

ALMA Mater Studiorum
Università degli studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia
Dipartimento di Fisica e Astronomia

Teorema del Viriale

Elaborato Finale

Candidato:
Lea Marcotulli

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Daniele Dallacasa

Sessione I
Anno Accademico 2014/2015

Sommario

In questo elaborato si presenta il *teorema del viriale*, introdotto per la prima volta da R. J. E. Clausius nel 1870. È una relazione fra energia cinetica e potenziale totali di un sistema che, se soddisfatta, implica che questo sia in equilibrio. Sono equivalenti le affermazioni: “sistema *virializzato*” e “sistema *in equilibrio*”.

Sebbene in ordine cronologico la prima formulazione del teorema sia stata quella in forma scalare, ricaveremo, per maggiore generalità, la forma tensoriale, dalla quale estrarremo quella scalare come caso particolare.

Sono di nostro interesse i sistemi astrofisici dinamici autogravitanti costituiti da N particelle (intese come stelle, gas etc.), perciò la trattazione teorica è dedotta per tali configurazioni.

In seguito ci concentreremo su alcune applicazioni astrofisiche.

In primo luogo analizzeremo sistemi autogravitanti, per cui l'unica energia potenziale in gioco è quella dovuta a campi gravitazionali. Sarà quindi ricavato il limite di Jeans per l'instabilità gravitazionale, con conseguente descrizione del processo di formazione stellare, la stima della quantità di materia oscura in questi sistemi e il motivo dello schiacciamento delle galassie ellittiche.

Successivamente introdurremo nell'energia potenziale un termine dovuto al campo magnetico, seguendo il lavoro di Fermi e Chandrasekhar, andando a vedere come si modifica il teorema e quali sono le implicazioni nella stabilità delle strutture stellari.

Per motivi di spazio, queste trattazioni saranno presentate in termini generali e con approssimazioni, non potendo approfondire casi più specifici.

Indice

1	Il teorema del Viriale	2
1.1	Cenni storici	2
1.2	Derivazione Matematica	3
2	Applicazioni in Astrofisica	8
2.1	Sistemi autogravitanti	8
2.1.1	Instabilità di Jeans	9
2.1.2	Formazione stellare	11
2.1.3	Materia Oscura	11
2.1.4	Schiacciamento galassie ellittiche	12
2.2	Stabilità gravitazionale in presenza di un campo magnetico	14
2.2.1	Le Pulsar	16

Capitolo 1

Il teorema del Viriale

1.1 Cenni storici

Il 13 Giugno 1870, R.J.E. Clausius formulò, durante una lezione all' "Associazione di scienze naturali e mediche" del Reno Minore, il famoso teorema:

“La vis viva del sistema è uguale al suo viriale”

Nel XIX secolo per *vis viva* si intendeva quella che oggi è chiamata *energia cinetica totale*; inoltre Clausius utilizzò la parola “virias” (plurale di vis, il latino per “forza”) per indicare il termine coinvolto nella seconda metà del suo teorema.

La sua affermazione coinvolgeva medie temporali delle energie totali di un sistema stazionario costituito da N particelle. Riformulato in termini odierni il teorema afferma che: *“l’energia cinetica media del sistema è uguale alla metà della sua energia potenziale media”*

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum F_i \bullet r_i \rangle = -\frac{\langle U \rangle}{2} \quad (1.1)$$

Non venne immediatamente riconosciuta l’importanza di questo teorema finché Maxwell non lo riprese mettendolo in evidenza, quattro anni dopo, nei suoi *Scientific Papers*.

Durante tutto il secolo successivo le applicazioni di questo teorema furono molteplici [1] :

- nel 1903 Lord Rayleigh ne formulò una generalizzazione che in seguito fu ripresa da Parker e sviluppata negli anni '60 estensivamente da Chandrasekhar, fino a giungere alla sua forma tensoriale.
- James Jeans ci studiò piccole perturbazioni all’equilibrio idrostatico delle nubi molecolari, estraendone il criterio per l’insorgenza dell’instabilità gravitazionale.
- Poincaré lo usò per studiare la stabilità di strutture in diverse teorie cosmologiche.
- Paul Ledoux sviluppò negli anni '40 una sua forma variazionale per ottenere i periodi di pulsazioni delle stelle e studiarne la stabilità.
- Chandrasekhar e Fermi lo estesero nel 1953 per includere la presenza di campi magnetici.

Di particolare rilievo è il fatto che lo stesso teorema può essere ottenuto direttamente mediando rispetto al tempo l'identità di Lagrange-Jacobi per il problema degli N corpi

$$\dot{I} = 2(2T + U) = 2(T + E) = 2(2E - U)$$

La profonda differenza fra i “due” teoremi sta nel fatto che, diversamente da come sarebbe stato nel XX secolo, nel XIX non era diffusa la passione per l'unificazione e si pensava che la termodinamica e la dinamica fossero due discipline completamente scorrelate. Non era ancora stata formulata la meccanica statistica, né la caratterizzazione di un gas tramite la sua energia interna e cinetica.

Risultava quindi inspiegabile come due formulazioni, fatte a un secolo di distanza e in ambiti diversi, portassero allo stesso risultato.

