corollario precedente stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\mathscr{M}$ e il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito da tutti i valori $j(c)$ con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, siccome tali valori sono infiniti anche la cardinalità dell'insieme $\mathscr{M}$ lo è.
Quindi *le classi di equivalenza proiettiva delle cubiche non singolari sono infinite.*

Capitolo 5

Le cubiche singolari

In questo capitolo classificheremo le cubiche singolari distinguendo tra cubiche singolari irriducibili e riducibili. La trattazione dei due casi va separata poiché cubiche irriducibili e riducibili non possono essere proiettivamente equivalenti, infatti l'isomorfismo di anelli $\varphi : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ indotto da una proiettività porta polinomi irriducibili in polinomi irriducibili.

5.1 Classificazione proiettiva delle cubiche singolari irriducibili

Una cubica irriducibile singolare proiettiva $\mathscr{C}$ ha esattamente un punto singolare che deve necessariamente essere doppio.
In effetti, se la cubica irriducibile in questione avesse almeno due punti singolari, la retta s per quei due punti sarebbe tale che $\sum_{P \in s} I(\mathscr{C}, s, P) \geq 4,$: per il teorema 1.2.1 ciò implica che la retta s sia una componente della cubica, la quale quindi non sarebbe irriducibile, e ciò è assurdo.
Se la cubica avesse un punto almeno triplo Q, allora una generica retta r passante per Q e per un altro punto, anche non singolare di $\mathscr{C}$, sarebbe componente della curva, perché di nuovo $\sum_{P \in s} I(\mathscr{C}, s, P) \geq 4$.

Sia quindi $\mathscr{C}$ una cubica di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ con P punto doppio.
Supponiamo che P sia un nodo cioè un punto doppio con tangenti principali distinte.
Facendo eventualmente un cambio di riferimento proiettivo posso supporre che P abbia coordinate $[0, 0, 1]$ e che le tangenti principali in P siano $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$.
Sia $\mathscr{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dove $F(x_0, x_1, x_2)$ è il generico polinomio:

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^3+bx_0^2x_1+cx_0^2x_2+dx_0x_2^2+ex_0x_1^2+mx_0x_1x_2+gx_1^3+hx_2^3+kx_1x_2^2+lx_1^2x_2$$

deomogeneizzando rispetto a x_2 (qui $X = \frac{x_0}{x_2}$, $Y = x_1x_2$), l'equazione di $\mathscr{C}$ diventa $f(X, Y) = 0$, dove:

$$f(X, Y) = aX^3 + bX^2Y + cX^2 + dX + eXY^2 + mXY + gY^3 + h + kY + lY^2$$

e il punto P diventa l'origine.
Imponendo le condizioni su $\mathscr{C}$ date dalle ipotesi fatte su P abbiamo:

- $(0, 0) \in \mathscr{C}$ cioè $f(0, 0) = 0$, da cui si ricava $h = 0$.

- $(0, 0)$ è un punto doppio per $\mathscr{C}$ quindi le derivate prime di f calcolate nell'origine devono essere nulle:
  $\frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $d = 0$.
  $\frac{\partial f}{\partial Y}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $k = 0$.

- le tangenti principali in $(0, 0)$ sono $X = 0$ e $Y = 0$, ciò implica
  $\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}(0, 0) \neq 0$ da cui si ricava $m \neq 0$.
  $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $c = 0$.
  $\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $l = 0$.

Dividendo per m otteniamo l'equazione in coordinate proiettive per $\mathscr{C}$:

$$ax_0^3 + bx_0^2x_1 + ex_0x_1^2 + x_0x_1x_2 + gx_1^3 = 0$$

e deomogeneizzando rispetto a x_1 otteniamo (qui $x = \frac{x_0}{x_1}$, $y = x_2x_1$):

$$ax^3 + bx^2 + ex + xy + g = 0$$

con $g \neq 0$ altrimenti $\mathscr{C}$ contiene la retta $x = 0$.
L'affinità corrispondente alla sostituzione:

$$\begin{cases} x = \alpha X' \\ y = \beta Y' - b\alpha X' - e \end{cases}$$

con α, β tali che $\alpha^3 = a^{-1}g$ e $\beta^3 = ag^2$, trasforma la cubica $\mathscr{C}$ nella cubica di equazione:

$$xy + x^3 + 1 = 0$$

dove ho rinominato X' con x e Y' con y.
Notiamo che l'equazione trovata è indipendente dai coefficienti che compaiono nell'equazione di $\mathscr{C}$, dunque si può concludere che ogni cubica $\mathscr{C}$ singolare con un nodo è proiettivamente equivalente a una cubica di equazione affine $xy + x^3 + 1 = 0$.
Si deduce quindi che *tutte le cubiche irriducibili con un nodo sono proiettivamente equivalenti tra loro.* In particolare tali cubiche sono proiettivamente equivalenti alla cubica di equazione affine:

$$y^2 = x^2(x - 1)$$

che nel proiettivo ha equazione $x_0x_2^2 = x_1^3 - x_0x_1^2$.
Questa cubica ha un nodo in $[1, 0, 0]$ e un flesso in $[0, 0, 1]$.
Quindi *le cubiche irriducibili con un nodo hanno almeno un flesso.*

