

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Fisica

**MISURE DEBOLI IN MECCANICA  
QUANTISTICA**

**Relatore:**  
**Prof. Elisa Ercolessi**

**Presentata da:**  
**Antonio Di Giovanni**

**Sessione I**  
**Anno Accademico 2014/2015**

## **Sommario**

Il seguente elaborato si prefigge di esporre in modo chiaro la teoria delle misure deboli in meccanica quantistica. Tale teoria ha aperto nuovi scenari all'interno dell'interpretazione fisica del mondo quantistico e allo stesso tempo ha fornito alla fisica sperimentale una nuova tecnica per esplorare i fenomeni microscopici. Il progetto si divide in tre capitoli; nel primo capitolo vengono esposti i concetti chiave della teoria della misura in meccanica quantistica utili all'introduzione del secondo capitolo, ove viene trattata la teoria delle misure deboli. Infine nell'ultimo capitolo viene esposta la parte applicativa e in particolare viene discusso un esperimento della doppia fenditura, svoltosi all'università di Toronto con l'utilizzo delle misure deboli.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Il concetto di misura in meccanica quantistica</b>	<b>1</b>
1.1 Il principio di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	2
1.2 Il processo di misurazione . . . . .	4
1.2.1 I postulati della misurazione . . . . .	6
1.3 Misurazioni proiettive . . . . .	7
1.4 Entanglement quantistico . . . . .	10
<b>2 Misura debole</b>	<b>13</b>
2.1 Preselezione e postselezione del sistema . . . . .	14
2.2 Valore debole . . . . .	16
2.3 Apparente violazione del principio di indeterminazione . . . . .	19
2.4 Misura debole della componente z dello spin di una particella con spin $-\frac{1}{2}$ . . . . .	20
2.5 Strani valori deboli . . . . .	23
<b>3 Applicazioni</b>	<b>25</b>
3.1 L'esperimento della doppia fenditura classico . . . . .	26
3.2 L'esperimento della doppia fenditura utilizzando misure deboli	29
<b>Conclusioni</b>	<b>37</b>
<b>A Calcolo esplicito del valore debole dall'espansione in serie della funzione esponenziale</b>	<b>39</b>

Bibliografia

41



# Introduzione

Uno dei punti fondamentali dell'interpretazione classica della meccanica quantistica è il problema del collasso della funzione d'onda, determinato dall'atto della misurazione che inevitabilmente perturba il sistema che si vuole misurare, da determinarne la natura stessa. Le misurazioni deboli, sono al contrario un particolare tipo di misure che permettono di ottenere una minima informazione dal sistema, senza che esso collassi in un autostato specifico. Una singola misurazione di questo tipo non permette di avere informazioni salienti su una determinata proprietà che si vuol misurare, ma un numero elevato di misurazioni di questo tipo riesce a ricostruire la proprietà cercata, fornendo così una certa informazione utile all'indagine del sistema studiato. Quella delle misure deboli è una teoria abbastanza recente che si sviluppa soprattutto nell'arco degli anni novanta (dal punto di vista teorico) e dieci del nuovo millennio (dal punto di vista applicativo). Gli sviluppi futuri della teoria puntano all'utilizzo pratico di queste misure nella speranza di trovare nuovi elementi volti a spiegare i punti nebbiosi della meccanica quantistica, altresì la ricerca teorica si è interessata alle fondamenta di tale teoria al fine di capire il significato di caratteristiche paradossali che scaturiscono dalla teoria stessa. Alcuni di questi punti vengono discussi in questo elaborato nel secondo capitolo, interamente dedicato alla struttura teorica delle misure deboli. Il primo capitolo affronta una necessaria introduzione alle definizioni fondamentali della teoria della misura in meccanica quantistica, mentre nel terzo ed ultimo capitolo viene trattata la parte applicativa, in particolare viene analizzato l'esperimento della doppia fenditura utilizzando misure de-

boli e facendo un paragone immediato con quello classico della meccanica quantistica.



# Capitolo 1

## Il concetto di misura in meccanica quantistica

Il problema della misurazione è in meccanica quantistica l'elemento fondamentale e fondante la teoria stessa. Il carattere indeterministico e probabilistico che si è affermato nella formulazione della teoria è difatti costruito sulla base del principio di indeterminazione, che esprime matematicamente il limite intrinseco della misura di un oggetto quantistico e spiega come il processo di misura prende parte al fenomeno che si vuole misurare e diviene esso stesso parte del fenomeno turbandolo a tal punto da averne inevitabilmente mutato la fenomenologia. La misurazione influisce sempre sull'oggetto e più essa è precisa, più il sistema subisce un'influenza che va a mutare il suo stato. Infatti il problema della meccanica quantistica si può riassumere nel problema di prevedere il risultato di una nuova misura dal risultato di una misura precedente. Sul principio di Heisenberg e sulla questione della misura si fonda la struttura della teoria quantistica, che si evolve matematicamente come una teoria statistica e descrive lo stato di un sistema che si vuole misurare con una funzione di probabilità  $\psi$ ; lo stato non possiede in generale proprietà specifiche come posizione, momento o energia, finché non viene effettuata una misura. Le grandezze fisiche determinabili univocamente attraverso un processo di misura, che conducono ad un risultato previsto probabilisticamente

da tale funzione di probabilità, vengono chiamate osservabili (o prevedibili). Il punto di partenza da cui sviluppare la teoria della misura in meccanica quantistica non può che essere quindi il principio di indeterminazione che verrà analizzato in dettaglio nella sua esposizione generale fornita dal testo di David J. Griffiths[1].

## 1.1 Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Viene definito valor medio di un osservabile  $A$ :

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (1.1)$$

La deviazione standard ad esso associato è:

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi \rangle = \langle f | f \rangle \quad (1.2)$$

con:  $f = (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi$

Per ogni osservabile  $B$  la deviazione standard ad esso associato è dunque:

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle$$

con :  $g = (\hat{B} - \langle B \rangle) \psi$

Per la disuguaglianza di Schwarz [2]:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle \geq |\langle f | g \rangle|^2$$

Essendo che  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $|z|^2 = [Re]^2 + [Im]^2 \geq [Im]^2 = [\frac{1}{2i}(z - z^*)]^2$

Ponendo  $z = \langle f | g \rangle$

Abbiamo:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq [\frac{1}{2i}(\langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle)]^2$$

Ma:

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi | (\hat{B} - \langle B \rangle) \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \psi \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \psi | (\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\langle B \rangle - \hat{B}\langle A \rangle + \langle A \rangle\langle B \rangle) \psi \rangle = \\
&= \langle \psi | (\hat{A}\hat{B}\psi) - \langle B \rangle \langle \psi | \hat{A}\psi \rangle - \langle A \rangle \langle \psi | \hat{B}\psi \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \langle \psi | \psi \rangle = \\
&= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle = \\
&= \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle
\end{aligned}$$

Allora:

$$\langle g|f \rangle = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Quindi:

$$\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{B}\hat{A} \rangle = \langle [\hat{A}\hat{B}] \rangle$$

Concludendo:

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left( \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (1.3)$$

Per ogni osservabile  $A$  e  $B$ . Conoscendo il commutatore delle osservabili è possibile quindi ottenere la giusta relazione di indeterminazione che le lega. Se il risultato dell'operazione di commutazione tra le osservabili fornisce valore nullo, allora esse si dicono compatibili (o anche che commutano) e hanno un insieme completo di autofunzioni simultanee; esse dunque possono essere misurate simultaneamente. Se invece non commutano, ovvero le due osservabili non sono compatibili, non è possibile misurarle simultaneamente. Prendiamo ad esempio in coordinate cartesiane lungo l'asse  $x$ , l'operatore posizione  $\hat{x} = x$  e l'operatore momento  $\hat{p} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ . Abbiamo per il valore del commutatore:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

(è semplice dimostrare che tale risultato è indipendente dalla scelta del sistema di coordinate, la scelta di un sistema cartesiano unidimensionale è soltanto a scopo dimostrativo). Applicando la relazione di indeterminazione trovata precedentemente otteniamo:

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left( \frac{\hbar}{2} \right)^2$$

che rappresenta la relazione di indeterminazione per posizione e momento che come si può vedere fornisce un valore diverso da zero e dunque non sono grandezze simili simultanee e non sono misurabili simultaneamente con precisione arbitraria.

Il principio di indeterminazione come già detto è diretta conseguenza dell'interpretazione statistica della meccanica quantistica. In laboratorio ad esempio si può misurare la posizione di una particella; l'atto della misura comporta il collasso della funzione d'onda in un picco molto stretto, che nella decomposizione di Fourier determina necessariamente un intervallo di lunghezze d'onda ampio. Se invece si misura il momento di una particella il suo stato collasserà in un'onda sinusoidale che avrà ora una ben definita lunghezza d'onda, ma la posizione che si aveva prima della misura diventa ora incerta. Mettendo in sequenza questi due esperimenti si vede che il problema è che la seconda misura rende obsoleta il risultato della prima riflettendo ciò che è il problema cruciale della meccanica quantistica: prevedere il risultato di una misura da una misura precedente.

