

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

Il Ruotamento nelle configurazioni FPL

Tesi di Laurea in Combinatoria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Fabrizio Caselli

Presentata da:
Guido Cavrini

I Sessione
Anno Accademico 2014-2015

A chi mi ha dato il coraggio
di proseguire nei momenti difficili

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | 7 |
| 1 Impostazione del problema | 9 |
| 1.1 La griglia di partenza | 9 |
| 1.2 Costruzione dei grafi | 11 |
| 1.3 L'accoppiamento π | 12 |
| 1.4 Alcune biezioni importanti | 13 |
| 2 Ruotamento | 19 |
| 2.1 G_S nel grafo colorato | 19 |
| 2.2 G_S nel grafo orientato | 20 |
| 2.3 G_S nelle Height Function | 20 |
| 2.4 G_S nelle ASM | 21 |
| 2.5 Definizione | 22 |
| 2.6 Altra decomposizione | 23 |
| 3 Congenttura di Cohn e Propp | 25 |
| 3.1 Vertici Fissi | 25 |
| 3.2 Lemma | 26 |
| 3.3 Teorema | 27 |
| 4 Generalizzazione | 31 |
| 4.1 Nuove notazioni | 31 |
| 4.2 Una griglia più generale | 34 |
| 4.3 La mappa H_Γ | 35 |
| 4.4 Ruotamento Generalizzato | 38 |
| 4.5 In un dominio generico | 41 |
| Bibliografia | 43 |

Introduzione

Nella meccanica statistica il modello *square ice* consiste nella rappresentazione di un cristallo di ghiaccio come un grafo orientato con atomi di ossigeno ai vertici e atomi di idrogeno ai lati. Un atomo di idrogeno si trova tra due atomi di ossigeno ed è legato con legame covalente ad uno di essi. Possiamo quindi rappresentare questo modello orientando i lati e in tal caso si ha che ogni lato si trova tra due vertici ma punta solo a uno dei due. Poiché ogni atomo di ossigeno ha due legami covalenti con l'idrogeno, si ha che ogni vertice ha due frecce entranti e due uscenti. Tale modello è detto *square* perché il suo grafo è parte di una griglia quadrata.

In meccanica statistica, tale modello è interessante con condizioni al contorno non restrittive ma in combinatoria siamo interessati a studiare un particolare grafo con alcune restrizioni al bordo ed è di questo che ci occuperemo in questa tesi. Partendo da un problema concreto di meccanica statistica, siamo passati ad analizzare un problema di combinatoria algebrica pura riguardante le configurazioni FPL di notevole interesse storico in quanto importante esempio di applicazione delle matrici a segno alterno. Lo studio di queste matrici affonda le sue radici nello studio dei λ -*determinanti* da parte di Mills, Robbins e Rumsey e ha trovato diverse applicazioni in problemi di combinatoria quali il DDP (*Descending Plane Partitions*) o il TSSCPP (*Totally Symmetric Self-Complementary Plane Partitions*) ai quali hanno lavorato matematici come Andrews, Mills, Robbins, Rumsey, Zeilberger e Kuperberg. Questa tesi di laurea triennale in matematica vuole essere di aiuto a chi vuole intraprendere uno studio più approfondito delle configurazioni FPL che in questi ultimi anni sono stati oggetto di studio per chi si occupa di combinatoria. Vista la vastità dell'argomento, in questo lavoro abbiamo trattato esclusivamente il *Ruotamento*, biezione utilizzata da Wieland nella prova della simmetria diedrale delle configurazioni FPL. Questa biezione risulta fondamentale nella dimostrazione di una delle congettura più interessanti riguardo a questo argomento, ovvero quella di Razumov-Stroganov, dimostrata solamente nel 2010 da due matematici italiani, Contini e Sportiello.

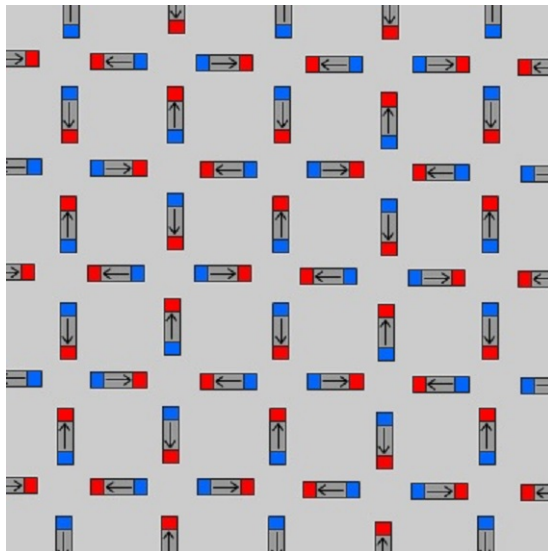


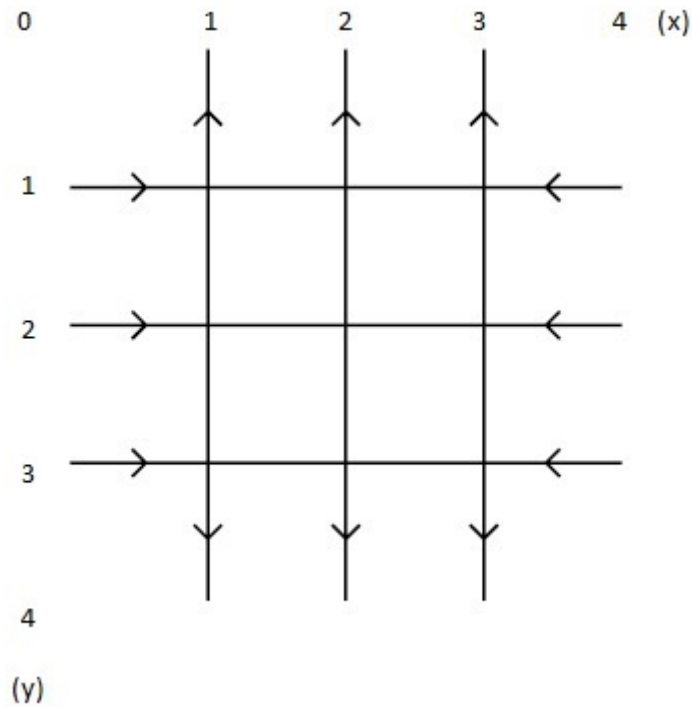
Figura 1: Il modello *square ice*

Capitolo 1

Impostazione del problema

1.1 La griglia di partenza

Ai bordi della nostra griglia quadrata $n \times n$ vi sono vertici con un solo lato che chiamiamo *vertici esterni*. Tutti i vertici all'interno della griglia li chiamiamo invece *vertici interni*. Tali vertici presentano 4 lati ciascuno. Ogni vertice presenta due coordinate (assegnate come mostrato in figura).



Si nota facilmente che nei vertici interni entrambe le coordinate x e y sono comprese tra 1 ed n mentre per gli esterni una delle due sarà 0 oppure $n + 1$.

Preso un vertice $V = (x, y)$ si ha che V è un *vertice interno* se $1 \leq x, y \leq n$. È invece un *vertice esterno* se $1 \leq x \leq n$ e $y \in \{0, n + 1\}$ (o con la x e la y a ruoli invertiti).

Diamo inoltre ad ogni vertice (x, y) la stessa parità di $x + y$. Ad esempio il vertice $(1, 3)$ sarà un vertice pari ($1 + 3 = 4$ che è pari) mentre il vertice $(2, 1)$ è dispari.

Inoltre ogni casella sarà identificata con il suo vertice in basso a sinistra. Definiamo una casella pari se tale vertice che la identifica è pari. Analogamente per le caselle dispari. Le caselle al bordo presentano 2 o 3 lati mentre tutte le altre ne hanno 4.

Ad ogni lato possiamo assegnare un'orientazione. Richiediamo che le frecce al bordo siano entranti se orizzontali e uscenti se verticali (condizione al bordo). Un altro modello equivalente a questo prevede di colorare i lati della griglia. In tal caso la condizione al bordo diventa quella di avere alternanza nei colori dei lati esterni come mostrato nella seguente figura.

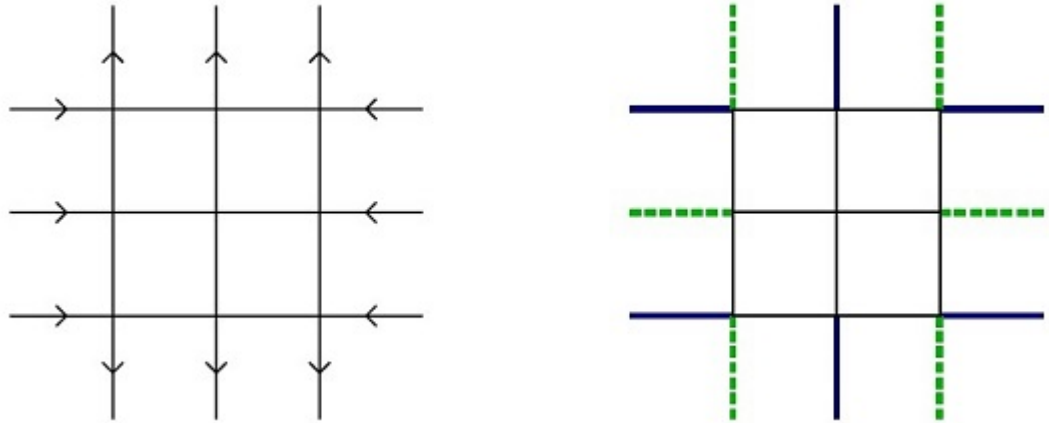


Figura 1.1: le condizioni al bordo

1.2 Costruzione dei grafi

Ci occuperemo di considerare tutti i grafi orientati o colorati che soddisfano le seguenti condizioni. Nel caso di un grafo orientato, richiediamo che ogni vertice interno si trovi tra 2 frecce entranti e 2 frecce uscenti. Con questa orientazione osserviamo che ogni vertice interno si può trovare in una delle 6 configurazioni possibili mostrate in figura.