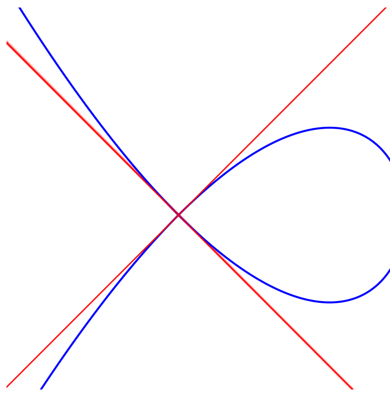


Figura 5.1: cubica con un nodo

Sia ora P un punto doppio non ordinario di $\mathscr{C}$. Il cono tangente in P è costituito da una sola retta e P è una cuspide. In particolare P è una cuspide ordinaria perché la tangente principale incontra $\mathscr{C}$ in P con molteplicità 3, infatti il polinomio dato dall'intersezione della cubica con la tangente ha grado 3 e quindi non può avere una radice con molteplicità > 3.
Come prima posso supporre, scegliendo un opportuno sistema di riferimento proiettivo, che $P = [0, 0, 1]$ e che la tangente principale a $\mathscr{C}$ in P abbia equazione $x_0 = 0$.
Sia $\mathscr{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$, dove $F(x_0, x_1, x_2)$ è il generico polinomio:

$$F(x_0, x_1, x_2) = ax_0^3+bx_0^2x_1+cx_0^2x_2+dx_0x_2^2+ex_0x_1^2+mx_0x_1x_2+gx_1^3+hx_2^3+kx_1x_2^2+lx_1^2x_2$$

deomogeneizzando rispetto a x_2, l'equazione di $\mathscr{C}$ diventa (qui $X = \frac{x_0}{x_2}$, $Y = x_1x_2$):

$$aX^3 + bX^2Y + cX^2 + dX + eXY^2 + mXY + gY^3 + h + kY + lY^2 = 0$$

e il punto P diventa l'origine.
Imponendo le condizioni su $\mathscr{C}$ date dalle ipotesi fatte su P abbiamo:

- $(0, 0) \in \mathscr{C}$ cioè $f(0, 0) = 0$ da cui si ricava $h = 0$.
- $(0, 0)$ è un punto doppio per $\mathscr{C}$ quindi le derivate prime di f calcolate nell'origine devono essere nulle:
  $\frac{\partial f}{\partial X}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $d = 0$.
  $\frac{\partial f}{\partial Y}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $k = 0$.
- la tangente principale in $(0, 0)$ è $X = 0$, ciò implica
  $\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $m = 0$.
  $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(0, 0) \neq 0$ da cui si ricava $c \neq 0$.
  $\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $l = 0$.

Dividendo per c otteniamo l'equazione in coordinate proiettive per $\mathscr{C}$:

$$ax_0^3 + bx_0^2x_1 + x_0^2x_2 + ex_0x_1^2 + gx_1^3 = 0$$

e deomogeneizzando rispetto a x_0 otteniamo (qui $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = x_2x_0$):

$$a + bx + y + ex^2 + gx^3 = 0$$

La affinità corrispondente alla sostituzione:

$$\begin{cases} x = X' - \frac{e}{3g} \\ y = (\frac{e^2}{3g} - b)X' + Y' \end{cases}$$

trasforma $\mathscr{C}$ nella cubica di equazione:

$$Y' + gX'^3 + \delta = 0 \qquad con\, \delta \in \mathbb{C}$$

Operando l'ulteriore sostituzione:

$$\begin{cases} X' = \alpha X'' \\ Y' = Y'' - \delta \end{cases}$$

con α tale che $\alpha^3 = g^{-1}$ e rinominando x e y le coordinate, si ottiene la cubica di equazione:

$$y + x^3 = 0$$

Anche in questo caso l'equazione trovata non dipende dai coefficienti del polinomio che rappresenta la cubica $\mathscr{C}$ iniziale e dunque si deduce che *tutte le cubiche irriducibili con una cuspide ordinaria sono proiettivamente equivalenti tra loro.*
In particolare tali cubiche sono proiettivamente equivalenti alla cubica di equazione affine:

$$y^2 = x^3$$

che nel proiettivo ha equazione $x_0x_2^2 = x_1^3$.
Questa cubica è irriducibile e ha una cuspide ordinaria $[1, 0, 0]$ e un flesso in $[0, 0, 1]$.
Quindi *le cubiche irriducibili con una cuspide hanno almeno un flesso.*

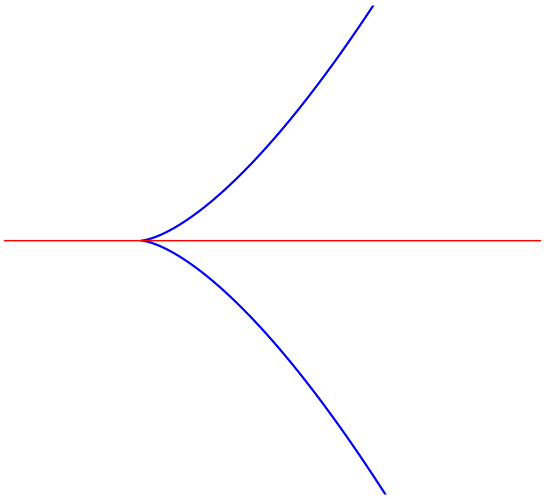


Figura 5.2: cubica con una cuspide ordinaria

Riassumendo, abbiamo il seguente teorema:

Teorema 5.1.1.
Esistono due classi di equivalenza proiettiva di cubiche singolari irriducibili:

1. *Le cubiche con un nodo, rappresentate dalle curve di equazione:* $y^2 = x^2(x-1)$.