1.2 Derivazione Matematica

Un sistema costituito da N particelle puntiformi identiche, interagenti tramite un potenziale gravitazionale, è quello che in meccanica celeste viene chiamato problema degli N corpi (per $N > 2$). Per $N \geq 3$ questo problema non è risolubile in generale poiché non si riescono a formulare $6N - 1$ integrali del moto (leggi di conservazione).

La maggior parte dei sistemi astrofisici reali possono essere considerati sistemi a N corpi, visto che le collisioni geometriche fra due particelle hanno probabilità praticamente nulla di accadere. Per ottenerne una comprensione dettagliata di questi abbiamo dunque bisogno di fare delle approssimazioni.

Introduciamo il concetto fondamentale di funzione di distribuzione (DF) f , definita nello spazio delle fasi (SdF), tale che

$$\int_{R^6} f d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} = M$$

con M massa totale del sistema. La DF rappresenta matematicamente la probabilità che, a un dato istante di tempo, una stella abbia coordinate dello spazio delle fasi nell'intervallo dato.

Si cerca ora la condizione per cui si possa considerare un sistema a N corpi come un fluido continuo, cioè si possa sostituire allo spazio delle fasi $\Gamma \subset R^{6N}$ con lo spazio delle fasi $\gamma \subset R^6$.

Questa semplificazione è attuabile definendo il concetto di *tempo di rilassamento a due corpi* (t_{2b}) [2], che stabilisce il limite fra sistema collisionale e non collisionale.

È un tempo scala (non reale) definito qualitativamente come il tempo che impiega il sistema a perdere la memoria del suo stato iniziale.

Visto che si vuole considerare un fluido continuo, si immagini di analizzare il moto di una particella di prova, che ha una certa velocità iniziale, in questo fluido composto da N particelle distribuite omogeneamente. Bisogna fare delle approssimazioni: in primo luogo trattare questo problema a N corpi come se fossero N problemi a 2 corpi, e inoltre considerare le singole iterazioni come urti iperbolici indipendenti.

Ricaviamo quindi il tempo per il quale la somma delle variazioni di energia cinetica della particella di test eguagli la sua energia cinetica iniziale, il che equivale a chiedere quanto

tempo impiega a ridistribuire l'eccesso di energia che possiede e diventare isotropa con l'ambiente.

Confrontandolo col tempo di attraversamento del sistema $t_{cross} = \frac{2R}{v}$ (R è la dimensione del sistema e v la velocità della particella di test), per sistemi autogravitanti vale l'approssimazione

$$t_{2b} \sim \frac{0.1N}{\ln N} t_{cross} \quad (1.2)$$

Si definiscono sistemi non collisionali quelli per cui il tempo di vita sia maggiore del t_{2b} , collisionali quelli per cui vale il contrario.

Nei casi astrofisici possiamo vedere che per una galassia $t_{2b} \sim 10^{16}$ yr, che è un valore molto maggiore dell'età stessa dell'universo ($13,7 \times 10^9$ yr); quindi è considerabile non collisionale. Sistemi come ammassi globulari ($t_{2b} \sim 10^9$) e ammassi aperti ($t_{2b} \sim 10^8$) sono invece collisionali: hanno il tempo di ridistribuire le differenze di velocità, "rilassarsi" e subire gli effetti dell'evaporazione gravitazionale ¹.

Si noti come aumentando il numero di particelle, l'approssimazione non collisionale è sempre meglio realizzata.

Il motivo di questo comportamento risiede nel fatto che, se il numero di iterazioni gravitazionali per unità di tempo dipende linearmente da N, l'energia trasferita per ognuna di queste è inversamente proporzionale alla \sqrt{N} , seguendo

$$\Delta K \propto \left(\frac{M}{N}\right)^2$$

Quindi maggiore è il numero di urti, minore è l'energia trasferita per piccole masse.

Per procedere con la nostra trattazione passiamo al limite ideale $N \rightarrow \infty$ e $t_{2b} \rightarrow \infty$ di un "continuo non collisionale".

Ogni stella si muove nello spazio delle fasi, quindi anche la probabilità di trovarla in un punto evolve nel tempo. Questa deve essere conservata mentre f evolve, analogamente alla massa di un fluido. Per i fluidi la legge di conservazione della massa è:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (1.3)$$

con ϱ e $\dot{\mathbf{x}}$ che sono la densità e la velocità del fluido.

Vale lo stesso per la conservazione della probabilità:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(f \dot{\mathbf{w}})}{\partial \mathbf{w}} = 0 \quad (1.4)$$

con $\mathbf{w}=(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ sistema arbitrario di coordinate canoniche. Usando le equazioni di Hamilton $(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) = (\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}})$ per eliminare \mathbf{w} , il secondo termine diventa

$$\frac{\partial(f \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial(f \dot{\mathbf{p}})}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \quad (1.5)$$

¹Una volta che le velocità si ridistribuiscono isotropicamente, la loro distribuzione assume il profilo della Maxwell-Boltzmann; alcune particelle, che si trovano nella coda della distribuzione, hanno sicuramente velocità maggiori della velocità di fuga del sistema ($v_f = \sqrt{2GM/R}$) quindi sfuggono all'attrazione gravitazionale.

e sostituendola nella (1.4) otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.6)$$

Questa è l'**equazione non collisionale di Boltzmann** (CBE), un'equazione alle derivate parziali per f in funzione delle coordinate dello Sdf a 6 dimensioni e del tempo. Utilizzando la definizione di derivata convettiva (lagrangiana) $\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \dot{\mathbf{w}} \frac{\partial()}{\partial \mathbf{w}}$ riscriviamo la CBE come

$$\frac{Df}{Dt} = 0 \quad (1.7)$$

In altre parole, il flusso attraverso lo Sdf della probabilità è incomprimibile. La densità di probabilità varierà da punto a punto nello spazio delle fasi, ma è costante se si segue una particolare stella.