Nel caso di un grafo colorato, richiediamo che ogni vertice si trovi tra 2 lati neri e 2 lati bianchi.

Si può costruire una biezione tra l'insieme dei grafi colorati (che denotiamo con CG) e quello dei grafi orientati (che denotiamo con OG). Una tale biezione agisce in questo modo: le frecce dirette da vertici dispari a vertici pari corrispondono ai lati neri (rappresentati a volte con una linea continua) e quelle dirette da vertici pari a vertici dispari corrispondono ai bianchi (rappresentati a volte con una linea tratteggiata). Si nota facilmente che nei vertici dispari le frecce entranti saranno di colore bianco mentre quelle uscenti saranno di colore nero. Viceversa per i vertici pari (entranti=nere mentre uscenti=bianche).

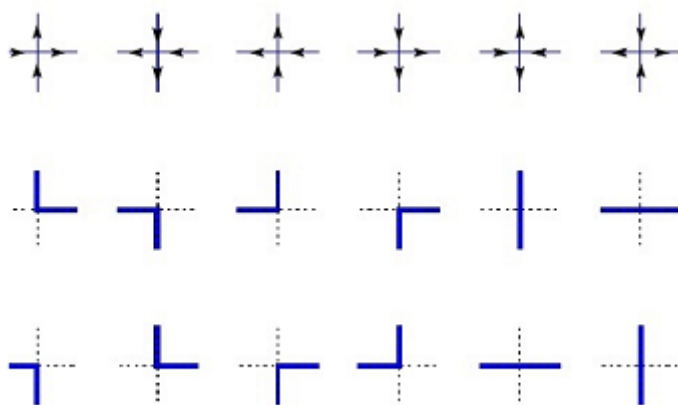


Figura 1.2: In alto le 6 possibili configurazioni, in mezzo la corrispondente colorazione nei vertici dispari e in basso la corrispondente colorazione nei vertici pari.

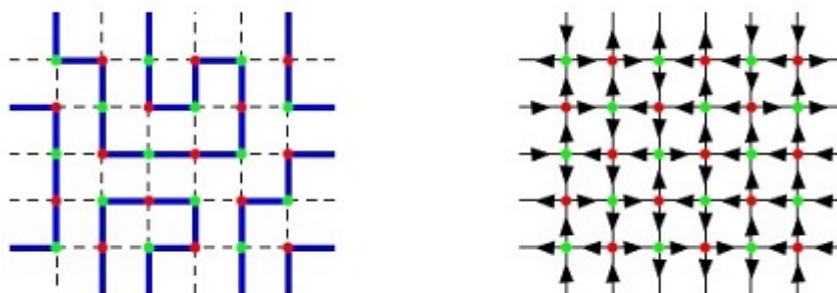
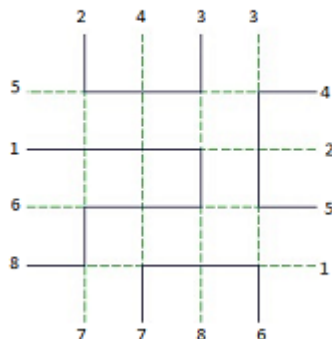


Figura 1.3: Una biezione tra il grafo colorato e quello orientato

1.3 L'accoppiamento π

Consideriamo il modello a lati colorati. Partendo da un vertice esterno nero (ossia tale che l'unico lato adiacente ad esso sia nero) vi è un unico modo per proseguire il cammino nero senza tornare indietro (questo è dovuto al fatto che ogni vertice sia compreso tra 2 lati neri e due bianchi). Chiaramente lo stesso discorso si può fare partendo da vertici esterni bianchi. Così facendo si creano cammini monocromatici che collegano tra loro due vertici esterni dello stesso colore formando così delle *coppie*. L'insieme di queste coppie lo chiamiamo *accoppiamento* e lo denotiamo con la lettera π .

Per semplificare questa notazione etichettiamo i vertici esterni neri in questo modo: chiamiamo 1 quello in posizione $(0, 1)$ e numeriamo gli altri in modo crescente in senso orario. Per quelli bianchi facciamo invece così: tracciamo la retta $y = x$ e li etichettiamo con la stessa etichetta del loro riflesso nero rispetto a tale retta. Verranno in tal modo ordinati in senso antiorario come mostrato in figura.



In questo modo il nostro grafo colorato presenterà un sottografo nero e uno bianco. Se ci concentriamo solo su uno dei due sottografi possiamo osservare che le componenti connesse di questo grafo sono cicli (se $n > 3$, altrimenti non li posso avere), cammini aperti e punti isolati (i vertici esterni dell'altro colore).

1.4 Alcune biezioni importanti

Le *matrici a segno alterno* (ASM) sono matrici i cui elementi sono 0, +1 o -1 tali che in ogni riga e in ogni colonna 1 e -1 si alternino, trascurando gli zeri, partendo da 1 in modo che la somma degli elementi di ogni riga e di ogni colonna dia per risultato 1. Vediamo alcuni esempi.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Figura 1.4: Le 7 matrici a segno alterno di ordine 3

Denotiamo $ASM(n)$ l'insieme delle matrici a segno alterno di ordine n . È noto che

$$|ASM(n)| = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} \quad (1.1)$$

Ve ne sono 2 di ordine 2, 7 di ordine 3 e 252 di ordine 4.

Un altro genere di matrici che ci interessano sono le cosiddette *Height Function* (termine tipico della meccanica statistica. A volte queste matrici sono chiamate *corner sum matrix* o *skewed summation*). Queste matrici sono quadrate di ordine $n + 1$ e tali che ogni elemento della matrice differisca di uno da tutti gli altri elementi adiacenti ad esso. Inoltre, gli elementi di posto $(1, 1)$ e $(n + 1, n + 1)$ sono $n + 1$ mentre quelli di posto $(1, n + 1)$ e $(n + 1, 1)$ sono 0 da cui si ha un'unica possibilità per riempire la prima e l'ultima riga e la prima e l'ultima colonna. Denotiamo $\text{HF}(n + 1)$ l'insieme delle Height Function di ordine $n + 1$. Vediamo degli esempi.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si può costruire una biezione esplicita tra $\text{ASM}(n)$ e $\text{HF}(n + 1)$. Di seguito solo un'idea di come procedere. Dobbiamo immaginare le 2 matrici *incastrate* tra di loro come mostrato in figura. A sinistra vediamo come passare da ASM a Height Function mentre a destra il viceversa.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| | ? | ? | ? | ? | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | ? | ? | ? | 1 |
| | ? | ? | ? | ? | | 1 | -1 | 0 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | ? | ? | ? | 2 |
| | ? | ? | ? | ? | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | ? | ? | ? | 3 |
| | ? | ? | ? | ? | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Per passare da una Height Function alla corrispondente ASM dobbiamo, per ogni $?$ che troviamo, sommare l'elemento in alto a sinistra (rispetto al nostro $?$ con l'elemento in basso a destra. Dobbiamo poi sottrarre a questo numero gli altri 2 che si trovano intorno al $?$ (ossia quello in alto a destra e quello in basso a sinistra). Troviamo quindi 0 (che corrisponde ad uno 0 nella ASM corrispondente), 2 o -2 che corrispondono, rispettivamente a 1 e -1 nella ASM corrispondente. Analogamente il viceversa. Applichiamo lo stesso meccanismo per trovare il numero da sostituire a $?$. La figura sottostante ci permette di capire meglio questo meccanismo.

| | | | | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Figura 1.5: Esempio di biezione tra ASM e Height Function

In seguito lavoreremo principalmente con le ASM ma è utile introdurre anche le Height Function in quanto la definizione di *Ruotamento*, un tipo di biezione che vedremo in seguito e che costituisce la parte fondamentale della tesi, risulta molto comoda in termini di queste matrici.

Passiamo ora alla costruzione della biezione tra OG e $ASM(n)$. La configurazione con le frecce verticali entranti e orizzontali uscenti rappresenta -1 nelle matrici a segno alterno mentre quella con le frecce verticali uscenti e orizzontali entranti corrisponde a $+1$. Tutte le altre 4 configurazioni, caratterizzate dal fatto di avere le frecce orizzontali dirette nella stessa direzione (lo stesso per quelle verticali) corrispondono a 0.

Potrebbe a priori non essere molto chiaro che partendo da una matrice a segno alterno vi sia un unico modo di rappresentare un grafo con le frecce in quanto allo 0 corrispondono ben 4 configurazioni possibili. Il problema invece non si pone in quanto è sufficiente partire dalla configurazione al bordo e

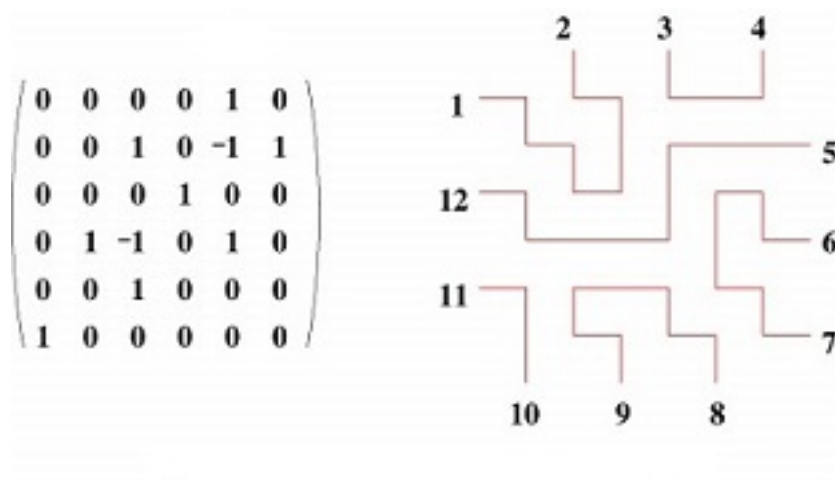


Figura 1.8: Esempio di biezione tra ASM e grafo colorato

Le biezioni con le ASM sono molto importanti in quanto abbiamo una formula esplicita che ci fornisce il numero di ASM di ordine n che coincide, per via di queste biezioni, con il numero di possibili grafi orientati e colorati.

