ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
SEDE DI BOLOGNA

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN MATEMATICA DIDATTICA

I numeri complessi nella riforma

TESI DI LAUREA IN
MATEMATICA

RELATORE:
Bolondi Giorgio

PRESENTATA DA:
Elisa Branchini

I SESSIONE
ANNO ACCADEMICO 2014/2015

A mio nonno, con affetto.

Indice

Premessa

La seguente tesi riguarda la didattica della matematica. Essa parla del modo di fare didattica negli istituti secondari di secondo grado attraverso l'analisi di un caso particolare: la didattica dei numeri complessi. La didattica verrà analizzata per prima cosa a livello generale attraverso l'esposizione dei punti principali della riforma Gelmini, e, successivamente, in particolare attraverso l'analisi della didattica dei numeri complessi nei licei scientifici. Di quest'ultima verranno presentati: gli strumenti con cui viene svolta, la modalità con cui vengono presentati i concetti, un nuovo metodo per migliorarla e infine il modo in cui i ragazzi la percepiscono. Questi elementi si traducono, rispettivamente, nell'analisi del libro 'Matematica a colori', nell'esposizione di una lezione-tipo, nella proposta dell'utilizzo della storia della matematica e infine in un questionario posto agli alunni. Quanto emerso verrà confrontato con le indicazioni nazionali di alcuni stati esteri e il tutto verrà utilizzato per 'leggere' i risultati del TIMMS ADVANCED 2008.
Nel primo capitolo si parlerà della riforma Gelmini e delle modifiche che essa voleva apportare, messe a confronto con quelle, a distanza di cinque anni, che sono state effettivamente attuate nel liceo scientifico e, in particolare, nell'ambito della matematica. A tal fine esporremo, attraverso una intervista, il pensiero di due professoresse di matematica, M.T. Bagnavalli e G.Ghera, dell'istituto 'E.Fermi'.
Il secondo capitolo si occuperà, in particolare, di uno degli argomenti intro-

dotti dalla riforma, i *numeri complessi.* Ne vedremo quindi una possibile introduzione estrapolata dal libro 'Matematica a colori', utilizzato da quasi tutti i professori dell'istituto per il suo carattere innovativo e in linea con la riforma. La scelta di tale argomento è data del fatto che i numeri complessi sono percepiti, a livello della scuola secondaria di secondo grado, come uno tra i concetti matematici più astratti e che quindi comportano notevoli problemi a livello di comprensione. Per stimolare gli studenti e aiutarli a modificare la concezione che la matematica sia solo un 'far di conto', fatto che emerge anche nei libri di testo, si è proposto di utilizzare la storia. Per alcuni docenti, e per molti esperti, questo è un metodo, se utilizzato con criterio, utile e stimolante. Analizzeremo quindi i pensieri di due didatti, quali Fulvia Furinghetti e Giorgio T.Bagni, e li confronteremo con la concezione che hanno i professori della storia utilizzato nel contesto delle esigenze di programma. Esporremo poi una lezione-tipo teorica in cui i numeri complessi vengono introdotti attraverso la storia. Confronteremo quindi la didattica italiana con quella di alcuni stati esteri quali la Cina, la Francia e l'America, e vedremo il ruolo che i numeri complessi hanno al loro interno. Per avere un quadro più preciso di come gli obiettivi presenti nelle indicazioni vengano effettivamente raggiunti, prenderemo in esame i risultati dei ragazzi italiani nella valutazione internazionale TIMMS ADVANCED (che indaga l'ultimo anno di scolarità). Partendo da ciò esporremo anche i risultati di un questionario somministrato alle classi 5^aE, 5^aH e 5^aF con professoresse di matematica (rispettivamente) Bagnavalli, Piumi e Ghera.
Nel terzo e ultimo capitolo risponderemo infine alla domanda che quasi tutti gli studenti pongono ai professori: 'A cose serve questo concetto?'. Relativamente all'argomento i numeri complessi esporremo due tra le possibili loro applicazioni a livello di scuola secondaria di secondo grado e di università.

Capitolo 1

La riforma Gelmini

1.1 Le modifiche apportate

La riforma Gelmini è la riforma attualmente in atto nelle scuole italiane. Essa tratta tutti i gradi di scolarità ma noi ci soffermeremo esclusivamente sulle modifiche apportate alla scuola secondaria di secondo grado e, in particolare, nel liceo scientifico e nell'ambito della matematica.
Riporteremo qui sotto un breve riassunto dei contenuti, riguardanti esclusivamente i nostri campi di interesse.

Come è cambiata la scuola? Per quanto riguarda la matematica una riforma dei contenuti era quanto mai auspicabile soprattutto osservando gli allarmanti dati OCSE che, da vari anni, vedono il sistema educativo italiano in «preoccupante crisi» comparato con i corrispondenti sistemi degli altri Paesi. A fronte dei ritardi dimostrati dagli alunni italiani nell'apprendimento della matematica e nella comprensione linguistica, con conseguenti diffuse forme di demotivazione tanto nella componente studentesca quanto in quella docente, si sottolinea inoltre come la spesa nazionale per allievo sia superiore alla media internazionale.
Si tratta di dati allarmanti soprattutto per quanto riguarda le giovani generazioni che dovranno confrontarsi con gli altri paesi in un mercato del lavoro

ormai globalizzato.
La riforma tenta quindi di promuovere una didattica al passo con i tempi.
Avremo quattro punti chiave:
- una chiara definizione dei profili in uscita a seconda dei vari tipi di istituto, vale a dire la definizione di che cosa deve sapere e saper fare chi esce da un certo tipo di istituto;
- la promozione di una didattica per competenze e non più solo per conoscenze, cioè di una didattica mirante a collegare le conoscenze teoriche con la loro fruibilità pratica;
- la promozione dell'autonomia scolastica;
- l'introduzione di un sistema di valutazione che misuri ripetutamente le competenze acquisite dagli alunni nel tempo e sulla base di criteri comuni a livello nazionale.

Le novità

La Riforma Gelmini ha introdotto diverse misure non solo volte al contenimento della spesa, ma anche relative alla prassi didattica e alla sua organizzazione. Le novità principali che toccano la scuola secondaria sono:

- Revisione dei quadri orari con conseguente revisione dei piani di studio, ridefinendo sia la quantità di tempo da trascorrere a scuola sia le materie obbligatorie da frequentare. Nella fattispecie la scuola secondaria di II grado è quella che registra gli interventi più articolati, in relazione alle molte tipologie di istituto esistenti.
La prima esigenza è stata quella di riordinare il sistema dei licei, arrivato a contare 700 corsi sperimentali, 51 progetti assistiti e numerosi altri percorsi distinti. Questa rete di tipologie è stata drasticamente ridotta a sei tipi di licei: artistico, classico, linguistico, musicale/coreutico, scientifico, delle scienze umane.
Alcuni di essi avranno al loro interno diversi indirizzi che prevederanno una

differenziazione delle materie studiate o della quantità di ore per ogni materia.
In particolare nel liceo scientifico viene introdotto un potenziamento di tutte le materie scientifiche e vengono definiti due indirizzi: quello tradizionale e quello delle scienze applicate (in cui non è previsto lo studio del latino, sostituito per lo più da attività di laboratorio).
Quanto alla riforma degli istituti tecnici, anch'essa parte da uno snellimento: si passa da 10 settori e 39 indirizzi a 2 settori e 11 indirizzi; contestualmente, le ore di frequenza scolastica passano da 36 a 32, con una riduzione anche delle ore di laboratorio compensate da un potenziamento nello studio delle scienze integrate (fisica, chimica, biologia).

- Blocco dell'adozione dei libri di testo per tre o cinque anni a seconda della durata di ogni ciclo scolastico e obbligo del formato misto, cartaceo e digitale per garantire risparmio alle famiglie ma anche uniformità in un una stessa materia.

- Maggiore autonomia scolastica: possibilità per le istituzioni scolastiche di usufruire di una quota di flessibilità degli orari. Attraverso questa quota, ogni scuola può decidere di diversificare le proprie sezioni, di ridurre (sino a un terzo nell'arco dei 5 anni) o aumentare gli orari delle discipline, anche attivando ulteriori insegnamenti previsti in un apposito elenco.

- *Un rapporto più forte scuola-mondo del lavoro-università* attraverso la possibilità, a partire dal secondo biennio, di svolgere parte del percorso attraverso l'alternanza scuola-lavoro e stages o in collegamento con il mondo dell'alta formazione (università, istituti tecnici superiori, conservatori, accademie).

Sarà inoltre valorizzata la qualità degli apprendimenti piuttosto che la quantità delle materie. Il quadro orario sarà annuale e non più settimanale, in modo da assegnare alle istituzioni scolastiche una ulteriore possibilità di flessibilità.

1.1.1 Le indicazioni nazionali

Nel decreto delle indicazioni nazionali il liceo scientifico è trattato nell'allegato F che analizza le 'linee generali e competenze' e gli 'obiettivi specifici di apprendimento' nei vari anni di scolarità (primo, secondo biennio e quinto anno) e per ogni materia scolastica prevista. Per quanto riguarda la parte integrale riguardante la materia "MATEMATICA" si veda l'Appendice A. In particolare troviamo le parole "numeri complessi" nel *Secondo biennio* in *Aritmetica e algebra* :

Aritmetica e algebra
Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.

Essi si collocano immediatamente dopo l'approfondimento dei numeri reali infatti troviamo:
"Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero, e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e, permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico). Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.
Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.

,

Come vedremo più avanti i numeri complessi vengono definiti come "naturale" estensione dei numeri reali e quindi, non a caso, solo dopo la completa acquisizione delle loro proprietà possiamo introdurli ed estendere le peculiarità dei reali ad essi.

Essi sono quindi introdotti come ultimo argomento ossia alla fine del secondo biennio (quarto anno). Vedremo nel seguente capitolo che il periodo (a ridosso della fine dell'anno) potrebbe essere una delle cause determinanti per la loro scarsa comprensione e acquisizione e, di conseguenza, per i risultati negativi nel TIMSS ADVANCED.

1.1.2 Cosa possiamo dire della riforma....

Grazie all'esperienza di tirocinio svolta nell'istituto 'E. Fermi' sono stata in contatto con molti professori a cui ho chiesto le loro opinioni in merito alla riforma. In particolare, ho intervistato due professoresse del triennio con classi potenziate in matematica e fisica e ho chiesto loro le opinioni riguardo la riforma, i numeri complessi e l'utilizzo della storia della matematica nella matematica stessa. L'intera intervista sarà riportata nell'appendice B.

Riguardo la riforma ho notato che vi sono molteplici pensieri, a volte contrastanti.
Per la maggior parte dei casi si è riscontrata una netta distinzione tra ciò che la riforma propone e ciò che effettivamente è stato fatto (o è stato potuto fare) di essa.
Da una parte vi è un diffuso positivismo verso ciò che la riforma propone di fare, o di modificare, all'interno dell'istituzione scolastica e in questo i professori sono abbastanza unanimi: *'Io mi trovo molto bene'*, *'Penso che ai ragazzi gioverà la riforma....Ci vorrà un po' di tempo'*.
Ciò che emerge di maggiormente positivo sono lo snellimento del programma e l'utilizzo di esempi più concreti e reali.
Dice la professoressa Ghera *'La riforma ha apportato uno snellimento in alcune parti del programma curricolare ministeriale.....dei calcoli e delle dimostrazioni'* e prosegue *'Questo consente di consolidare meglio i concetti nella testa dei ragazzi perché lo lanci, ci lavorano, lo elaborano, lo dimenticano, lo riprendono anche in altre materie....Quindi questo è un incentivo mentre invece nella precedente impostazione, ossia precedentemente alla riforma, un argomento veniva preso, sviscerato fino alla noia, fino ad odiarlo e questo perché se uno non è portato o diciamo non è maturo per quel tipo di calcolo tutto viene reso più difficile'*.
Questo aspetto è quindi positivo in quanto elimina parti del programma

troppo tecniche e favorisce l'acquisizione del concetto attraverso l'interdisciplinarietà e la ripresa. Inoltre rispetta i percorsi di ogni allievo.

D'altra parte la professoressa Bagnacavalli, e non solo, ritrova anche alcuni lati negativi, o meglio, sente un certo smarrimento verso la 'nuova tipologia di matematica' da insegnare.

'se da un lato noto la tendenza a ridurre in tutti gli ambiti casi troppo particolari che possono condurre a calcoli complessi, è vero che nel fare questa operazione si perde in profondità e si rischia di non riuscire a comunicare agli studenti lo spessore e la complessità dei problemi' e prosegue con *'Quello che mi dispiace dover tagliare , soprattutto in quinta, sono parte delle dimostrazioni di teoremi, perché trovo che la matematica debba anche insegnare ai ragazzi la buona abitudine di dar conto di quello che si afferma e si fa. Inoltre si impara a dimostrare dimostrando...'*.

Per quanto riguarda il calare la matematica nella realtà i professori si ritrovano invece tutti d'accordo: *'L'altra cosa buona sai qual'è?! è il calare questo nella realtà come ad esempio nella fisica. Loro a volte risolvono un esercizio e non lo contestualizzano....Questo perché prima era così: basato sull'applicazione senza ragionare'*.

Nella riforma si riscontrano però anche alcuni limiti soprattutto per quanto riguarda i 'mezzi' che sono stati forniti per attuarla (dai tecnologici ai più pratici).

Purtroppo vi è un generale senso di insoddisfazione soprattutto nei confronti dell'editoria che ancora non li supporta (*'l'editoria non ci sostiene:....Alcuni hanno invece preso semplicemente gli argomenti e hanno fatto un copia incolla'*) o nei confronti di una mancata ripreparazione degli insegnanti stessi. A ciò si unisce anche la mancanza di mezzi che li supportino come per esempio semplici lavagne, le Lim o i proiettori per lavorare con Geogebra (*'purtroppo però non abbiamo i mezzi in tutte le classi e io sto soffrendo molto'*).

Di fronte a ciò alcuni professori decidono di non utilizzare alcun mezzo tecnologico mentre altri, come la Bagnacavalli, cercano di 'accaparrarsi' all'inizio

dell'anno le aule più attrezzate.
L'utilizzo di mezzi tecnologici sarebbe uno strumento di fondamentale importanza per attuare la riforma e svilupparla al meglio. *'Loro (i ragazzi) infatti lavorano molto più con le immagini rispetto ai ragazzi pre-riforma. Inoltre i bambini di pochi anni sanno già usare un iPad. Quindi questo agevola l'insegnamento'*. Anche il problema della ripreparazione degli insegnanti non è da sottovalutare. La professoressa Bagnacavalli, come detto in precedenza, sente di dover ancora fare molti passi 'mentali'; il solo dover togliere alcune dimostrazioni o il (famoso) dover 'sfrondare' gli argomenti dai conti pesanti (che erano in precedenza i punti principali dell'insegnamento) equivale, per alcuni, a togliere l'essenza stessa della matematica (*'Penso che ai ragazzi gioverà la riforma quando noi insegnanti l'avremo metabolizzata e rielaborata, cioè l'avremo fatta nostra'*).

Seppur la Ghera dica che *'siamo pochi che ci mettiamo a studiare come autodidatti'* nella mia esperienza all'interno del Fermi posso affermare che si sente un certo 'dinamismo' verso la riforma infatti *'alcuni fanno parte di associazioni di insegnanti che si ritrovano e autoaggiornano, ma i ben disposti rimangono pochi'*.
Purtroppo i tagli ai fondi non aiutano infatti *'teniamo anche presente che il numero di allievi non è praticamente raddoppiato ma quasi o comunque è cresciuto di un terzo in tutte le classi rispetto al pre-riforma.... Quindi il tempo per imparare qualcosa di nuovo non c'è veramente'*.

Ciò che quindi servirebbe non è solo un cambiamento delle indicazioni nazionali ma quanto la proposta di un nuovo tipo di didattica egemone in tutto l'istituto. La scuola, i ragazzi e i professori hanno bisogno di punti fermi a cui saldarsi. I docenti vorrebbero maggiori possibilità di preparazione verso ciò che viene proposto loro di fare. Ad esempio servirebbero corsi per imparare ad utilizzare programmi interattivi come GeoGebra o per utilizzare pagine web e creare siti per avvicinarsi ai ragazzi. Per ora solo i

più volenterosi si tengono aggiornati. Questo aspetto è ciò che più divide la riforma dalla sua attuazione.
Sembra che essa abbia semplicemente dato le direttive ai docenti lasciandoli poi soli, a doversi autogestire, e questo è un fatto sicuramente negativo. La mancanza di materiale con cui fare didattica getta molto sconforto e alcuni insegnanti accettano con passività la riforma adattandosi ad essa come meglio possono ma senza pensare all'impatto sui ragazzi e al TIPO di didattica che stanno insegnando loro.