La funzione di distribuzione si collega con le osservabili tramite le relazioni

$$\begin{aligned} \int_{R^3} f d^3 \mathbf{v} &= \varrho(\mathbf{x}) \\ \int_{R^3} f \mathbf{v} d^3 \mathbf{v} &= \varrho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \int_{R^3} f [\mathbf{v}_i - \bar{v}_i(\mathbf{x})][\mathbf{v}_j - \bar{v}_j(\mathbf{x})] d^3 \mathbf{v} &= \varrho(\mathbf{x}) \sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \end{aligned}$$

Come nei fluidi è impossibile seguire ogni singola particella del sistema, e si fa uso di proprietà mediate su tutte le particelle, così per un sistema stellare, costituito da parti ognuna con velocità \mathbf{v} e posizione \mathbf{x} , si preferisce calcolare i momenti della f e ottenere proprietà collettive.

La $\varrho(\mathbf{x})$ è la densità di probabilità associata a ogni punto dello Sdf. La $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ dipende dal punto dove ci mettiamo ed è definita come la velocità di streaming dell'elemento di fluido. La σ è un tensore (detto tensore di dispersione delle velocità) scrivibile come matrice simmetrica; poichè simmetrica è diagonalizzabile e visto che i termini sulla diagonale compaiono tutti al quadrato è una matrice definita positiva, quindi un ellissoide.

A ogni punto dello Sdf sono quindi associati una densità, un campo di velocità, orientato in modo diverso in ogni punto, e un ellissoide di dispersione, anche lui con orientazioni e forme diverse in ogni punto.

Le Equazioni di Jeans

Introducendo la CBE la dimensionalità si è ridotta da $6N - 1$ a 6 dimensioni spaziali e una temporale con l'ipotesi di non collisionalità, ma il problema della sua soluzione generale è ancora irrisolto. Per estrarne informazioni e ricavare equazioni differenziali più semplici si fa uso del metodo dei momenti.

Prendendo la CBE in termini di coordinate inerziali [3]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.8)$$

e integrando su tutte le velocità

$$\int_{R^3} d^3 \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} + \int d^3 \mathbf{v} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int_{R^3} d^3 \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (1.9)$$

si ottiene :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \dot{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (1.10)$$

che è l'equivalente della (1.3) per i fluidi. Stavolta non esprime la continuità della massa ma della densità di probabilità considerando la velocità media delle stelle.

Riprendendo la CBE (1.8), moltiplicandola per \mathbf{v} e integrandola di nuovo sulle velocità:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{R^3} d^3 \mathbf{v} f v_i + \int_{R^3} d^3 \mathbf{v} v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int_{R^3} d^3 \mathbf{v} v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (1.11)$$

Applicando le giuste sostituzioni l'equazione finale risulta:

$$\varrho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \varrho v_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = -\varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial(\varrho \sigma_{ij})}{\partial x_i} \quad (1.12)$$

che è l'analogo dell'equazione di Eulero per il flusso di un fluido.

L'ultimo termine assomiglia alla forza di pressione $-\nabla p$. Più precisamente è il tensore degli sforzi che descrive la pressione anisotropa del sistema. Poichè la (1.10) e (1.12) sono state applicate alla dinamica stellare per la prima volta da James Jeans (1919) si chiamano "equazioni di Jeans".

Il problema è che, dato un potenziale ϕ e una densità ϱ , si hanno nove funzioni incognite e solo quattro equazioni. Non serve utilizzare momenti di ordine superiore perchè entrebbero in gioco altri termini misti $\overline{v_i v_j}$ che richiederebbero altre equazioni.

Il sistema non è chiuso, se non in casi particolari, ed questa è la maggior differenza fra fluidi e sistemi dinamici. Per i primi infatti il sistema di equazioni è chiuso dall'equazione di stato che deriva dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann; le particelle del gas infatti ridistribuiscono tramite urti continui la propria velocità e il sistema è sempre isotropo (la temperatura e la pressione sono degli scalari).