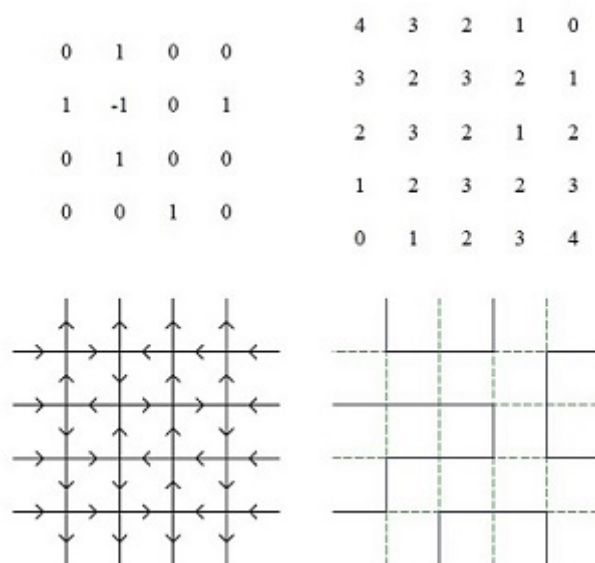


Figura 1.9: Esempio delle 4 biezioni

Entriamo ora nel vivo della tesi.

Capitolo 2

Ruotamento

Il *Ruotamento* è una biezione $G : \text{ASM}(n) \rightarrow \text{ASM}(n)$ composta da singole trasformazioni locali che chiamiamo G_S e che agiscono su una singola casella S . Il motivo del termine *Ruotamento* sarà chiaro in seguito.

Abbiamo visto che ci sono 4 modi diversi di vedere lo stesso problema (grafo orientato, grafo colorato, ASM e Height Function). Definiamo ora come agisce G_S . Se S è al bordo, G_S è l'identità. Analizziamo quindi il caso in cui S non sia al bordo.

2.1 G_S nel grafo colorato

Fissiamo tutti i colori dei lati che appartengono alla griglia ma non alla casella S che abbiamo preso in considerazione. Devo ora assegnare i colori dei 4 lati della casella. Ci sono $2^4 = 16$ possibilità. In 2 casi i lati orizzontali saranno dello stesso colore e quelli verticali saranno entrambi dell'altro colore (ossia i colori si alternano). Se S è fatta così allora G_S scambia i colori dei lati di S ed è quindi un'involuzione (inversa di se stessa, componendola due volte trovo l'identità). Negli altri 14 casi, G_S è l'identità.

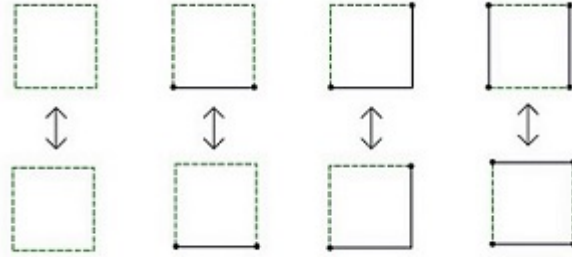
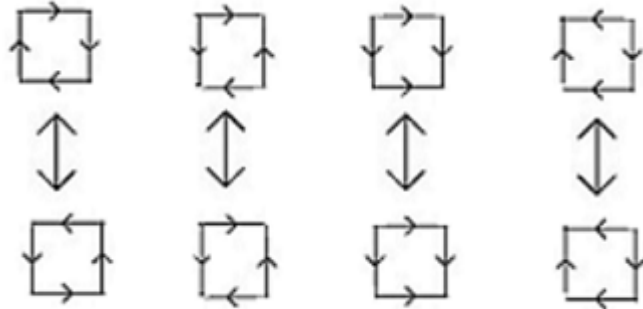


Figura 2.1: Azione di G_S in alcuni casi (rappresentativi) di caselle di un grafo colorato

2.2 G_S nel grafo orientato

G_S scambia le direzioni delle frecce se e solo se sono tutte in senso orario o antiorario. Vediamo come agisce in alcuni casi rappresentativi.



2.3 G_S nelle Height Function

In questo caso S corrisponde a un elemento della matrice. Gli elementi della prima e ultima riga e colonna sono fissati. Per gli altri elementi ci possono essere 1 o 2 possibilità. Infatti gli elementi più interni della matrice (quelli che non appartengono alla prima o ultima riga o colonna) devono soddisfare la richiesta di differire di 1 dagli elementi adiacenti lungo la stessa riga e colonna. Se quindi abbiamo che tutti questi elementi sono uguali tra loro ci saranno 2 possibilità (il numero naturale precedente o successivo). Altrimenti ci sarà un'unica scelta corrispondente al numero compreso tra quelli adiacenti.

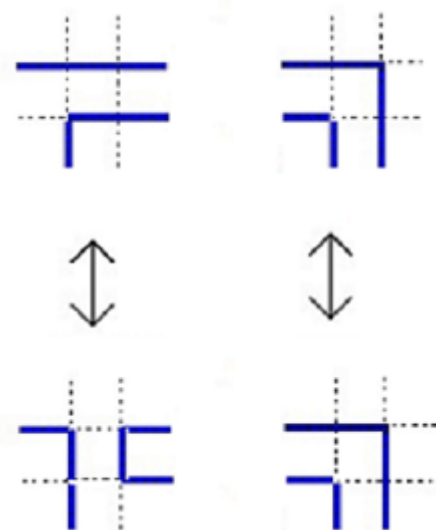
Ad esempio, se ho tutti 3 come elementi adiacenti, posso scegliere tra 2 e 4. Se, invece, gli elementi adiacenti sono 1 e 3 sarò costretto a scegliere 2. Se c'è una sola possibilità, G_S è l'identità altrimenti agisce sulla Height Function cambiando l'elemento che c'era in precedenza con l'altra possibilità.

Ad esempio, se decidiamo di operare sulla casella relativa al posto (2, 2),

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ diventa } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4 G_S nelle ASM

G_S ha un effetto locale. Agisce scambiando 0 con +1 (o -1) e viceversa. Per descrivere G_S in una ASM abbiamo bisogno di utilizzare il CG corrispondente nella biezione descritta nel capitolo precedente. Consideriamo una casella generica S che avrà i 4 lati colorati in un certo modo. Osservando solo la casella non possiamo sapere se in quei 4 vertici il cammino ha una svolta ad angolo retto oppure procede dritto. Abbiamo quindi bisogno di considerare anche i 2 lati di ogni vertice non compresi nella casella. Concentriamoci ora su un unico vertice della casella in esame (quello in alto a sinistra, ad esempio) dato che lo stesso ragionamento si può fare anche per gli altri. Sappiamo che G_S agisce in modo diverso dall'identità solo se nella casella del corrispondente grafo colorato i colori si alternano. Si ha quindi che in 2 casi su 6, G_S lascerà invariato l'elemento della matrice a segno alterno corrispondente a tale vertice. Negli altri 4 casi, non possiamo escludere che la casella abbia i lati con i colori alternati. In 2 di questi 4 casi abbiamo una svolta ad angolo retto (corrispondente allo 0) che potrà o rimanere tale dopo l'applicazione di G_S o potrà trasformarsi in un vertice in cui il cammino diventa dritto (quindi diventare ± 1). Negli altri 2 casi, invece, si ha un cammino dritto (± 1) che può rimanere tale o diventare una svolta ad angolo retto (quindi 0). Vediamo degli esempi.



Nel primo caso (a sinistra) passiamo da $\begin{pmatrix} \pm 1 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ mentre nel secondo caso (a destra) si ha l'identità ossia si passa da $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

2.5 Definizione

Con questa definizione di G_S , si nota che se consideriamo 2 caselle distinte S ed S' (entrambe pari o entrambe dispari) applicare il ruotamento locale prima a S e poi a S' o viceversa non fa alcuna differenza ossia G_S e $G_{S'}$ commutano. Possiamo quindi considerare la composizione di tutte le trasformazioni locali relativi alle caselle pari (che chiamiamo G_0) e la composizione di quelli relativi alle caselle dispari (che chiamiamo G_1). Definiamo $G = G_0 \circ G_1$. In pratica devo prima guardare le caselle dispari e poi quelle pari e ad ogni casella applico la definizione di G_S .