## 1.2 Il processo di misurazione

Come già accennato, il processo di misura in meccanica quantistica consiste nell'interazione tra due sistemi, uno quantistico come ad esempio una particella elementare e uno classico, lo strumento. A seguito di tale interazione lo strumento passa da uno stato iniziale ad uno finale e da tale cambiamento possiamo ottenere lo stato della particella misurata. Sia  $G$  una grandezza fisica associata allo strumento e  $g_n$  i suoi autovalori. Sia  $\phi_n(x)$  lo stato dello strumento rappresentato da una funzione d'onda quasi-classica, cioè in ogni istante lo strumento si trova in uno degli stati  $\phi_n$  noti, con un valore ben determinato della grandezza  $G$ . Sia  $\phi_0(x)$  lo stato iniziale dello strumento. Sia  $\psi(q)$  la funzione d'onda normalizzata di un sistema quantistico. Essendo indipendenti tra loro, la funzione d'onda del sistema complessivo, allo stato

iniziale, è il prodotto:

$$\psi(q)\phi_0(x)$$

Subito dopo l'interazione lo stato del sistema complessivo è dato dal prodotto di un termine corrispondente all'azione n-esima dello strumento:

$$A_n(q)\phi_n(x)$$

Dove  $A_n(q)$  è proporzionale alla funzione d'onda del sistema quantistico dopo la misura e si esprime tramite un operatore integrale lineare:

$$A_n(q) = \int K_n(q, q')\psi(q')dq'$$

In più si deve tener conto del fatto che le probabilità per tutte le grandezze devono essere indipendenti dallo stato precedente della particella. Quindi la forma di  $A_n(q)$  deve essere determinata dal processo di misura stesso e non deve dipendere dalla  $\psi(q)$ . Definendo le funzioni  $\varphi_n(q)$  come funzioni d'onda normalizzate del sistema quantistico dopo la misura, si ha:

$$A_n(q) = a_n\varphi_n(q)$$

Soltanto le costanti  $a_n$  dipendono dallo stato iniziale:

$$a_n = \int \psi(q)\psi_n^*(q)dq = \int dq\langle\psi_n|q\rangle\langle q|\psi\rangle$$

Dunque:

$$A_n(q) = \int dq\langle\psi_n|q\rangle\langle q|\psi\rangle\varphi_n(q) = \langle\psi_n|\psi\rangle\varphi_n(q)$$

Il quadrato del modulo delle costanti  $a_n$  forniscono la probabilità che la misura dia il risultato n-esimo. Allora per esse vale la condizione di completezza:  $\sum_n |a_n|^2$ . Si puntualizza che le  $\psi_n(q)$  formano un insieme completo di funzioni normalizzate ed ortogonali. Al contrario le  $\varphi_n(q)$  non sono mutualmente ortogonali in generale e non sono autofunzioni di un operatore. Ciò esprime la non ripetibilità dei risultati di un processo di misura[3]. Concludendo, se la particella si trova nello stato  $\psi_n(q)$  la misura su di essa di una grandezza, chiamiamola  $F$ , dà con certezza un autovalore  $f_n$  e la particella

andrà a trovarsi in un nuovo stato  $\varphi_n(q)$  diverso, dove la stessa grandezza  $F$  non ha alcun valore determinato. Ripetendo lo stesso procedimento, otterremo un autovalore  $f'_n$  diverso dal valore precedente. Si mette in evidenza un importante aspetto della meccanica quantistica legato al processo di misura, quest'ultimo è difatti un processo irreversibile. Il suo ruolo rispetto al passato e al futuro è completamente diverso, rispetto al passato esso agisce per dare una probabilità dei diversi risultati possibili prevedibili da uno stato precedentemente creato da un'altra misura; rispetto al futuro la misura crea un nuovo stato. Vi è dunque in meccanica quantistica, nella definizione classica dell'atto della misura, una differenziazione netta tra passato e futuro.

### 1.2.1 I postulati della misurazione

Tra i postulati della meccanica quantistica[4], che descrivono sinteticamente e formalmente il significato del linguaggio matematico utilizzato per affrontare i fenomeni quantistici; spiccano i postulati legati al problema della misurazione.

1. Ad ogni sistema fisico è associato uno spazio di Hilbert  $H$  separabile a infinite dimensioni. Lo stato di un sistema fisico al tempo  $t_0$  è definito dal vettore ket (in notazione di Dirac):  $|\psi(t_0)\rangle$  appartenente allo spazio di Hilbert  $H$
2. Ogni grandezza fisica misurabile  $A$  è descritta da un operatore  $\hat{A}$  autoaggiunto agente su  $H$ ;  $\hat{A}$  viene chiamato osservabile.
3. L'unico risultato possibile della misura di una quantità fisica  $A$  è un autovalore del corrispondente osservabile  $\hat{A}$
4. Nello spettro discreto, quando la grandezza  $A$  è misurata su un sistema nello stato  $|\psi\rangle$  normalizzato; la probabilità  $p(a_n)$  di ottenere l'autovalore  $a_n$  del corrispondente osservabile  $A$  è:

$$p(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2$$

con  $|u_n^i\rangle$  set di vettori ortonormali che formano una base di autovettori dell'osservabile  $A$ , con autovalori  $a_n$ .

5. Se il risultato di una misura fornisce come risultato l'autovalore  $a_n$ , lo stato del sistema subito dopo la misurazione è la proiezione normalizzata nell'autospazio ad esso associato con:

$$|a_n\rangle = \frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}} \quad (1.4)$$

Gli operatori  $P_n$  sono chiamati operatori di misurazione.

6. L'evoluzione temporale del vettore  $|\psi(t)\rangle$  è data dall'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

Al quinto postulato bisogna dedicare un commento a parte; infatti in esso è definito il concetto, non intuitivo, del collasso della funzione d'onda. L'atto della misura, determina il cambiamento dello stato da  $|\psi\rangle$  nel nuovo stato, che supponiamo sia  $|a\rangle$  e ciò in gergo è il collasso di  $|\psi\rangle$  in  $|a\rangle$ . Proprio da questo postulato viene introdotto il prossimo paragrafo, dedicato ad un sottoinsieme particolare delle misure in meccanica quantistica, le misurazioni proiettive.

## 1.3 Misurazioni proiettive

Nel formalismo operatoriale della meccanica quantistica elaborato e divulgato da Von Neumann nel 1955, il concetto di misura in meccanica quantistica assume una descrizione più formale e generalizzata che si dimostra un utile punto di partenza anche per la definizione di misura debole che, come vedremo più avanti, può essere vista come una generalizzazione della misura proiettiva.

Un osservabile  $\hat{A}$ , è un operatore hermitiano sullo spazio di Hilbert degli stati del sistema studiato. Dato un set di operatori lineari  $\hat{M}_m$ , essi soddisfano

la relazione di completezza se vale l'espressione:

$$\sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \hat{I} \quad (1.5)$$

La relazione di completezza esprime che la somma delle probabilità sia l'unità ovvero la certezza statistica. Sia  $|\psi\rangle$  uno stato iniziale dell'oggetto quantistico. La probabilità di ottenere il risultato  $m$  dopo una misura dell'osservabile nello stato  $|\psi\rangle$  è:

$$p(m) = \langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle \quad (1.6)$$

Lo stato del sistema subito dopo la prima misurazione è:

$$|\psi_m\rangle = \frac{\hat{M}_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m | \psi \rangle}} \quad (1.7)$$

Se  $\hat{M}_m$  sono operatori di proiezione, quindi tali che  $\hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \hat{M}_m$  allora la misura è detta proiettiva. Utilizzando quindi un operatore di proiezione  $\hat{P}_m$  possiamo riscrivere l'osservabile  $\hat{A}$  nella sua scomposizione spettrale:

$$\hat{A} = \sum_m \lambda_m \hat{P}_m \quad (1.8)$$

Si vuole far notare che l'operatore  $\hat{P}_m$  proietta sul sottospazio degli autovettori corrispondenti all'autovalore  $\lambda_m$ . La probabilità di ottenere  $\lambda_m$  allora si scrive:

$$p(m) = \langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle \quad (1.9)$$

E lo stato del sistema subito dopo la misurazione è:

$$|\psi_m\rangle = \frac{\hat{P}_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_m | \psi \rangle}} \quad (1.10)$$

A questo punto si possono dare le definizioni utili di valor medio dell'osservabile (degli autovalori) :



$$\langle A \rangle = \sum_m \lambda_m p(m) \quad (1.11)$$

Applicando la (1.9) e tenendo conto della (1.8) :

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (1.12)$$

E la corrispondente deviazione standard:

$$\sigma_m = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (1.13)$$

Notiamo che le misure proiettive non sono altro che una conseguenza del quinto postulato della meccanica quantistica enunciato precedentemente; infatti basta richiedere che l'operatore presente nel postulato soddisfi la relazione di completezza e sia un operatore di proiezione e con queste condizioni il quinto postulato non è che la definizione di misura proiettiva. Un altro modo di descrivere questo tipo di misure, afferma che misurare nella base  $|m\rangle$  dove  $|m\rangle$  è una base ortonormale, significa eseguire una misurazione proiettiva con operatori di proiezione  $\hat{P}_m = |m\rangle\langle m|$ . Entrambe le nomenclature vogliono esporre lo stesso concetto[5]. Si nota immediatamente una caratteristica delle misure proiettive, infatti applicando più volte il proiettore  $\hat{P}_m$  a  $|\psi_m\rangle$ , poiché  $\hat{P}_m \hat{P}_m = \hat{P}_m$  lo stato non cambia, quindi abbiamo:  $\langle \psi_m | \hat{P}_m | \psi_m \rangle = 1$  e possiamo ripetere tale operazione molte volte. Questa proprietà delle misure proiettive viene chiamata ripetibilità. Un semplice esempio di applicazione delle misure proiettive può essere la misura su uno stato associato allo spin di una particella.

**Esempio 1:** Consideriamo lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

dove  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sono gli autovettori della matrice di Pauli nella direzione z dello spin:

$$\hat{\mathbf{S}}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Misurando lo stato usando il proiettore  $\hat{M}_0 = |0\rangle\langle 0|$  e  $\hat{M}_1 = |1\rangle\langle 1|$  otteniamo rispettivamente i risultati 0 e 1, con probabilità 1/2.

## 1.4 Entanglement quantistico

Verrà affrontato ora un aspetto molto interessante della meccanica quantistica legato alla misurazione di sistemi non separabili. Il fenomeno in questione è l'entanglement quantistico e la sua definizione nell'elaborato è necessaria poiché il fenomeno verrà utilizzato in un passaggio chiave delle misurazioni deboli. Introduciamo un ultimo postulato legato alla misura, all'interno del contesto della separabilità dei sistemi quantistici:

7. Lo stato di un sistema fisico composto è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert che compongono il sistema fisico. In particolare, dati  $n$  sistemi numerati da 1 a  $n$ , la composizione del sistema totale è:  $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n$ . Un vettore appartenente a tale spazio si scrive come combinazione lineare di una base di  $H$ .