Secondo il mio parere personale, condiviso anche da alcuni docenti, la riforma dovrebbe dare solo linee guida all'insegnamento e non un rigido programma a cui doversi adattare. Ogni classe ha le sue caratteristiche e il suo ritmo e l'obbligo a seguire un programma, per di più molto vasto, non lascia spazio ad interventi, ai ragazzi stessi o all'utilizzo di mezzi di supporto. Per esempio la matematica, come le materie scientifiche in generale, dovrebbe essere integrata con la storia della matematica. Ma di questo se ne parlerà nei prossimi capitoli.....

Capitolo 2

Un argomento post-riforma: i numeri Complessi

I numeri complessi sono uno degli argomenti, insieme ad esempio alla probabilità, che sono stati introdotti dalla riforma e quindi resi obbligatori all'interno degli istituti scientifici.
La scelta di soffermarsi su tale argomento è stata attuata in quanto può far comprendere appieno la mia, e non solo, idea di didattica. Essa dovrebbe infatti essere arricchita attraverso la Storia della disciplina.
I numeri complessi sono un argomento che ben si presta a questa idea. Sono una parte della matematica che spesso viene percepita come astratta e che quindi i ragazzi non capiscono o imparano passivamente. L'idea di un insegnamento della matematica a compartimenti stagni e la concezione che sia solamente un 'far di conto' è ormai obsoleta e non fa altro che allontanare i ragazzi da questa disciplina. Essi chiedono spesso il perchè delle cose e le classiche risposte 'perchè è così', 'lo capirete più avanti' sono ormai troppo strette.
Parleremo più avanti del contributo che la storia può dare alla matematica, e alle materie scientifiche in generale.

Alla domanda *"Quali sono i diversi metodi per introdurre i complessi? Quali sono gli aspetti positivi e negativi?* " le risposte sono state sostan-

zialmente favorevoli riguardo l'importanza di introdurli (*'Di aspetti cattivi non ne vedo nell'introdurre i complessi'*), ma non tutti i professori sono in accordo su come farlo.
Esistono infatti varie interpretazioni, e quindi presentazioni di essi. Questo argomento viene solitamente introdotto al secondo semestre del quarto anno e per i ragazzi rappresenta il passaggio da una matematica sostanzialmente "più reale" ad una del tutto "immaginaria", e quindi non riproducibile nella realtà. Le loro caratteristiche peculiari e il periodo in cui essi vengono introdotti non giova certo alla loro comprensione. Da una parte il periodo in cui si svolgono non lascia spazio ad ampliamenti o a rielaborazioni del programma, dall'altro, per le loro peculiarità, il modo in cui vengono introdotti è fondamentale. Quindi non sempre la riduzione delle ore disponibili per un argomento può essere ovviata eliminando le parti più teoriche o di dimostrazioni, infatti la mancanza di tempo per una minima autonomia nel programma da svolgere è uno degli aspetti limitanti di tale riforma.
La professoressa Bagnacavalli dice infatti: *'Io li introduco come ampliamento del campo dei reali....So bene che proprio per questo argomento una introduzione storica potrebbe essere opportuna e mi rendo altresì conto che sarebbe senz'altro più allettante per gli studenti, ma questo argomento viene trattato in genere verso la fine della quarta, schiacciato fra la trigonometria, la geometria solida e le trasformazioni, e la necessità di verificare....*
Il risultato è che al massimo si riesce a riservare non più di una decine di ore'.
Vedremo più avanti che questi aspetti saranno una delle possibili cause degli scarsi risultati ottenuti nel TIMSS ADVANCED relativamente alla domanda sui numeri complessi.
La professoressa Ghera è d'accordo nell'affermare che l'utilizzo della storia sia molto utile in questo contesto in quanto stimola la curiosità naturale dei ragazzi, infatti dice: *'Io li ho introdotti in tutti i metodi possibili.....(ma ora) li introduco da Scipione dal ferro e Bombelli perché ho studenti che abitano*

in Via Scipione dal ferro e questo suscita il loro interesse e mi chiedono "ma veramente?! chi era?!", e poi da li parto con il trinomio così permette ai ragazzi di ragionare e risolvere un problema da cui scaturisce il numero complesso. Quindi proprio facendo la storia del numero complesso veicoli dentro questo concetto e ciò è bellissimo più che mettersi lì a fare "$x^2+1=0$ *non ha soluzioni in* $\mathbb{R}$*" e la risposta dei ragazzi potrebbe essere "e a noi che ce ne frega a 17 anni che non ha soluzioni? vivevo bene prima e vivo bene adesso anche senza i complessi", invece se dico che Scipione dal ferro, bolognese, allievo di Bombelli arriva a questi risultati loro si interessano e mi chiedono "allora come finisce?non ce lo dite?" '.*

Ella, dirà poi nell'intervista, che ne vede, soprattutto all'università, dei riscontri positivi.

2.1 Come interpretare i numeri complessi

Qui di seguito riporteremo le varie interpretazioni, e quindi introduzioni, dei complessi nella scuola secondaria di secondo grado.
Queste sono prese dal libro L.Sasso 'matematica a colori' utilizzato attualmente da quasi tutti i prefessori del liceo scientifico 'E.Fermi'.
Secondo quanto detto dai docenti, esso è un ottimo punto di partenza verso la riforma e ci fa capire cosa è effettivamente cambiato rispetto a qualche anno fa. Ciò che lo rende moderno, oltre ad una rielaborazione dei contenuti anzichè un semplice copia e incolla, è l'accenno, alla fine di ogni capitolo, alle nuove tecnologie e alla storia della matematica.
Il problema purtroppo ancora presente è lo stesso di quello dei medesimi professori ossia rimanere ancora ancorato ai calcoli artificiosi e alle troppe dimostrazioni.

2.1.1 I numeri complessi come ampliamento

Ci siamo più volte trovati nella necessita di ≪ampliare≫ l'insieme numerico nel quale eravamo abituati a lavorare:
- abbiamo ampliato l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, introducendo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, per poter risolvere equazioni del tipo $x + 5 = 3$, $5 - x = 6$, ovvero per invertire l'operazione di addizione;
- abbiamo ampliato l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi, introducendo l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, per poter risolvere equazioni del tipo $2x = 5$, $3x + 1 = 0$, ovvero per invertire l'operazione di moltiplicazione;
- abbiamo infine ampliato l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, introducendo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, per poter risolvere equazioni del tipo $x^2 - 2 = 0$, ovvero per poter eseguire l'operazione di estrazione di radice n-esima.

Vi sono però semplici equazioni che anche in $\mathbb{R}$ non hanno soluzioni:

per esempio, $x^2 + 1 = 0$. Lo scopo è di estendere ulteriormente il campo dei numeri reali introducendo un nuovo insieme numerico, che chiameremo *insieme dei numeri complessi*, soddisfacente i seguenti requisiti:

a. siano definite in tale insieme delle operazioni che continuino a godere delle proprietà valide in $\mathbb{R}$;

b. tale insieme sia un ampliamento di $\mathbb{R}$, cioè contenga un sottoinsieme identificabile con $\mathbb{R}$;

c. sia possibile risolvere in tale insieme un'equazione come $x^2 + 1 = 0$.

Con l'introduzione dei numeri complessi il problema che ha stimolato la progressiva estensione degli insiemi numerici, cioè quello di poter risolvere classi sempre più ampie di equazioni, trova una soluzione definitiva: vedremo infatti che nell'insieme dei numeri complessi ogni equazione algebrica ammette soluzioni.

Costruiamo come segue il nuovo insieme che ci siamo proposti di introdurre. Indichiamo con $\mathbb{R}^2$ (abbreviazione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), l'insieme delle coppie ordinate (a, b) di numeri reali. Introduciamo in esso l'operazione così definita di:

addizione $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

moltiplicazione $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Chiamiamo l'insieme $\mathbb{R}^2$, strutturato con queste operazioni, insieme dei numeri complessi e lo denotiamo con la lettera $\mathbb{C}$. Un numero complesso è quindi una coppia ordinata di numeri reali.

Verifichiamo ora che l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi soddisfa tutti i requisiti che desideravamo.

Nell'insieme $\mathbb{C}$ le operazioni godono di proprietà analoghe a quelle che valgono in $\mathbb{R}$.

L'operazione di addizione definita è commutativa e associativa, ha come elemento neutro la coppia ordinata $(0, 0)$; ogni elemento (a, b) di $\mathbb{R}^2$ ammette

come opposto l'elemento $(-a,-b)$. Anche l'operazione di moltiplicazione è commutativa, associativa e distributiva rispetto all'addizione; ha come elemento neutro la coppia ordinata $(1,0)$; e ogni elemento $(a,b) \neq (0,0)$ ammette come reciproco (o inverso) l'elemento $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$.
Inltre la sottrazione tra due numeri complessi si può definire in $\mathbb{C}$ come addizione tra il primo numero e l'opposto del secondo; la divisione tra due numeri complessi, di cui il secondo diverso da $(0,0)$, si può definire come moltiplicazione tra il primo e il reciproco del secondo.
Dunque l'insieme dei numeri complessi ha la stessa struttura $\mathbb{R}$.

Il sottoinsieme formato dai numeri complessi del tipo $(a,0)$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, associando ad ogni coppia ordinata del tipo $(a,0)$ il primo numero della coppia ossia a. Inoltre, le operazioni di addizione e moltiplicazione fra numeri complessi del tipo $(a,0)$ agiscono allo stesso modo delle operazioni di addizione e moltiplicazione fra numeri reali. L'insieme dei numeri complessi contiene quindi un sottoinsieme, quello delle coppie ordinate del tipo $(a,0)$, che è identificabile con $\mathbb{R}$. In questo senso l'insieme $\mathbb{C}$ è un ampliamento di $\mathbb{R}$.

La forma algebrica

Definendo l'unità immaginaria i come il numero complesso $(0,1)$, risulta possibile scrivere ogni numero complesso nella forma $(a,b) = a + b * i$ detta *forma algebrica o cartesiana* di un numero complesso. Il numero complesso i ha una singolare proprietà: il suo quadrato coincide con l'opposto dell'unità del campo $\mathbb{C}$ ossia $i^2 = 1$

Esempio 2.1. Dunque nell'insieme dei numeri complessi l'equazione $x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ ammette soluzioni: una di esse è i.

D'ora in avanti per scrivere un generico numero complesso (a, b), che indicheremo di solito con z, utilizzeremo la rappresentazione in forma algebrica: $z = a + bi$ dove a si chiama *parte reale* del numero complesso e si indica con il simbolo Rez; il numero b si chiama *parte immaginaria* del numero complesso e si indica con il simbolo Imz.
Per indicare un numero complesso avente parte immaginaria uguale a 0, cioè un numero complesso reale della forma $a + 0i$, si scrive semplicemente a.
Analogamente, per indicare un numero complesso avente parte reale uguale a 0, cioè un numero complesso della forma $0 + bi$, si scrive semplicemente bi; questi ultimi numeri complessi vengono chiamati *numeri immaginari (o immaginari puri)*.

Due numeri complessi si dicono:
- *uguali* se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria;
- *coniugati* se hanno la stessa parte reale e parte immaginaria opposta. Il coniugato di z si indica con $\bar{z}$;
- *opposti* se hanno sia la parte reale sia la parte immaginaria opposte.

Con le notazioni che ci hanno consentito di scrivere un numero complesso in forma algebrica, è facile rendersi conto che l'addizione e la moltiplicazione definite sono le ordinarie regole di calcolo letterale tra binomi infatti: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ e $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
Conseguenza di queste osservazioni è che per eseguire operazioni tra numeri complessi espressi in forma algebrica non è necessario ricordare le definizioni ma basta procedere secondo le ordinarie regole di calcolo letterale, tenendo conto, in più , della relazione $i^2 = -1$.

Come procedere invece per eseguire le divisioni? Consideriamo per esempio l'espressione per come è stata definita la divisione, possiamo moltiplicare per il reciproco. Tuttavia è più semplice applicare la proprietà invariantiva (che vale anche in $\mathbb{C}$) e moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore. Questo procedimento, del tutto simile a quello di razionalizzazione, consente di giungere rapidamente alla forma algebrica del quoziente.

2.1.2 L'interpretazione geometrica in coordinate cartesiane

La definizione di numero complesso come coppia ordinata di numeri reali suggerisce una naturale rappresentazione geometrica dei numeri complessi nel piano cartesiano: il numero complesso $z = a + bi$ è rappresentato dal punto di coordinate (a, b).
In questo contesto:
- il piano cartesiano viene talvolta chiamato *piano di Gauss (o piano complesso o piano di Argand-Gauss)* ;
- l'asse x viene anche detto *asse reale* (perchè rappresenta il sottoinsieme dei numeri complessi formato dai numeri reali);
- l'asse y viene anche detto *asse immaginario* (perchè rappresenta il sottoinsieme dei numeri complessi formato dai numeri immaginari).

La rappresentazione geometrica di un numero complesso porta a definire il concetto di modulo di un numero complesso.
Sia $z = a + bi$ un numero complesso. Si chiama *modulo di z*, e si indica con il simbolo $|z|$, la distanza del punto che rappresenta z nel piano cartesiano dall'origine: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Osservazione 2.1. 1. Il modulo di un numero complesso, così come il modulo di un numero reale, è sempre maggiore o uguale a zero.
2. La definizione di modulo di un numero complesso coincide, nel caso particolare in cui quest'ultimo sia reale, con la definizione valore assoluto di un numero reale.

Un numero complesso $z = a + bi$ può essere interpretato geometricamente non solo come un punto nel piano di Gauss, ma anche come vettore, applicato nell'origine $O(0, 0)$, avente come secondo estremo il punto $P(a, b)$.
Questa osservazione consente di interpretare geometricamente in modo efficace le operazioni di addizione e sottrazione tra numeri complessi.
Dati due numeri complessi z_1 e z_2, si potrebbe infatti dimostrare che:

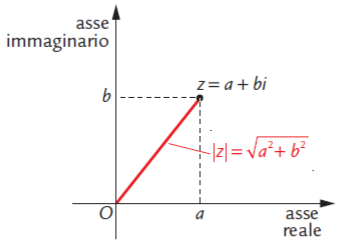


Figura 2.1: La rappresentazione geomentrica e il modulo

- il vettore che rappresenta $z_1 + z_2$ è la somma, eseguita secondo la nota regola del parallelogramma, dei vettori che rappresentano z_1 e z_2;
- il vettore che rappresenta $z_2 - z_1$ è la differenza dei vettori che rappresentano z_2 e z_1.
- Si può dimostrare con semplici considerazioni geometriche che il quadrilatero che ha come vertici l'origine e i punti che rappresentano z_1; z_2 e $z_2 - z_1$ è un parallelogramma, il modulo del numero complesso $z_2 - z_1$ rappresenta la distanza tra i punti z_1 e z_2.

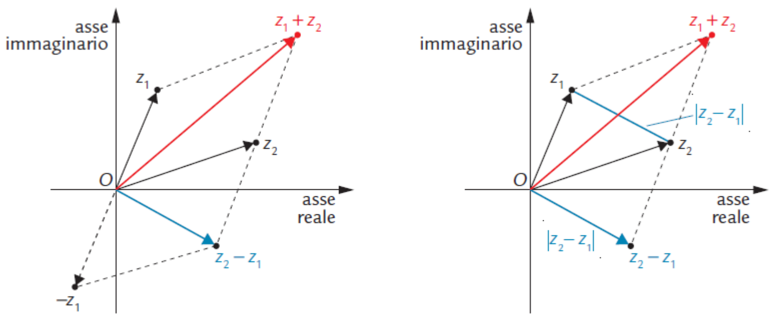


Figura 7.3 Interpretazione geometrica della somma e della differenza di due numeri complessi.

Figura 7.4 Il modulo del numero complesso $z_2 - z_1$ rappresenta la distanza tra i punti z_1 e z_2.

Figura 2.2: L'interpretazione geometrica delle quattro operazioni

Possiamo quindi enunciare la seguente proposozione:

Proposizione 2.2. *DISTANZA NEL PIANO DI GAUSS*
Siano z e w due numeri complessi. La distanza fra i due punti che rappresentano z e w nel piano di Gauss è espressa dal modulo del numero complesso $z - w$, cioè da $|z - w|$.