Teorema del Viriale

Moltiplichiamo ora le equazioni di Jeans (1.10) e (1.12) per \mathbf{x} e integriamo su tutte le posizioni. Così facendo, le equazioni differenziali diventano un'equazione tensoriale semplice:

$$\int_{R^3} d^3 \mathbf{x} x_k \frac{\partial \varrho \bar{v}_j}{\partial t} = - \int_{R^3} d^3 \mathbf{x} x_k \frac{\partial \varrho \overline{v_i v_j}}{\partial x_i} - \int_{R^3} d^3 \mathbf{x} x_k \varrho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (1.13)$$

Il secondo termine nel lato destro dell'equazione è il tensore di energia potenziale \mathbf{W} . Il primo termine può essere riscritto con l'aiuto del teorema della divergenza:

$$\int_{R^3} d^3 \mathbf{x} x_k \frac{\partial \varrho \overline{v_i v_j}}{\partial x_i} = - \int_{R^3} d^3 \mathbf{x} \delta_{ki} \varrho \overline{v_i v_j} = -2K_{ij} \quad (1.14)$$

Avendo assunto che ϱ si annulla per grandi raggi si definisce il tensore di energia cinetica:

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3 \mathbf{x} \delta_{ki} \overline{v_i v_j}$$

Utilizzando la (1.2), è possibile scomporre il tensore \mathbf{K} nei tensori di energia cinetica ordinata (T) e di dispersione (Π):

$$\begin{aligned} K_{ij} &= T_{jk} + \frac{1}{2}\Pi_{jk} \\ T_{jk} &\equiv \frac{1}{2} \int_{R^3} d^3\mathbf{x} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j \\ \Pi_{jk} &\equiv \int_{R^3} d^3\mathbf{x} \rho \sigma_{jk}^2 \end{aligned}$$

Riscriviamo la (1.13):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{R^3} d^3\mathbf{x} \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) = 2T_{ij} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (1.15)$$

Definiamo il tesore d'inerzia

$$I_{jk} \equiv \int_{R^3} d^3\mathbf{x} \rho x_j x_k$$

e differenziamolo rispetto al tempo:

$$\frac{dI_{jk}}{dt} = \int_{R^3} d^3\mathbf{x} \frac{\partial \rho}{\partial t} x_j x_k = \frac{d}{dt} \int_{R^3} d^3\mathbf{x} \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) \quad (1.16)$$

Nella seconda uguaglianza si è fatto uso dell'equazione di continuità e del teorema della divergenza.

Mettendo insieme la (1.15) e la (1.16) otteniamo il **teorema del viriale** in forma **tensoriale**:

$$\frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{ij} + \Pi_{jk} + W_{jk} \quad (1.17)$$

Il teorema del viriale è quindi un serie infinita di identità tensoriali.

Ogni sistema ha il suo teorema del viriale ed è in equilibrio se, per $\ddot{\mathbf{I}} = 0$, segue queste identità. Bisogna sottolineare il fatto che il viriale non distingue fra equilibrio stabile o instabile.

Capitolo 2

Applicazioni in Astrofisica

2.1 Sistemi autogravitanti

Andando a prendere la traccia della (1.17) si ottiene la forma **scalare** del **teorema del viriale**:

$$\frac{1}{2} \frac{dI}{dt} = 2T + \Pi + U \quad (2.1)$$

avendo definito

$$U \equiv Tr(\mathbf{W})$$

$$K \equiv Tr(\mathbf{K}) = tr(\mathbf{T}) + \frac{1}{2}tr(\mathbf{\Pi}) = T + \frac{1}{2}\Pi$$

Se il sistema è in uno stato di equilibrio, $\dot{I} = 0$ allora la (2.1) si può riscrivere

$$2K + U = 0 \quad (2.2)$$

Prendiamo in considerazione l'energia totale del sistema che si conserva:

$$E = K + U$$

per la (2.1)

$$E = -K$$

$$E = \frac{1}{2}U$$

Per visualizzarne meglio il significato si può rappresentare il **piano del viriale** come in Figura 2.1. Su questo piano è raffigurata la retta del viriale $T = \frac{|U|}{2}$ e sono state anche tracciate quelle dell'energia totale. La bisettrice del piano è la retta $E_{tot} = 0$, che non ha grande importanza in quanto rappresenta un sistema che può essere in equilibrio solo nell'origine. Sopra e sotto la bisettrice abbiamo le regioni cui $E_{tot} > 0$ e $E_{tot} < 0$ rispettivamente.

Se il sistema si trova nella regione per cui $E_{tot} > 0$, non potrà essere all'equilibrio, perchè implicherebbe un'energia potenziale positiva e un'energia cinetica negativa, che sono condizioni di forte instabilità.

Se invece si trova nella regione $E_{tot} < 0$, il sistema interseca la retta del viriale in un

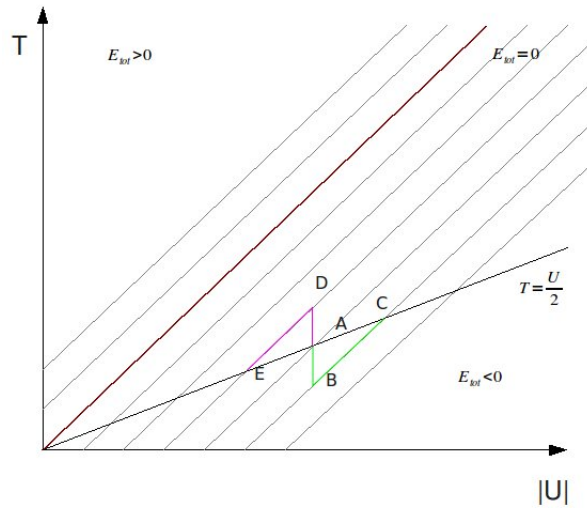


Figura 2.1: Rappresentazione qualitativa del Piano del Viriale

punto e quindi può essere virializzato. Non è detto che un sistema raggiunga l'equilibrio, ma se succede si pone lungo questa retta e, se l'equilibrio non è instabile, può rimanerci o oscillare fra posizioni di equilibrio.