2. *Le cubiche con una cuspide ordinaria, rappresentate dalle curve di equazione:* $y^2 = x^3$

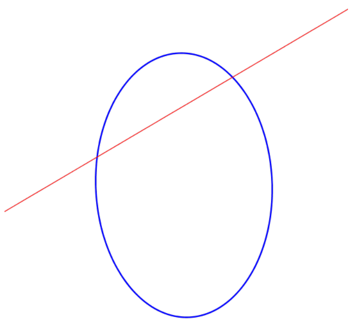
Ogni cubica irriducibile ha almeno un flesso.

Ciò conclude la classificazione delle cubiche singolari irriducibili.

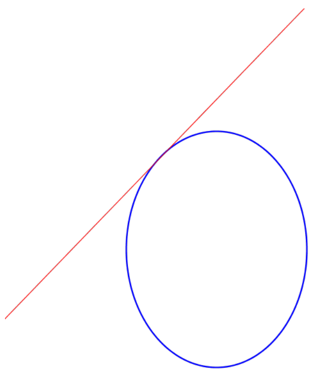
5.2 Classificazione proiettiva delle cubiche singolari riducibili

Sia $\mathscr{C}$ una cubica di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$. Supponiamo che $\mathscr{C}$ sia singolare e riducibile, dunque il polinomio $F(x_0, x_1, x_2)$, che ha grado 3, è fattorizzabile in un prodotto di polinomi irriducibili.
Analizziamo separatamente i casi a seconda del grado e del numero dei polinomi che fattorizzano $F(x_0, x_1, x_2)$.

1. $F = G \cdot H$ con $degG = 1, degH = 2$ o viceversa e con il polinomio di grado 2 irriducibile. In questo caso $\mathscr{C}$ è unione di una retta di equazione $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ e di una conica di equazione $H(x_0, x_1, x_2) = 0$.
   La retta può essere secante la conica: in questo caso i punti di intersezione tra retta e conica sono due punti doppi con due tangenti principali distinte, cioè sono due nodi per la cubica *(caso (a))*. In alternativa, la retta può essere tangente alla conica: in tal caso il punto di tangenza è un punto doppio per la cubica *(caso(b))*, e vi è una sola tangente principale alla cubica nel punto.

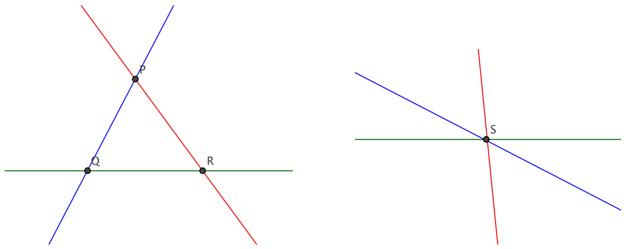


(a) *Conica non degenere e una sua secante*



(b) *Conica non degenere e una sua tangente*

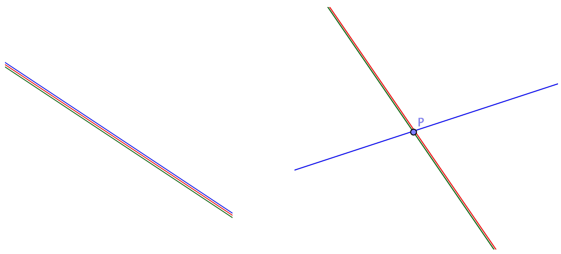
2. $F = L \cdot M \cdot N$ con $degL = degM = degN = 1$.
   In questo caso $\mathscr{C}$ è unione di tre rette di equazioni:
   $L(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad M(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad N(x_0, x_1, x_2) = 0.$
   Se le tre rette sono distinte, esse possono intersecarsi a due a due nei punti P, Q, R *(caso(a))*, oppure intersecarsi in un unico punto S *(caso(b))*. Nel primo caso i punti P, Q, R sono punti doppi (nodi) per la cubica, nel secondo caso il punto S è un punto triplo ordinario per $\mathscr{C}$.



(a) *Tre rette che si intersecano a due a due*

(b) *Tre rette che si intersecano in un unico punto*

Altrimenti, se le rette non sono tutte distinte, possono essere tutte e tre coincidenti e la cubica è una retta tripla *(caso(a))*, oppure due coincidenti (retta doppia) e una terza retta che la interseca nel punto P *(caso(b))*. Nel primo caso i punti della cubica sono tutti punti tripli non ordinari; nel secondo caso P è un punto triplo non ordinario per la cubica, mentre tutti gli altri punti della retta doppia sono punti doppi non ordinari per $\mathscr{C}$.