2.6 Altra decomposizione

Definiamo R come la funzione che scambia tutti i colori e analogamente R_S quella che scambia tutti i colori di una singola casella fissata S , R_0 quella che scambia tutti i colori a tutte le caselle pari e R_1 quella che scambia tutti i colori a tutte le caselle dispari. Definiamo $H_S = G_S \circ R_S$. Bisogna quindi prendere una casella, scambiare tutti i colori dei suoi lati e poi applicare G_S . Per le caselle al bordo, H_S è lo scambio mentre per le caselle interne si ha la regola seguente. In 2 casi (colori dei lati che si alternano) H_S è l'identità mentre negli altri 14 casi si ha che H_S è lo scambio. H_S è quindi un'involuzione. Allo stesso modo definiamo $H_0 = G_0 \circ R_0$ e $H_1 = G_1 \circ R_1$. Si ha che $H_0 : B_n \rightarrow CG$ mentre $H_1 : CG \rightarrow B_n$ dove B_n è l'insieme dei grafi con le stesse restrizioni riguardanti i colori dei vertici di grado 4 ma con i colori al bordo scambiati. Poiché $RR = I$ ed R_S commuta con G_S si ha che $G = H_0 \circ H_1$. Possiamo tranquillamente estendere il dominio e il codominio di G a $ASM(n) \cup B_n$.

Capitolo 3

Congenttura di Cohn e Propp

3.1 Vertici Fissi

Consideriamo una configurazione con lati colorati. Sia $k \in \{0,1\}$. Considero un vertice interno. Tale vertice è detto k -fisso se le caselle di parità k contenenti i suoi due lati adiacenti neri (o, analogamente, bianchi) sono distinte. Per capire se un vertice è k -fisso procedo quindi così: guardo i due lati monocromatici relativi (neri, ad esempio). Se k è 0, ossia pari (1, ossia dispari) considero le caselle pari (dispari) adiacenti ai lati neri. Se tali caselle sono distinte allora il vertice è k -fisso. Se invece coincidono il vertice non è k -fisso. Il perché di questa definizione sarà chiaro in seguito. Chiaramente questa definizione dipende dalla scelta di k (pari o dispari). Vi sono comunque dei vertici che sono fissi per qualsiasi scelta di k , precisamente quelli in cui i colori dei lati si alternano. La definizione di vertice k -fisso non dipende, invece, dalla scelta del colore dei lati monocromatici che prendo in considerazione. Se osserviamo una singola casella S i vertici k -fissi sono quelli in cui i due lati della casella adiacenti sono di colore diverso. Una casella interna ha quindi 0, 2 o 4 vertici k -fissi mentre quelle al bordo hanno un solo vertice k -fisso.

Applicando H_k alle possibili configurazioni di una casella interna notiamo che un vertice è k -fisso se e solo se rimane k -fisso dopo l'applicazione di H_k . Se applico H_{1-k} non sono invece sicuro che rimanga k -fisso. In pratica un vertice 0-fisso lo è anche dopo l'applicazione di H_0 . Se applico invece H_1 non posso affermare la stessa cosa. Questo piccolo inconveniente non ci darà grossi problemi. Questo fatto sarà utilissimo nella dimostrazione del lemma seguente che servirà a dimostrare il primo vero teorema importante che incontreremo.

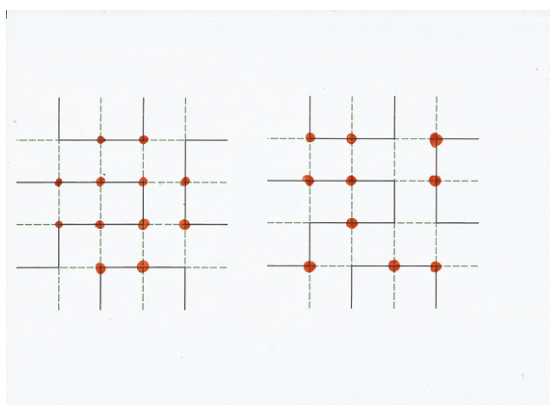


Figura 3.1: A sinistra sono evidenziati i vertici 0-fissi mentre a destra sono evidenziati i vertici 1-fissi

3.2 Lemma

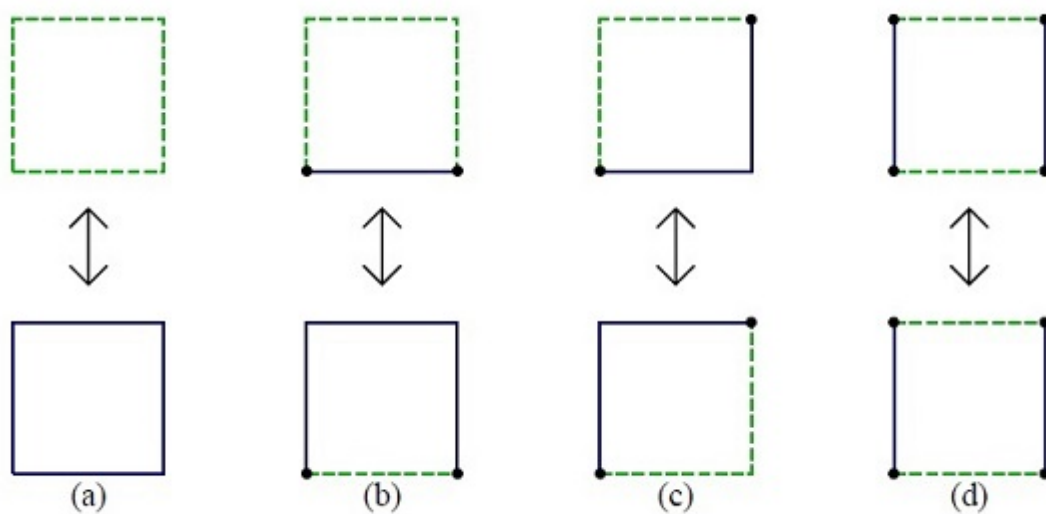


Figura 3.2: Azione di H_s nei vari casi di caselle di un grafo colorato

Lemma 3.2.1.

Due vertici k -fissi si trovano nella stessa componente connessa (ciclo o cammino aperto) del sottografo nero (o analogamente bianco) dopo l'applicazione di H_k se e solo se si trovavano nella stessa componente nera anche prima.

Dimostrazione. Una casella con 2 vertici k -fissi è contenuta totalmente nella griglia (non si trova al bordo). La figura precedente ci mostra che se tra 2 vertici k -fissi esisteva un cammino monocromatico prima dell'applicazione di H_k esso c'è anche dopo. Può chiaramente essere cambiato ma continua ad essercene uno che unisce i 2 vertici k -fissi.

Si nota inoltre che due vertici k -fissi consecutivi lungo un cammino si trovano nella stessa casella. \square

Il lemma ci permette di identificare i cammini prima e dopo l'applicazione di H_k la quale cambia i cammini mantenendo però i vertici k -fissi. Sappiamo inoltre che laddove era presente un cammino che connetteva due vertici k -fissi, vi è un altro (o lo stesso) cammino che li unisce dopo l'applicazione di H_k . Ciò che ci rimane da controllare è quello che succede al bordo ossia tra i vertici k -fissi e quelli esterni. Per questo abbiamo bisogno del seguente teorema.

3.3 Teorema

Carl Bosley e Lukasz Fidkowski congetturarono un principio generale che illustriamo in figura nel caso $n = 3$.

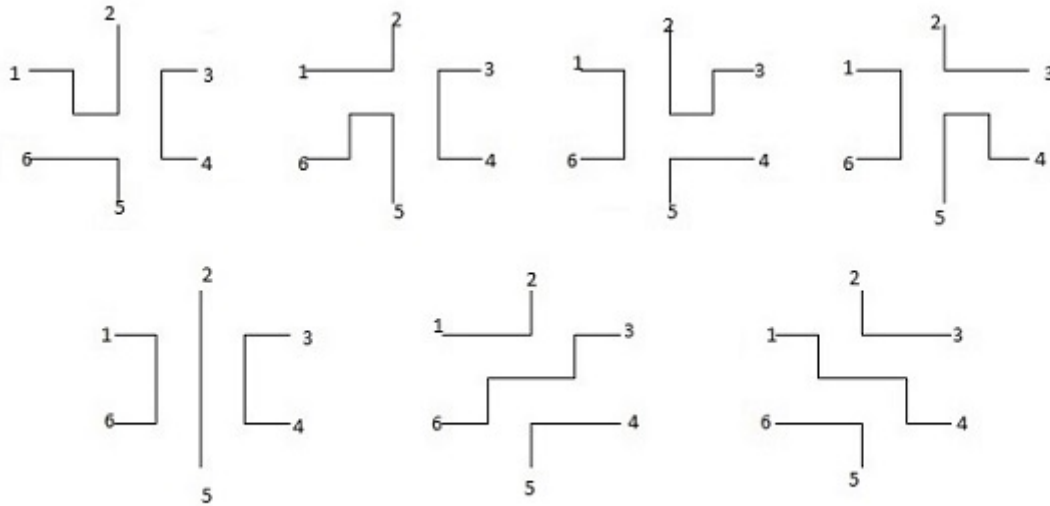


Figura 3.3: Le 7 possibili configurazioni di un grafo colorato per $n = 3$

Osserviamo prima di tutto che nei 7 casi possibili ogni vertice viene collegato per 3 volte con il suo vicino di sinistra, per 3 volte con il suo vicino di

destra e per 1 volta con il suo opposto.

La loro congettura riguarda il fatto che, dati i $2n$ vertici esterni neri, disposti su un poligono di $2n$ vertici, il numero di matrici a segno alterno che accoppiano due vertici esterni neri rimane lo stesso anche se ridispongo tali vertici utilizzando un elemento del gruppo diedrale D_{2n} .

Noi proveremo il teorema nella forma più forte, congetturata da Henry Cohn e James Propp e faremo vedere che quest'ultima perfeziona la congettura di Bosley e Fidkowski. Il seguente teorema è stato dimostrato da Wieland.

Teorema 3.3.1.