Ora, per semplicità, prendiamo un sistema, chiamato C, formato da due sottoinsiemi, chiamati A e B. Lo stato  $|\psi\rangle_C$  associato a C è detto separabile rispetto ad A e B se lo si può scrivere come il prodotto tensoriale di uno stato riferito solo ad A ed uno riferito solo a B:  $|\psi\rangle_C = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$  in caso contrario sarà detto Entangled o Non separabile. Si ricorda che lo stato del sistema composto appartiene allo spazio di Hilbert corrispondente al prodotto tensoriale degli spazi su cui sono definiti i vettori  $|\psi\rangle_A \in H_A$  e  $|\psi\rangle_B \in H_B$  quindi:  $|\psi\rangle_C \in H_A \otimes H_B$ . Ad esempio, supponiamo C sia isolato (altrimenti bisogna considerare un insieme universo che lo contenga) e che le funzioni d'onda A e B possono avere solo due stati 0 e 1 (questi stati sono chiamati quantum bit o qubit, in analogia con la logica digitale a bit che utilizza un'algebra binaria), se il suo stato è:

$$|\psi\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \quad (1.14)$$

---

In nessun modo possiamo scrivere  $C$  come prodotto tensoriale di  $A$  e  $B$ , Quindi  $C$  è composto da due sottoinsiemi non separabili[6]. In piú notiamo un fenomeno chiave, che rimane ancora oggi fonte di vivaci discussioni all'interno della sua interpretazione; se eseguiamo una misura su  $A$  per conoscere il suo stato, allora otteniamo immediatamente anche l'informazione sullo stato di  $B$ . Il collasso della funzione d'onda di  $A$  provoca istantaneamente, nella condizione di entanglement, il collasso della funzione d'onda di  $B$  su uno stato specifico. Una verifica sperimentale di tale fenomeno è il famoso esperimento di Aspect [7]. La verifica dell'esistenza dell'entanglement, determina il carattere non-locale della meccanica quantistica a favore di una sua interpretazione fondata su tale caratteristica.



## Capitolo 2

### Misura debole

Il concetto di weak measurement è stato proposto per la prima volta da Yakir Aharonov dell'università di Tel Aviv, insieme a David Albert e Lev Vaidman dell'univerità della Carolina del sud. Nell'articolo di Aharonov[8] viene introdotto il nuovo concetto, discutendone l'apparato matematico utilizzato e svolgendo un esperimento mentale come applicazione di misure deboli, che verrà discusso anche in questo elaborato piú avanti. Onde evitare fraintendimenti e confusione, di seguito con la parola sistema si intende l'insieme composto dall'oggetto quantistico che si vuole misurare (o meglio i suoi osservabili) e lo strumento che misura tale oggetto. Le misure deboli ci permettono di ottenere informazioni sull' ampiezza di uno stato quantico, non facendo collassare tale stato nell'autovettore, bensì effettuando un bias di un piccolo angolo (del vettore di stato) e facendo in modo che lo strumento di misura sia considerabile anch'esso un oggetto quantistico (e non semiclassico come vuole l'interpretazione ortodossa), che entra in entanglement con l'oggetto misurato e anziché mostrare un chiaro autovalore dal risultato della misurazione esso fornisce una sovrapposizione di diversi valori. Effettuando una misura forte sullo strumento esso collasserà in un determinato stato e automaticamente tale collasso provocherà il collasso della funzione d'onda dell'oggetto quantistico per il fenomeno dell'entanglement, cosicché la misura forte sullo strumento ci fornirà un' informazione sull'oggetto quantistico.

Recentemente il concetto di weak measurement viene accettato come generalizzazione di misura proiettiva quale risultato di accoppiamento debole tra il sistema quantistico e lo strumento di misura. Secondo questa visione la misura debole è una generalizzazione delle misure proiettive viste nel paragrafo precedente[9]. La domanda (ancora aperta) è: quale tipo di informazioni ci rivelano le misure deboli, ovvero come interpretarli?

## 2.1 Preselezione e postselezione del sistema

In meccanica classica date determinate condizioni iniziali, si può prevedere lo stato finale di un determinato sistema semplicemente risolvendo il problema di Cauchy associato al fenomeno descritto, poiché si possono simultaneamente misurare le corrispondenti condizioni iniziali. In meccanica quantistica, in generale, se fisso determinate condizioni iniziali, esse non determinano lo stato finale del sistema, poiché non si possono misurare simultaneamente le condizioni iniziali (ad esempio posizione e velocità) e quindi non posso fisicamente fissare tutte le condizioni che permettono di soddisfare l'equazione deterministica. In parole povere, la meccanica quantistica è una teoria fisica non deterministica. Il processo di misurazione debole applica qualche particolare in più, in esso vengono fissate determinate condizioni iniziali e finali. In particolare si prepara uno stato quantistico iniziale  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  ed uno finale  $\langle\psi_{\text{fin}}|$  e lo stato intermedio è l'oggetto della misura debole. Lo stato iniziale viene chiamato stato preselezionato, quello finale, postselezionato[10]. Lo stato preselezionato, evolve verso il futuro rispetto al tempo della prima misurazione, mentre lo stato postselezionato evolve nella direzione temporale opposta rispetto a quando esso è stato misurato. Se il sistema è preparato al tempo  $t_1$  nello stato  $|\psi_1\rangle$  tramite una misura forte e successivamente viene trovato attraverso un'altra misura forte nello stato  $|\psi_2\rangle$  al tempo  $t_2$ , allora al tempo  $t$ , con  $t_1 < t < t_2$ , il sistema è descritto da:

$$\langle\psi_2|e^{i\int_{t_2}^t H dt} \quad e^{-i\int_{t_1}^t H dt}|\psi_1\rangle \quad (2.1)$$

Se consideriamo l'hamiltoniana nulla, otteniamo semplicemente per i due stati del sistema al tempo  $t$ :  $\langle\psi_2|$  e  $|\psi_1\rangle$ , mostrati in figura 2.1.

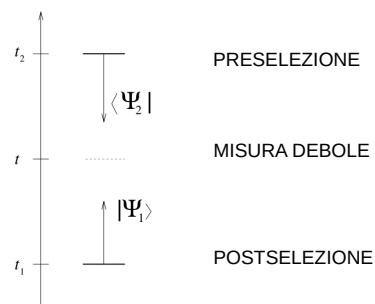


Figura 2.1: Evoluzione rispetto all'asse dei tempi del sistema preselezionato e di quello postselezionato. Si vuol far notare che a differenza delle classiche misure forti che delineano una netta differenza tra passato e futuro (poiché irreversibili), le misure deboli hanno una simmetria temporale rispetto la misura e la distinzione tra passato e futuro non è più netta poiché non è avvenuto il collasso della funzione d'onda. Immagine presa dall'articolo di Lev Vaidman[10].

Nello stato intermedio in cui avviene la misurazione debole, lo strumento e la particella sono considerati entrambi oggetti quantistici; in questo stato la sonda utilizzata e la particella sono entangled, quindi la misura forte suc-

cessiva, fatta sullo strumento, da automaticamente informazioni anche sulla particella. Questo tipo di approccio, di pre e post selezione del sistema è chiamato formalismo vettoriale a due-stati. Se prepariamo un ensemble di  $N$  particelle nello stato preselezionato, per misurare l'osservabile desiderato, bisogna utilizzare un apparato di misura per ogni particella dell'ensemble (gli apparati devono essere separati) e fare quindi la postselezione. Se il risultato di quest'ultima non é quella da noi voluta, allora scartiamo tale misura e il corrispondente apparato; vogliamo soltanto gli apparati corrispondenti al sistema postselezionato nello stato  $\langle\psi_2|$ .

## 2.2 Valore debole

Preselezioniamo un ensemble di particelle quantistiche nello stato  $|\psi_{\text{in}}\rangle$  e postselezioniamo uno stato finale  $|\psi_{\text{fin}}\rangle$ , definiti nello spazio di Hilbert  $H_p$  della particella. Sia  $\phi_{\text{in}}(Q_s)$ , definito nello spazio di Hilbert  $H_s$  dello strumento, la funzione d'onda gaussiana dello strumento nello stato iniziale, definita come:

$$\langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle = (2\pi\Delta Q_s^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{Q_s^2}{4\Delta Q_s^2}} \quad (2.2)$$

La misura debole di un generico osservabile  $\hat{A}$  avviene nello spazio di Hilbert dato dal prodotto tensoriale dello spazio dei vettori associati alla particella e quello dei vettori associati allo strumento:  $H_{\text{sis}} = H_p \otimes H_s$  (sis. sta a indicare il sistema complessivo).