Teorema 2.3. *Proprietà dell'operazione di coniugio*
Siano z e w due numeri complessi. Valgono allora le seguenti proprietà:
a. $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$
b. $\bar{z} * \bar{w} = \overline{z * w}$
c. $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$
d. $z * \bar{z} = |z|^2$
e. $1/z = \bar{z}/|z|^2$ *per ogni* $z \neq 0$.

Osservazione 2.4. Per come sono state definite la sottrazione e la divisione in $\mathbb{C}$ sarà anche: $\bar{z} - \bar{w} = \overline{z - w}$ e $\bar{z}/\bar{w} = \overline{z/w}$.

2.1.3 L'interpretazione geometrica in coordinate polari

Questo tipo di rappresentazione dei numeri complessi risulterà particolarmente utile per il calcolo delle potenze e delle radici in $\mathbb{C}$.

Nozioni

In un piano si può anche fissare, oltre alle coordinate cartesiane di un punto, un sistema di riferimento di tipo diverso. Esso prevede di fissare nel piano un punto, detto *polo*, e una semiretta avente per origine il polo, detta *asse polare*.
Un punto P può allora essere ancora identificato con una coppia ordinata di numeri reali, (r, θ) dove r è la distanza del punto P dal polo e θ la misura dell'angolo (orientato come al solito in senso antiorario) formato dall'asse polare con la semiretta OP. Il numero r si chiama *modulo (o raggio vettore)* del punto P e il numero θ *argomento (o anomalia)* di P; r e θ costituiscono le coordinate polari di P.
L'argomento θ di P (che supporremo sempre misurato in radianti) resta individuato a meno di multipli di 2π; per fare in modo che le coordinate polari di un punto siano uniche si fissa un intervallo di ampiezza $[0, 2\pi[$ entro il quale far variare θ che sarà anche detto *argomento principale del punto*.

Attenzione! Il polo O ha un comportamento particolare: gli si può attribuire modulo uguale a 0, mentre l'argomento resta indeterminato; conveniamo perciò che ogni coppia del tipo (r, θ) con $r = 0$ rappresenti il polo.

A volte si rivela utile fissare, in uno stesso piano, sia un riferimento cartesiano ortogonale, sia un riferimento polare. Il sistema di coordinate polari si fissa di solito scegliendo come polo l'origine del sistema di riferimento cartesiano e come asse polare il semiasse delle ascisse positive. In tale situazione si pone il problema di passare dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari e viceversa.

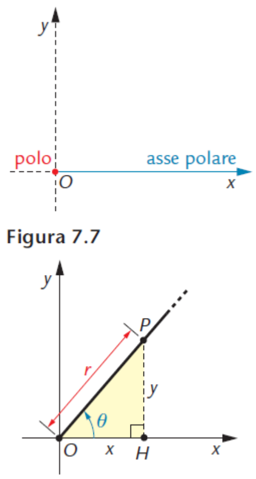


Figura 2.3: Dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane

Consideriamo un punto P di coordinate:
- polari (r, θ). In base al primo teorema sui triangoli rettangoli applicato al triangolo OHP si dimostra che P ha coordinate (x, y) dove: $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$. (Si può verificare facilmente che i legami tra le coordinate polari e quelle cartesiane restano gli stessi anche negli altri quadranti.)
- cartesiane $P(x, y)$. Il modulo di P è $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $tan\theta = x/y$. L'argomento di P può venire determinato tenendo conto di questa relazione e del quadrante a cui appartiene.

Forma trigonometrica

Ora che abbiamo introdotto le coordinate polari, possiamo tornare ai numeri complessi e introdurre, come abbiamo anticipato all'inizio, un nuovo modo di rappresentarli.

Consideriamo un numero complesso $z = a + bi$ e sia $P(a, b)$ il punto che lo rappresenta nel piano di Gauss. In base a quanto visto nel sottoparagrafo precedente abbiamo $a = rcos\theta$ e $b = rsin\theta$ quindi abbiamo il numero complesso $z = a + bi = rcos\theta + isin\theta$ con $r \neq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.
Quando un numero complesso è scritto in tale forma si dice che è espresso

in *forma trigonometrica.*

Il numero r coincide con il modulo del numero complesso mentre θ è l'argomento del numero complesso. Esso è indicato con il simbolo *arg z.*

Per il numero complesso $z = 0$ l'argomento non viene definito.

La forma trigonometrica dei numeri complessi si presta particolarmente bene a eseguire le operazioni di moltiplicazione e divisione tra numeri complessi.

Teorema 2.5. *Il prodotto di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica è il numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli dei fattori e per argomento la somma degli argomenti degli stessi fattori. In simboli: se* $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)$ *e* $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$ *risulta:* $z_1z_2 = r_1r_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)]$.

Teorema 2.6. *Il quoziente di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica, il secondo dei quali sia diverso da* 0*, è il numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli dei numeri dati e per argomento la differenza dei loro argomenti. In simboli: se* $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)$ *e* $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$ *con* $z_2 \neq 0$ *risulta:* $z_1/z_2 = r_1/r_2[cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2)]$.

I due teoremi precedenti consentono di interpretare geometricamente nel piano di Gauss anche le operazioni di moltiplicazione e divisione tra numeri complessi. Consideriamo due numeri complessi z_1 e z_2. Supponiamo inizialmente che il modulo di z_2 sia uguale a 1 e il suo argomento sia θ_2; allora moltiplicare z_1 per z_2:

- non altera il modulo di z_1;

- incrementa di θ_2 l'argomento di z_1.

Ciò equivale ad applicare al punto che rappresenta z_1 ad una rotazione intorno all'origine di angolo di rotazione uguale a θ_2.

Se z_2 ha modulo r_2, allora oltre alla rotazione il punto subisce anche un'omotetia di rapporto r_2.

Il punto z_1 in seguito alla divisione per z_2 subisce una rotazione di angolo $-\theta_2$ e un'omotetia di rapporto $1/r_2$.

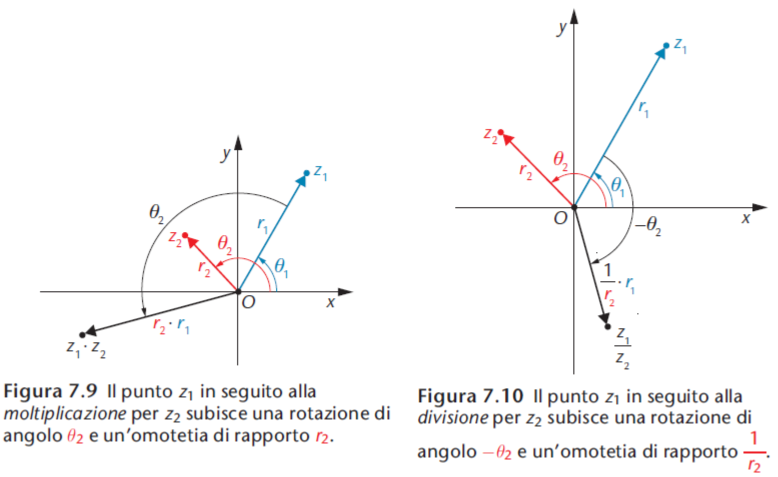


Figura 2.4: Interpretazione di prodotto e divisione

2.1.4 I numeri complessi in forma esponenziale

I numeri complessi, oltre che in forma algebrica e trigonometrica, si possono rappresentare anche in forma esponenziale. Come vedremo, il vantaggio della forma esponenziale è che risulta più concisa e facilita i calcoli rispetto alla forma trigonometrica.

Dato un numero immaginario puro, che indichiamo con $i\theta$, definiamo: $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ (prima formula di Eulero).
Consideriamo ora un qualsiasi numero complesso z posto in forma trigonometrica, $z = r(cos\theta + isin\theta)$ si dice che z è espresso in forma esponenziale quando è nella forma: $z = re^{i\theta}$.

Con questa notazione le formule che derivano dai teoremi sul prodotto e sul quoziente di numeri complessi in forma trigonometrica e la formula di De Moivre possono essere scritte nelle seguenti forme:
- $r_1e^{i\theta_1} * r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i\theta_1+\theta_2}$ (Moltiplicazione di numeri complessi)
- $\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = (r_1/r_2)e^{i\theta_1-\theta_2}$ (Divisione di numeri complessi)
- $(re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta_1}$ (Formula di De Moivre)

Possiamo così apprezzare l'utilità della forma esponenziale: i teoremi sul prodotto e sul quoziente di numeri complessi in forma trigonometrica e il teorema di De Moivre sono stati tradotti in formulazioni estremamente 'naturali', perchè appaiono formalmente semplici applicazioni delle ordinarie proprietà delle potenze.

Concludiamo con alcune importanti osservazioni:
- Nel caso in cui $\theta = \pi$, si ha $e^{i\pi} = cos\pi + isin\pi = -1$, ossia $e^{i\pi} + 1 = 0$.
- Dalla prima formula di Eulero si deduce la cosiddetta seconda formula di Eulero: $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$.

Infine, sommando e sottraendo membro a membro la prima e la seconda formula e dividendo per 2, otteniamo la terza e la quarta formula di Eulero: $cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ e $sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$.

2.2 Il modo di introdurli

Ritroviamo nel libro tutte le possibili introduzioni dei numeri complessi ma alcune di esse presentano delle criticità.
L'impostazione del capitolo 'I complessi' si basa sul presentare tutte le possibili interpretazioni di essi partendo da quello più comunemente utilizzato: i complessi come ampliamento dei reali. Come già detto, la maggior parte dei docenti credono che il modo migliore sia l'introduzione del concetto attraverso la storia ma nonostante ciò si continua a presentarli meccanicamente, con una impostazione del tutto teorica e, a mio parere, errata.
Questo approccio porta i ragazzi a pensare che i numeri complessi siano nati dai numeri reali ma in realtà, come anche il libro presenta in appendice attraverso un breve excursus storico, non è così. Essi sono nati dall'esigenza di trovare una soluzione generale per le equazioni di terzo grado e solo successivamente sono stati accettati come 'numeri' e visti come un possibile ampliamento dei reali a cui possiamo quindi trasporre le proprietà di essi.
In questo senso il libro potrebbe risultare ambiguo agli occhi dei ragazzi. L'introduzione dei numeri reali, prima attraverso i reali e poi in appendice attraverso le equazioni (ammettendo che leggano l'appendice), potrebbe confonderli.

Riporteremo quì sotto una breve parte dell'intervista della professoressa Ghera che esporrà il suo pensiero sulle possibili introduzioni dei numeri complessi testati in classe.

'Su come introdurre i complessi ci sono molteplici metodi. Io li ho introdotti in tutti i metodi possibili:
- prendendo la soluzione di $x^2 + 1$ che però è un pò calato così;
- nel piano lo si introduce molto bene;
- con Pascal facendo la rappresentazione grafica con gli assi e anche lì viene

abbastanza bene;

- diventa calato dall'alto se lo introduciamo come completamento dei numeri reali, in questo caso i ragazzi la studiano senza capire più di tanto....;

- E' molto bella anche la rappresentazione che le colloca come lati di un poligono regolare e le questioni ad essi connesse;

- E' interessante, anche se più noiosa, la scrittura del tipo $a+i*b$*, la norma, il modulo;*

- Data invece in termini più particolari e scorrevoli può essere nel piano in funzione di ρ*;*

Ma una volta impostati si devono fare bene: la scrittura trigonometria, la teoria di De Moivre, la risoluzione di un'equazione nel campo complesso bisogna farle necessariamente'.

2.3 Partiamo dalla storia!!

La storia della matematica è per molti contributo importante per la matematica stessa. Essa aiuta a contestualizzarla rendendola concreta e più vicina alla realtà. I ragazzi hanno esigenza di sentire la materia più vicina alla loro vita o comunque frutto di esigenze quotidiane.
I numeri complessi sono uno strumento molto potente all'interno della matematica e di altre materie scientifiche ma rappresentano lo scoglio principale dei ragazzi che vedono i concetti matematici allontanarsi sempre più dalla loro comprensione.
Collegando i numeri complessi agli argomenti che trattano in precedenza, gli insegnanti li contestualizzano e pongono sullo stesso piano (ed in contemporanea come una loro estensione naturale) degli insiemi introdotti in precedenza. Per di più essi si riallacciano all'argomento forse più familiare ai ragazzi: le equazioni.
Si percepisce così un senso di continuità e si comprende che la matematica non è fatta di compartimenti stagni e di singole menti, ma dell'azione di molti, animati da problemi comuni e a volte primitivi.
L'utilità della matematica assume nella storia un ruolo ancora più importante del semplice 'far di conto', perchè risponde a piccole e grandi esigenze umane e si riallaccia ad altre realtà come quelle fisiche, informatiche ecc... ecc... Spesso questi collegamenti, come è accaduto nei numeri complessi, avvengono con il tempo in quanto nascono da un intento e se ne scopre solo poi la loro importanza e la loro applicazione negli altri ambiti.

Nella prossima sezione raccoglieremo anche le testimonianze degli esperti per avere opinioni quanto più ampie possibili.
Gli esperti hanno infatti pareri oggettivi, ossia non necessariamente formatasi durante la loro esperienza sul campo, mentre gli insegnanti hanno opinioni fortemente soggettive in quanto dipendenti dal loro lavoro.

2.3.1 Il parere degli esperti sull'utilizzo della storia

Per quanto riguarda l'utilizzo della storia della matematica nell'insegnamento della matematica stessa analizzeremo i pareri di due esperti in didattica matematica ossia Fulvia Furinghetti e Giorgio T. Bagni.

Fulvia Furinghetti

Fulvia Furinghetti ha scritto un articolo 'Storia della matematica per insegnanti e studenti' in cui si pone tre domande:
Si deve conoscere la storia della matematica?
Quanta se ne deve conoscere?
Come si deve conoscerla?
Ella crede che la risposta ad esse sia diversa tra insegnanti e docenti. Sicuramente per entrambi la storia è un artefatto che diventa strumento di conoscenza e mediatore nel processo di insegnamento/apprendimento.
Nel 1997 distingue l'uso della storia nell'insegnamento in due parti: come riflessione sulla natura della matematica, intesa come processo socioculturale, o come costruzione diretta degli strumenti matematici. Tali metodi si differenziano anche in base al materiale che viene utilizzato.
In ogni caso la storia deve essere integrata nella matematica stessa e non essere considerata un surplus. L'artefatto, in quanto oggetto materiale, diventa infatti strumento (artefatto con le sue modalità di utilizzazione) quando il soggetto che lo usa riesce a finalizzarne l'uso ai propri scopi.
Ma come si fa a far diventare l'artefatto storia uno strumento?

Si deve conoscere la storia della matematica?
La storia mette in risalto e chiarisce l'aspetto elementare della matematica. Attraverso un iniziale spaesamento, e un conseguente riposizionamento ed orientamento, essa da l'opportunità di ripensare alle proprie idee sulla natura degli oggetti matematici e sui processi della loro costruzione ma può

anche essere un metodo per analizzare le difficoltà degli studenti in una nuova prospettiva.
Un altro aspetto fondamentale della storia è l'importanza che hanno le metafore nella costruzione degli oggetti matematici. Esse costituiscono le idee astratte originate dalla nostra esperienza e creatrici della nostra conoscenza e dei nostri ragionamenti. Possono essere utilizzate come strumento di comunicazione delle idee matematiche o possono diventare un valido strumento nella comunicazione tra studente e insegnante. Quest'ultimo utilizzo della storia non ha però esempi nel concreto in quanto andrebbe contro il contratto didattico che impone una certa metodologia di comunicazione dei concetti matematici.

Quanta storia si deve conoscere?

Per la Furinghetti gli insegnanti più storia sanno meglio è, mentre gli alunni devono saperne anche in relazione al programma didattico. Si pensa che una riduzione dell'orario dedicato per ogni argomento, a livello teorico, sia utile per far percepire la matematica come processo socio-culturale. Gli argomenti storici devono essere scelti accuratamente per far lavorare in un altro ambiente gli oggetti matematici. Insieme ad essi si deve utilizzare anche la storia più generale che sarà inoltre un punto di partenza per il collegamento con le altre discipline.

Come si deve conoscere la storia?