Per sistemi autogravitanti il potenziale di interazione si considera generato dalla distribuzione di densità ϱ di particelle:

$$\Phi(\mathbf{x}; t) = -G \int \frac{\varrho(\mathbf{x}'; t) d^3 \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (2.3)$$

Quindi l'energia potenziale di autogravitazione è data da:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int \varrho(\mathbf{x}; t) \Phi(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} G \int \int \frac{\varrho(\mathbf{x}; t) \varrho(\mathbf{x}'; t) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \end{aligned}$$

È sempre negativa, quindi per (2.1) l'energia cinetica è sempre positiva. Prendiamo un sistema in equilibrio (nel punto A in figura 2.1). Se viene raffreddato (perde energia cinetica), l'energia totale sarà minore di quella iniziale (si posiziona in B); l'unico modo per tornare all'equilibrio è aumentare la propria energia cinetica e diminuire quella potenziale seguendo la retta di conservazione dell'energia totale (C); il sistema finale risulterà più caldo, più concentrato e meno energetico. Viceversa, se il sistema viene riscaldato (guadagna energia cinetica) sarà costretto a riportarsi in uno stato di equilibrio più freddo, diffuso e più energetico ($A \rightarrow D \rightarrow E$).

2.1.1 Instabilità di Jeans

Si consideri una nube molecolare in una regione di formazione stellare. Si assuma che sia sferica, di densità uniforme e costante, trattabile come sistema autogravitante.

Se si trascurano effetti rotazionali, magnetici o turbolenti, si può considerare la nube in equilibrio fin tanto che la forza gravitazionale bilanci le forze di pressione. Tale bilancio è l'analogo del teorema del viriale ((2.1)). Infatti la pressione di un gas è connessa alla sua temperatura tramite la legge dei gas perfetti, quindi alla sua energia cinetica; l'energia gravitazionale è proprio quella che entra nel termine potenziale. Le due uguaglianze sono perciò equivalenti.

Fu Jeans il primo a studiare gli effetti di piccole perturbazioni all'equilibrio idrostatico, giungendo a definire il criterio per l'insorgenza di instabilità gravitazionale e alla formazione di una protostella.

Siano R il raggio, M la massa, T la temperatura e N il numero di particelle della nube molecolare. Allora possiamo scrivere che

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

e

$$K = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu m_h} k_B T$$

La condizione per il collasso è che l'energia potenziale gravitazionale superi (in modulo) quella cinetica (2.1)

$$2K < |U|$$

cioè

$$3 \frac{M}{\mu m_h} k_B T < -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Questa disuguaglianza rappresenta il *Criterio di Jeans* per l'insorgenza di instabilità gravitazionale. Spesso si preferisce scritto in termini di massa di Jeans

$$M_J = \left(\frac{5k_B T}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se $M_{nube} > M_J$ il sistema comincia il collasso muovendosi su stati di equilibrio seguendo la retta del viriale. Metà della sua energia gravitazionale verrà trasformata in energia cinetica e irradiata, l'altra metà servirà per costituire il legame del sistema.

Tipici valori della massa di Jeans calcolati per $T = 10^2$ K ¹:

ρ (cm^{-3})	M_J (g)
1	$2,4 \times 10^{26}$
10^2	$2,4 \times 10^{25}$
10^3	$7,7 \times 10^{24}$

¹Si sono considerati valori di ρ tipici delle nubi molecolari.

2.1.2 Formazione stellare

Prendiamo ora il caso di una nube di gas diffusa e fredda ², che parta quindi da un'energia totale positiva, e abbia $M_{nube} > M_J$. Il gas di questa nube non è in equilibrio ed è inoltre immerso in uno spazio esterno a temperatura diversa ($T_A < T_{nube}$). Per la termodinamica può irraggiare e perdere energia seguendo la (2.1).

In queste condizioni è iniziato il collasso gravitazionale che avviene su tempi scala dinamici $t_d \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$. A queste temperature il gas infatti è trasparente alla radiazione emessa e non contrasta la caduta libera.

Al progredire della contrazione, l'aumento della densità produce anche un innalzamento della temperatura che comincia a favorire fenomeni di ionizzazione (H ionizza a 10^4 K) e della pressione; il materiale inizia a diventare opaco alla radiazione e ad assorbire l'energia rilasciata dalla contrazione. Il processo continua finchè non viene raggiunto uno stato di quasi equilibrio ($d^2I/dt^2 \rightarrow 0$). I tempi scala a questo punto passano da dinamici a termodinamici.