Utilizziamo l'hamiltoniana d'interazione:

$$\hat{H} = g(t)\hat{A}\hat{P}_s \quad (2.3)$$

Dove  $\hat{P}_s$  è la variabile coniugata di  $\hat{Q}_s$ , per essi vale l'indeterminazione:  $[\hat{P}_s, \hat{Q}_s] = i\hbar$ . La funzione  $g(t)$ , a supporto compatto, tiene conto della durata dell'interazione; considerando quest'ultima impulsiva, abbiamo:

$$\int_{t_i}^{t_f} g(t)dt = 1$$



L'operatore di evoluzione temporale è dato da:

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{A}\hat{P}_s} \quad (2.4)$$

Subito dopo la misura avviene la postselezione, lo stato dello strumento è la proiezione di  $\hat{U}|\psi_{\text{in}}\rangle \otimes \langle Q_s|\phi_{\text{in}}\rangle$  su  $|\psi_{\text{fin}}\rangle$ . Otteniamo:

$$|\phi_{\text{fin}}\rangle = \langle \psi_{\text{fin}}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{A}\hat{P}_s}|\psi_{\text{in}}\rangle \otimes \langle Q_s|\phi_{\text{in}}\rangle = \sum_i \langle \psi_{\text{fin}}|a_i\rangle \langle a_i|\psi_{\text{in}}\rangle \otimes \langle Q_s - a_i|\phi_{\text{in}}\rangle$$

Dove  $\langle Q_s - a_i|\phi_{\text{in}}\rangle$  è lo stato dello strumento traslato del corrispondente autovalore  $a_i$  di  $\hat{A}$ . Ora, l'ipotesi che viene fatta affinché la misura sia davvero debole, è considerare un grande valore della varianza  $\Delta Q_s$  a cui corrisponde quindi una piccola incertezza su  $\Delta P_s$ :

$$\Delta P_s = \frac{\hbar}{2\Delta Q_s} \quad (2.5)$$

In particolare si richiede che la varianza  $\Delta Q_s$  sia molto maggiore della differenza tra gli autovalori  $a_i$  dell'osservabile:

$$\Delta Q_s \gg \max_n \frac{|\langle \psi_{\text{fin}}|\psi_{\text{in}}\rangle|}{|\langle \psi_{\text{fin}}|\hat{A}^n|\psi_{\text{in}}\rangle|} \quad (2.6)$$

Più  $\Delta Q_s$  è grande rispetto alla differenza tra gli autovalori, più la misura è debole. Notiamo viceversa che se la varianza su  $Q_s$  fosse molto piccola allora si otterrebbero valori vicini a un autovalore dell'osservabile che collaserebbero il vettore del sistema in direzione dell'autovalore. Per un grande valore di  $\Delta Q_s$  la funzione associata allo strumento diventa molto larga e si sovrappone a quella associata alla particella. Come abbiamo già detto questa condizione implica che la varianza su  $P_s$  è molto piccola; possiamo allora espandere in serie l'esponenziale dell'operatore di evoluzione temporale (vedi appendice 1):

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\text{fin}}|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{A}\hat{P}_s}|\psi_{\text{in}}\rangle \otimes \langle Q_s|\phi_{\text{in}}\rangle &\simeq \langle \psi_{\text{fin}}|(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{A}\hat{P}_s|\psi_{\text{in}}\rangle \otimes \langle Q_s|\phi_{\text{in}}\rangle = \\ &= \langle \psi_{\text{fin}}|\psi_{\text{in}}\rangle(1 - \frac{i}{\hbar}\langle \hat{A} \rangle_w \hat{P}_s)\langle Q_s|\phi_{\text{in}}\rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_{\text{w}} \hat{P}_s} \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle$$

Dove  $\langle \hat{A} \rangle_{\text{w}}$  è il valore debole di  $\hat{A}$  [6]:

$$\langle \hat{A} \rangle_{\text{w}} \equiv \frac{\langle \psi_{\text{fi}} | \hat{A} | \psi_{\text{in}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle} \quad (2.7)$$

Nel caso ordinario in cui  $|\psi_{\text{fi}}\rangle = |\psi_{\text{in}}\rangle$  otteniamo la consueta espressione del valor medio dell'osservabile (1.11). Il vettore di stato dello strumento nella configurazione finale è centrato intorno al valore debole  $\langle \hat{A} \rangle_{\text{w}}$ :

$$\langle Q_s | \phi_{\text{fi}} \rangle \simeq e^{-\frac{i}{\hbar} \langle \hat{A} \rangle_{\text{w}} \hat{P}_s} \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle = \phi_{\text{in}}(Q_s - \langle \hat{A} \rangle_{\text{w}}) \quad (2.8)$$

Generalizziamo ora il procedimento per un ensemble di  $N$  particelle. Prepariamo  $N$  particelle identiche nello stato iniziale  $|\psi\rangle$ , tali che  $N_1$  di loro sono nello stato  $|1\rangle$ ,  $N_2$  nello stato  $|2\rangle$  e così via. Non si assume niente su  $N_k$ , ma assumiamo che:  $N_1 + N_2 + \dots = N$ , ci limitiamo a misurare lo stato di ogni oggetto nella base ortonormale  $|1\rangle, |2\rangle, \dots$  e postselezioniamo tutte queste basi che otteniamo. Lo stato preselezionato del sistema, è:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle \quad (2.9)$$

Su questo ensemble di particelle, misuriamo il valore medio dell'osservabile  $A$ , ovvero  $\bar{A}$ , dato da:

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{A}_i \quad (2.10)$$

Il valore debole della media, è dato dalla media dei valori deboli degli  $A_i$ :

$$\langle \bar{A} \rangle_{\text{w}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \hat{A}_i \rangle_{\text{w}} \quad (2.11)$$

Dopo la postselezione negli stati  $|1\rangle, |2\rangle, \dots$  otteniamo:

$$\langle \bar{A} \rangle_{\text{w}} = \frac{1}{N} \sum_k N_k \frac{\langle k | A | \psi \rangle}{\langle k | \psi \rangle} = \sum_k \frac{N_k}{N} \frac{\langle k | A | \psi \rangle}{c_k}$$

Lo stato postselezionato più probabile avrà  $N_1 = |c_1|^2 N$  sistemi nello stato  $|1\rangle$ ,  $N_2 = |c_2|^2 N$  sistemi nello stato  $|2\rangle$  e così via, quindi:

$$\langle \bar{A} \rangle_w = \sum_k |c_k|^2 \frac{\langle k|A|\psi\rangle}{c_k} = \sum_k c_k^* \langle k|A|\psi\rangle = \langle \psi|A|\psi\rangle \quad (2.12)$$

Quindi il valore debole della media di  $A$  è il valore atteso di  $A$  nello stato iniziale  $|\psi\rangle$  [11].

## 2.3 Apparente violazione del principio di indeterminazione

La procedura che porta alle misure deboli è dal punto di vista matematico formalmente corretta, ma porta ad alcuni paradossi e la sua interpretazione fisica è ancora fonte di discussione all'interno degli studiosi di meccanica quantistica. Dato che il cuore stesso della misurazione debole risiede nel non far collassare la funzione d'onda associata alla particella che vogliamo misurare ed allo stesso tempo da tale misura si vuole ottenere l'informazione sull'osservabile misurato, ci si chiede se questo non va a scontrarsi con il principio di indeterminazione. Nello specifico, vogliamo dimostrare che, date  $N$  particelle identiche, se effettuiamo una misura debole, di parte di esse, dell'osservabile  $\hat{X}$  e misuriamo debolmente l'osservabile  $\hat{P}$  per le restanti, per tali variabili rimane soddisfatto il principio di Heisenberg:  $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$ . Misurando debolmente la posizione della particella nell'interazione data dall'hamiltoniana:

$$\hat{H} = -g(t)\hat{X}\hat{X}_s$$

con  $\hat{X}_s$  posizione della particella utilizzata come sonda per la misura. Essendo la misura debole, vale la condizione (2.6) quindi  $\Delta \hat{X}_s$  è grande abbastanza da imporre un limite inferiore al suo coniugato  $\Delta \hat{P}_s$  cosicché:

$$\Delta \hat{X} \geq \Delta \hat{P}_s$$

Viceversa misurando, per l'altra parte di esse, il momento  $\hat{P}$  abbiamo l'interazione:

$$\hat{H} = g(t)\hat{P}\hat{P}_s$$

Che a questo punto imposta un limite inferiore per  $\Delta\hat{X}_s$ :

$$\Delta\hat{P} \geq \Delta\hat{X}_s$$

Otteniamo quindi la disuguaglianza:

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \Delta\hat{X}_s\Delta\hat{P}_s$$

Ma poiché la misura debole è effettuata sulla particella, mentre sullo strumento viene effettuata una classica misura forte (la postselezione), allora per tale misura deve valere il principio di indeterminazione, quindi:  $\Delta\hat{X}_s\Delta\hat{P}_s \geq \frac{\hbar}{2}$  quindi otteniamo in automatico:

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geq \Delta\hat{X}_s\Delta\hat{P}_s \geq \frac{\hbar}{2}$$

Una dimostrazione più formale del principio di indeterminazione è fornita nell'articolo di Ozawa [12] in cui viene esposta una generalizzazione del principio di Heisenberg proprio per poter dimostrare la sua validità anche a misure che non fanno collassare la funzione d'onda (come le misure deboli). Con ciò il principio di indeterminazione, nella sua forma generale, resta valido anche per le misurazioni deboli.

## 2.4 Misura debole della componente z dello spin di una particella con spin $-\frac{1}{2}$

L'esperimento mentale proposto nell'articolo di Aharonov, Albert e Vaidman [8], è un utile esempio sull'utilizzo di misurazioni deboli e su come esse possano fornire strani valori e dar vita a inaspettati paradossi. Si inizia preselezionando un fascio di N particelle nello stesso stato iniziale, che si muovono lungo l'asse y con un ben definito momento  $p_{in}$  localizzato sul piano xz. Nello

stato iniziale, lo spin delle particelle punta la direzione  $\xi$  preso nel piano xz con angolo  $\alpha$  tra  $\xi$  e l'asse x. Il sistema di misura consiste in due apparati Stern-Gerlach, raffigurati insieme a tutto l'apparato in figura 2.2; il primo misura debolmente la componente z dello spin delle particelle, il secondo misura fortemente la componente x dello spin che causa lo splitting del fascio in due fasci corrispondenti ai due valori di  $S_x$ . Prendiamo soltanto il fascio con  $S_x = 1$  che va a incidere su uno schermo posto abbastanza lontano, in modo tale che lo spostamento misurato nella direzione z sullo schermo, dovuto al momento medio  $p_z$  acquisito durante la misura debole, sarà maggiore rispetto all'incertezza iniziale  $\Delta z$ . Sarà proprio tale spostamento a darci il valore debole di  $\hat{S}_z$ :

$$\langle \hat{S}_z \rangle_w = \frac{\langle \uparrow_x | \hat{S}_z | \uparrow_\xi \rangle}{\langle \uparrow_x | \uparrow_\xi \rangle} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (2.13)$$

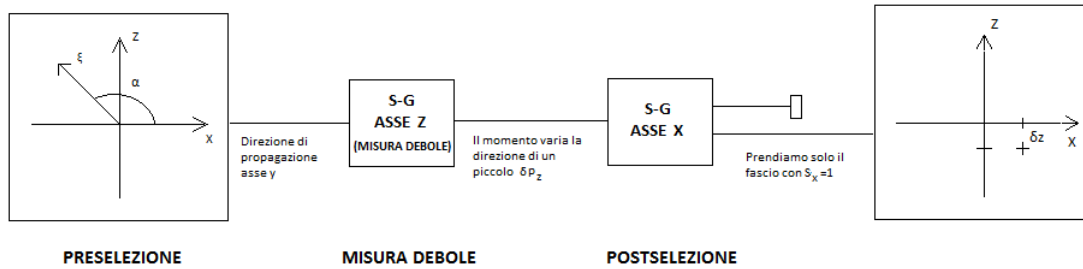


Figura 2.2: Apparato dell'esperimento mentale proposto in [8], l'apparato in figura è stato disegnato utilizzando il programma Paint di Microsoft, in modo da mettere in evidenza i vari passaggi dell'esperimento, in particolare la preselezione, la postselezione e la misura debole.