(a) *Tre rette coincidenti*

(b) *Tre rette incidenti di cui una doppia*

Capitolo 6

Proiezioni della cubica gobba

In questo capitolo studieremo le proiezioni della cubica gobba di $\mathbb{P}^3$ su un piano. Si mostrerà che le proiezioni piane della cubica gobba di centro un punto della cubica stessa danno una conica liscia, mentre le proiezioni di centro un punto esterno alla cubica gobba danno una cubica singolare irriducibile.

Definizione 6.1.
Sia α un piano di $\mathbb{P}^3$ e sia $O \in \mathbb{P}^3$ tale che $O \notin \alpha$.
Si chiama *proiezione di centro O sul piano α* l'applicazione

$$\pi : \mathbb{P}^3 - \{O\} \longrightarrow \alpha$$

tale che $\pi(P) = L(O, P) \cap \alpha$, dove $L(O, P)$ indica la retta congiungente O e P.

Si osservi che l'applicazione risulta ben definita, infatti l'intersezione in $\mathbb{P}^3$ di un piano e di una retta ha dimensione data da

$$dim(\alpha \cap L(O, P)) \geq dim(\alpha) + dim(L(O, P)) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$$

quindi un piano e una retta si intersecano sempre in almeno un punto.
Inoltre, siccome $O \notin \alpha$ la retta non può essere contenuta nel piano.
Quindi a ogni punto di $\mathbb{P}^3 \setminus \{0\}$ è associato uno e un solo punto del piano α.

Definizione 6.2.
Si chiama *cubica gobba* la curva di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = f_0(\lambda, \mu) \\ x_1 = f_1(\lambda, \mu) \\ x_2 = f_2(\lambda, \mu) \\ x_3 = f_3(\lambda, \mu) \end{cases} \qquad con \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

dove f_0, f_1, f_2, f_3 sono polinomi omogenei di grado 3 in λ e μ che formano una base dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di terzo grado in λ e μ.

Osservazione 7. Non è difficile dimostrare che tramite una proiettività di $\mathbb{P}^3$ è possibile scrivere la cubica in modo standard come segue:

$$\mathscr{C}_3 : \begin{cases} x_0 = \lambda^3 \\ x_1 = \lambda^2\mu \\ x_2 = \lambda\mu^2 \\ x_3 = \mu^3 \end{cases} \qquad con \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

Si può dimostrare che la cubica gobba non è contenuta in un piano proiettivo, inoltre la sua intersezione con un piano di $\mathbb{P}^3$ consta di tre punti contati con molteplicità.
Inoltre la cubica gobba è data dall'intersezione di tre quadriche:

$$\mathscr{C}_3 : \begin{cases} x_0x_2 = x_1^2 \\ x_0x_3 = x_1x_2 \\ x_1x_3 = x_2^2 \end{cases} \tag{6.1}$$

infatti si verifica facilmente che un generico punto della cubica, le cui coordinate sono date dalle equazioni parametriche della cubica stessa, appartiene alle tre quadriche, e viceversa dato un punto $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ che verifica 6.1, si vede che $\exists(\overline{\lambda}, \overline{\mu}) \neq (0, 0)$

tali che:

$$\begin{cases} a_0 = \overline{\lambda}^3 \\ a_1 = \overline{\lambda}^2 \overline{\mu} \\ a_2 = \overline{\lambda}\overline{\mu}^2 \\ a_3 = \overline{\mu}^3 \end{cases}$$

6.1 Proiezione della cubica gobba da un suo punto

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6.1.1.
La proiezione π della cubica gobba, di centro un punto della cubica stessa, su un piano α che non contenga il centro di proiezione, ha come immagine una conica non degenere di $\mathbb{P}^2$

Diamo di seguito un esempio di tale caso:

Considero il punto $O = [1, 0, 0, 0]$; tale punto appartiene alla cubica cubica gobba $\mathscr{C}_3$, infatti sostituendo nell'equazione della cubica $\lambda = 1$, $\mu = 0$ si ottiene il punto O.
Sia α il piano $H_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 | x_0 = 0\}$ su cui farò la proiezione (è possibile perché $O \notin \alpha$); osserviamo che tramite l'isomorfismo $[0, a, b, c] \to [a, b, c]$ posso identificare il piano H_0 con $\mathbb{P}^2$.
Studiamo la proiezione di $\mathscr{C}_3$ di centro O sul piano α.
È possibile dare equazioni parametriche della cubica, nella carta affine $U_3 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 | x_3 \neq 0\}$. Siccome O è l'unico punto di $\mathscr{C}_3$ che ha la coordinata $x_3 = 0$, otteniamo una parametrizzazione di $\mathscr{C}_3 \setminus \{0\}$. Allora supposto $\mu \neq 0$ e usando il parametro $t = \frac{\lambda}{\mu}$ otteniamo:

$$\mathscr{C}_3 \cap U_3 : \begin{cases} x_0 = t^3 \\ x_1 = t^2 \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad con \quad t \in \mathbb{C}$$