Se in questo stato di quasi equilibrio i tempi di irraggiamento sono $t_{irr} \gg t_d$, la nube di gas perde energia molto lentamente e sale, oscillando fra stati di equilibrio, lungo la retta del viriale. A causa infatti del continuo irraggiamento, il sistema perde energia raffreddandosi e conseguentemente contraendosi seguendo le equazioni

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{dK}{dt} \\ \frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{dU}{dt}\end{aligned}$$

Il processo termina quando c'è un bilancio di energia con una sorgente di energia interna. A temperature di 10^7 K si accendono le reazioni termonucleari che contrastano la contrazione; le forze sono a questo punto bilanciate e la si può parlare di *stella*.

2.1.3 Materia Oscura

L'energia cinetica di un sistema stellare di massa M è semplicemente $K = \frac{1}{2}M\sigma_v^2$ (σ_v^2 detta dispersione di velocità viriale) e l'energia potenziale è $|U| = \frac{GM^2}{R_v}$ (R_v detto raggio del viriale). Inserendole nel teorema del viriale si ricavano σ_v^2 e R_v :

$$\sigma_v^2 = \frac{2K}{M} \tag{2.4}$$

e

$$R_v = \frac{GM^2}{|U|} \tag{2.5}$$

Da queste due relazioni, noti i valori di dispersione di velocità e le dimensioni del sistema, si può ricavare la massa totale del sistema tramite

$$M = \frac{\sigma_v^2 R_v}{G} \tag{2.6}$$

²Le regioni di formazione stellare sono regioni del mezzo interstellare con temperature tipiche di 10^2 K, in cui l'idrogeno è ancora in forma molecolare.

Andando a considerare una galassia come sistema autogravitante composto solo da stelle, si può applicare la (2.6) e ottenere una stima della massa (σ_v^2 si misura tramite l'effetto doppler e la misura dei moti propri delle stelle). Quella che si trova risulta molto maggiore rispetto a quella stimata usando il mass to light ratio ³

$$\Upsilon = -3 \frac{J}{\tilde{J}} \quad (2.7)$$

dove $J \equiv 2\pi \int_0^\infty dR R I(R) \sigma_{\parallel}^2(R)$ e \tilde{J} è un integrale che dipende solo dall'intensità luminosa $I(R)$.

Questa è stata una fra le tante evidenze sperimentali che hanno suggerito che l'universo fosse costituito da una massa non visibile che si trova ovunque nello stesso rapporto con la materia barionica.

A questa massa è stato dato il nome di *materia oscura* poichè non ha interazioni elettromagnetiche. La sua natura è tuttora sconosciuta.

2.1.4 Schiacciamento galassie ellittiche

Dall'analisi delle isofote delle galassie ellittiche si scoprì che erano ellissoidi di rotazione (da qui il nome).

Una delle proprietà più dibattute di questi oggetti è stato il loro schiacciamento.

Inizialmente si pensava fosse la rotazione a produrlo e il problema interessò grandi matematici come McLaurin, Jacobi, Dirichlet, Riemann, G. Darwin finchè Poincaré lo risolse.

Con l'avvento dei CCD nel '78 si iniziarono a misurare i campi di velocità di questi oggetti tramite l'analisi spettrale. Si scoprì che le galassie ellittiche ruotavano molto meno di quanto ci si aspettasse per avere quello schiacciamento. Fu Binney a dire per primo che erano schiacciate per l'anisotropia del tensore di dispersione di velocità σ^2 (si veda (1.2)).

Poichè si vogliono collegare proprietà osservative alla teoria, riformuliamo il teorema del viriale in modo che coinvolga la velocità media (\bar{v}_{\parallel}) e la dispersione di velocità (σ_{\parallel}) lungo la linea di vista (los)

$$\bar{v}_{\parallel}^2 = \frac{1}{\Sigma} \int dx_{\parallel} \int d^3\mathbf{v} v_{\parallel} f \quad \sigma_{\parallel}^2 = \bar{v}_{\parallel}^2 + \bar{v}_{\parallel}^2$$

con $\Sigma = \int dx_{\parallel} \varrho$ e ϱ definita dalla (1.2).

Integrando $\Sigma \bar{v}_{\parallel}^2$ su tutto il cielo si ottiene

$$\int d^2\mathbf{x} \Sigma \bar{v}_{\parallel}^2 = \int d^2\mathbf{x} \Sigma (\sigma_{\parallel}^2 + \bar{v}_{\parallel}^2) = \frac{2}{M} \sum_{ij} \hat{s}_i K_{ij} \hat{s}_j$$

dove M è la massa della galassia, K_{ij} è il tensore di energia cinetica e \hat{s} è il versore lungo la los. Se prendiamo il caso di galassia a simmetria assiale (z asse di simmetria) che ruota attorno a questo asse (yz è definito il piano del cielo), in queste coordinate i

³La derivazione di questa formula procede applicando il teorema e facendo molte approssimazioni sulla struttura del sistema e per mancanza di spazio qui non viene riportata; si veda [3].

tensori \mathbf{K} , \mathbf{T} e \mathbf{W} sono diagonali. Inoltre T_{zz} è uguale a zero perchè il moto avviene solo lungo x e y . Allora $\hat{\mathbf{s}}\mathbf{K}_{ij}\hat{\mathbf{s}} = K_{xx}$.