Sia $ASM(n)(\pi_b, \pi_w, l)$ l'insieme delle ASM di ordine n nel quale il sottografo nero induce l'accoppiamento π_b , il sottografo bianco induce l'accoppiamento π_w e in cui l rappresenta il numero totale di cicli (neri + bianchi). Ruotiamo in senso orario π_b di un'unità e chiamiamolo π'_b e ruotiamo in senso antiorario π_w di un'unità e chiamiamolo π'_w . Si ha che $ASM(n)(\pi_b, \pi_w, l)$ e $ASM(n)(\pi'_b, \pi'_w, l)$ sono in biezione.

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema useremo il lemma precedente e le condizioni al bordo.

Come detto, sia $ASM(n)(\pi_b, \pi_w, l)$ l'insieme delle configurazioni che hanno π_b come accoppiamento nero, π_w come accoppiamento bianco e $l =$ numero totale di cicli. Sia c una di queste. Consideriamo il sottografo nero che ha grado 2. Le sue componenti connesse sono cammini aperti, cicli chiusi e punti isolati. Sappiamo che esiste una biezione tra queste componenti con vertici k -fissi prima e dopo l'applicazione di H_k . Si vede facilmente che una casella pari (o dispari indifferentemente) non del tutto contenuta nella nostra griglia di partenza presenta 1 vertice esterno nero, uno bianco, 1 vertice k -fisso (e se non è una delle caselle agli estremi anche un vertice non k -fisso).

Il vertice k -fisso è collegato sia con il vertice esterno nero sia con quello bianco prima e dopo H_k . Il lemma ci dice che i cammini vengono trasformati in cammini e non in cicli. In tal modo abbiamo una biezione tra i cammini monocromatici che connettono i vertici esterni prima e dopo aver applicato H_k .

Per i cammini si ha quindi una biezione che a c associa $G(c)$ dove $G(c) = H_0(H_1(c))$.

H_0 si comporta in modo analogo ad H_1 ma a ruoli invertiti tra bianco e nero. Quando però applico H_0 , H_1 ha già agito nello scambiare i colori.

Si ha quindi che il cammino nero si muove di 2 vertici esterni (o analogamente di un solo vertice esterno nero) in senso orario. Per i cammini bianchi il senso è invece quello antiorario ma il meccanismo rimane lo stesso.

Per quanto riguarda i cicli sappiamo che H_k trasforma cicli monocromatici che contengono vertici k -fissi in nuovi cicli dello stesso colore che contengono

gli stessi vertici k -fissi. In tal modo il numero di cicli fatti così si mantiene. Rimane da controllare ciò che succede ai cicli che non contengono vertici k -fissi. Tali cicli sono per forza contenuti in un'unica casella. L'applicazione di H_k non fa altro che cambiare il colore del ciclo che stiamo considerando senza alterarne quindi il numero totale.

Possiamo finalmente concludere che $G(\text{ASM}(n)(\pi_b, \pi_w, l)) \subseteq \text{ASM}(n)(\pi_b, \pi_w, l)$. L'altra inclusione risulta analoga. Basta infatti considerare $G^{-1} = H_1 H_0$. \square

Vediamo ora come questo teorema generalizza la congettura di Bosley e Fidkowski. Sia d la funzione che riflette il grafo lungo la retta $y = x$ scambiando l'ordine dei vertici esterni. Dal momento che anche H_0 e H_1 scambiano i colori dei vertici esterni, si ha che componendoli entrambi con d si trovano due funzioni $\text{ASM}(n) \rightarrow \text{ASM}(n)$. Inoltre la riflessione d preserva le caselle pari e dispari e, in tal modo, commuta con H_0 e H_1 . Si ha quindi che $H_k d$ è un'involuzione e quindi anche $G = H_1 d \circ H_0 d$ lo è. Abbiamo che $H_0 d$ manda il vertice esterno di ordine i in quello di ordine $2n + 2 - i \pmod{2n}$ ossia fissa 1 e $n + 1$ mentre $H_1 d$ manda i in $2n + 1 - i$. Si vede dunque che queste due riflessioni generano D_{2n} .

Capitolo 4

Generalizzazione

4.1 Nuove notazioni

Cerchiamo ora di generalizzare il concetto di *Ruotamento*. Per farlo introduciamo alcune notazioni che ci serviranno in seguito. Chiamiamo Λ la nostra griglia quadrata con la quale abbiamo lavorato fino ad ora. Abbiamo che Λ è composta da un insieme di vertici interni, che chiamiamo $V(\Lambda)$, da un insieme di lati interni ($E_0(\Lambda)$) e da un insieme di lati al bordo ($E_1(\Lambda)$). Sia $E = E_0 \cup E_1$ e $2N$ la cardinalità di E_1 .

Siamo interessati alle configurazioni $\Phi : E \rightarrow \{b, w\}^E$ ossia a quelle configurazioni che ad ogni lato della griglia associano il colore nero (b) o bianco (w). Possiamo quindi pensare Φ come un vettore le cui componenti sono b, w . Chiaramente ci interessano le configurazioni valide, ossia quelle che rispettano la regola che ogni vertice interno si trovi tra due lati neri e due bianchi. Una tale configurazione Φ la chiamiamo *configurazione FPL (fully – packed loop)*. L'insieme di queste configurazioni lo denotiamo $\text{Fpl}(\Lambda)$. Ogni Φ presenta una condizione al bordo τ , codificata come un vettore di $\{b, w\}^{E_1}$. Denotiamo $\text{Fpl}(\Lambda; \tau)$ l'insieme delle configurazioni Φ la cui restrizione a E_1 è τ .

Una data configurazione al bordo τ presenta degli insiemi $E_b(\tau), E_w(\tau) \subseteq E_1$ di lati neri e bianchi. Si nota che, per avere una configurazione valida, questi devono avere cardinalità pari. Possiamo quindi scrivere $|E_b(\tau)| = 2n$ e $|E_w(\tau)| = 2(N - n)$. Nel caso di una griglia quadrata si ha banalmente $N = 2n$ da cui $|E_b(\tau)| = |E_w(\tau)| = 2n$.

Come avevamo già visto una configurazione valida è costituita da cicli e cammini aperti monocromatici neri e bianchi con vertici esterni rispettivamente in E_b e E_w . I cammini neri (e anche quelli bianchi) non si incrociano tra di loro. Due cammini di diverso colore, invece, si possono incrociare. Si

formano, come abbiamo visto, accoppiamenti $\pi(\Phi) \in \mathcal{LP}(n)$ dove $\mathcal{LP}(n)$ è l'insieme di tutti i possibili accoppiamenti. Denotiamo $\Psi_{\Lambda; \tau}(\pi)$ il numero di configurazioni in $\text{Fpl}(\Lambda; \tau)$ con accoppiamento π .

Altre notazioni utili sono quelle relative alla restrizione e al complementare di un vettore $x \in \{b, w\}^B$ dove B è un insieme. Preso $A \subseteq B$, $x|_A$ denota la restrizione di x ad A , ossia la restrizione di x allo spazio $\{b, w\}^A$. Si ha quindi che $\Phi \in \text{Fpl}(\Lambda; \tau) \Leftrightarrow \Phi|_{E_1} = \tau$. Denotiamo, infine, \bar{x} il complementare di x ossia il vettore che ha le componenti b, w invertite rispetto al vettore di partenza. Abbiamo quindi che se $\Phi \in \text{Fpl}(\Lambda; \tau)$ allora $\bar{\Phi} \in \text{Fpl}(\Lambda; \bar{\tau})$.

In particolare denotiamo $\tau_+ = (bwbwbw\dots bw)$ e $\tau_- = \bar{\tau}_+ = (wbwbwb\dots wb)$ dove la prima componente indica il colore del lato esterno del vertice che abbiamo preso come punto di partenza. Le altre componenti, invece, indicano la colorazione dei lati esterni in senso orario. Denotiamo, infine, $\tilde{\Lambda}$ la griglia non necessariamente quadrata che soddisfa le stesse condizioni viste con Λ .

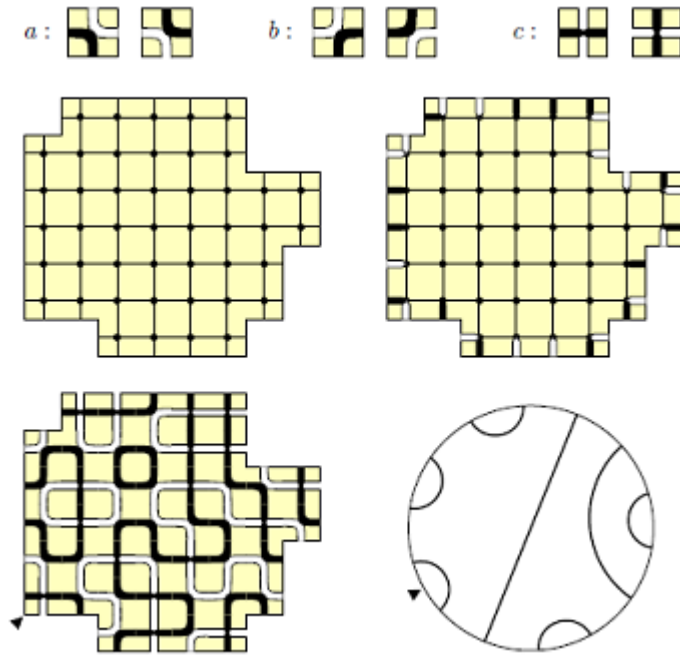


Figura 4.1: In alto le 6 possibili configurazioni di Φ per ogni vertice interno. In mezzo a sinistra un esempio di $\tilde{\Lambda}$. In mezzo a destra un esempio di dominio con date condizioni al bordo (Λ, τ) . In basso a sinistra un esempio di $\Phi \in \text{Fpl}(\Lambda, \tau)$. In basso a destra una rappresentazione grafica dell'accoppiamento $\pi(\Phi) \in \mathcal{LP}(n)$