Consideriamo il generico punto $P = [t^3, t^2, t, 1]$ della cubica gobba parametrizzata in U_3. La retta passante per O e per P ha equazioni parametriche:

$$L(O,P) : \begin{cases} x_0 = at^3 + b \\ x_1 = at^2 \\ x_2 = at \\ x_3 = a \end{cases} \qquad con \quad [a,b] \in \mathbb{P}^1$$

Allora l'immagine del punto P tramite la proiezione π di centro O sul piano α è data da $\pi(P) = L(O,P) \cap \alpha$ cioè dall'intersezione della retta $L(O,P)$ con il piano H_0.
$\pi(P)$ è quindi del tipo $[0, at^2, at, a] = [0, t^2, t, 1]$.
Tramite l'isomorfismo di H_0 con $\mathbb{P}^2$ identifichiamo $\pi(P)$ a $[t^2, t, 1]$ e, al variare di t in $\mathbb{C}$, si ottiene l'immagine di $\mathscr{C}_3 \setminus \{0\}$ tramite π sul piano α. Dalle coordinate di $\pi(P)$ si vede facilmente che tale immagine è contenuta nella conica $\mathscr{C}_2$ di equazione $x_1x_3 = x_2^2$. Questa è una conica non degenere di $\mathbb{P}^2$, infatti la matrice associata a tale conica in $\mathbb{P}^2$ è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3.
Dall'equazione della conica trovata si vede che essa contiene anche il punto $[0, 1, 0, 0]$ che è l'unico punto di $\mathscr{C}_2$ che non è immagine mediante π di alcun punto di $\mathscr{C}_3$, infatti non esiste alcun t tale che quel punto si scriva come $[0, t^2, t, 1]$. In realtà tale punto è dato dall'intersezione della retta s tangente a $\mathscr{C}_3$ in O con il piano α.
Troviamo la tangente a $\mathscr{C}_3$ in $O = [1, 0, 0, 0]$: mettiamoci nella carta affine U_0, dove $\mathscr{C}_3 \setminus \{[0, 0, 0, 1]\}$ ha equazioni parametriche, ponendo $\tau = \frac{\mu}{\lambda}$ (qui $\lambda \neq 0$) e usando coordinate affini $x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}$:

$$\mathscr{C}_3 \cap U_0 : \begin{cases} x = \tau \\ y = \tau^2 \\ z = \tau^3 \end{cases} \qquad con \quad \tau \in \mathbb{C}$$

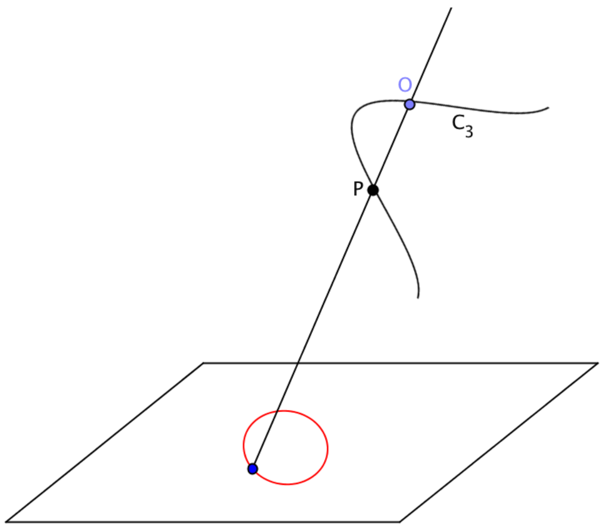
e $O = (0, 0, 0)$ si ottiene per $\tau = 0$.
Il vettore tangente alla curva in O è $(1, 0, 0)$, dunque la retta tangente alla curva in O ha equazione:

$$s : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Torniamo in $\mathbb{P}^3$ omogeneizzando rispetto a x_0; ottengo la retta:

$$x_2 = x_3 = 0$$

e intersecando con il piano α si ottiene il punto $[0, 1, 0, 0]$ come voluto.
In questo modo abbiamo dimostrato che la chiusura dell'immagine della cubica gobba mediante π è uguale alla conica non degenere di equazione $x_1 x_3 = x_2^2$.



6.2 Proiezione della cubica gobba da un punto esterno

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6.2.1.
Per ogni punto O non contenuto in $\mathscr{C}_3$ esiste una (unica) retta r uscente da O tale che r interseca $\mathscr{C}_3$ in due punti distinti P e Q, oppure r è tangente a $\mathscr{C}_3$ in un suo punto Q.