Il teorema del viriale tensoriale quindi produce due equazioni

$$2K_{xx} + W_{xx} = 0$$

$$2K_{zz} + W_{zz} = 0$$

che messe a sistema portano a

$$\frac{M(\langle\sigma_{\parallel}^2\rangle + \langle\bar{v}_{\parallel}^2\rangle)}{\Pi_{zz}} = \frac{W_{xx}}{W_{zz}}$$

Visto che σ_{\parallel} è dato dalla somma di un termine dovuto al tensore di dispersione di velocità $\sigma(\mathbf{x})$ e di un termine dovuto alla variazione di $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ lungo la linea di vista, definito $u(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) - \bar{v}_{\parallel}$:

$$\sum \sigma_{\parallel}^2 = \int dx_{\parallel} \rho(\mathbf{x})(\sigma_{xx}^2 + u^2)$$

e integrandola su tutto il cielo si ottiene:

$$\frac{\Pi_{xx}}{M} = \langle\sigma_{\parallel}^2\rangle - \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) u^2$$

Introduciamo allora il parametro di anisotropia globale δ per quantificare il grado di deviazione dall'isotropia

$$\Pi_{zz} = (1 - \delta)\Pi_{xx}$$

Riscriviamo la (2.1.4)

$$\frac{\langle\bar{v}_{\parallel}^2\rangle}{\langle\sigma_{\parallel}^2\rangle} = \frac{(1 - \delta)W_{xx}/W_{zz} - 1}{\alpha(1 - \delta)W_{xx}/W_{zz} + 1} \quad (2.8)$$

con $\alpha \equiv \frac{1}{\langle\bar{v}_{\parallel}^2\rangle} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) u^2$ parametro adimensionale che non dipende da quanto rapidamente ruota la galassia ma solo da come variano la densità di stelle e la velocità di streaming nel piano (R, z) .

Per modelli galattici i valori di α sono compresi fra (0.05, 0.02). La parte sinistra dell'equazione può essere misurata spettroscopicamente, mentre i rapporti fra le componenti di \mathbf{W} si possono calcolare fotometricamente se si assume che la luce della galassia sia un traccante della massa.

Se le superfici di equidensità sono simil sferoidi, il rapporto W_{xx}/W_{zz} dipende solo dall'ellitticità ϵ dello sferoide, e non dal profilo di densità radiale. Per tali sistemi la parte destra di (2.8) dipende solo da α , ϵ e δ .

Il grafico in Figura 2.2 raffigura la relazione fra lo scarto quadratico medio della velocità di rotazione e della velocità di dispersione per due valori di α (0.15, 0.1) e riporta i valori di δ . Vi sono raffigurate 48 galassie ellittiche lenticolari; si noti che la maggior parte giace fra valori di $0 \leq \delta \leq 0.3$.

Si conclude che la maggior parte delle galassie ellittiche hanno tensori di dispersione fortemente anisotropi. Questa anisotropia influisce tanto quanto la rotazione nel determinare la forma di questi oggetti. Per galassie con massa minore è la rotazione a influenzare maggiormente la forma, mentre per quelle molto massicce è piuttosto il tensore di dispersione di velocità.

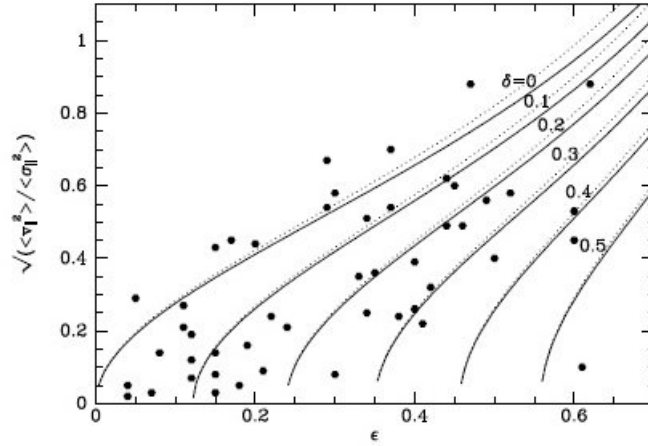


Figura 2.2: $\sqrt{\langle v_{\parallel}^2 \rangle / \langle \sigma_{\parallel}^2 \rangle}$ in funzione dell'ellitticità (ϵ) di galassie sferoidali viste di taglio per vari valori dell'anisotropia δ [3]

2.2 Stabilità gravitazionale in presenza di un campo magnetico

La potenza del teorema del viriale sta nel fatto che la natura dell'energia potenziale e cinetica possono variare, e possono essere incluse forze più complicate.

Fu Fermi, con l'aiuto di Chandrasekhar, il primo a investigare la presenza di un campo magnetico galattico. In due articoli del 1953, vengono riassunte le loro conclusioni ottenute dall'inserimento di un campo magnetico nello studio di masse cosmiche.

Nel secondo, si investiga il problema della stabilità gravitazionale in presenza di un forte campo magnetico (si assume che queste abbiano conduttività elettrica infinita)[4].