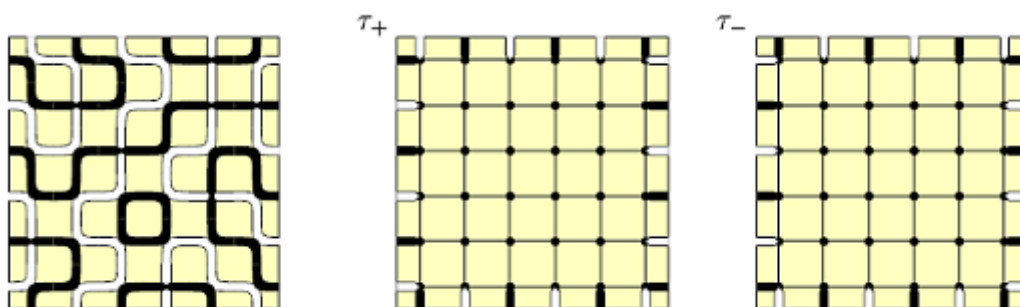


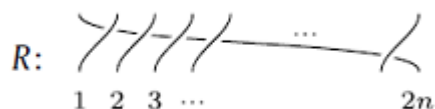
Figura 4.2: A sinistra un esempio di configurazione FPL con condizioni al bordo τ_+ . Al centro un dominio con condizione al bordo τ_+ . A destra un dominio con configurazione al bordo τ_- .

Chiamiamo R l'operatore che ruota un accoppiamento π di un'unità in senso orario o che, analogamente, fissa π e ruota le etichette dei vertici esterni di uno in senso orario. Abbiamo quindi

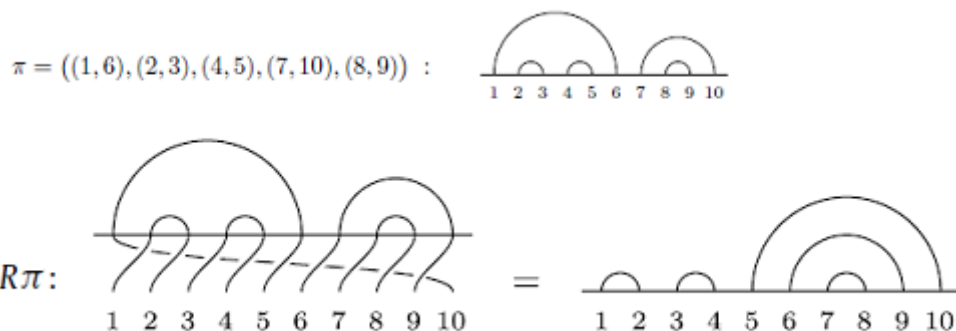
$$\pi = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots) \leftrightarrow R\pi = ((i_1 - 1, j_1 - 1), (i_2 - 1, j_2 - 1), \dots)$$

Chiaramente $R^{2n} = 1$ e quindi R è invertibile.

Il disegno sottostante ci mostra graficamente come agisce l'operatore R .



Vediamo un esempio.



Con questa notazione si ha che, nel capitolo precedente abbiamo provato la seguente relazione:

$$\Psi_{n;\pm}(\pi_b, \pi_w, l) = \Psi_{n;\pm}(R\pi_b, R^{-1}\pi_w, l)$$

che, trascurando il riferimento a π_w e a l , si riduce a

$$\Psi_{n;\pm}(\pi) = \Psi_{n;\pm}(R\pi)$$

Nella forma più forte, invece, abbiamo

$$\Psi_{n;+}(\pi_b, \pi_w, l) = \Psi_{n;-}(\pi_b, \pi_w, l) = \Psi_{n;+}(R\pi_b, R^{-1}\pi_w, l)$$

che, trascurando il riferimento a π_w e a l , si riduce a

$$\Psi_{n;+}(\pi) = \Psi_{n;-}(\pi) = \Psi_{n;+}(R\pi)$$

4.2 Una griglia più generale

Consideriamo un grafo $G = (V, E)$ connesso piano. Indichiamo con $\deg(v)$ il grado di un vertice $v \in V$ ossia il numero di lati incidenti ad esso. Vogliamo che ogni vertice abbia grado 4 o grado 2. Ciò sembra in contraddizione con la griglia con la quale abbiamo lavorato fino ad ora, nella quale un vertice aveva grado 4 o grado 1. Vedremo in seguito (nel paragrafo 4.4) che sarà possibile passare da un caso all'altro. Ci occuperemo qui di grafi G ottenuti a partire da griglie quadrate. Denotiamo V' l'insieme dei vertici di grado 2 e $V''(\tau)$ l'insieme dei vertici di grado 2 in cui $\deg_b(v) = \deg_w(v) = 1$, dove $\deg_b(v)$ indica il numero di lati neri adiacenti a v e, analogamente, $\deg_w(v)$ il numero di lati bianchi adiacenti a v . Abbiamo che $|V''(\tau)| = 2n$ ossia $V''(\tau)$ ha cardinalità pari. Valgono quindi le seguenti inclusioni ovvie:

$$V''(\tau) \subseteq V' \subseteq V$$

Etichettiamo i vertici in $V''(\tau)$ con i numeri da 1 a $2n$. In seguito denoteremo $V'' = V''(\tau)$ per semplicità. Sia $\text{Fpl}(G)$ l'insieme delle configurazioni FPL valide su questo grafo, ossia l'insieme delle configurazioni $\Phi \in \{b, w\}^E$ tali che $\forall v \in V \setminus V', \deg_b(v) = \deg_w(v) = 2$. Definiamo inoltre il sottoinsieme $\text{Fpl}(G, \tau)$ di configurazioni FPL valide la cui restrizione a E' coincide con la condizione al bordo $\tau \in \{b, w\}^{E'}$ dove $E' \subseteq E$ è l'insieme dei lati adiacenti ai vertici in V' .

In un tale dominio, una configurazione Φ è composta da cicli monocromatici che visitano solo vertici in $V \setminus V''$, da cammini aperti monocromatici che hanno vertici interni in $V \setminus V''$ e vertici esterni in V'' . Etichettando i vertici in V'' con i numeri da 1 a $2n$, si ha che Φ determina un accoppiamento nero π_b di vertici in V'' (che avviene attraverso cammini aperti neri) e, analogamente un accoppiamento bianco π_w di vertici in V'' (che avviene attraverso cammini aperti bianchi). Determina, inoltre, un numero l_b di cicli neri e un numero l_w di cicli bianchi. Denotiamo con $l = l_b + l_w$ il numero totale di cicli. In tal modo viene determinata una tripletta (π_b, π_w, l) . Indichiamo con $\Psi_{G;\tau}(\pi_b, \pi_w, l)$ il numero di configurazioni $\Phi \in \text{Fpl}(G; \tau)$ con una data tripletta (π_b, π_w, l) .

4.3 La mappa H_Γ

Consideriamo una partizione di E in un insieme $\Gamma = \{\gamma_i\}$ di cicli disgiunti, ossia Γ è una partizione di E come insieme e ogni suo elemento γ è formato da una serie di lati consecutivi che formano un ciclo. Consideriamo ora una mappa $H_\Gamma : \text{Fpl}(G, \tau) \rightarrow \text{Fpl}(G, \bar{\tau})$ e denotiamo $\Phi' = H_\Gamma(\Phi)$. Non è qui necessario che G sia del tipo visto nel paragrafo precedente (anche se è il caso che ci interessa). Diciamo che una tale mappa è *valida* se soddisfa le seguenti condizioni:

1. *condizione di grado*: $\forall v \in \gamma \in \Gamma$ vi sono 2 lati incidenti a v che appartengono a γ . Se di questi $0 \leq k \leq 2$ sono neri in Φ allora k dovranno essere bianchi in Φ' . In particolare per i vertici in V'' si ha che i colori dei lati sono invertiti in Φ' .
2. *condizione di connettività*: $\forall \gamma \in \Gamma$ e $\forall v, v' \in \gamma$, $\Phi|_\gamma$ ha v e v' come vertici estremi di un cammino aperto nero \Leftrightarrow lo stesso accade anche in Φ' . Analogamente per i cammini bianchi.