Le particelle hanno massa  $m$ , momento magnetico  $\mu$  e momento medio  $p_0$  nella direzione  $y$ ; lo stato iniziale del sistema è:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{in}}\rangle &= \hat{U}|\psi_{\text{in}}\rangle \otimes |\phi_{\text{in}}\rangle = \\ &= (\Delta)^{-\frac{3}{2}}(2\pi)^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{4(\Delta)^2}} e^{-(ip_0y)} [\cos(\frac{\alpha}{2})|\uparrow_x\rangle + \sin(\frac{\alpha}{2})|\downarrow_x\rangle] \end{aligned}$$

Dove:  $\Delta = \Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z$ , con l'hamiltoniana dell'interazione debole data da:

$$\hat{H}_1 = -\mu \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) z \hat{S}_z g(y - y_1) \quad (2.14)$$

La funzione  $g(y - y_1)$  indica la posizione dell'apparato e può essere presa tale che:  $\frac{m}{p_0} \int g(y) dy = 1$ . In realtà si dovrebbe inserire anche la componente  $\hat{x}$  del campo magnetico, nel rispetto della legge dell'elettromagnetismo  $\nabla \cdot B = 0$  tuttavia a causa della precessione di Larmor intorno a  $B$ , la componente  $S_x$  oscilla rapidamente e la sua media è nulla, conta soltanto la forza magnetica in direzione  $z$ , in aggiunta, di solito, si fa in modo di avere una costante magnetica abbastanza grande in direzione della componente di spin che si vuole misurare. Durante la prima interazione, il momento  $p_z$  varia la direzione di :

$$\delta p_z = \mu \left( \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{S}_z \quad (2.15)$$

Il requisito di debolezza, in questo caso, è

$$\mu \left| \frac{\partial B_z}{\partial z} \right| \max[|\tan(\frac{\alpha}{2})|, 1] \ll \Delta p_z \quad (2.16)$$

Ciò indica che il gradiente di campo magnetico applicato al fascio deve essere abbastanza debole, in particolare deve essere molto più piccolo dell'errore sulla componente  $z$  del momento angolare. Ora l'interazione con il secondo apparato; l'hamiltoniana della seconda interazione è:

$$\hat{H}_2 = -\mu \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) x \hat{S}_x g(y - y_2) \quad (2.17)$$

Questa misura è forte e affinché lo sia, in modo da causare lo splitting del raggio, bisogna avere:

$$\mu \left| \frac{\partial B_x}{\partial x} \right| \gg \Delta p_x \quad (2.18)$$

Cioè un gradiente di campo magnetico abbastanza grande, ovvero una misura di  $p_x$  abbastanza precisa. Prendiamo solo il raggio con  $S_x = 1$ ; la sua direzione è:  $\mu(\frac{\partial B_x}{\partial x})\hat{x} + p_0\hat{y}$ , lo schermo è posto ad una distanza  $l$  tale che:

$$\frac{l\mu}{p_0} \left| \frac{\partial B_z}{\partial z} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \gg \Delta \quad (2.19)$$

La funzione d'onda della particella prima del collasso sullo schermo è:

$$|\psi_{\text{fin}}\rangle = e^{-[\Delta(\frac{p_0}{l})^2(z - \frac{l\mu}{p_0} \frac{\partial B_z}{\partial z} \tan\frac{\alpha}{2})^2]} \quad (2.20)$$

Il valore misurato per la componente z dello spin è quindi:  $\tan(\frac{\alpha}{2})$ . Se il numero di particelle è sufficientemente grande, quindi:  $\frac{\Delta p_z}{\sqrt{N}} \ll \langle S_z \rangle_w$  allora il valore debole può essere determinato con arbitraria precisione. Una stima approssimativa per il numero N di particelle, tale da renderci una buona precisione nell'accuratezza del calcolo del valore debole di almeno  $\frac{1}{M}$  è:  $N \approx \frac{M^3}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

## 2.5 Strani valori deboli

Il risultato dell'esperimento esposto nel paragrafo precedente porta a non poche difficoltà nella sua interpretazione. Infatti si nota subito che il valore debole di  $S_z$ , quando l'angolo tra lo stato preselezionato e quello postselezionato si avvicina a  $\pi$ , diverge. Questo fenomeno è la cosiddetta amplificazione del valore debole, che più nello specifico apre il problema di comprendere il significato di questi valori calcolati per l'osservabile, che stanno al di fuori (anche di molto) del range di autovalori permessi calcolati tramite una misura forte. Questo fenomeno, avviene con una probabilità molto bassa, che può essere calcolata; ad esempio: Consideriamo  $e^{-\frac{iS_z \otimes \hat{L}}{\hbar}}$  dove l'operatore momento angolare  $\hat{L}$  causa lo shift della funzione d'onda dello strumento. Sia data la funzione d'onda della particella:  $|\psi_i\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  e consideriamo l'equazione degli operatori nello spazio dello strumento :

$$e^{-\frac{i\hat{H}_z \otimes \hat{L}}{\hbar}} |\psi_i\rangle = \alpha|0\rangle e^{-\frac{i\hat{L}}{\hbar}} + \beta|1\rangle e^{\frac{i\hat{L}}{\hbar}}$$

Post-selezioniamo due vettori separatamente :  $\hat{U}|0\rangle$  e  $\hat{U}|1\rangle$  dove:

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prima calcolo :

$$\begin{aligned} \hat{U}^\dagger e^{-\frac{i\hat{H}_z \otimes \hat{L}}{\hbar}} |\psi_i\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) e^{-\frac{i\hat{L}}{\hbar}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |0\rangle) e^{\frac{i\hat{L}}{\hbar}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha e^{-\frac{i\hat{L}}{\hbar}} - \beta e^{\frac{i\hat{L}}{\hbar}}) |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha e^{-\frac{i\hat{L}}{\hbar}} + \beta e^{\frac{i\hat{L}}{\hbar}}) |1\rangle \end{aligned}$$

Viene fatta la post-selezione di  $|0\rangle$  l'operatore momento sullo strumento è:

$$\left( \frac{1 - i\hat{L}_0}{\hbar} \right)$$

con:

$$\hat{L}_0 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \hat{L}$$

Se invece viene post-selezionato  $|1\rangle$ :

$$\left( \frac{1 - i\hat{L}_1}{\hbar} \right)$$

con:

$$\hat{L}_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \hat{L}$$

Supponiamo che  $\alpha$  sia molto vicino a  $\beta$ , se viene effettuata la post-selezione  $\hat{U}|0\rangle$  allora  $\hat{L}_0$  potrebbe essere più elevato dell'autovalore di  $\hat{S}_z$ , tuttavia questa post-selezione avrebbe una bassa probabilità:  $|\alpha - \beta|^2$ . Alternativamente, la probabilità sulla post-selezione  $\hat{U}|1\rangle$  è abbastanza elevata :  $|\alpha + \beta|^2$ , ma in questo caso  $\hat{L}_1$  è vicino a zero[9]. Quindi in definitiva, si possono avere basse probabilità di ottenere una distribuzione (per lo strumento) che è traslata lontano dall'autovalore dell'operatore misurato, più lo shift (quindi il valore debole) è lontano dall'autovalore misurato e più la probabilità di ottenere tale distribuzione è bassa. Concludendo, se lo stato preselezionato e quello postselezionato si avvicinano all'ortogonalità, il valore debole tende all'infinito, ma la probabilità di ottenere poi una distribuzione traslata di questo enorme valore, tende a zero.



# Capitolo 3

## Applicazioni

Come già accennato nell'introduzione del capitolo precedente, lo sviluppo della teoria delle misure deboli, partita nel 1988, ha ricoperto tutto il decennio degli anni novanta. Tuttavia gli esperimenti utilizzando tale teoria e volti a verificarla, si sono svolti (e si stanno tutt'ora svolgendo) soltanto nell'ultimo decennio. In questo capitolo finale si è discusso in particolare dell'esperimento condotto all'università di Toronto da Aephraim Steinberg e dai suoi colleghi che hanno contribuito in egual modo alla buona riuscita dell'esperienza[17]. Il gruppo di ricerca di Toronto ha riproposto il classico esperimento delle due fenditure con fascio di fotoni, rielaborandolo in modo tale da poter utilizzare la tecnica delle misure deboli per ottenere informazioni sulla traiettoria dei singoli fotoni utilizzati nell'esperimento. Ho voluto discutere questo esperimento proprio per l'interessante obiettivo posto, quello di ricostruire la traiettoria di un oggetto quantistico. Infatti sappiamo dalla teoria quantistica e in particolare dal principio di indeterminazione, che ottenere informazioni sulla traiettoria di una particella è impossibile, dato che ogni misura della posizione disturba irrevocabilmente quella del momento e viceversa. Ma come abbiamo illustrato nel precedente capitolo, utilizzando misurazioni deboli, si può ovviare tale problema senza violare il teorema generale di indeterminazione. Affrontare in quest'ottica l'esperimento delle due fenditure, che Richard Feynmann considerava il cuore della

meccanica quantistica[13], è un'interessante metodo per fare luce sugli aspetti fondamentali e ancora così poco compresi della teoria quantistica. Prima di discutere in dettaglio il lavoro del team di fisici di Toronto, verrà velocemente riproposto il classico esperimento delle due fenditure, in particolare l'esperimento sviluppato all'università di Bologna nel 1974 da Pier Giorgio Merli, Gianfranco Missiroli e Giulio Pozzi, che per primi riuscirono ad impressionare la figura di interferenza elettronica registrando un elettrone per volta[14]; esperienza poi ripetuta in Giappone da Tonomura, Endo e Matsuda nel 1989[15]. L'idea di discutere in questo elaborato l'esperimento delle due fenditure ideato dal gruppo di Merli è dovuto al naturale collegamento storico con l'esperimento della doppia fenditura svoltosi a Toronto. Inoltre è una speranza e uno stimolo ad effettuare un esperimento della doppia fenditura con elettroni, utilizzando la tecnica delle misurazioni deboli, nei laboratori di interferometria e microscopia elettronica di Bologna, in un futuro non troppo lontano.