1. *Se r è tangente a $\mathscr{C}_3$ in Q, la proiezione π di $\mathscr{C}_3$ di centro O su un piano α ($O \notin \alpha$) ha in $\pi(Q)$ una cuspide, che è proiezione della tangente a $\mathscr{C}_3$ in Q.*

2. *Se $r \cap \mathscr{C}_3 = \{P, Q\}$ la proiezione π di $\mathscr{C}_3$ di centro O su un piano α ($O \notin \alpha$) ha in $\pi(Q) = \pi(P)$ un nodo in cui le tangenti principali a $\pi(\mathscr{C}_3)$ sono le proiezioni mediante π delle tangenti a $\mathscr{C}_3$ in Q e in P.*

Diamo di seguito un esempio per ciascuno dei due casi:

6.2.1 Proiezione della cubica gobba da un punto esterno: la cuspide

Consideriamo la proiezione π di centro il punto $O = [0, 1, 0, 0]$ sul piano
$H_1 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 | x_1 = 0\}$. In questo caso si vede facilmente che il punto O scelto non sta sulla cubica gobba perché non esiste alcuna coppia $[\lambda, \mu]$ che sostituita nell'equazione di $\mathscr{C}_3$ dia il punto O.
Sia P un generico punto della cubica gobba di coordinate $[\lambda^3, \lambda^2\mu, \lambda\mu^2, \mu^3]$; la retta $L(O, P)$ ha equazioni parametriche:

$$L(O,P) : \begin{cases} x_0 = a\lambda^3 \\ x_1 = a\lambda^2\mu + b \\ x_2 = a\lambda\mu^2 \\ x_3 = a\mu^3 \end{cases} \qquad con \quad [a, b] \in \mathbb{P}^1$$

L'intersezione di tale retta con il piano H_1 è $\pi(P) = [a\lambda^3, 0, a\lambda\mu^2, a\mu^3] = [\lambda^3, 0, \lambda\mu^2, \mu^3]$. Al variare di λ e μ in $\mathbb{P}^1$ si ottiene l'immagine della cubica gobba mediante la proiezione π.

Tale immagine è una cubica piana: mostriamo che una generica retta su H_1 interseca in tre punti l'immagine trovata.

Sia quindi s una retta di H_1 di equazione:

$$s : \begin{cases} \beta x_0 + \gamma x_2 + \delta x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad con \quad (\beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0)$$

I punti di intersezione di tale retta con l'immagine di π sono dati dalle radici del polinomio $\beta\lambda^3 + \gamma\lambda\mu^2 + \delta\mu^3$ che è un polinomio non nullo omogeneo di terzo grado in λ e μ e dunque ammette tre radici contate con molteplicità.

Allora l'immagine della proiezione è una cubica su H_1.

Precisamente, $\pi(\mathscr{C}_3)$ sul piano H_1 è la cubica $\mathscr{D}$ di equazione $x_0x_3^2 - x_2^3 = 0$.

In effetti è chiaro che un generico punto dell' immagine, di coordinate $[\lambda^3, 0, \lambda\mu^2, \mu^3]$, appartiene alla cubica $\mathscr{D}$.

Mostriamo ora che vale anche l'inclusione inversa, ovvero che un generico punto di $\mathscr{D}$ appartiene a $\pi(\mathscr{C}_3)$.

Sia $P = [x_0, 0, x_2, x_3]$ un generico punto della cubica $\mathscr{D}$. Analizziamo due casi:

1. Se $x_3 = 0$ allora $P = [1, 0, 0, 0]$ appartiene a $\pi(\mathscr{C}_3)$ perché corrisponde alla parametrizzazione $\lambda = 1, \mu = 0$.

2. Se $x_3 \neq 0$ moltiplicando le coordinate di P per x_3^2 si ha

$$P = [x_0x_3^2, 0, x_2x_3^2, x_3^3] = [x_2^3, 0, x_2x_3^2, x_3^3]$$

   che corrisponde alla parametrizzazione $\lambda = x_2, \mu = x_3$.

Infine, studiamo gli eventuali punti singolari di $\pi(\mathscr{C}_3)$ sul piano H_1 con coordinate omogenee x_0, x_2, x_3.

Le derivate parziali del polinomio $F(x_0, x_2, x_3) = x_0x_3^2 - x_2^3$ sono:

- $\frac{\partial F}{\partial x_0}(x_0, x_2, x_3) = x_3^2$

- $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_2, x_3) = -3x_2^2$
- $\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_0, x_2, x_3) = 2x_0x_3$

queste si annullano contemporaneamente solo per $x_2 = 0, x_3 = 0$ e dunque il punto $C = [1, 0, 0]$ è l'unico punto singolare della cubica.
Deomogeneizzando rispetto a x_0 e ponendo $x = \frac{x_2}{x_0}, y = \frac{x_3}{x_0}$, il punto singolare diventa l'origine e si ottiene la cubica di equazione affine:

$$y^2 - x^3 = 0.$$

L'origine è un punto doppio non ordinario, cioè una cuspide, per la cubica con un'unica tangente principale di equazione $y = 0$.
Ciò dimostra che la proiezione $\pi(\mathscr{C}_3)$ sul piano H_1 è una cubica singolare con una cuspide.
Vediamo ora quale punto Q di $\mathscr{C}_3$ viene mandato nella cuspide C tramite π. Ricordiamo che la proiezione di $\mathscr{C}_3$ su H_1 ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda^3 \\ x_2 = \lambda\mu^2 \\ x_3 = \mu^3 \end{cases} \qquad con \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

Per ottenere $C = [1, 0, 0]$ da queste equazioni deve essere $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$; allora sostituendo questi parametri nell'equazione della curva $\mathscr{C}_3$ trovo che $Q = [1, 0, 0, 0]$.
Mostriamo ora che la tangente a $\mathscr{C}_3$ in Q viene proiettata in C.
La tangente a $\mathscr{C}_3$ in Q è:

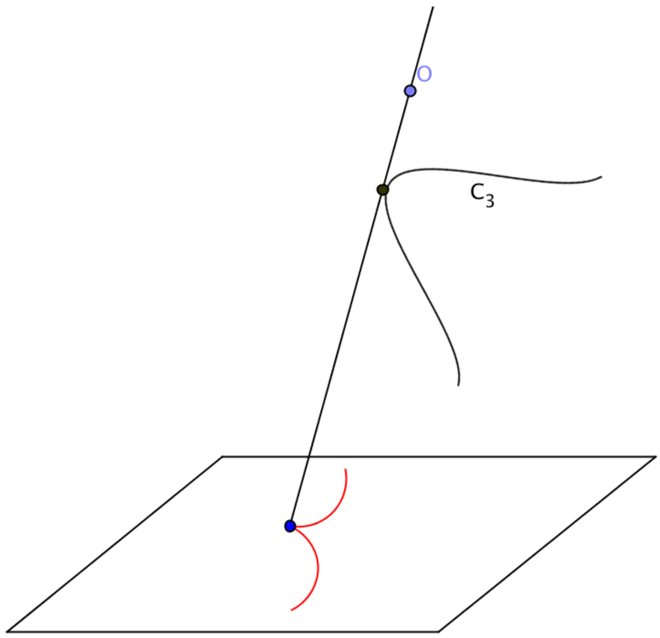
$$T_1 : \begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad con \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1$$

Vediamo dove viene mandata T_1 mediante π: presi due punti $S, S' \in T_1$ si ha che $\pi(T_1) = L(\pi(S), \pi(S')) \cap H_1$.
Siano S=[1,0,0,0] e $S' = [1, 1, 0, 0]$.

Siccome $S \in H_1$, $\pi(S) = L(O,S) \cap H_1 = S$.
La retta $L(O,S')$ ha equazioni parametriche:

$$L(O,S') : \begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = s+t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad con \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

e $\pi(S') = L(O,S') \cap H_1$ è il punto $[1,0,0,0] = S$.
Quindi la retta T_1 viene proiettata nel punto $[1,0,0,0]$ che sul piano H_1 con coordinate omogenee x_0, x_2, x_3 è proprio la cuspide $C = [1,0,0]$.



6.2.2 Proiezione della cubica gobba da un punto esterno: il nodo

Siano $Q = [1, 0, 0, 0]$, $P = [0, 0, 0, 1]$ due punti di $\mathscr{C}_3$ e sia O il centro della proiezione π tale che $O \notin \mathscr{C}_3$ e $O \in L(Q, P)$.
I punti della retta $L(Q, P)$ sono i punti del tipo $[t, 0, 0, s]$; affinché O soddisfi le condizioni richieste deve essere ad esempio $O = [1, 0, 0, 1]$.
Vediamo quindi come è fatta l'immagine della cubica gobba mediante la proiezione π di centro O sul piano $H_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 | x_0 = 0\}$ ($O \notin H_0$). Notiamo che per come sono stati costruiti i punti O, Q, P si ha che $O \notin \mathscr{C}_3$ e i punti Q ed P sono allineati con O, dunque la loro immagine mediante π è la stessa. Sia r la retta passante per O e per un generico punto della cubica gobba di coordinate $[\lambda^3, \lambda^2\mu, \lambda\mu^2, \mu^3]$.
r ha equazione:

$$r : \begin{cases} x_0 = a\lambda^3 + b \\ x_1 = a\lambda^2\mu \\ x_2 = a\lambda\mu^2 \\ x_3 = a\mu^3 + b \end{cases} \qquad con \quad [a, b] \in \mathbb{P}^1$$

L'intersezione con il piano H_0 dà come risultato:

$$r \cap H_0 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = a\lambda^2\mu \\ x_2 = a\lambda\mu^2 \\ x_3 = a\mu^3 + b \end{cases} \qquad con \quad [a, b] \in \mathbb{P}^1$$

da cui si ricava $b = -a\lambda^3$ e sostituendo tale b otteniamo $x_3 = a(\mu^3 - \lambda^3)$ e al variare di λ e μ otteniamo la parametrizzazione di $\pi(\mathscr{C}_3)$. Chiamiamo $\mathscr{D}$ tale curva:

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = \lambda^2\mu \\ x_2 = \lambda\mu^2 \\ x_3 = \mu^3 - \lambda^3 \end{cases} \qquad con \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

Lavoriamo ora nel piano H_0 identificandolo, tramite isomorfismo, con $\mathbb{P}^2$ con coordinate x_1, x_2, x_3. Su tale piano $\mathscr{D}$ ha equazioni parametriche:

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x_1 = \lambda^2\mu \\ x_2 = \lambda\mu^2 \\ x_3 = \mu^3 - \lambda^3 \end{cases} \qquad con \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

Consideriamo il polinomio $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1x_2x_3 - x_2^3$, che è equazione di una cubica piana.
Sostituendo in $F(x_1, x_2, x_3)$ il generico punto di $\mathscr{D}$ si vede questo soddisfa l'equazione sopra citata e quindi $\mathscr{D}$ è contenuta nella cubica.
Per l'inclusione opposta analizziamo due casi:

- Se $x_1 = 0$ oppure $x_2 = 0$ si ottiene il punto $F = [0, 0, 1]$ che appartiene a $\mathscr{D}$, infatti per $\lambda = 0, \mu = 1$ e per $\lambda = 1, \mu = 0$ soddisfa l'equazione parametrica della cubica.