Occorre mettere in luce le radici delle idee matematiche e dare una comprensione del ruolo che gioca la matematica nella società. E cruciale come ci si debba avvicinare alla storia quindi occorre che l'insegnante capisca il lavoro dello storico, conosca le fonti e ne sappia il loro carattere ipotetico, al fine di non utilizzarlo come semplice dogma morto in aggiunta a quelli matematici. Questo permette ad esempio di abbandonare la concezione che i progressi matematici abbiano un andamento lineare. Anche per i ragazzi sarà fondamentale il ‘come’ fare la storia e al fine di ciò saranno utili determinate fonti che metteranno in luce abilità interdisciplinari.

Giorgio T.Bagni

Giorgio T. Bagni scrisse nel 2004 un articolo intitolato 'Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche'.
L'introduzione del concetto spesso fa riferimento alla storia della disciplina apprezzata tanto dai ricercatori quanto da insegnanti e allievi.
Si deve prima però essere in accordo in un punto fondamentale:
il ruolo della matematica è quello di scopritore o inventore?
Secondo il platonismo gli oggetti esistono in natura indipendentemente dalla loro definizione quindi la matematica ha solo il ruolo di scopritore degli oggetti naturali.
In opposizione si pone il pensiero secondo cui il matematico crea, attraverso la matematica, il concetto stesso che descrive.
Ci si chiede quindi se sia accettabile concepire la storia della matematica come un percorso che, attraverso tentativi, errori e rivisitazioni critiche, conduca alla corretta sistemazione concettuale moderna. Possiamo quindi considerare l'attuale concezione della matematica come frutto dell'evoluzione storica? E quale ruolo gli possiamo attribuire?
Lo scopo della storia è evidenziare e interpretare gli ostacoli epistemologici che gli individui incontrano. La conoscenza si produce in relazione al contesto socio-culturale in cui si trova, e ciò ci permette di considerare il concetto criticamente e nei diversi contesti.
Secondo la teoria di Paolo Boero 'voci ed echi', l'insegnante può fornire ai ragazzi alcune espressioni verbali, e non, riconducibili a momenti storici. Questo avviene in modo da vedere come le costruzioni del concetto e le dimostrazioni siano basate su strategie di pensiero collegate alle tradizioni culturali e al linguaggio utilizzato.
Secondo Giorgio Bagni esiste un uso corretto della storia per riuscire a superare gli ostacoli che la matematica pone. Ad esempio un suo utilizzo superficiale e poco significativo non darà alcun contributo. Un altro pro-

blema che si potrebbe presentare è l'interpretazione del passato in relazione alla visione odierna della cose. D'altro canto questa visione è inevitabile quindi occorre tenerne conto sapendo di mettere in contatto e a confronto due culture e due tempi diversi. Il tentativo di ricostruire la storia senza influenze dovute ai successivi periodi è infatti una cosa alquanto complessa. La storia non spiega la matematica ma consente di conoscerla e studiarla come oggetto storico. Essa può essere collocata a posteriori o a priori. Possiamo infatti costruire la storia stessa dell'argomento attraverso i periodi storici, quindi il concetto verrebbe introdotto attraverso la SUA storia e dovrebbe essere quindi posto all'inizio della trattazione. Ci si chiede però se l'ordine cronologico sia sempre la scelta più giusta e se, ad esempio, la storia potrebbe essere posta come approfondimento o chiarimento del concetto (ossia a posteriori).
Ciò che sicuramente è indispensabile è contestualizzare la stessa storia dei concetti all'interno del contesto storico in cui si colloca. Considerare questo fatto una banalità renderebbe la storia un ostacolo alla comprensione.

2.3.2 Conclusioni

I pareri degli insegnanti e degli esperti sull'utilizzo della storia sono fondamentalmente unanimi. Le opinioni sono infatti sostanzialmente in linea con quanto affermato in precedenza, ossia che la storia della matematica è fondamentale nell'insegnamento tanto per il modo in cui i ragazzi acquisiranno i concetti quanto per la concezione che avranno di essi.
Entrambe le parti (professori ed esperti) riconoscono alla storia un ruolo fondamentale seppur non neghino che vi sono molti fattori da prendere in considerazione sul COME utilizzarla.

Per i professori gli ostacoli maggiori sono presentati, come detto in precedenza, dalla loro 'vecchia' impostazione d'insegnamento, dalla scarsità delle ore disponibili per ogni argomento, dall'aumento degli argomenti trattati in seguito alla riforma e infine dalla mancanza di preparazione loro e dei libri a cui fanno riferimento.
La professoressa Bagnacavalli ha messo in luce queste problematiche:
'No, non utilizzo quasi mai la storia della matematica nelle mie lezioni per diversi motivi.
Innanzi tutto il tempo (4 ore settimanali).... In secondo luogo i testi stessi non sono assolutamente organizzati in questo modo: quasi tutti presentano richiami a come si è potuto giungere quel concetto o come il tal matematico ha rielaborato una certa teoria, ma sempre alla fine del capitolo, come appendice, non come introduzione alla tematica. Infine (e non ho difficoltà ad ammetterlo e su questo punto mi sono confrontata spesso anche con altri colleghi) non credo di avere la preparazione adeguata'.
Di fronte ciò molti professori decidono di non utilizzare per nulla la storia, ma vi sono alcuni, come la professoressa Ghera, che ne tessono le lodi e cercano di usufruirne anche con semplici accenni.
'Devo dire che molti dei miei studenti proprio nel momento in cui mostro

che c'è qualcosa oltre ciò che stiamo facendo si interessano. A volte io porto anche articoli scritti sui giornali....La storia della matematica è fondamentale. Tutta la nostra didattica dovrebbe essere permeata e non formata da sezioni chiuse. La storia della matematica è importante anche per vedere la storia del concetto....Poi ci sono anche degli aneddoti che un po' spezzano la didattica, l'aiutano, ci fanno anche capire come alcuni concetti, o per meglio dire risultati, e alcune teorie che sembravano a se stanti possano servire. Vedi, la storia della matematica e della fisica spesso vanno insieme. Effettivamente alcune teorie fanno da supporto ad altre e ci portano a certi risultati...Ciò lo puoi anche contestualizzare con quello che loro stanno facendo in Storia e Filosofia perché la matematica si presta sia come storia del concetto filosofico sia come concetto stesso di filosofia o di storia'.

Gli esperti si soffermano invece maggiormente sugli ostacoli che potrebbero derivare da ciò che si spiega e da come lo si fa. Essi considerano la storia utile purchè introdotta nel contesto socio-culturale e la credono dannosa qualora la si faccia superficialmente e scissa dal tempo. Inoltre credono nell'utilizzo delle fonti originali al fine di evitare una interpretazione del passato in vista dei fatti presenti.

Possiamo quindi dire che l'utilizzo della storia è all'unanimità uno strumento utile alla comprensione di un concetto ma che devono essere ancora creati gli strumenti perchè si possa attuare ciò nelle scuole.

Le modalità con cui introdurre un oggetto matematico sono molteplici ma secondo me quella più adatta è un uso a priori della storia, in cui lo studio dell'oggetto a livello matematico si integri all'interno di essa. A mio parere ogni argomento dovrebbe essere trattato come frutto di una evoluzione non lineare del pensiero e come parte integrante del contesto socio-culturale in cui si trova. Questa trattazione permetterebbe ai ragazzi di pensare la matematica come parte della nostra cultura al pari delle materie umanistiche. Credo che il rimanere ancorati alla concezione che la matematica sia il solo 'far di conto' non permetta un utilizzo produttivo della storia e lascerà i concetti matematici scissi dal resto. Come abbiamo precedentemente detto occorrerebbe però cambiare la mentilità stessa della società per poter introdurre un nuovo approccio che dia spazio ad una 'nuova concezione della matematica'.

2.4 La storia dei numeri complessi

2.4.1 Introduzione

Bisogna tener bene presente che nello sviluppo storico e psicologico della matematica, le estensioni del concetto di numero e le nuove invenzioni non furono affatto il risultato di sforzi individuali. Ma piuttosto come il risultato di una graduale e lenta evoluzione.
Fu il bisogno di una maggiore libertà nei calcoli formali che portò all'uso dei numeri razionali e negativi. Soltanto alla fine del medioevo i matematici cominciarono a perdere il loro senso di disagio nell'usare questi concetti che non sembrava avessero lo stesso carattere intuitivo e concreto dei numeri naturali. Si dovette aspettare la metà del XIX secolo perchè i matematici si rendessero del tutto conto che la base essenziale logica e filosofica delle operazioni, in un dominio numerico esteso, è formale; le estensioni devono essere create con definizioni che, come tali, sono libere, ma sono inutili se non formulate in modo che le principali leggi e proprietà del dominio originario siano conservate in quello più ampio.

Il primo procedimento che richiese l'uso dei numeri complessi fu la *risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado.* Si doveva infatti asserire o che non tutte avessero soluzione o seguire la via oramai familiare di estendere il concetto di numero, introducendo quelli che avrebbero reso tali equazioni risolubili. Si introdusse quindi il simbolo i mediante la definizione $i^2 = -1$. Naturalmente questo ente non ha nulla a che fare con il concetto considerato come uno strumento per *contare.* Esso è puramente un *simbolo* soggetto alla legge fondamentale $i^2 = -1$, e il suo valore dipende esclusivamente dalla possibilità di effettuare, mediante la sua introduzione, un'estensione realmente utile del sistema numerico.
Volendo eseguire le operazione di addizione e moltiplicazione come con un numero reale ordinario questi simboli devono rispettare le usuali proprietà,

commutativa, associativa e distributiva, dell'addizione e della moltiplicazione.
In questo modo si ottiene molto di più: si può facilmente verificare che *tutte le equazioni di secondo grado* che si possono scrivere nella forma $ax^2+bx+c = 0$ ammettono soluzione.

2.4.2 La Storia

Storicamente le idee che hanno portato alla nascita dei numeri complessi risalgono al XVI secolo e sono legate al problema della risoluzione delle equazioni di terzo grado. Mentre la tecnica risolutiva delle equazioni di secondo grado con il metodo del 'completamento del quadrato' era nota già dai tempi dei Babilonesi, alla fine del XV secolo ancora non vi erano noti metodi generali per risolvere le equazioni di terzo grado, sebbene nella risoluzione di questo problema si fossero cimentati molti matematici Greci e arabi fin dai tempi di Archimede. Ancora nel 1494 Luca Pacioli (1445-1514) concludeva il più famoso manuale di algebra del Rinascimento, *'la Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità'*, sostenendo l'impossibilità di dare una soluzione generale per questo tipo di equazioni.
Meno di cinquant'anni dopo il problema era sorprendentemente risolto. Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccolò Tartaglia (1500-1557), lavorando indipendentemente l'uno dall'altro, scoprirono un metodo generale per risolvere le equazioni di terzo grado, pubblicati poi nel 1545 dal matematico italiano Gerolamo Cardano (1501-1576) che si guadagnò così la fama di inventore di tali formule.
La formula di Cardano per un'equazione di terzo grado del tipo $x^3 = px + q$ era $x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{q^2/4 - p^3/27}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{q^2/4 - p^3/27}}$.

Il termine: $\Delta = q^2/4 - p^3/27$ è chiamato discriminante dell'equazione, analogamente al caso delle equazioni di secondo grado, ed è proprio nel caso $\Delta < 0$, detto irriducibile, che i matematici del XVI secolo si imbatterono in un fatto decisamente sorprendente.

La geniale idea che portò alla nascita dei numeri complessi è proprio legata alla necessità di superare questa anomalia.
Il matematico bolognese Raffaele Bombelli (1526-1573), spinto dalla volontà di completare la risoluzione dell'equazione di terzo grado anche nel caso irriducibile, immagina che $\sqrt{\Delta}$ esista anche per $\Delta < 0$ e dimostra che in tale modo si possono ritrovare le soluzioni reali dell'equazione!
Bombelli introdusse le espressioni *≪più di meno≫ e ≪meno di meno≫* (abbreviate con p.d.m e m.d.m) per indicare $+i$ e $-i$, e stabilì le leggi formali di calcolo di questi nuovi 'numeri'.
Egli mostrò così che è possibile trovare soluzioni reali di un'equazione operando con radici quadrate di numeri negativi, cioè con numeri che successivamente Cartesio chiamerà 'immaginari'.

N.B. la diffidenza nei confronti dei numeri complessi è stata ancora maggiore di quella a suo tempo manifestata nei confronti dei numeri negativi, tanto che anch'egli non li considerava veri e propri numeri ma solo strumenti di calcolo.

Nel Settecento, contributi importanti allo sviluppo della teoria dei numeri complessi vengono da Eulero (1701-1783), che tra l'altro propone per primo l'utilizzo del simbolo i. Ma è solo verso la fine del Settecento che i complessi vengono riconosciuti come veri e propri numeri, grazie soprattutto al contributo di Carl Friederich Gauss (1777-1855), che tra l'altro conia il termine stesso di numeri complessi e che nel 1799, nella sua tesi di laurea, fornisce una prima dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

2.4.3 L'interpretazione geometrica

Fin dal XVI secolo i matematici sentirono la necessità di introdurre delle espressioni per le radici quadrate dei numeri negativi. Si trovarono però in imbarazzo a spiegare l'esatto significato di tali espressioni a cui essi guardavano con una specie di superstizioso timore. Il vocabolo *immaginario* è un ricordo del fatto che esse erano considerate in qualche modo fittizie e irreali. Finalmente, al principio del XIX secolo, quando era ormai manifesta l'importanza di questi numeri in molti rami della matematica, si trovò una semplice interpretazione geometrica delle operazioni con i numeri complessi che pose a tacere gli ultimi dubbi sulla loro validità.

L'interpretazione geometrica, data quasi contemporaneamente da Wessel (1745-1818), Argand (1768-1822) e Gauss, fece apparire queste operazioni più naturali da un punto di vista intuitivo, e fu, da allora in poi, di fondamentale importanza nel campo delle scienze fisiche e naturali.

Tale interpretazione geometrica consiste semplicemente nel rappresentare un numero complesso con i punti del piano esattamente come fu stabilita la corrispondenza tra i numeri reali e i punti di una retta.

2.5 I numeri complessi negli altri stati

Considerato la recente aggiunta dei numeri complessi nelle indicazioni nazionali italiane abbiamo voluto paragonare queste ultime con alcuni paesi esteri. Vedremo inoltre come i diversi metodi scolastici influenzano i ragazzi sia positivamente che negativamente. A tal fine confronteremo i diversi sistemi scolastici (per quanto riguarda i numeri complessi) attraverso le domande del TIMSS ADVANCED dell'anno 2008.

2.5.1 Le indicazioni nazionali e il sistema scolastico

In questo capitolo vedremo, come detto, dove i numeri complessi si collocano nel sistema scolastico estero soffermandoci, qualora necessario, sulla struttura scolastica stessa. In particolare analizzeremo Cina, America e Francia.

Dalle indicazioni nazionali di questi paesi noteremo subito che viene data molta importanza alla tecnologia e all'aiuto che può dare all'insegnamento e agli studenti stessi. Il progresso modifica infatti profondamente il modo di approcciarsi alle materie in cui si utilizzano le nuove tecnologie e quindi i curricula vengono aggiornati periodicamente in funzione di esse.
Altro punto fondamentale nelle indicazioni è l'importanza dell'interdisciplinarietà dovuta dalla stretta relazione tra matematica e le altre materie scolastiche.

Cina

Per quanto riguarda il sistema scolastico cinese, risale al 2001 una delle riforme scolastiche più importanti. Essa si basa sul pieno utilizzo delle nuove tecnologie che hanno quindi un ruolo particolarmente importante.
Si richiede infatti allo studente un grande uso delle macchine calcolatrici per l'esecuzione di calcoli complessi, in modo da concentrare l'attenzione e le energie in attività matematiche più *creative ed esplorative.* Calcolatori ed elaboratori elettronici sono impiegati usualmente nell'apprendimento di nuove conoscenze e nella risoluzione di *problemi*, in special modo quelli *derivanti dall'esperienza reale.* Il computer fornisce inoltre nuove risorse di comunicazione tra studenti e con l'insegnante e presentazioni animate dei diversi contenuti. Uno degli *obiettivi principali del nuovo curriculum* è quello di rendere lo studente capace di *elaborare modelli astratti da situazioni concrete* ritrovando le leggi che le governano. La velocità di calcolo e l'esecuzione di calcoli complessi hanno perso la centralità che avevano in passato. Per esempio non si richiedono più allo studente prima della settima classe competenze algebriche di conversione tra numeri decimali e frazioni.
Si incoraggiano inoltre le strategie di aiuto per la sintesi e l'uso delle conoscenze ed esperienze; attraverso l'autoesplorazione e la cooperazione gli studenti devono risolvere problemi stimolanti e vicini alla vita reale, sviluppando nuove competenze
Questa riforma ha riscosso molto successo tra gli insegnanti e tra gli studenti, che nel corso di misurazioni del Ministero dell'Educazione, hanno espresso un grande apprezzamento per la matematica.