### 3.1 L'esperimento della doppia fenditura classico

Riprendiamo l'esperimento della doppia fenditura discutendone brevemente e qualitativamente l'apparato sperimentale dell'esperimento sviluppato a Bologna e svolto a Milano nel 1974 e analizzando gli ormai classici fenomeni quantistici associati a tale esperimento[14]. L'esperienza si prefigge lo scopo di osservare il pattern d'interferenza elettronico utilizzando un fascio di singoli elettroni che vengono fatti passare attraverso un apparato di doppia fenditura per poi venire osservati da un rivelatore elettronico. La figura 3.1 illustra lo schema semplificato dell'apparato.

**L'apparato di misura:** I singoli elettroni vengono emessi tramite effetto termoionico da un filamento metallico scaldato ad una certa temperatura

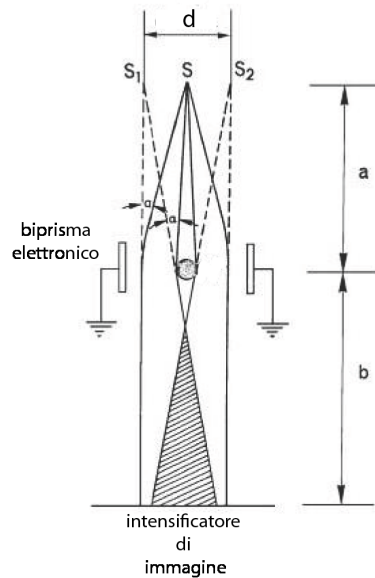


Figura 3.1: Apparato semplificato del microscopio elettronico utilizzato da Merli Pozzi e Missiroli [14]

e focalizzati in una certa area tramite un sistema di lenti. Questo apparato costituisce la sorgente monoelettronica  $S$ . Il ruolo delle fenditure è ricoperto dal biprisma elettronico, strumento inventato da Möllensted e Dücker nel 1955 all'università di Tubinga, analogo del biprisma ottico nel suo utilizzo di deviatore del fascio di particelle. Nel caso del biprisma elettronico, il fascio di elettroni viene deviato da un sottilissimo filo percorso da corrente il cui campo elettrico devia il fascio di cariche negative consentendo la sovrapposizione del fascio. Il filo ha un diametro di  $2r = 400nm$  ed è simmetricamente centrale rispetto a due piastre metalliche connesse a terra, che sono posizionate a  $2mm$  di distanza rispetto al filo; la distanza tra le piastre è  $R \simeq 4mm$ . Tale biprisma viene adattato all'interno di un microscopio elettronico ad una distanza  $a = 10cm$  rispetto alla sorgente. Ad una distanza  $b = 24cm$  dal biprisma viene posto il rivelatore di elettroni. Il rivelatore utilizzato nell'esperimento non è una semplice lastra fotografica, bensì è un intensificatore d'immagine inventato nel 1971 da K.H.Hermann capace di ottenere l'imma-

gine della traccia di un singolo elettrone.

**Risultato e commenti:**

Grazie agli accorgimenti pratici dell'apparato si può misurare con buona precisione l'angolo di deflessione  $\alpha$  del singolo elettrone di massa  $m$  velocità  $v_0$  che si trova ad una distanza  $x$  dal biprisma:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{mv_0^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}\right) \quad (3.1)$$

La  $\Delta V$  utilizzata nell'esperimento è di  $2eV$ , si ottenne così un valore di  $\alpha = 10^{-5}rad$ . Utilizzando tale apparato, si riuscì ad ottenere per la prima volta, un'immagine che evidenzia contemporaneamente i singoli elettroni e la figura di interferenza ad essi associata. Riportiamo nella figura 3.2 l'immagine originale della figura di interferenza ottenuta nel 1974.

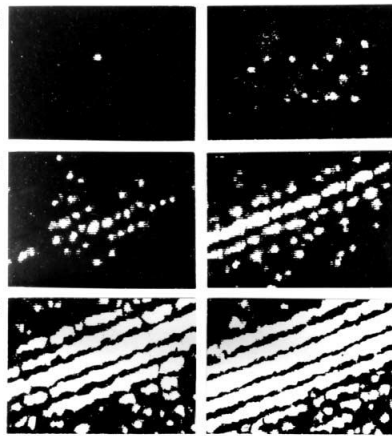


Figura 3.2: Figura di interferenza da singoli elettroni, ogni fotogramma contiene un numero crescente di elettroni che vanno a comporre le bande d'interferenza[14].

Dalla figura di interferenza ottenuta possiamo osservare la distanza  $\Delta n$  dei picchi d'interferenza e ricavarci la lunghezza d'onda di De Broglie dell'elettrone

$$\lambda = \frac{d\Delta n}{a + b} \quad (3.2)$$

Con  $d$  indichiamo la distanza tra le sorgenti virtuali. L'esperimento ha dimostrato, con una precisione mai raggiunta fino ad allora, la natura dualistica dell'elettrone che arriva singolarmente sul rivelatore e accumulandosi sullo schermo forma una figura di interferenza tipica della fenomenologia ondulatoria. Se viene fatta ora una misura forte sulla fenditura, supponendo ad esempio di poter utilizzare un rivelatore di elettroni su una delle due fenditure, otterremmo ciò che la meccanica quantistica prevede teoricamente, ovvero la sparizione delle bande di interferenza in favore di 2 fasci netti, o meglio due distribuzioni di probabilità fortemente centrate intorno al valor medio dell'osservabile appena misurato. Avviene quindi il collasso della funzione d'onda come descritto nel capitolo introduttivo. È interessante mostrare che un gruppo di ricercatori dell'università di Tubinga sono riusciti a mostrare che la figura d'interferenza non viene distrutta istantaneamente effettuando una misura forte[16]. Infatti con opportune tecniche di interferometria e in particolare facendo interagire gli elettroni di un fascio, in un esperimento doppia fenditura, con un campo elettrico esterno rendendo entangled il sistema complessivo di elettroni e ambiente esterno, viene mostrato come tale sistema generi una figura di interferenza disturbata che va distruggendosi con un certo tempo, detto appunto tempo di decoerenza.

### **3.2 L'esperimento della doppia fenditura utilizzando misure deboli**

L'obiettivo dell'esperimento è ottenere informazioni sulla traiettoria del fotone, disturbando poco (nel senso discusso in (2.6)) l'evoluzione dello stesso, conseguente alla misura fatta per misurare le variabili utili alla ricostruzione della traiettoria. L'informazione ottenuta dalla singola misura sarà insufficiente alla descrizione del fenomeno, ma come abbiamo visto effettuando molte misure simili dello stesso osservabile otteniamo un valore medio dello stesso che ci dà l'informazione cercata del valore di aspettazione della grandezza fisica in esame. Possiamo dividere l'esperimento in tre passaggi: crea-

zione del fascio di fotoni e preselezione di essi, misura debole del momento di ogni fotone ed infine postselezione della posizione finale di un subensemble dei fotoni preselezionati. La figura 3.3 riporta lo schema semplificato dell'esperimento.

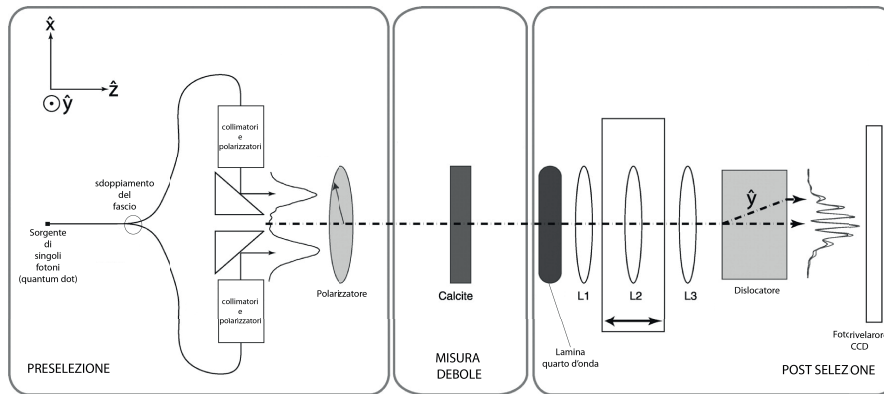


Figura 3.3: Schema semplificato dell'apparato utilizzato dai ricercatori dell'università di Toronto; l'immagine è presa dall'illustrazione originale presente nell'articolo[17] ed è stata modificata per mettere in risalto i passaggi della preselezione, misura debole e postselezione.