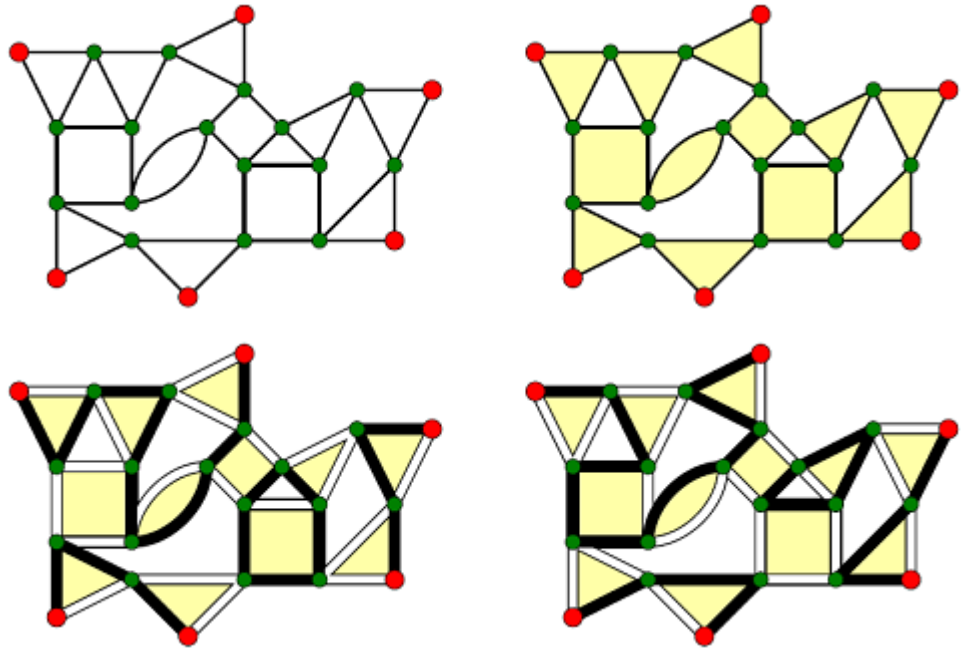


Figura 4.3: In alto a sinistra un esempio di grafo generico G con i vertici in V' colorati in rosso. In alto a destra una possibile scelta di Γ in cui i cicli disgiunti sono denotati da poligoni gialli. In basso a sinistra, un esempio di configurazione Φ . In basso a destra, la corrispondente $H_\Gamma(\Phi)$

Notiamo che, data la simmetria di queste condizioni, dovuta al fatto che la dipendenza da τ vi sia solo in V'' (e chiaramente $V''(\tau) = V''(\bar{\tau})$ perché in V'' vi sono i vertici di grado 2 con un lato nero e uno bianco e quindi se prendiamo $\bar{\tau}$ al posto di τ otteniamo semplicemente che il lato bianco è diventato nero e quello nero è diventato bianco ma il vertice avrà comunque un lato nero e uno bianco), se $H_\Gamma(\Phi)$ è definita sul dominio $\text{Fpl}(G, \tau)$ ed è valida allora anche $H_\Gamma(\bar{\Phi})$ è valida. Inoltre, se $H_\Gamma(\Phi)$ è una biezione allora anche $H_\Gamma(\bar{\Phi})$ lo sarà. Assumiamo per il momento che una tale mappa esista (vedremo in seguito sotto quali condizioni essa esiste ed è una biezione). Vale allora la seguente proposizione:

Proposizione 4.3.1. *Per ogni mappa valida H_Γ , le configurazioni Φ e Φ' hanno la stessa tripletta (π_b, π_w, l)*

Dimostrazione. La condizione di grado ci assicura che $\Phi' \in \text{Fpl}(G, \bar{\tau})$. Prendiamo un cammino monocromatico (nero, ad esempio) aperto (abbreviamo con m.o.p.) in Φ . Esso è composto da una concatenazione *aperta* di alcuni m.o.p. (nel senso che il cammino risultante ha vertici esterni distinti e non è quindi un ciclo) contenuti in cicli $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots$ di Γ . Tale sequenza ammette ripetizioni non consecutive, ossia è possibile avere $i_a = i_b$ se $b - a \neq \pm 1$. Per la condizione di connettività, i m.o.p. senza cicli sono mandati in m.o.p. senza cicli e con gli stessi vertici esterni. Questo prova che $\pi_b(\Phi) = \pi_b(\Phi')$. Stesso discorso per i m.o.p. bianchi e quindi $\pi_w(\Phi) = \pi_w(\Phi')$. Consideriamo ora cicli monocromatici di Φ . Sia quindi c uno di questi. Lo prendiamo nero, ad esempio. Un tale ciclo può coincidere con un ciclo di Γ e, in tal caso, la condizione di grado ci assicura che in Φ' diventerà un ciclo bianco. Nel caso, invece, in cui non coincida con un ciclo di Γ si ha che è composto da una concatenazione *chiusa* di m.o.p. (nel senso che il cammino risultante è un ciclo nel grafo) contenuta in cicli $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots$ di Γ (almeno 2). In tal caso, per un ragionamento analogo a quello fatto per i cammini monocromatici aperti, possiamo concludere che anche in Φ' ci sarà un ciclo nero (chiamiamolo c'). Abbiamo quindi provato che l non può diminuire ma poiché le due condizioni sono simmetriche rispetto a Φ e Φ' si può ripetere la stessa dimostrazione, parola per parola, a partire da un ciclo $c' \in \Phi'$. Si ha quindi che l non può aumentare e quindi deve rimanere costante. \square

Analizziamo ora sotto quali condizioni su una tripletta (G, Γ, τ) si può costruire una valida biezione H_Γ che rispetti le condizioni di grado e connettività. Dato che queste condizioni riguardano esclusivamente i cicli γ_i , è sufficiente considerare singoli cicli di lunghezza L e questo rende fattibile un'analisi per tutti i possibili grafi G . Non ci dilunghiamo qui a fare una classificazione totale di tutti i casi più generali possibili. Ci limitiamo solamente a definire quali sono le condizioni sufficienti su (G, Γ, τ) e, se sono soddisfatte, procediamo a costruire esplicitamente la nostra biezione H_Γ . Chiamiamo *alternante* un ciclo γ i cui lati alternano nero e bianco in Φ . Abbiamo che è possibile costruire H_Γ se:

- tutti i cicli di Γ hanno lunghezza al più 4
- tutti i cicli di Γ incidenti a vertici in V'' hanno lunghezza al più 3

In questi casi la mappa $H_\Gamma : \text{Fpl}(\Lambda, \tau) \rightarrow \text{Fpl}(\Lambda, \bar{\tau})$ è definita come la complementare di \tilde{H}_Γ che è la mappa che scambia i colori dei lati dei cicli alternanti di lunghezza 4 e che non fa niente altrimenti (ossia che è l'identità in tutti gli altri casi). La definizione induce, inoltre, una mappa da $\text{Fpl}(\Lambda, \bar{\tau})$ a $\text{Fpl}(\Lambda, \tau)$. Inoltre, le mappe H_Γ e \tilde{H}_Γ sono involutive. Risulta abbastanza facile vedere che per cicli di lunghezza $L \geq 5$ una tale mappa non si può costruire. Prendiamo, per esempio, una configurazione Φ i cui lati in γ sono rispettivamente

$$(b, w, b, \underbrace{w, w, \dots, w}_{L-3})$$

Allora la condizione di grado sugli $L - 4$ vertici interni al cammino bianco di lunghezza $L - 3$ impone che Φ' sia

$$(\underbrace{?, ?, ?, b, b, \dots, b}_{L-3})$$

ma questo è in contraddizione con la condizione di connettività in quanto abbiamo due vertici che sono connessi da un arco nero in Φ' ma non in Φ .

4.4 Ruotamento Generalizzato

Nel dominio di partenza Λ abbiamo $4n$ vertici di grado 1 e n^2 di grado 4. Etichettiamo i vertici di grado 1 con i numeri da 1 a $4n$ in ordine ciclico e coloriamo i lati adiacenti a questi vertici in modo da rispettare le condizioni al bordo τ_+ . Per avere grafi G_\pm con le proprietà richieste incolliamo insieme a 2 a 2 i vertici di grado 1 consecutivi in questo modo: per G_+ incolliamo insieme $(1, 2), (3, 4), (5, 6)$ e così via mentre per G_- incolliamo insieme i vertici $(4n, 1), (2, 3), (4, 5)$ ecc... Viceversa, per passare da questo nuovo dominio a quello precedente, basta staccare questi vertici.

In entrambi i casi la scelta di Γ consiste nel prendere tutte le caselle al bordo e quelle interne con la dovuta parità, nel senso che se considero il dominio G_+ prenderò tutte le caselle pari mentre se considero il dominio G_- prenderò tutte quelle dispari (in figura rappresentata in giallo). Questa scelta di Γ insieme con la definizione di H_Γ determina univocamente la mappa del *Ruotamento Generalizzato*. Definiamo ora H_+ (H_-) come la mappa H_Γ che agisce solo sulle caselle pari (dispari). Chiaramente H_+ e H_- sono le analoghe di H_0 e H_1 nel caso generale. Abbiamo, inoltre, che l'azione di H_+ e H_- porta ad un importante scambio tra i vertici esterni neri e quelli bianchi rispetto al loro ordine ciclico lungo il bordo di Λ .

Avviene quindi il seguente meccanismo:

1. dal dominio di partenza Λ , incollo insieme i vertici consecutivi di grado 1 formando il dominio G_+ come spiegato in precedenza;

2. applico H_+ che agisce in questo modo: al bordo scambia i colori dei lati (ossia quelli neri diventano bianchi e quelli bianchi diventano neri) mentre all'interno della griglia agisce sulle caselle pari lasciando invariate quelle in cui i colori si alternano e scambiando, invece, i colori in tutte le altre;

3. ritorno alla mia griglia di partenza spezzando i lati dei vertici di grado 2. Ottengo così una nuova griglia di partenza con condizioni al bordo τ_- ;

4. incollo nuovamente i vertici consecutivi di grado 1 formando il dominio G_- come spiegato in precedenza;

5. applico H_- che agisce in questo modo: al bordo scambia i colori dei lati (ossia quelli neri diventano bianchi e quelli bianchi diventano neri) mentre all'interno della griglia agisce sulle caselle dispari lasciando invariate quelle in cui i colori si alternano e scambiando, invece, i colori in tutte le altre;

6. ritorno alla mia griglia di partenza spezzando i lati dei vertici di grado 2. Ottengo così una nuova griglia Λ che corrisponde esattamente alla griglia da cui ero partito, una volta subito il *Ruotamento*.

La figura seguente mostra questo procedimento appena descritto.