- Se $x_1, x_2 \neq 0$, il generico punto sulla cubica definita da $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ ha coordinate $[x_1, x_2, x_3]$ tali che $x_1x_2x_3 = x_2^3 - x_1^3$. Moltiplicando per x_1x_2 si ottiene:

$$[x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2x_3] = [x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^3 - x_1^3]$$

  e questo è un punto di $\mathscr{D}$ perché ne soddisfa l'equazione parametrica ponendo $\lambda = x_1$ e $\mu = x_2$.

Dunque $\mathscr{D}$ è la cubica di equazione $x_1^3 + x_1x_2x_3 - x_2^3 = 0$.
Vediamo se ha dei punti singolari: le derivate parziali sono:

- $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2x_3$
- $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_2, x_3) = -3x_2^2 + x_1x_3$
- $\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_0, x_2, x_3) = x_1x_2$

Queste si annullano contemporaneamente solo se $x_1 = x_2 = 0$, cioè nel punto $R = [0, 0, 1]$.
Troviamo le tangenti alla cubica in R: deomogeneizzando rispetto a x_3 (qui $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$), R diventa l'origine e si ottiene la cubica di equazione affine:

$$x^3 + xy - y^3 = 0$$

L'origine è un punto doppio e le tangenti principali nell'origine sono $x = 0$, $y = 0$, quindi l'origine è un nodo.

Studiamo ora la tangente T_1 a $\mathscr{C}_3$ in $Q = [1, 0, 0, 0]$ e mostriamo che $\pi(T_1)$ è la retta $y = 0$ nel piano H_0, cioè che la tangente a $\mathscr{C}_3$ in Q viene proiettata in una tangente del nodo R.

La retta T_1 ha equazioni parametriche:

$$T_1 : \begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad con \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

Vediamo dove viene mandata T_1 mediante π. Siano $S = [1, 0, 0, 0]$ e $S' = [0, 1, 0, 0]$ appartenenti a T_1 si ha che $\pi(T_1) = L(\pi(S), \pi(S')) \cap H_0$. La retta $L(O, S)$ ha equazioni parametriche:

$$L(O,S) : \begin{cases} x_0 = t + s \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad con \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

e $\pi(S) = L(O, S) \cap H_0$ è il punto $[0, 0, 0, 1] = \pi(S)$.

La retta $L(O, S')$ ha equazioni parametriche:

$$L(O,S') : \begin{cases} x_0 = t \\ x_1 = s \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad con \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

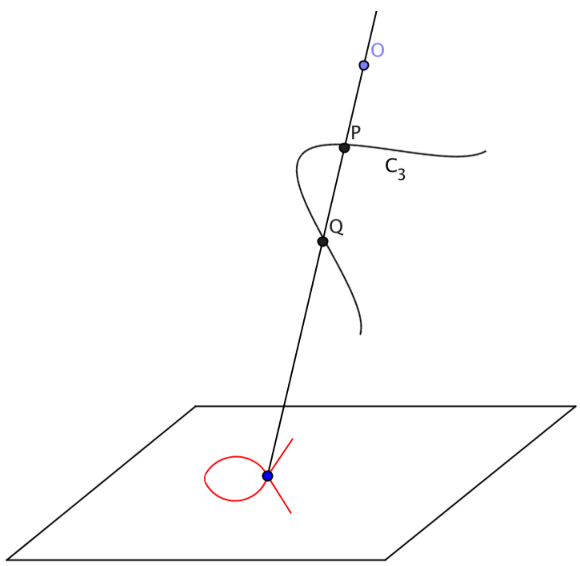
e $\pi(S') = L(O,S) \cap H_0$ è il punto $[0,1,0,0] = \pi(S')$.
La retta $L(\pi(S), \pi(S'))$ è data da:

$$L(O,S') : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \end{cases} \qquad con \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

che nel piano H_0 è la retta

$$\pi(T_1) : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = s \end{cases} \qquad con \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

cioè la retta di equazione cartesiana $x_2 = 0$ che deomogeneizzata rispetto a x_3 è proprio la retta $y = 0$.
Con calcoli analoghi si dimostra che, detta T_2 la retta tangente a $\mathscr{C}_3$ in P, $\pi(T_2)$ è la retta $x = 0$ sul piano H_0.
Ciò dimostra che le tangenti a $\mathscr{C}_3$ in P e Q vengono mandate mediante π nelle tangenti al nodo su H_0.



Bibliografia

[S] Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, seconda edizione, Torino 2000.

[M] Miles Reid, *Undergraduate algebraic geometry LMSST12*, Cambridge University Press, 1988.

[V] Davide Vanzo, *Curve razionali normali e le loro proiezioni*, Tesi di laurea in Matematica, Bologna 2010.