**Preparazione dei fasci e preselezione :** I singoli fotoni utilizzati nell'esperimento sono emessi da un quantum dot (punto quantistico) di InGaAs raffreddato con elio liquido, il quantum dot è incorporato in una cavità semiconduttrice di GaAs/AlAs e subisce un pompaggio ottico da parte di un laser a  $810nm$  emettendo singoli fotoni di lunghezza d'onda di  $943nm$ . I singoli fotoni sono quindi accoppiati in una fibra ottica monomodale (capace di trasportare un fascio di singoli fotoni) e poi divisi in due fasci con un beam splitter (sempre all'interno di fibre ottiche monomodali) collimati e diretti nella stessa direzione che identifichiamo con l'asse  $z$ . Abbiamo così ottenuto due fasci coerenti Gaussiani di singoli fotoni che possiamo ben identificare con una coppia di fasci coerenti che escono da una doppia fenditura. La distanza tra i picchi della gaussiana associata ai fasci è:  $(4,69 \pm 0,02)mm$  il

diametro dei fasci misura:  $(0,608 \pm 0,006)mm$ . Preselezioniamo ora il nostro sistema, composto dai due fasci, polarizzandolo diagonalmente nello stato iniziale:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|X\rangle + |Y\rangle) \quad (3.3)$$

chiaramente  $|X\rangle$  indica la polarizzazione lungo l'asse x e  $|Y\rangle$  quella lungo l'asse y.

**Misura debole:** I fasci polarizzati sono sottoposti ora a misura debole tramite un pezzo di calcite birifrangente di spessore  $0,7mm$ , con asse ottico a  $\theta = 42^\circ$  sul piano xz. La misura del momento trasverso  $\hat{p}_x$  (ricordando che  $p = \hbar k$ ) è estratta dall'angolo di incidenza dei fotoni sulla calcite. Infatti il fascio percorrendo la calcite, che deve la sua caratteristica di materiale birifrangente alla presenza di indici di rifrazione differenti nelle direzioni di propagazione dei raggi, esce da essa con una sfasatura  $|\varphi_k\rangle$ , dalla quale si può calcolare il momento. La sfasatura provoca una rotazione dello stato di polarizzazione diagonale  $|\psi\rangle$  espressa come:

$$|\psi_{\text{shift}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\varphi_k}{2}}|X\rangle + e^{\frac{i\varphi_k}{2}}|Y\rangle) \quad (3.4)$$

E conseguentemente la polarizzazione dei fasci diventa leggermente ellittica. La debolezza della misurazione è garantita dal fatto che l'incertezza nella misura della polarizzazione è più grande rispetto all'ampiezza effettiva della rotazione del vettore stesso, garantendo così la condizione (2.6). Quindi l'informazione fornita dalla singola misura non ci dice nulla di preciso sulla direzione di propagazione del fascio, occorre mediare i risultati per molti fotoni per ottenere il valore debole del momento desiderato. Essendo  $\varphi(k_x)$  molto piccolo, ed essendo conseguentemente l'angolo di diffusione altrettanto piccolo, possiamo approssimare tale valore come un'espressione lineare di k :

$$\varphi(k_x) = \zeta \frac{k_x}{k} = \zeta \langle k_x \rangle_w \quad (3.5)$$

Il coefficiente  $\zeta$  indica l'intensità della relazione tra sfasamento misurato e momento del fotone e ci da un valore quantitativo dell'intensità d'interazio-

ne del fotone. Tale coefficiente dipende dalle proprietà del cristallo di calcite e quindi può essere misurato con buona precisione in laboratorio; il valore, nell'esperimento in questione, risulta essere:  $\zeta = 375,4 \pm 3,4$

### Postselezione:

La misura forte della postselezione viene fatta sulla posizione finale  $|x_f\rangle$  del fascio che viene rivelata grazie ad una camera CCD la cui precisione dipende dalla grandezza del pixel che in questo caso è:  $\Delta = 26\mu m$ . Prima della misura forte sulla CCD, sono state inserite un sistema di tre lenti, con la lente di mezzo libera di traslare sull'asse  $z$ , al fine di poter acquisire il fascio sulla CCD ad una distanza arbitraria, variando la posizione della lente centrale; nell'esperimento, vengono utilizzati 48 diversi piani di immagine in un range che va dai 2 agli 8 metri fornendo diverse distanze utilizzate tutte nella ricostruzione della traiettoria media del fotone. Ciò non influisce sulla postselezione poiché l'hamiltoniana di interazione tra momento del fotone e polarizzazione e l'hamiltoniana di interazione del sistema commutano. Inoltre, prima delle lenti è stata inserita una lamina quarto d'onda con asse a  $-45^\circ$  rispetto a  $x$ , in modo da proiettare su base circolare lo stato di polarizzazione di ogni fotone. Poi, subito dopo le lenti, vi è un dispositivo (dislocatore) che trasmette la componente sinistra della polarizzazione circolare di  $|\psi_{\text{shift}}\rangle$  traslata verticalmente di  $2mm$ , la componente destra invece viene trasmessa non deviata. Questo mi permette di ottenere la posizione  $|x_f\rangle$  postselezionata desiderata sullo schermo del CCD. Inoltre la proiezione sulla base circolare permette di decodificare l'informazione del momento, ricavata nella polarizzazione, nell'intensità dei pattern verticali dislocati. L'intensità misurata del pattern corrispondente alla proiezione sulla polarizzazione circolare destra è:  $I_D = [1 + \sin \varphi(k_x)]$  mentre quella corrispondente alla polarizzazione circolare sinistra é:  $I_S = [1 - \sin \varphi(k_x)]$  Combinando le due intensità ed utilizzando la (3.5) otteniamo il valore debole del momento in funzione delle intensità:

$$\langle k_x \rangle_w = \frac{1}{\zeta} [\sin^{-1}(\frac{I_D - I_S}{I_D + I_S})] \quad (3.6)$$



Possiamo quindi calcolare il valore debole del momento  $k_x$  del fotone, per ogni valore della posizione  $x$ , misurando la differenza di intensità tra i patterns impressionati sullo stesso piano lungo l'asse  $z$  e ripetere la misura lungo tanti piani modulabili lungo  $z$  variando la lente centrale dell'apparato descritto prima. Possiamo costruire così le traiettorie dei fotoni sommando tutti i valori ottenuti per ogni piano.

**Risultato della misura e commento:** Il risultato dell'esperimento viene riportato nei grafici delle figure 3.4 e 3.5 che si riferiscono ai valori dell'esperimento originale. Il grafico in figura 3.4 ci mostra la ricostruzione di 80 traiettorie medie di singoli fotoni. Gli autori paragonano tali traiettorie ad un flusso idrodinamico con una linea di simmetria centrale (come si può notare dal grafico) e si può notare che traiettorie che provengono da una fenditura non attraversano mai tale linea di simmetria e si nota anche che le traiettorie che si trovano ai bordi delle frange di luce tendono ad accoppiarsi, andando a creare i picchi di interferenza. Il fatto più interessante è che le zone in cui l'intensità luminosa è bassa e la probabilità di trovare il fotone è quasi nulla, corrispondono proprio alle regioni postselezionate in uno stato quasi ortogonale allo stato preselezionato del sistema.

Si può mostrare meglio nel grafico in figura 3.5 in 3D in cui l'ulteriore asse indica la densità di probabilità di trovare il fotone nella corrispondente posizione indicata dagli altri raggi. Inoltre, sempre in questo grafico, possiamo apprezzare la costruzione graduale dell'immagine d'interferenza lungo la direzione di propagazione del fascio.

Gli autori dell'esperimento fanno notare che la misura della traiettoria media del singolo fotone si accosta bene alle previsioni dell'interpretazione di Bohm della meccanica quantistica, ove l'esperimento della doppia fenditura viene spiegato associando alla particella che passa attraverso la fenditura, un'onda pilota che ne guida il moto e il fenomeno d'interferenza che viene osservato è dovuta a tale onda pilota.

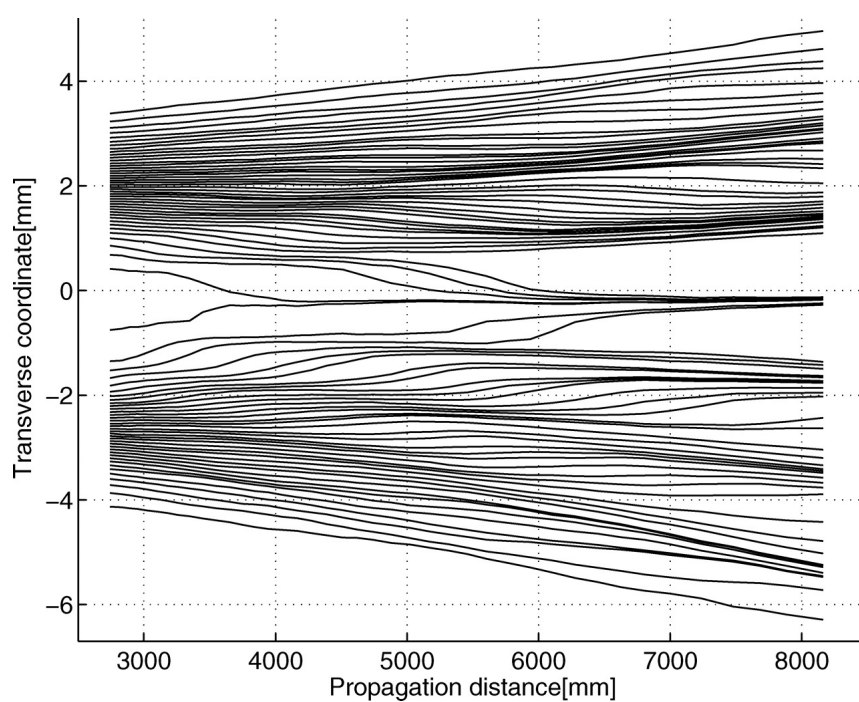


Figura 3.4: Traiettorie medie di singoli fotoni in un apparato di doppie fenditure; il grafico è preso dall'articolo originale [17].