Alcuni tratti del nuovo curriculum matematico cinese sono:
- acquisizione di conoscenze e competenze matematiche essenziali;
- applicazione del pensiero matematico alla vita di ogni giorno;
- trasferibilità delle conoscenze e competenze acquisite;

- comprensione dell'alto valore della matematica nella società e nell'analisi della natura;
- sviluppo di creatività matematica, competenza e personalità di ogni studente.

Notiamo quindi che la Cina ha caratteristiche ben diverse dal curriculum italiano in quanto predilige la 'creatività' e la personalità dello studente anzichè il sapere stesso della disciplina. Inoltre esso punta sulla corrispondenza tra ciò che viene studiato e la realtà. Questi sono tutti aspetti di cui abbiamo parlato in precedenza e che abbiamo 'classificato' come positivi e attuabili in un futuro anche in Italia.

Ora analizzeremo i vari ordini scolastici cinesi:

Classi	Ordine	Scolarità	Età	Anni scolarità
I	1 2 3	Elementare	6/7 [U+0096]- 8	3 anni obbligatori
II	4 5 6	Elementare	9 [U+0096]- 11	3 anni obbligatori
III	7 8 9	Medio	12 [U+0096]- 14/15	3 anni obbligatori
IV	10 11 12	Superiore	16 - 18	3 anni non obbligatori

Tabella 2.1: Sistema scolastico Cinese

All'interno del curriculum superiore troviamo:
Numeri complessi: proprietà degli insiemi, concetto di numero complesso, operazioni tra insiemi; rappresentazione e coniugio; operazioni con i numeri complessi,
Trigonometria: forma trigonometrica dei numeri e definizioni delle funzioni complesse, trigonometriche, teorema di De Moivre, relazioni tra le funzioni trigonometriche, estrazione di radici di numeri complessi, teorema dei seni e teorema dei coseni, radici dell'unità....

America

Per quanto riguarda il sistema scolastico americano esso è formato, come in Cina, da 12 anni di scolarità (uno in meno rispetto al nostro sistema) che possono essere però suddivisi in diverse modalità.

Elementari	Medie	Superiori (High School)	Tipologia di sistema
6	3	3	sistema ordinario
5	3	4	eccezione al primo sistema
6	2	4	eccezione al primo sistema
8		4	vecchio sistema
6		6	vecchio sistema

Tabella 2.2: Sistema scolastico americano

Il livello che viene identificato come High School (ossia la nostra scuola secondaria di secondo grado) ha una struttura simile alle nostre università. Essa è formata da corsi base che tutti i ragazzi devono frequentare e, in aggiunta, dei corsi opzionali che vengono scelti in base ai propri interessi e alle proprie potenzialità.
Gli anni da sostenere sono generalmente 3 ma i ragazzi arrivano al diploma solo al conseguimento dei crediti necessari.
E' da sottolineare che se si fallisce un corso, non si ripete l'anno, ma quello successivo si passa al grado superiore, prendendo però due livelli della stessa classe.

Il corso di studi 'scientifico' ha le seguenti modalità:

Percorso tradizionale	Percorso integrato (nella materia scientifica)
Algebra superiore I	Matematica I
Geometria	Matematica II
Algebra II	Matematica III

Tabella 2.3: percorso matematico americano

I percorsi regolari presuppongono la matematica in ogni anno di liceo e portano direttamente alla preparazione per il college o ad una carriera. Una grande varietà di corsi è disponibile per tutti gli studenti e per ogni gamma di possibili interessi.
Sulla base di una serie di test d'ingresso, alcuni studenti possono decidere, in tenera età, di sostenere al liceo corsi di livello universitario, come pre-calculus o statistica avanzata. Questi studenti dovrebbero quindi iniziare a studiare i contenuti della High School nella scuola media.
In generale *un uso strategico della tecnologia* è previsto in tutti i lavori. Ciò può includere l'utilizzo di strumenti tecnologici per aiutare gli studenti a formare e testare congetture, la creazione di grafici, la visualizzazione di dati e la determinazione e valutazione di linee di misura per i dati. Costruzioni geometriche possono anche essere effettuate utilizzando software geometrici. Inoltre strumenti classici e tecnologici possono essere di aiuto alla visualizzazione tridimensionale. E' però anche raccomandato testare i risultati.

All'interno dei tre anni di scolarità compare più volte la parola *'Complex'*. In particolare ritroviamo:

Algebra I:
Il sistema dei numeri complessi: operazioni aritmetiche, uso dei numeri complessi nelle equazioni, polinomi con coefficienti complessi, rappresentazione dei numeri complessi e le loro operazioni nel piano complesso... riconoscere quando le equazioni quadratiche non riportano una soluzione reale e comprendere che il sistema si può estendere cosicchè la soluzione esiste. Gli studenti devono inoltre sapere dell'esistenza dei numeri complessi e saper distinguere i numeri razionali dagli irrazionali.

Algebra II:
Risolvere equazioni di secondo grado con soluzioni complesse e scriverle nel-

la forma a+ib. Considerare i complessi come estensione dei reali e in questo modo avere una soluzione per l'equazione $x^2 + 1$.
Inizia in questo corso il lavoro formale con i numeri complessi. Gli studenti espandono le loro conoscenze alle funzioni creandone di nuove con i valori complessi....essi identificano gli zeri dei polinomi, incluso quelli complessi, e fanno connessioni tra gli zeri e le soluzioni delle equazioni polinomiali. L'unità culmina con il teorema fondamentale dell'algebra. Il tema centrale di questa unità è che l'aritmetica dei numeri complessi è governata dalle stesse regole dell'aritmetica dei numeri razionali.

Le pratiche standard matematiche applicate in ogni corso e, insieme con il contenuto standard, prescrivono che gli studenti sperimentino la matematica come un soggetto coerente, utile e logico che fa uso della loro capacità per dare un senso a situazioni problematiche.

Possiamo notare che i numeri complessi vengono ripresi più volte durante i tre corsi e in più sfaccettature. In questo modo i ragazzi riescono, riprendendolo, ad acquisire il concetto e farlo proprio. Questo è uno degli aspetti positivi che abbiamo riscontrato anche nella riforma Gelmini.

Francia

Il sistema scolastico francese, fino alle medie, è lo stesso del sistema americano e cinese ma gli indirizzi superiori si differenziano in base alle aspirazioni future dei ragazzi. Vi sono infatti:
- le istruzioni generali - 3 anni (15-18 anni)
- le istruzioni professionali - 2/4 anni (15-17/19 anni).

Nel Lycée général et technologique: al primo anno gli studenti sono tenuti a seguire una serie di materie comuni obbligatorie, due materie di specializzazione e una facoltativa, mentre al secondo e terzo anno il programma comprende materie comuni, materie di specializzazione (obbligatorie) , materie opzionali facoltative e obbligatorie. I lycées si sono visti attribuire dal 1990 una missione d'inserimento, destinata a coloro che non proseguono gli studi dopo il conseguimento del diploma. Sono previste due modalità d'intervento: un accompagnamento nella ricerca d'impiego corrispondente alla scelta dei giovani e alla qualifica che hanno acquisito; la creazione di formazione complementare su iniziativa locale nel caso in cui le imprese locali abbiano rilevato una penuria di mano d'opera qualificata in un settore per cui un modulo specifico risulta il complemento indispensabile al diploma ottenuto.
Lycée professionnel: la formazione professionale è organizzata in cicli pluriennali che definiscono 2 livelli di formazione corrispondenti a 2 livelli di qualifica.

Nelle modalità di apprendimento l'introduzione delle *moderne tecnologie* modifica profondamente il modo di affrontare certi contenuti o certe pratiche. Il programma tiene conto delle modifiche necessarie e integra queste tecnologie moderne (audiovisivi, informatica). È per settori professionali che il programma e il referenziale (di impiego o di sbocchi) definiscono, partendo da uno studio approfondito della qualifica raggiunta, gli obiettivi professionali generali e determinano il nocciolo delle competenze richieste a partire dai diversi insegnamenti professionali, tecnologici e generali; per ogni specifica formazione, in relazione al mestiere o al campo di attività interessato, sono definiti i saperi, il saper fare, i supporti e la valutazione.

La formazione si propone di:
- fornire una visione coerente di conoscenze scientifiche e le loro applicazioni;
- fornire strumenti per la matematica e la scienza in discipline generali e professionali;
- portare alla lettura e alle criticità verso informazioni con un accento sull'uso del computer;
- sviluppare la capacità di comunicazione scritta e orale.

Gli atteggiamenti sviluppati dagli studenti sono:
- le capacità di osservazione;
- la curiosità, *la fantasia, la creatività, l'apertura mentale*;
- comunicazione aperta, il dialogo e il dibattito ragionato;
- rigore e precisione;
- *pensiero critico* nei confronti delle informazioni disponibili;

L'insegnamento della matematica e delle scienze fisiche e chimiche non è solo una giustapposizione delle due discipline. È auspicabile che lo stesso insegnante garantisca la coerenza. *Le scienze fisiche e chimiche forniscono molti esempi di matematica.* Allo stesso modo, un concetto matematico ha molte aree di applicazione in fisica e chimica. Il professore offre spesso ai suoi studenti *problemi derivanti dalla vita quotidiana e dal campo professionale.* Esso permette la costruzione di conoscenze e competenze vicino alla realtà.

Il lavoro sperimentale in matematica si basa su calcoli digitali e su rappresentazioni di figure.
Il *Problem solving* richiede che siano valutate quattro abilità:
- ricercare, recuperare e organizzare le informazioni;
- selezionare ed eseguire un metodo di risoluzione;
- fare un approccio sperimentalmente e convalidare un risultato;
- comunicare usando il linguaggio scientifico e strumenti tecnologi.

Questo lascia il *tempo di maturazione, assimilazione e appropriazione.* Vocabolario e notazioni non sono imposti a priori; essi vengono introdotti durante lo studio secondo un criterio di utilità.

Le *competenze informatiche* (computer e calcolatrice) devono essere usate per sviluppare le competenze in matematica, scienze, fisica e chimica. L'obiettivo è quello di sviluppare le competenze per utilizzare software, ma di utilizzare questi strumenti per incoraggiare la riflessione degli studenti, i test e il rilascio di congetture nonchè l'apprendimento dei concetti e il problem solving.

Si vuole inoltre incentivare il lavoro di gruppo, la scrittura individuale e l'utilizzo della *storia della matematica.* Ogni anno l'insegnante sceglie almeno due temi in diverse materie. Questi devono essere in linea con la vita quotidiana degli studenti e la loro formazione professionale e utilizzare le competenze delineate nel programma. Lo scopo è quello di *fornire agli studenti gli strumenti specifici utilizzati nel settore professionale.* L'introduzione dei concetti si basa su esempi concreti dal campo professionale.

Troviamo anche in questo caso accenni ai complessi:
introduzione nel piano cartesiano dei complessi come punti o vettori, espressione algebrica di un numero z *complesso come* $z = a+ib$ *con* $i^2 = -1$*, parte*

reale, parte immaginaria, uguaglianza di due numeri complessi, opposto e coniugato di un numero complesso, rappresentazione nel piano complesso di operazioni tra i due numeri complessi (o di un complesso con un reale), esecuzione dei calcoli e dare il risultato algebricamente, scrittura di un numero complesso in forma trigonometrica (e viceversa).

2.6 I numeri complessi nel TIMSS

2.6.1 Introduzione

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) è un'indagine condotta dall'associazione IEA che fornisce informazioni sul rendimento degli studenti in matematica e scienze in un contesto internazionale. Esso valuta gli studenti al quarto e all'ottavo anno di scolarità. TIMSS Advanced, invece, valuta gli studenti con una preparazione avanzata in matematica e in fisica al termine del loro percorso scolastico.
Nel TIMSS, il concetto organizzatore è quello di *curricolo*, inteso nella sua accezione più ampia. Per creare una bozza per il quadro di riferimento del TIMSS Advanced 2008 sono stati utilizzati gli argomenti dell'indagine del 1995 e la descrizione dei domini cognitivi del 2007. Tale bozza è stata esaminata dai paesi partecipanti che hanno fornito un importante feedback per la stesura definitiva del quadro.

Il quadro di riferimento di TIMSS Advanced 2008 per la valutazione della matematica è organizzato in due dimensioni: una dimensione dei contenuti ed una dimensione dei processi cognitivi. I domini di contenuto costituiscono gli argomenti da analizzare in matematica, mentre i domini cognitivi descrivono i comportamenti che ci si aspetta dagli studenti quando lavorano con la matematica. Nel TIMSS Advanced 2008 sono stati presi in considerazione i seguenti domini:

a) **DOMINI DI CONTENUTO**: Algebra, Calcolo, Geometria;

b) **DOMINI COGNITIVI**: Conoscenza, Applicazione, Ragionamento;

A ciascun dominio viene assegnata una percentuale di tempo dedicato alla valutazione. I domini di Algebra e Calcolo da un lato, e i domini di Conoscenza e Applicazione dall'altro, prendono ciascuno il 35% del tempo

totale del test, mentre il 30% va ai domini di Geometria e Ragionamento.
La descrizione dei domini di contenuto tiene conto dei cambiamenti avvenuti nei curricoli di matematica dal 1995 e si focalizza su quelle aree su cui è possibile trarre delle stime valide ed attendibili.
Nel presente lavoro, non entreremo nel merito della descrizione dettagliata dei diversi domini, per la quale si rimanda al testo del Framework di TIMSS Advanced 2008, bensì ci focalizzeremo sulle singole domande che riguardano i numeri complessi, rilevandone i punti specifici di interesse che essa valuta e confrontando i risultati degli studenti italiani con quelli esteri.

La definizione di ciascun dominio dei contenuti include un elenco di ampi obiettivi presenti nei curricula di matematica per la maggior parte dei paesi partecipanti. Questi obiettivi sono presentati in termini di conoscenze o di abilità possedute dagli studenti che i quesiti ad essi collegati devono far emergere.

2.6.2 Le domande

Ora indaghiamo le domande del TIMSS Advanced 2008 che richiedono la conoscenza dei numeri complessi. In questo anno è stata posta una sola domanda che li riguarda.

Se $x = -1 + \frac{1}{2} i$, quale dei seguenti è uguale a $\frac{5}{x}$?

Ⓐ $-5 + i$

Ⓑ $-4 - 2i$

Ⓒ $-4 + 2i$

Ⓓ $4 + 2i$

Figura 2.5: Domanda del TIMSS

Come possiamo notare essa non presuppone una grande conoscenza dei complessi ma richiede semplicemente di sapere che $i^2 = -1$ e che per razionalizzare il denominatore occorre utilizzare la formula della differenza di due quadrati, applicabile anche ai numeri complessi.
$5/x$ si esegue infatti con i seguenti passaggi:
$(-1+1/2i)(1+1/2i) =$ (sappiamo che questa è la differenza di due quadrati) $= -1 + 1/4(i^2) =$ (sappiamo che $i^2 = -1$) $= -1 - 1/4 = -5/4 \quad \Rightarrow$
$5/(-1 + 1/2i) = 5(1 + 1/2i)/(-1 + 1/2i)(1 + 1/2i) = 5(1 + 1/2i)/(-5/4) = -4(1 + 1/2i) = -4 - 2i$ (ossia la risposta esatta è l'opzione B).

La domanda è di dominio di contenuto algebra e di dominio cognitivo applicazione. Infatti ritroviamo nel Frameworks del TIMSS le seguenti descrizioni di tali domini:

Algebra

Gli studenti degli indirizzi con matematica "forte" (avanzata) dovrebbero essere in grado di usare le proprietà dei sistemi dei numeri reali e dei numeri complessi per risolvere problemi ambientati in contesti del mondo reale o in contesti astratti.