La condizione di stabilità è basata sul criterio di stabilità di Jacobi:

Condizione necessaria per la stabilità è che $E_{tot} < 0$

Fermi e Chandrasekhar scrissero questa condizione riprendendo una forma semplificata del teorema del viriale in forma tensoriale

$$2\mathcal{T} + 3(\gamma - 1)\mathcal{U} + \mathcal{M} + \Omega = 0 \quad (2.9)$$

con \mathcal{T} che è l'energia cinetica del moto delle masse, \mathcal{U} l'energia termica dei moti molecolari, \mathcal{M} l'energia magnetica, Ω l'energia potenziale gravitazionale e γ è il rapporto fra calori specifici.

Questa relazione prende in considerazione i valori istantanei dei vari tipi di energia. Affinchè ci sia la stabilità, l'energia cinetica dei moti macroscopici deve scomparire e l'energia totale deve essere negativa.

Vari passaggi ci portano a ottenere ⁴:

$$(3\gamma - 4)(|\Omega| - \mathcal{M}) > 0$$

⁴Si veda per approfondimento [5].

che per $\gamma > 4/3$, diventa $\mathcal{M}/|\Omega| < 1$.

Ora si consideri il caso di una sfera incompressibile fluida con un campo magnetico uniforme all'interno e un campo di dipolo all'esterno e si prenda in esame il caso di una piccola perturbazione. L'equazione di deformazione della superficie è

$$r(\cos\theta) = R + \epsilon P_l(\cos\theta)$$

dove R è il raggio della sfera imperturbata e $P_l(\cos\theta)$ rappresenta il polinomio di Legendre di ordine l .

Il parametro di perturbazione soddisfa la condizione $\epsilon \ll R$.

Il risultato di tale analisi mostra che la perturbazione del primo ordine in ϵ è dovuta soltanto alla deformazione P_2 e ha un segno negativo. Perciò tende a far diventare la sfera uno sferoide oblato e il risultato finale è

$$\frac{\epsilon}{R} = -\frac{35 H^2 R^4}{24 GM^2} \quad (2.10)$$

con M la massa del sistema.

Se approssimiamo lo sferoide oblato a un ellissoide, mediando sull'angolo θ , otteniamo

$$r \sim R + \frac{1}{4}\epsilon = R \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\epsilon}{R} \right)$$

Siano a , b e c i tre semiassi dell'ellissoide e sia $a = c$ e b il semiasse minore nella direzione del campo magnetico, possiamo scrivere $b \sim a(1 - \frac{1}{2}e^2)$ con l'eccentricità $e \ll 1$. Prendendo $a = c = R$, riscrivendo la (2.2), otteniamo $|\epsilon| = 2Re^2$ e infine

$$e^2 = \frac{35}{48} \frac{R^4}{GM^2} H^2$$

L'effetto principale del campo magnetico sulla stabilità è l'influenza sull'eccentricità che cresce linearmente con esso.



Figura 2.3: Immagine a raggi X della pulsar delle Vele

2.2.1 Le Pulsar

Prendiamo in considerazione un esempio reale, il caso di una **Pulsar**⁵ (Figura 2.1) per cui $R = 10^6$ cm e $M = 1.4M_{\odot}$. La (2.2) dà

$$e^2 = 0.7 \times 10^{-36} H^2$$

da cui possiamo ipotizzare delle stime per H :

$$\begin{aligned} e \sim 10^{-6} & \text{ per } H \sim 10^{12} \\ e \sim 10^{-4} & \text{ per } H \sim 10^{14} \\ e \sim 10^{-3} & \text{ per } H \sim 10^{15} \end{aligned}$$

Quando furono scoperte le pulsar (1967), Ferrari e Ruffini calcolarono quale fosse la forza del campo magnetico necessaria a ottenere una stella di neutroni sferica obblata. Per ottenere un $\epsilon \sim 10^{-4}$ si necessita di $H \sim 10^{15}$; visto che $\epsilon = (a-b)/\sqrt{ab}$, nel nostro caso corrisponde a $e \sim 10^{-2}$.

Tipici valori astrofisici del campo magnetico misurati (espressi in 10^x) sono infatti:

	R(cm)	T(K)	H(gauss)
corona solare	11	6	5
HII	18	4	-5
ISM	20	2	-6
IGM	23	8	-7
WD	8	6	8
NS	6	9	13

Si vede che i valori per le stelle di neutroni (NS) oggi accettati sono di $H \sim 10^{13}$ gauss, molto minori rispetto a quelli teorizzati per avere lo sferoide oblatato. Ciononostante si ipotizza l'esistenza di un tipo di stella con forte campo magnetico ($H \sim 10^{15}$), detta *magnetar*, che spiegherebbe la presenza di oggetti come i soft gamma repeater e le pulsar anomale a raggi X.

⁵Sono stelle di neutroni che a causa della loro elevata rotazione e del grande campo magnetico emettono coni ristretti di radiazione elettromagnetica ai poli, osservati dalla Terra come impulsi.

Bibliografia

- [1] G. Collins : *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*, 2003
- [2] L. Ciotti : *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*, 2002, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*
- [3] J. Binney and S. Tremaine : *Galactic Dynamics*, 2008, *Princeton University Press*
- [4] D. Boccaletti : *From magnetohydrodynamics to magnetars* , 2002
- [5] S. Chandrasekhar and E. Fermi : *Problems of Gravitational Stability in the presence of magnetic field*, 1953