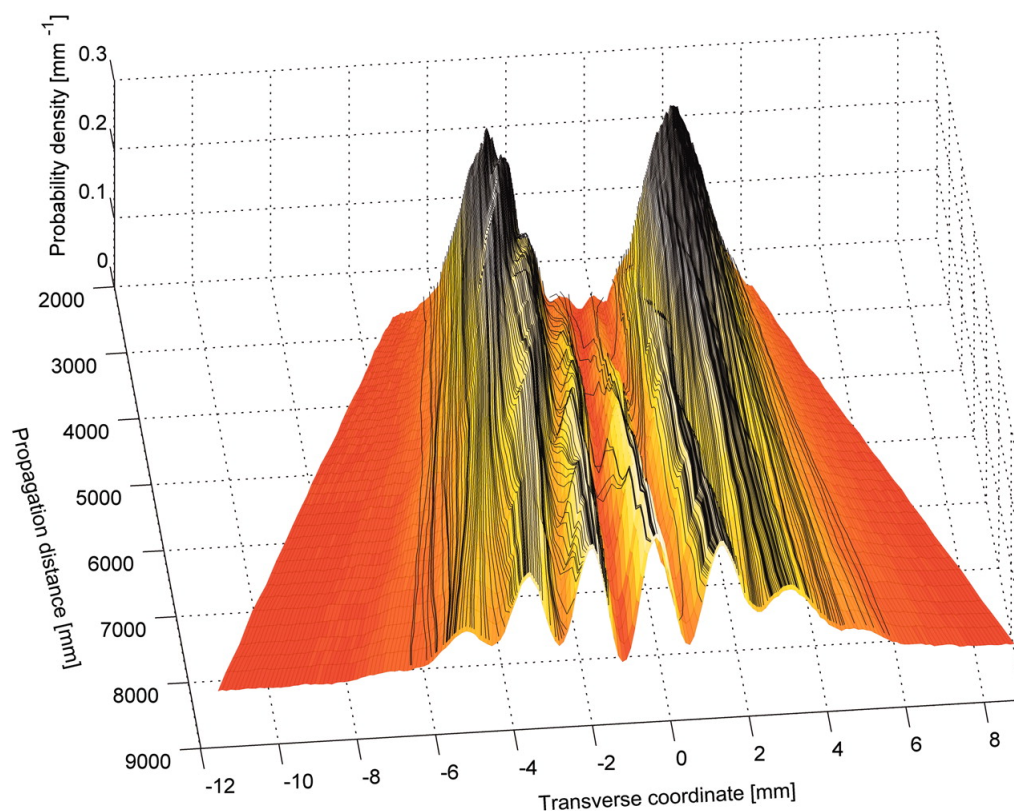


Figura 3.5: Grafico tridimensionale delle traiettorie medie di singoli fotoni, nell'apparato di doppia fenditura, in funzione della densità di probabilità (preso dall'articolo originale [17]).



# Conclusioni

Come dimostrato nell'esperimento della doppia fenditura discusso nel capitolo precedente, le misure deboli permettono di investigare con una precisione unica un sistema quantistico, proprio per il loro modo di non perturbare troppo il sistema e allo stesso tempo ottenere preziose informazioni da esso, cosicché si riesce a ricostruire una traiettoria media, associata ad una particella quantistica pur rispettando il teorema di indeterminazione. Allo stesso tempo, la teoria delle misure deboli ha aperto nuovi scenari e paradossi; i valori deboli di un osservabile, che con bassa probabilità si possono misurare al di fuori del range di autovalori permessi, sono ancora oggetto di interpretazione da parte dei fisici che si occupano di meccanica quantistica delle basse energie. Lo sviluppo dello studio di tali valori ha portato oltremodo a nuovi paradossi e problemi ancora irrisolti, come la previsione di poter separare una proprietà fisica di una particella dalla particella stessa proprio grazie a queste tecniche di misurazione. Fenomeno dimostrato dall'esperimento di un gruppo di fisici nei laboratori di interferometria di Grenoble, pubblicato in un articolo di Nature del 2014 [18], che sono riusciti a misurare la posizione di un neutrone e il suo momento angolare, separati spazialmente. L'utilizzo delle misure deboli in meccanica quantistica ha aperto la strada a nuovi metodi di investigazione dei fenomeni quantistici riportando al centro dell'attenzione le questioni fondamentali della meccanica quantistica classica e mostrando un nuovo modo di procedere nel campo dell'interferometria sperimentale e della fisica teorica delle basse energie che si spera possa portare al superamento delle perplessità fisiche riguardanti questo campo.



# Appendice A

## Calcolo esplicito del valore debole dall'espansione in serie della funzione esponenziale

Esplicitiamo i passaggi che hanno portato alla definizione del valore debole (2.7):

$$\langle \psi_{\text{fi}} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{A} \hat{P}_s} | \psi_{\text{in}} \rangle \otimes \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle \simeq \langle \psi_{\text{fi}} | (1 - \frac{i}{\hbar} \hat{A} \hat{P}_s | \psi_{\text{in}} \rangle \otimes \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle \quad (\text{A.1})$$

Abbiamo utilizzato l'espansione in serie dell'esponenziale:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + o(x^n)$$

Quindi se vale la condizione 2.6 otteniamo:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{A} \hat{P}_s} \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{i}{\hbar} \hat{A} \hat{P}_s)^n}{n!} = 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{A} \hat{P}_s$$

Trascuriamo gli ordini superiori fermando l'espansione al secondo termine. La (A.1) diventa:

$$\langle \psi_{\text{fi}} | (1 - \frac{i}{\hbar} \hat{A} \hat{P}_s) | \psi_{\text{in}} \rangle \otimes \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle = (\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle - \frac{i}{\hbar} \hat{P}_s \langle \psi_{\text{fi}} | \hat{A} | \psi_{\text{in}} \rangle) \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle =$$

Moltiplico e divido per  $\frac{\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle}$  Quindi:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle} (\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle - \frac{i}{\hbar} \hat{P}_s \langle \psi_{\text{fi}} | \hat{A} | \psi_{\text{in}} \rangle) \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle = \\ & = \langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle (1 - \frac{i}{\hbar} \hat{P}_s \frac{\langle \psi_{\text{fi}} | \hat{A} | \psi_{\text{in}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle}) \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle = \end{aligned}$$

Ora dalla serie torniamo all'esponenziale:

$$\begin{aligned} & = \langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle e^{-\frac{i \hat{P}_s \langle \psi_{\text{fi}} | \hat{A} | \psi_{\text{in}} \rangle}{\hbar \langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle}} \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle = \\ & = \langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle e^{-\frac{i \hat{P}_s \langle \hat{A} \rangle_w}{\hbar}} \langle Q_s | \phi_{\text{in}} \rangle \end{aligned}$$

Con  $\langle \hat{A} \rangle_w = \frac{\langle \psi_{\text{fi}} | \hat{A} | \psi_{\text{in}} \rangle}{\langle \psi_{\text{fi}} | \psi_{\text{in}} \rangle}$



# Bibliografia

- [1] David J. Griffiths, Introduzione alla meccanica quantistica, 2005
- [2] Appunti del corso di metodi matematici per la fisica del prof Fabio Ortolani, Appunti di metodi matematici 2013 (vedi cap.4 paragrafo 4.1).
- [3] Lev D Landau, E.M.Lifsits; Fisica teorica 3, meccanica quantistica, teoria non relativistica, Editori riuniti 2003
- [4] Von Neumann J. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: Princeton university press, 1955.
- [5] Michael A. Nielsen, I.L.Chuang; Quantum Computation and Quantum Information.
- [6] Appunti del prof Cristian Degli Esposti, Introduzione alla teoria dell'informazione quantistica, 2014
- [7] Alain Aspect, Philippe Grangier e Gérard Roger, Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem in Physical Review Letters, vol. 47, 1981.
- [8] Aharonov Y, Albert D, Vaidman L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin  $-1/2$  particle can turn out to be 100. Physical review letters 1988: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.1351>
- [9] Tamir B, Cohen E. Introduction to weak measurements and weak values. Quanta 2013: <http://dx.doi.org/10.12743/quanta.v2i1.14>

- 
- [10] Lev Vaidman, Weak Measurements, 8 settembre 1994, arXiv:hep-th/9408154v2/
- [11] Y.Aharonov, D.Rohrlich; Quantum Paradoxes: Quantum theory for the perplexed. Wiley-Vhc Verlag GmbH and Co. KGaA, 2005
- [12] M. Ozawa, Uncertainty relation for noise and disturbance in generalized quantum measurement; *Annals of Physics (Amsterdam)* 311-416 (2004)
- [13] Richard Feynman, *The Feynman lectures of physics volume 3*, Addison-Wesley Publishing Company (1985)
- [14] Merli P. G., Missiroli G. F., and Pozzi G.: Electron Interferometry with the Elmiskop 101 Electron Microscope, *Journal of Physics E: Scientific Instruments* 7, pp. 729-732. Merli P. G., Missiroli G. F., Pozzi G.: Diffrazione ed interferenza di elettroni. II. Interferenza, *Giornale di Fisica*, 17, pp. 83-101. (1976) <http://l-esperimento-piu-bello-della-fisica.bo.imm.cnr.it/>
- [15] A.Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T.Kawasaki, H. Esawa. *Am.J.Phys.* 57(1989) 117
- [16] Decoherence of Electron Waves Due to Induced Charges Moving Through a Nearby Resistive Material. P. Sonnentag and F. Hasselbach; *Brazilian Journal of Physics*, vol. 35, no. 2B, June, 2005
- [17] Sacha Kocsis, Boris Braverman, Sylvain Ravets, Martin J. Stevens, Richard P. Mirin, L.Krister Shalm, Aephraim M. Steinberg: Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interferometer *Science* Vol. 332 no. 6034 pp. 1170-1173 (2011)
- [18] Tobias Denkmayr, Hermann Geppert, Stephan Sponar, Hartmut Lemmel, Alexandre Matzkin, Jeff Tollaksen, Yuji Hasegawa. *Nature, Communications* 5, Article number: 4492 doi:10.1038/ncomms5492 (29 July 2014)

# Ringraziamenti

Ringrazio il mio relatore e i miei colleghi e amici di fisica, in particolare Antonello Aita, per l'aiuto datomi nella stesura della tesi.