Applicazione

Obiettivo centrale, e spesso metodo, dell'insegnamento della matematica è la risoluzione dei problemi che, insieme alle abilità di supporto (ad esempio, scegliere, rappresentare, modellizzare), ha un posto di primo piano nel dominio di applicazione della conoscenza.
Nei quesiti appartenenti a questo dominio, gli studenti *devono applicare la conoscenza di fatti matematici*, le abilità, le procedure e i concetti per creare rappresentazioni e per risolvere problemi. Le impostazioni dei problemi sono più di routine rispetto a quelli del dominio del ragionamento. I problemi di routine normalmente sono esercizi standard per la classe, preparati per fare pratica con metodi o tecniche particolari. Alcuni di questi problemi sono descritti da parole che collocano la situazione in un contesto quasi reale.
Anche se si differenziano per difficoltà, si prevede che ciascuno di questi problemi, tipo "libro di testo", sia sufficientemente *familiare agli studenti, che dovranno essenzialmente scegliere e applicare le procedure apprese.*
Il risolvere problemi è incluso non solo nel dominio applicazione, con maggiore enfasi sugli esercizi più familiari e di routine, ma anche nel dominio *ragionamento*.

Secondo quanto riportato nel Frameworks i ragazzi dovrebbero essere quindi in grado di rispondere al quesito in quanto hanno grande familiarità con esso. Vediamo ora il rendimento dei ragazzi italiani in relazione anche a quelli 'esteri'.

Percentuale di risposte per item (Pesata) - Item di Matematica - Classe V secondaria di secondo grad
Matematica: Algebra / Applicazioni (MA23063 - M7_02) Benchmark internazionale: Al di sopra dell'a
Tipo: Risposta a scelta multipla Chiave: B

Area geografica	N (casi)	A %	B %	C %	D %	Altro %	Corrette %	Omesse %	Non raggiunte %	Alunne % corrette
Nord Ovest	125	21,2	15,6	17,9	8,2	37,1	15,6	35,7	1,4	13,4
Nord Est	85	29,3	9,5	17,7	8,3	35,2	9,5	33,4	1,8	17,6
Centro	101	20,7	9,5	14,7	4,4	50,7	9,5	46,2	4,4	5,7
Sud	129	22,6	14,3	16,4	16,1	30,6	14,3	28,3	2,3	11,9
Sud Isole	88	28,4	14,0	21,1	3,4	33,2	14,0	28,8	4,3	8,5
Italia	528	23,9	12,7	17,3	8,4	37,7	12,7	34,9	2,8	11,1
Media Intern.	554	29,4	24,3	20,8	7,2	18,2	24,3	15,5	2,7	24,1

Altro = somma delle risposte omesse, non raggiunte e non valide.
A causa delle informazioni mancanti sul sesso alcuni totali possono sembrare inconsistenti.

Figura 2.6: Risultati della domanda

La prima cosa che possiamo notare è che la media internazionale di risposte corrette, 24, 3%, è più bassa di quanto ci aspettassimo. Ciò potrebbe significare che i ragazzi non hanno acquisito il concetto.
Inoltre la percentuale degli italiani (che sono spesso in linea con il rendimento medio internazionale) che hanno risposto correttamente sono solo la metà rispetto alla media. Un'altro dato di grande importanza è la percentuale di risposte omesse italiane: essa è maggiore del doppio rispetto la media internazionale.
Quindi non solo gli studenti italiani non sono in grado di affrontare un pro-

blema con i numeri complessi, ma appena ne trovano uno lo saltano.

2.6.3 Le Motivazioni

Ci siamo quindi chiesti da cosa possa dipendere questa bassa percentuale di risposte correte.
Le motivazioni potrebbero essere varie e da riscontrarsi sia nel modo in cui si fanno i numeri complessi sia nell'importanza che si attribuisce ad essi alle superiori.
Per prima cosa sono un argomento alquanto astratto e ostico e spesso il loro metodo di introduzione rispecchia queste loro peculiarità. Come già detto in questo capitolo , per la maggior parte dei casi, vengono introdotti come ampliamento del campo reale e come completamento della teoria delle equazioni (si veda il teorema fondamentale dell'algebra).
I numeri complessi sono inoltre introdotti come ultimo argomento del quarto anno e vengono quindi generalmente trattati in modo frettoloso e superficiale. A ciò si aggiunge il fatto che nell'anno successivo, il cui argomento cardine è lo studio di funzione in $\mathbb{R}$, non vengono mai ripresi e tantomeno utilizzati in altre teorie. Questo non permette ai ragazzi di averne una buona padronanza e li pone come argomento a se stante.

Come abbiamo più volte detto nei precedenti capitoli, un utilizzo della storia della matematica potrebbe giovare a tale scopo.
Nel contesto superiore i complessi sembrano essere trattati più come argomento finalizzato ad un percorso universitario di indirizzo scientifico che ne per l'importanza in se a livello superiore. Questo si evince anche dal fatto che nessun'altra scuola, eccetto l'indirizzo tecnico in cui trovano largo utilizzo in molte materie, questi non sono presenti.
E' bene sapere che all'università di matematica i complessi vengono dati per scontato e che, come riportato nel Frameworks del TIMSS, essi vengo-

no considerati un argomento da saper utilizzare fin dalle superiori. D'altro canto i test di ammissione alle università scientifiche, che si pongono come obiettivo ' fornire uno strumento informativo e di autovalutazione per gli studenti che entrando in università intendono seguire corsi di laurea ad alto contenuto matematico' non ne considerano necessaria la conoscenza.

Quindi ci chiediamo: a che pro studiarli?
Nelle prossime pagine tenteremo di darne una risposta attraverso un sondaggio posto agli alunni. Riporteremo inoltre due delle possibili applicazioni dei numeri complessi a livello della scuola secondaria di secondo grado e dell'università.

2.7 Come la pensano gli alunni

In questo paragrafo presenteremo i risultati relativi al questionario posto ad alcuni alunni della scuola secondaria di secondo grado. Esso riguarda la loro percezione dei numeri complessi e la loro utilità. Essi, come detto, vegono introdotti alla fine del quarto anno quindi le classi a cui abbiamo sottoposto il questionario sono quelle del quinto anno. Le classi prese in esame appartengono all'istituto E.Fermi e sono 5^aE, 5^aH e 5^aF con professoresse di matematica (rispettivamente) Bagnavalli, Piumi e Ghera. Il questionario è stato somministrato all'inizio dell'ora di matematica e gli studenti hanno avuto 10 minuti per rispondere. Gli studenti non avevano la possibilità di consultare il professore, il libro o i compagni e, in precedenza, non erano stati avvertiti sul tema delle domande. Gli studenti coinvolti erano 15 per la per 5^aE, 18 per la 5^aH e 24 per la 5^aF per un totale di 57 ragazzi. Le domande poste sono state 6 di cui 2 a risposta aperta.

Questionario agli alunni del Fermi

1) Cosa utilizzi generalmente per studiare la matematica?

- 1A) Libro
- 1B) Appunti presi in classe
- 1C) Entrambi

2) Hai studiato i numeri complessi in quarta?

- 2A) Si
- 2B) No

3) Scrivi una tua definizione di numeri complessi:

4) Quali di questi argomenti hai trattato?

- 4A) I complessi come ampliamento dei reali
- 4B) Coordinate polari e forma trigonometrica (z=a+ib quindi a=rcos(teta) e b=rsin(teta))
- 4C) Coordinate cartesiane (z=(a,b))
- 4D) Forma algebrica dei numeri complessi (z=a+ib)
- 4E) I complessi in forma esponenziale (e^(ix)=cosx +isinx)
- 4F) Teorema di De Moivre (z=r*(cosx +isinx) quindi z^n=r^n(cos(nx)+isin(nx))
- 4G) Radice n-esima di z (z^n)
- 4H) Le equazioni risolvibili in C (il teorema fondamentale dell'algebra : un'equazione di grado n a coefficienti in C ha n soluzioni in C)
- 4I) I complessi attraverso la loro storia (come soluzione delle equazioni di terzo grado, Bombelli e Scipione dal Ferro)

5) Ritieni che sia stato utile trattare i complessi?

- 5A) Si
- 5B) No

6) Perchè?

Per quanto riguarda le due domande aperte abbiamo notato, come ci aspettavamo, che vi sono molte risposte simili tra loro quindi, per poterle meglio analizzare, le abbiamo accorpate. Le due nuove domande, 3Bis e 6Bis, saranno quindi chiuse. In particolare la terza sarà a risposta multipla.

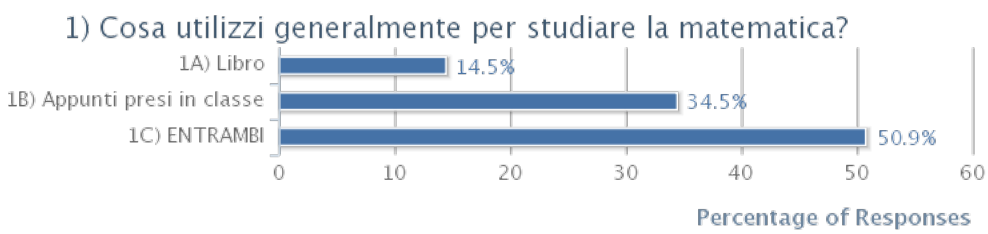
3bis) Quale Definizione, tra queste, di numeri Complessi daresti?

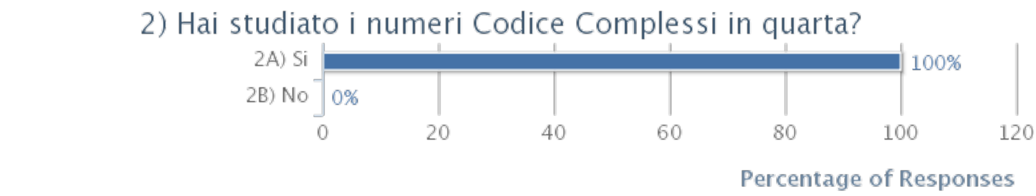
- ☐ 3A) Sono Quei numeri Che appartengono all'insieme dei Complessi Che sono formati da Una Parte reale e Una immaginaria.
- ☐ 3B) Sono Quei numeri della forma a+ib dove i ^ 2 = -1
- ☐ 3C) E' una coppia ordinata di numeri reali della forma (a,b)
- ☐ 3D) Sono un Insieme di numeri Che Danno la possibilita di calcolare la radice quadrata di un numero negativo o Che ci permettono di risolvere equazioni impossibili in R
- ☐ 3E) E 'un ampliamento di R
- ☐ 3F) Sono Quei numeri Che contengono L'Unità immaginaria di base i
- ☐ 3G) Risposta vuota

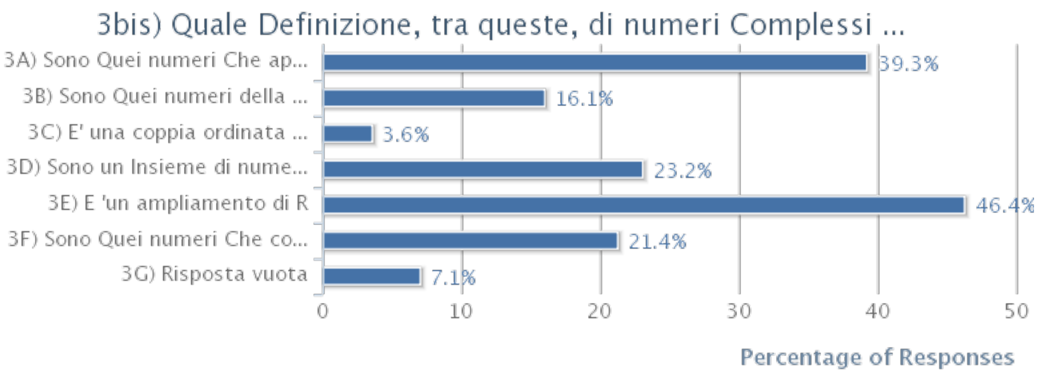
6bis) Perchè?

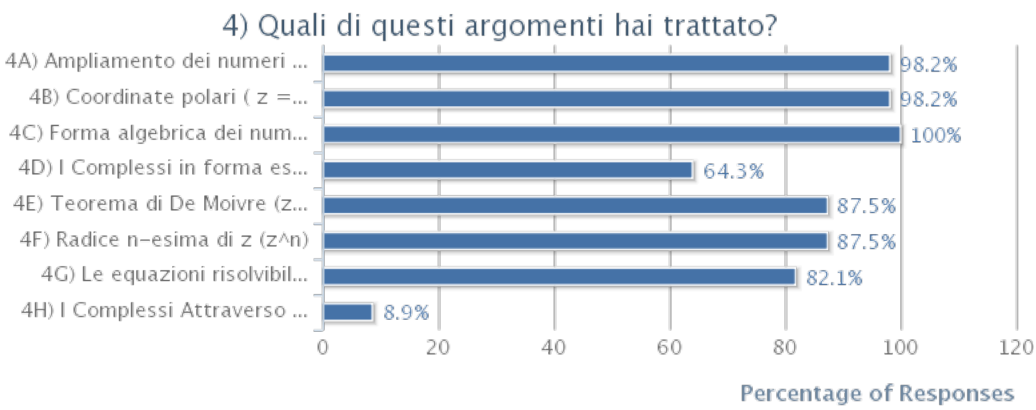
- ○ 6A) Sono disgiunti da tutti gli altri argomenti (non si applicano in nessun'altro argomento).... sono fini a se stessi
- ○ 6B) Non ne ho capito il senso
- ○ 6C) Ho imparato qualcosa ed è sempre utile.... per apertura mentale
- ○ 6D) Servono per risolvere equazioni che altrimenti non potrei fare
- ○ 6E) Perchè mi hanno salvato nella verifica.... perchè li vuole sapere la prof.....
- ○ 6F) Possono avere applicazioni future nella fisica, ingegneria, informatica (programmazione) e all'università in generale

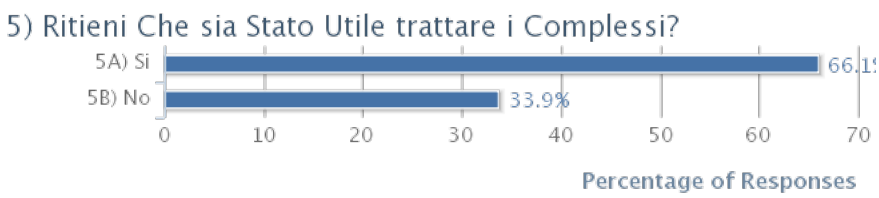
I risultati ottenuti sono i seguenti:

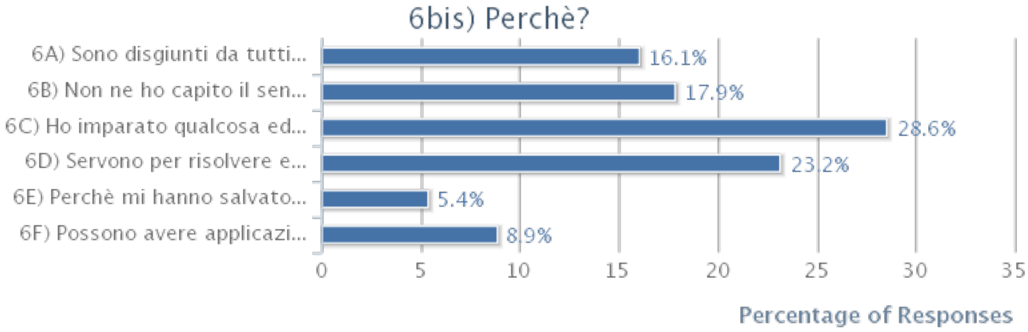



2) Hai studiato i numeri Codice Complessi in quarta?
2A) Si
2B) No
100%
0%
0
20
40
60
80
100
120
Percentage of Responses


3bis) Quale Definizione, tra queste, di numeri Complessi ...
3A) Sono Quei numeri Che ap...
3B) Sono Quei numeri della ...
3C) E' una coppia ordinata ...
3D) Sono un Insieme di nume...
3E) E 'un ampliamento di R
3F) Sono Quei numeri Che co...
3G) Risposta vuota
39.3%
16.1%
3.6%
23.2%
46.4%
21.4%
7.1%
0
10
20
30
40
50
Percentage of Responses


4) Quali di questi argomenti hai trattato?
4A) Ampliamento dei numeri ...
4B) Coordinate polari (z =...
4C) Forma algebrica dei num...
4D) I Complessi in forma es...
4E) Teorema di De Moivre (z...
4F) Radice n-esima di z (z^n)
4G) Le equazioni risolvibil...
4H) I Complessi Attraverso ...
98.2%
98.2%
100%
64.3%
87.5%
87.5%
82.1%
8.9%
0
20
40
60
80
100
120
Percentage of Responses


5) Ritieni Che sia Stato Utile trattare i Complessi?
5A) Si
5B) No
33.9%
0
10
20
30
40
50
60
70
Percentage of Responses



Tutti gli studenti, a distanza di otto mesi, ricordano di aver studiato i numeri complessi. Si nota però dalle domande aperte che essi hanno qualche confusione a livello di concetti matematici e nel modo di esprimersi.
Il problema di espressione denota una insicurezza nel campo dei numeri complessi dovuta ad una non buona padronanza dei concetti. Questo problema si evince anche dal fatto che la maggior parte dei ragazzi non vede utilità nello studio dei numeri complessi a livello della scuola secondaria di secondo grado o che addirittura non ne ha capito il senso. Questo porta gli studenti a non interessarsi all'argomento svolto e a non capirlo veramente. Come detto in precedenza, l'astrazione nella matematica è uno degli ostacoli maggiori all'apprendimento di questa disciplina e esplicitare l'uso di ogni elemento utilizzato, anche attraverso la storia della matematica, potrebbe aiutarli e motivarli.
Solo 18 ragazzi hanno infatti dato una motivazione esauriente sul perchè i numeri complessi sono importanti: 13 ne rilevano l'importanza nella risoluzione delle equazioni con delta negativo mentre 5 credono saranno utili in altre discipline scolastiche di indirizzo scientifico o all'università.
Il problema a livello di concetti matematici si evince invece nelle risposte ottenute nella terza domanda ossia nel dare una definizione esauriente di numeri complessi. Molti si limitano a descriverne le proprietà come se queste fossero identificative dell'insieme considerato e che ne costutuiscano quindi una sua definizione. Il 36% dei ragazzi considerano necessario dire che sia

un ampliamento di $\mathbb{R}$ e alcuni di loro aggiungono che in questo ampliamento vi è l'unità immaginaria i o che essi servono per risolvere equazioni non risolvibili in $\mathbb{R}$. Tale risposta, che considero errata, è una conseguenza del modo, presentato nei precedenti paragrafi, di introdurre i numeri complessi. Infatti, dalle risposte degli alunni sembra che i numeri complessi siano stati creati esplicitamente dai numeri reali. Tra le risposte date considero più esatte la seconda, la terza (con l'aggiunta delle operazioni definite in quell'insieme) e la prima con la definizione dell'unità immaginaria i. Ma meno di un ragazzo su due opta per una di queste definizioni.
Riguardo la quarta domanda, invece, possiamo notare che l'argomento che ricordano in modo minore, e che quindi sicuramente troveranno più ostico, è la rappresentazione in forma esponenziale dei numeri complessi.