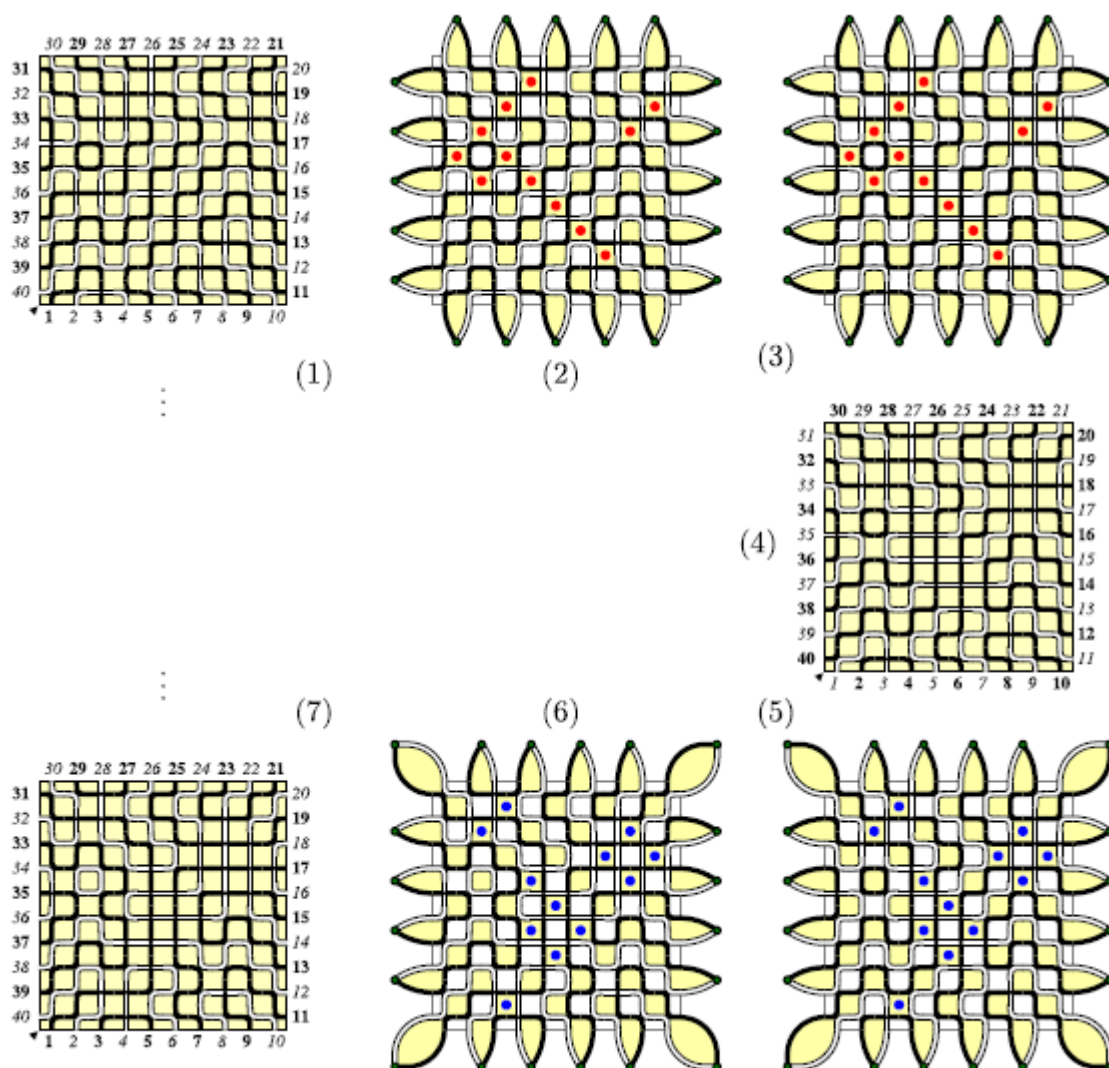


Figura 4.4: Esempio di *Ruotamento Generalizzato*

Si noti che il cammino nero che unisce i vertici esterni etichettati con 5 e 15 presente nel punto (1) della figura corrisponde a quello che unisce 6 e 16 in (4) e a quello che unisce 7 e 17 in (7). Analogamente per i cammini bianchi si ha che quello che unisce i vertici esterni 14 e 40 nel punto (1) corrisponde a quello che lega 13 e 39 nel punto (4), che a sua volta corrisponde al cammino 12 – 38 del punto (7).

4.5 In un dominio generico

Facciamo ora qualche considerazione per una griglia $\tilde{\Lambda}$ non necessariamente quadrata e con condizioni al bordo generiche τ . La procedura di incollaggio dei vertici esterni consecutivi in ordine ciclico produce cicli di lunghezza al più 4. Quindi la prima condizione affinché esista la mappa H_Γ è in automatico verificata. Dobbiamo ora preoccuparci di vedere se la seconda condizione è verificata sempre in automatico. Basta chiaramente concentrarci solo sul bordo di Λ . Gli unici problemi si possono avere laddove la procedura di incollaggio di 2 vertici esterni crea un angolo ottuso all'interno della griglia. È necessario che i due lati che vengono incollati in quel punto abbiano lo stesso colore, altrimenti tale vertice che si forma si troverebbe in V'' pur facendo parte di un ciclo di lunghezza 4 (e questo sappiamo che non deve accadere, in quanto i cicli al bordo devono avere lunghezza al più 3). Per procedere al *Ruotamento* si fa come segue. Considero le 2 mappe $\tilde{H}_\pm = CH_\pm$ dove C indica l'operatore *complementare*. Per ognuna delle 2 parità \pm , vi è un insieme di caselle che sono completamente contenute nel dominio Λ . Le mappe \tilde{H}_\pm agiscono su Φ scambiando i colori delle caselle della dovuta parità (ossia \tilde{H}_+ agirà solo sulle caselle pari mentre \tilde{H}_- agirà solo su quelle dispari) in cui i colori si alternano. Negli altri casi agiscono come l'identità. Si ha quindi che una casella del tipo (b, w, b, w) verrà trasformata in una del tipo (w, b, w, b) e viceversa mentre tutte le altre rimangono uguali. Il *Ruotamento* sarà $G = \tilde{H}_- \tilde{H}_+$.

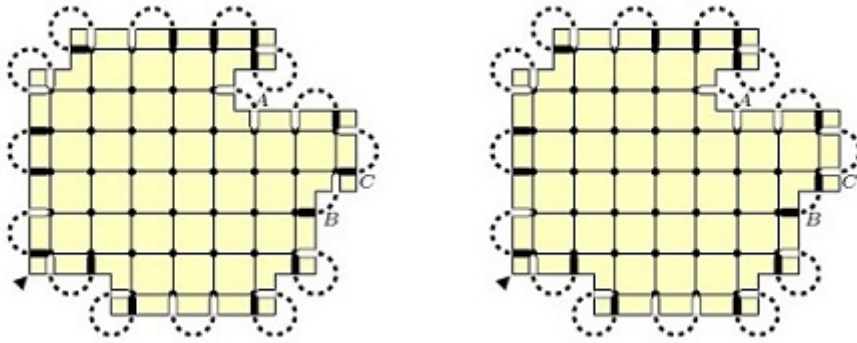


Figura 4.5: Sulla sinistra un esempio di tripletta (G, Γ, τ) non valida in quanto, in corrispondenza dell'arco B, vengono incollati due lati di colore diverso. Sulla destra invece abbiamo un esempio di tripletta (G, Γ, τ) valida in quanto, in corrispondenza dell'arco B, vengono incollati due lati dello stesso colore.

Bibliografia

- [1] Benjamin Wieland, *A Large Dihedral Symmetry of the Set of Alternating Sign Matrices*, Department of Mathematics University of Chicago
- [2] Luigi Cantini, Andrea Sportiello, *Proof of the Razumov-Stroganov conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 118 (2011), pp. 1549-1574
- [3] Bressoud, D., *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1999.
- [4] Cohn, H. and Propp, J., *Personal Communication*, 1998.
- [5] Kuperberg, G., *Another proof of the alternating-sign matrix conjecture*, Internat. Math. Res. Notices 1996 (1996), 139-150. arXiv:math.CO/9712207
- [6] Mills, W. H., Robbins, D. P., and Rumsey, H., Jr., *Proof of the Macdonald Conjecture*, Inventiones Mathematicae 66 (1982), 73-87.
- [7] Zeilberger, D., *Proof of the alternating sign matrix conjecture*, Electronic J. of Combinatorics 3(2) (1996), R13.
- [8] W.H. Mills, D.P. Robbins, H. Rumsey Jr., *Alternating sign matrices and descending plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A 34 (1983) 340-359.
- [9] W.H. Mills, D.P. Robbins, H. Rumsey Jr., *Self-complementary totally symmetric plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A 42 (1986) 277-292.
- [10] D.P. Robbins, H. Rumsey Jr., *Determinants and alternating sign matrices*, Adv. Math. 62 (1986) 169-184.

-

Ringraziamenti

Ringrazio il professor Fabrizio Caselli per avermi aiutato con disponibilità e gentilezza nella stesura di questo lavoro, nonostante i suoi numerosi impegni professionali.

Ringrazio anche tutti gli amici, le amiche e i parenti che mi sono stati vicini e che mi hanno dato la forza di non mollare con i loro sorrisi e le loro parole di conforto.

Ringrazio infinitamente i miei genitori per avermi sempre sostenuto anche quando pensavo di non farcela e per aver sempre creduto in me.

Un grazie particolare lo devo alla persona che mi ha fatto appassionare alla matematica fin da piccolo e che da diversi anni non è più presente qui con me ma che nel mio cuore vivrà per sempre. Grazie Zia Laura.