Quindi ciò che abbiamo detto nelle precedenti sezioni ritrova riscontro in questo questionario. Gli studenti hanno confermato che i numeri complessi sono di difficile comprensione per la loro natura astratta e per il fatto che non si collegano a nulla di ciò che studiano in seguito o che non trovano riscontro in applicazioni pratiche. Ciò porta a non comprenderli appieno e a considerarli inutili. Definirne un'applicazione reale o esplicitare maggiormente che il problema che risolvono non coincide con la loro definizione, ma ne è solo una loro applicazione, ne favorirebbe l'acquisizione. Il rapporto tra le materie, ossia l'interdisciplinarietà, stimolerebbe i ragazzi e gli permetterebbe di concepire maggiormente il ruolo della matematica nella realtà.

Capitolo 3

Professore a cosa servono i numeri complessi

La domanda più comune fatta dai ragazzi ai professori è 'Ma prof a cosa ci serve?!'. Gli studenti hanno infatti esigenza, soprattutto in una materia che sembra così distante dalla realtà, di sapere a cosa serve ciò che studiano e perchè lo fanno.
E' fondamentale che i professori siano preparati a tale domanda per non demotivarli. Come abbiamo detto, uno strumento utile a ciò è la storia della matematica in quanto, attraverso la storia dell'oggetto che si sta studiando, capirebbero a quali esigenze esso 'risponde'.
Tenteremo anche noi di rispondere a questa domanda parlando sia di una naturale conseguenza dei numeri complessi, che si spiega nelle scuole secondarie di secondo grado, sia di alcuni problemi che possono essere risolvibili (a livello universitario) solo attraverso l'utilizzo dei numeri complessi e delle sue proprietà.

3.1 La conseguenza naturale dei numeri complessi

3.1.1 Radici e potenze in $\mathbb{C}$

Il teorema sul prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica permette di ottenere un'interessante formula per il calcolo della potenza di un numero complesso.

Teorema 3.1. *Teorema di De Moivre*
Dato un numero complesso $z = r(cos\theta + isin\theta)$ e un intero positivo n, vale la formula: $z^n = r^n(cosn\theta + isinn\theta)$

Applicando il teorema di De Moivre, possiamo trovare una formula che consente di trovare le radici n-esime di un numero complesso.
Dato un numero complesso w e un intero positivo n, diremo che z è una *radice n-esima* (complessa) di w se risulta $z^n = w$.

Supponiamo di conoscere la forma trigonometrica di w ossia $\rho(cos\varphi + isin\varphi)$. Per la definizione data di radici n-esima e applicando il teorema di De Moivre, la condizione $z^n = w$ si traduce nell'equazione: $r^n(cosn\theta + isinn\theta) = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$.
L'equazione sarà soddisfatta se e solo se i due numeri complessi ai due membri hanno lo stesso modulo e argomento che differisce per multipli di 2π. Quindi $r^n = \rho$ e $n\theta = \varphi + 2k\pi$, con $k \in Z$ da cui: $r = \sqrt[n]{\rho}$ e $\theta = (\varphi + 2k\pi)/n$.

Teorema 3.2. *Sia $w = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$ un numero complesso ed n un intero, con $n \geq 1$. Esistono esattamente n radici n-esime complesse $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ di w; tali radici si ottengono dalla formula: $z^k = \sqrt[n]{\rho}[cos((\varphi + 2k\pi)/n) + isin((\varphi + 2k\pi)/n)]$ ponendo, successivamente, $k = 0, 1, ..., n-1$.*

Osservazione 3.3. 1. Si può verificare che, se k è un numero reale positivo, le radici quadrate di $-k$ sono $\pm i\sqrt{k}$ in simboli: $\sqrt{-k} = \pm i\sqrt{k}$ per ogni $k \in \mathbb{R}^+$.
2. Le due radici quadrate di un numero complesso sono sempre tra loro

opposte.
3. Le radici n-esime di un numero complesso w, di modulo ρ, hanno tutte lo stesso modulo, uguale a $\sqrt[n]{\rho}$, quindi appartengono alla circonferenza avente centro nell'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.
4. Gli argomenti delle n radici differiscono l'uno dall'altro per un n-esimo di un angolo giro (infatti si ottengono a partire da φ/n aggiungendo ogni volta $2\pi/n$), quindi sono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza.

Nel calcolo delle radici di un numero complesso giocano un ruolo particolare le radici n-esime dell'unità, ossia i numeri complessi u per cui $u^n = 1$. In base al teorema precedente, esistono n radici n-esime dell'unità, $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$, generate dalla formula: $u_k = cos(2k\pi/n) + isin(2k\pi/n)$ per $k = 0, 1, ..., n - 1$.
Supponiamo ora di voler calcolare le radici n-esime di un qualunque altro numero complesso w. Sia z una di tali radici n-esime; gli n numeri complessi: $u_0z, u_1z, ..., u_{n-1}z$ sono distinti e, elevati alla potenza n-esima, danno w dunque sono le radici n-esime di w.
La conclusione è che per calcolare le radici n-esime di un numero complesso non nullo basterebbe calcolarne una: tutte le altre si potrebbero ottenere da questa moltiplicandole per le radici n-esime dell'unità.

3.1.2 Le equazioni in $\mathbb{C}$

Nel precedente capitolo abbiamo detto che il campo dei numeri complessi è il più idoneo per trattare le equazioni algebriche: non solo ogni equazione algebrica ammette soluzioni in $\mathbb{C}$, ma in $\mathbb{C}$ c'è anche regolarità tra il numero delle soluzioni di un'equazione e il suo grado (cosa che non accadeva in $\mathbb{R}$ dove, per esempio, un'equazione di terzo grado poteva ammettere una sola soluzione oppure ammetterne tre). Per scoprire questa ≪regolarità≫ nel numero delle soluzioni di un'equazione algebrica in $\mathbb{C}$ occorre però contare le soluzioni in modo opportuno; a tal fine dobbiamo introdurre il concetto di molteplicità di una soluzione.

Sia $P(z) = 0$ un'equazione polinomiale e z_0 una sua soluzione. Si dice molteplicità di z_0 l'esponente della più alta potenza di $(z - z_0)$ che compare nella scomposizione di $P(z)$.

Abbiamo ora in mano tutti gli elementi per poter enunciare il teorema più importante circa le soluzioni di un'equazione algebrica nel campo complesso:

Teorema 3.4. *Teorema fondamentale dell'algebra*
Un'equazione polinomiale della forma: $a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 = 0$ *con* $a_n \neq 0$ *con coefficienti complessi ha esattamente* n *soluzioni in* $\mathbb{C}$*, pur di contare ciascuna di esse secondo la sua molteplicità.*

Osservazione 3.5. Consideriamo un'equazione del tipo $z^n = a$, nell'incognita z, con n intero positivo e $a \in \mathbb{C}$. Risolvere in $\mathbb{C}$ questa equazione equivale a determinare le radici n-esime complesse di a. Abbiamo che:
- se $a = 0$, si ottiene l'equazione $z^n = 0$, che ha come unica soluzione $z = 0$, con molteplicità n;
- se $a \neq 0$, l'equazione $z^n = a$ ha n soluzioni semplici, vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza avente centro nell'origine e raggio $\sqrt[n]{|a|}$.

In entrambi i casi, in accordo al teorema fondamentale dell'algebra, la somma delle molteplicità delle radici dell'equazione $z^n = a$ è uguale a n, cioè al grado dell'equazione.

In base al teorema fondamentale dell'algebra (e al teorema di Ruffini che continua a valere per polinomi a coefficienti complessi), ogni polinomio $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ con $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ è *scomponibile* nel prodotto di n fattori di primo grado, di cui alcuni eventualmente uguali a seconda della molteplicità delle radici.
Quindi in $\mathbb{C}$ gli unici polinomi irriducibili sono i binomi di primo grado; ogni polinomio di grado maggiore o uguale a 2 è riducibile.

Finora, considerando il problema della riducibilità di un polinomio in $\mathbb{R}$, abbiamo potuto dare solo delle risposte parziali. Ora, ponendoci in $\mathbb{C}$, possiamo dedurre invece risultati generali. La chiave per ottenere tali risultati è il seguente semplice teorema.

Teorema 3.6. *Zeri coniugati per polinomi a coefficienti in* $\mathbb{C}$
Sia $P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ *un polinomio a coefficienti reali. Se* z_0 *è uno zero complesso del polinomio, anche il suo coniugato lo è.*

Possiamo quindi dedurre che ogni polinomio a coefficienti reali si scompone in $\mathbb{R}$ nel prodotto di binomi di primo grado e di trinomi di secondo grado con discriminante negativo. Consideriamo infatti la scomposizione del polinomio in fattori di primo grado in $\mathbb{C}$ cui certamente si giunge per il teorema fondamentale dell'algebra; in essa compariranno:
- fattori che danno luogo a zeri reali, che generano un prodotto di binomi di primo grado;
- fattori che danno luogo a zeri complessi non reali, che generano un prodotto di trinomi di secondo grado con discriminante negativo in quanto $(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0 = z^2 - 2zRez + |z_0|^2$.

3.2 I tre problemi che non ammettono soluzione

Abbiamo ora preparato il terreno per studiare gli antichi problemi della trisezione dell'angolo, della duplicazione del cubo e della costruzione dell'ettagono regolare.
Parleremo qui di costruzioni con riga e compasso e dimostreremo, grazie ai numeri complessi, che i tre problemi non sono costruibili con questi strumenti. Per riga intenderemo semplicemente uno strumento che serva unicamente per tracciare una retta passante per due punti dati.

3.2.1 La duplicazione del cubo

Teorema 3.7. *Se il cubo dato ha per lato l'unità di lunghezza, il suo volume sarà l'unità cubica; si chiede di trovare il lato x di un cubo avente volume doppio di esso. x non può essere costruito con riga e compasso.*

Dimostrazione. Facciamo una dimostrazione per assurdo.
x soddisferà l'equazione $x^3 - 2 = 0$.
Supponiamo che la costruzione sia possibile. Questo significa che x appartiene a un certo campo C_k ottenuto dal campo razionale con successive estensioni eseguite mediante l'aggiunta di radici quadrate. Sappiamo che x non può appartenere al campo razionale C_0 perché $\sqrt[3]{2}$ è un numero irrazionale.
Prendiamo k il più piccolo numero intero positivo tale che x appartenga ad un campo esteso C_k. Ne segue che x può essere scritto nella forma $x = p + q\sqrt{w}$ dove $p, q, w \in C_{k-1}$ ma $\sqrt{w}$ non appartiene ad esso.
Se x appartiene a C_k allora ne appartengono anche $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{2} - 2$ quindi $\sqrt[3]{2} - 2 = a + b\sqrt{w}$ dove a e b appartengono a C_{k-1}. Da $x = p + q\sqrt{w}$ abbiamo $a = p^3 + 3pq^2w - 2$, $b = 3p^3q + q^3w$. Se si pone $y = p - q\sqrt{w}$ e sostituendo $-q$ con q nelle espressioni di a e b si ha $y^3 - 2 = a - b\sqrt{w}$. Ma si è supposto che x fosse una radice di $x^3 - 2 = 0$ quindi $a + b\sqrt{w} = 0$. Se consideriamo $b \neq 0$ si avrebbe $\sqrt{w} = -a/b$ e quindi apparterrebbe a C_{k-1}

contro la nostra ipotesi.

Quindi $b = 0$ e di conseguenza $a = 0$. Da ciò deduciamo che $y = p - q\sqrt{w}$ è anche una soluzione dell'equazione cubica, perchè $y^3 - 2 = 0$. Inoltre si ha $y \neq x$, cioè $x - y = 2q\sqrt{w} \neq 0$ in quanto esso può annullarsi soltanto se $q = 0$ ma se questo accadesse $x = p$ e quindi apparterrebbe a C_{k-1} contro la nostra ipotesi.

Abbiamo perciò dimostrato che x, e quindi y, sono radici reali dell'equazione cubica iniziale. Ma sappiamo che esiste soltanto un numero reale x che sia radice cubica di 2, essendo le altre radici cubiche immaginarie, perciò una soluzione dell'equazione cubica non può appartenere ad un campo C_k e quindi è impossibile eseguire la duplicazione del cubo con riga e compasso. $\square$

3.2.2 Un teorema sulle equazioni cubiche

Il ragionamento algebrico è particolarmente adatto se utilizzato nel precedente problema, ma volendo trattare gli altri due è opportuno procedere su una base più generale. Utilizzeremo quindi, per le dimostrazioni successive, il seguente teorema.

Teorema 3.8. *Se un'equazione cubica a coefficienti razionali non ammette radici razionali, allora nessuna delle sue radici è un numero costruibile partendo dal campo razionale C_0.*

Dimostrazione. Dimostrazione per assurdo.
Supponiamo che x sia una radice dell'equazione cubica $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ e che sia costruibile.
Sia k il più piccolo numero intero tale che x appartenga a un campo esteso C_k. k deve essere certamente maggiore di zero perchè, per ipotesi, nessuna radice deve essere razionale. Quindi x può essere scritto nella forma $x = p + q\sqrt{w}$ dove $p, q, w \in C_{k-1}$ ma $\sqrt{w}$ non appartiene ad esso. Ne segue esattamente, come per l'equazione particolare $z^3 - 2 = 0$ del teorema precedente, che anche un altro elemento di C_k del tipo $y = p - q\sqrt{w}$ sia radice dell'equazione cubica.
Come prima si vede che $q \neq 0$ e quindi $x \neq y$. Sappiamo che se x_1, x_2, x_3 sono radici dell'equazione cubica, allora $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ quindi risulta che $u = -a - x - y$. Ma poichè $x + y = 2p$ questo significa che $u = -a - 2p$ e quindi appartiene a C_{k-1}. Questo contraddice la definizione data di k. Quindi nessuna radice dell'equazione cubica può appartenere ad un campo C_k. □

Osservazione 3.9. In base a questo teorema risulta anche dimostrato che una costruzione con solo riga e compasso è impossibile se l'equivalente algebrico del problema è la soluzione di un'equazione cubica priva di radici razionali.

3.2.3 La trisezione dell'angolo

Teorema 3.10. *La trisezione dell'angolo mediante riga e compasso è generalmente impossibile.*

Dimostrazione. Consideriamo un angolo θ mediante il suo coseno ossia $cos\theta = g$. Il problema è allora equivalente a quello di determinare la quantità $x = cos(\theta/3)$. Essa è legata a θ attraverso la relazione $cos\theta = g = 4cos^3(\theta/3) - 3cos(\theta/3)$. In altre parole il problema è equivalente a costruire una soluzione dell'equazione cubica $4z^3 - 3z - g = 0$.
Prendiamo per esempio $\theta = 60°$ ossia $g = cos60 = 1/2$. L'equazione precedente diventa allora $8z^3 - 6z = 1$. Per il teorema precedente basterà soltanto far vedere che questa equazione non ammette radici razionali.
Sia $v = 2z$, l'equazione diventa allora $v^3 - 3v = 1$.
Se esistesse un numero razionale r/s soluzione di questa equazione, con r, s numeri interi primi tra loro, si avrebbe $r^3 - 3s^2r = s^2$. Da ciò segue che $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$ sarebbe divisibile per r, il che significa che r, s avrebbero un fattore comune maggiore di 1, a meno che non fosse $r = \pm 1$. Poiché abbiamo supposto che r, s non abbiano fattori comuni, abbiamo anche dimostrato che i suoi numeri razionali che potrebbero eventualmente soddisfare l'equazione precedente sono $+1$ o -1. Sostituendoli a v nella precedente equazione, si vede che nessuno dei due valori la soddisfa. Quindi questa equazione, e di conseguenza $8z^3 - 6z = 1$, non ammettono radici razionali ed è dimostrata l'impossibilità della trisezione dell'angolo. $\square$

3.2.4 L'ettagono regolare

Teorema 3.11. *Determinare il lato x dell'ettagono regolare inscritto in un cerchio di raggio unitario. Esso non è costruibile con riga e compasso.*

Dimostrazione. Supponiamo che i vertici dell'ettagono siano dati dalle radici dell'equazione $z^7 - 1 = 0$ dove consideriamo le coordinate x, y di tali vertici come, rispettivamente, le parti reali e i coefficienti dell'immaginario dei numeri complessi $z = x + iy$. Una delle radici di questa equazione è $z = 1$ e le altre sono le soluzioni dell'equazione $(z^7 - 1)/(z - 1) = z^6 + ... + z + 1 = 0$. Dividendola per z^3 si ottiene l'equazione $z^3+1/z^3+z^2+1/z^2+z+1/z+1 = 0$, che, con una semplice trasformazione algebrica, può essere scritta nella forma $(z + 1/z)^3 - 3(z + 1/z) + (z + 1/z)^2 - 2 + (z + 1/z) + 1 = 0$. Indicando con y la quantità $(z + 1/z)$ si trova $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$.
Sappiamo che z, radice settima dell'unità, è data da $z = cos\phi + isin\phi$ dove $\phi = 360°/7$ è l'angolo al centro corrispondente al lato dell'ettagono regolare. Quindi $1/z = cos\phi - isin\phi$ e $y = z + 1/z = 2cos\phi$.
Sapendo costruire y, sapremo anche costruire $cos\phi$, e viceversa. Perciò rimane soltanto da dimostrare che l'equazione $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ non ammette radici razionali.
Supponiamo che abbia una radice razionale r/s, dove r, s sono numeri interi primi tra loro. Si ha allora che $r^3 + r^2s - 2rs^2 - s^3 = 0$ da cui si vede, come prima, che r^3 ammette il divisore s, e s^3 il divisore r. Poichè r e s non hanno divisori comuni, ciascuno di essi deve essere ± 1; perciò y, se deve essere razionale, può assumere soltanto i valori $+1$ e -1. Sostituendo questi numeri nell'equazione, si vede che nessuno dei due la soddisfa. Quindi y non è costruibile e perciò non è costruibile il lato dell'ettagono regolare. □

Appendice

Appendice A

Allegato F delle indicazioni nazionali: Matematica

LINEE GENERALI E COMPETENZE:

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:
1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;
3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;
4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;
5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);
6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;
7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;
8) una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio (invarianza delle leggi del pensiero), della sua diversità con l'induzione fisica (invarianza delle leggi dei fenomeni) e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia.
Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base.
Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.
L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione princi-

pale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO

PRIMO BIENNIO

Aritmetica e algebra

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta. La dimostrazione dell'irrazionalità di 2 e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui essi compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione. L'acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori.

Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le operazioni tra di essi. Saprà fattorizzare semplici polinomi, saprà eseguire semplici casi di divisione con resto fra due polinomi, e ne approfondirà l'analogia con la divisione fra numeri interi. Anche in questo l'acquisizione della capacità calcolistica non comporterà tecnicismi eccessivi.

Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.

Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica.

Geometria

Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.
Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.
Lo studente acquisirà la conoscenza delle principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete) e sarà in grado di riconoscere le principali proprietà invarianti. Inoltre studierà le proprietà fondamentali della circonferenza.
La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria. Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitandosi alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. Lo studio delle funzioni quadratiche si accompagnerà alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. L'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata

concettuale e tecnica di questa branca della matematica.
Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Relazioni e funzioni

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.
Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.
Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|, \quad f(x) = a/x$, le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa. Il contemporaneo studio della fisica offrirà esempi di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie.
Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Dati e previsioni

Lo studente sarà in grado di rappresentare e analizzare in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee. Saprà distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui, operare con distribuzioni di frequenze e rappresentarle. Saranno studiate le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche. Lo studio sarà svolto il più possibile collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti.
Lo studente sarà in grado di ricavare semplici inferenze dai diagrammi statistici.
Egli apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.
Sarà approfondito in modo rigoroso il concetto di modello matematico, distinguendone la specificità concettuale e metodica rispetto all'approccio della fisica classica.

Elementi di informatica

Lo studente diverrà familiare con gli strumenti informatici, al fine precipuo di rappresentare e manipolare oggetti matematici e studierà le modalità di rappresentazione dei dati elementari testuali e multimediali.
Un tema fondamentale di studio sarà il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione; e, inoltre, il concetto di funzione calcolabile e di calcolabilità e alcuni semplici esempi relativi.

SECONDO BIENNIO

Aritmetica e algebra

Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero, e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e, permetteranno di approfondire la conoscenza dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione lo studente studierà la formalizzazione dei numeri reali anche come introduzione alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico). Sarà anche affrontato il tema del calcolo approssimato, sia dal punto di vista teorico sia mediante l'uso di strumenti di calcolo.
Saranno studiate la definizione e le proprietà di calcolo dei numeri complessi, nella forma algebrica, geometrica e trigonometrica.

Geometria

Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.
Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi. Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Relazioni e funzioni

Un tema di studio sarà il problema del numero delle soluzioni delle equazioni

polinomiali. Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche.
Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo. Sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo.
Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.

Dati e previsioni

Lo studente, in ambiti via via più complessi, il cui studio sarà sviluppato il più possibile in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti, apprenderà a far uso delle distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione.
Studierà la probabilità condizionata e composta, la formula di Bayes e le sue applicazioni, nonché gli elementi di base del calcolo combinatorio.
In relazione con le nuove conoscenze acquisite approfondirà il concetto di modello matematico.

QUINTO ANNO

Nell'anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica. Gli esempi verranno tratti dal contesto dell'aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell'insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.

Geometria

L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

Relazioni e funzioni

Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.

Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale [U+0096] in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità [U+0096] anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici. Altro importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton. Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. Inoltre, lo studente acquisirà familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti.

Dati e previsioni

Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni discrete e continue di probabilità (come la distribuzione binomiale, la distribuzione normale, la distribuzione di Poisson).

In relazione con le nuove conoscenze acquisite, anche nell'ambito delle relazioni della matematica con altre discipline, lo studente approfondirà il concetto di modello matematico e svilupperà la capacità di costruirne e analizzarne esempi.

Appendice B

Intervista ai professori

In questo appendice riporteremo l'intervista integrale fatta alle due professoresse dell'istituto "E.Fermi" presso il quale ho svolto il mio tirocinio. Nel primo capitolo abbiamo parlato della riforma Gelmini e di ciò che 'dovrebbe', di fatto, modificare all'interno degli istituti scolastici. Nel secondo abbiamo invece trattato un particolare argomento introdotto dalla riforma, i complessi, e della possibile introduzione di essi, e di molti altri argomenti, attraverso l'uso della storia della matematica. L'intervista sarà quindi improntata su questi tre temi. In particolare cercheremo di capire i cambiamenti che, a distanza di quattro anni, sono stati apportati concretamente nella scuola e come i ragazzi ne abbiano giovato o ne possano giovare in futuro.

B.1 Professoressa Gianna Ghera

- Buongiorno professoressa.

- Buongiorno.

La riforma

- Ci dica secondo lei quali sono i cambiamenti più importanti che la riforma ha apportato.

- La riforma ha apportato uno snellimento in alcune parti del programma curricolare ministeriale. Sicuramente viene snellita tutta la parte di trigonometria alla quale prima si dedicava quasi metà del quarto anno. Io mi trovo molto bene nella riforma perchè gli argomenti vengono lanciati e introdotti già in prima o in seconda (parlo di matematica) e anche in altre discipline come la fisica. Ad esempio seno, coseno, le funzioni goniometriche in generale oppure anche altre funzioni come le crescenti decrescenti ed alcune loro proprietà; hai visto loro già conoscono la retta anche se dobbiamo ancora trattarla dal punto di vista analitico però almeno è già stata introdotta. Questo consente di consolidare meglio i concetti nella testa dei ragazzi perché lo lanci, ci lavorano, lo elaborano, lo dimenticano, lo riprendono, lo approfondisco con altre proprietà, con calcoli più impegnativi oppure con altre proprietà arricchite esse stesse da altre proprietà. Ed è lo stesso in altri ambiti in cui rielaborano il concetto e non lo dimenticano del tutto e via dicendo.... Ad esempio il concetto di funzione: l'insegnante lo introduce nel primo biennio e ci lavori abbastanza intensamente in terza e in quarta. Quindi questo è un incentivo mentre invece nella precedente impostazione, ossia precedentemente alla riforma, un argomento veniva preso, sviscerato fino alla noia, fino ad odiarlo e questo perché se uno non è portato o diciamo

non è maturo per quel tipo di calcolo tutto viene reso più difficile. Alcuni ragazzi sono precoci e alcuni no, alcuni si trovano a proprio agio a fare qualche calcolo impegnativo in seconda o in terza mentre la maggior parte non hanno questa familiarità...... anche perché alle medie vorrei proprio andare a vedere cosa fanno e certe volte mi chiedo veramente cosa hanno fatto ma poi anche lì probabilmente interverranno prima o poi.
Quindi finalmente nella riforma è snellita tutta la prima parte dei calcoli e delle dimostrazioni e questo è molto molto positivo, si potrebbe fare meglio ma per ora va bene così.
Nella riforma è stata inoltre introdotta in maniera forte la statistica e il calcolo delle probabilità che non veniva trattato se non in caso qualcosa al quinto anno. Ora invece col fatto che già in fisica è presentata l'elaborazione dei dati, lo introduciamo subito e questo è notevole. Il discorso vale anche per altri ambiti.
Parlando di complessi ad esempio io li ho sempre fatti: ho iniziato ad insegnare nell'89 e mi ricordo benissimo che alla fine di trigonometria io li vedevo molto bene come applicazione di essa per poi guardarli un attimo come ampliamento dei numeri reali. Adesso è stato addirittura introdotto e lo ritrovo nei libri dove prima non c'era.
Quindi questi sono gli aspetti positivi della riforma.
Negativi è che l'editoria non ci sostiene: sono poche le case editrici i cui libri veramente hanno avuto un cambiamento reale nell'ottica delle indicazioni generali che sono state date. Io ho trovato questo della Petrini ("matematica a colori") ...... Alcuni hanno invece preso semplicemente gli argomenti e hanno fatto un copia incolla, una sorta di riassemblamento, ma di fatto non è cambiato nulla. Ad esempio nei libri il calcolo dovrebbe essere un po' alleggerito di tutte le situazioni goniometriche, tutti i calcoli, i problemi........
L'altra cosa buona sai qual'è?! è il calare questo nella realtà come ad esempio nella fisica. Loro a volte risolvono un esercizio e non lo contestualizzano. Esempio: quanto è alto il passo di un uomo? e come niente viene fuori

70 centimetri e nessuno si chiede “qual è quell’uomo che ha un passo così lungo?” oppure mi ricordo anche un problema di un aereo supersonico e si chiedeva a che quota vola e ad alcuni venne 24 metri da terra, io dico “ragazzi, 24 metri da terra è possibile?” e loro mi dicono “eh ma viene così!”. Questo perché prima era così: basato sull’applicazione senza ragionare, invece adesso i libri ben fatti sono ricchi di situazioni reali calate nella realtà, dopotutto il numero e viene da Nepero, dalla capitalizzazione e da calcoli all’interno di essa e così molte cose vengono da situazioni reali.

-Ai ragazzi ha giovato la riforma? Ossia da un lato è vero che abbiamo detto che la riforma è aiutata dall’interdisciplinarietà e che quindi imparano gli argomenti con un approccio migliore ed indagandone anche le relazioni nelle varie discipline, ma la diminuzione delle ore disponibili per ogni argomento non può essere negativa?

-Dipende sempre se viene lanciato e ripreso l’argomento perché se lo lanci, lo imparano, lo conoscono, gli si avvicinano, certo lo dimenticano ma poi lo riprendono e dai così più spazio all’argomento. I ragazzi pre-riforma non è che sappiano meglio la trigonometria di adesso. Loro ora ci stanno due mesi e anche meno ma non è questo il punto perchè loro sono giovani e fanno presto ad apprendere.
Ci potremmo aiutare però con metodi multimediali, perchè è chiaro che se il grafico di studio di funzione porta per ogni funzione a seguire la scaletta quale se il dominio è pari o dispari, gli zeri, lo studio del segno, i limiti, la derivata prima e seconda, il dominio e codominio ecc ecc....... ogni studio di funzione mi prenderà un’ora; quindi se io lo faccio per un certo numero di funzioni e ci lavoro loro poi sanno che quella è la scaletta, e io dico ‘adesso ci lavoriamo con metodi interattivi (come Wolfram Alpha, GeoGebra con cui sono più prudente)’ , allora avendo loro iPad, iPhone o avendo in classe una LIM, il grafico lo vediamo immediatamente. Loro infatti lavorano molto più

con le immagini rispetto ai ragazzi pre-riforma. Inoltre i bambini di pochi anni sanno già usare un iPad. Quindi questo agevola l'insegnamento perchè prima dovevi fare tutto più manualmente. Però il problema è vedere se noi docenti ci allineiamo su questo.
Ad esempio io con la LIM, dopo 2 anni, mi sembrava di volare, anche perchè ti puoi preparare il lavoro ed è tutto più agevole: puoi veicolare concetti in modo diverso e non con una lavagna di ardesia in cui devi scrivere tutto, e non è come una diapositiva, è molto più potente!!. Adesso purtroppo però non abbiamo i mezzi in tutte le classi e io sto soffrendo molto perché come hai visto la collega (la professoressa Bagnacavalli) usa GeoGebra apre e fa subito. Ad esempio se voglio l'equazione di una circonferenza con centro fissato e ho il raggio, devo tracciare la circonferenza con il compasso prendendo l'ampiezza giusta e puntare su un piano cartesiano precedente fatto quindi porta via del tempo che non si ha. Solitamente, per fare una risoluzione grafica, invece puoi postarla graficamente, fai prima e nello stesso tempo i ragazzi arrivano allo stesso al concetto. Non so se sei d'accordo...

- Certo sono d'accordissimo. Ma secondo esperienza personale i professori sono ben disposti verso questa riforma? Utilizzano cioè questi mezzi tecnologici e soprattutto ne hanno la preparazione?

- Allora intanto, come ti ho detto prima, i libri non sono pronti a questo o comunque sono pochi quelli che lo fanno, ad esempio se tu apri il nostro libro di deferimento più avanti, se vai a vedere, utilizzata in alcuni casi GeoGebra. Allora in questo caso poi effettivamente fare qualcosa di valido.
I docenti invece potrebbero essere anche obbligati a fare degli aggiornamenti, e se venisse anche svecchiato l'ambiente...... ma ciò non vuol dire di età, perché ci sono colleghi, anche giovani, che non ne vogliono assolutamente sapere di aggiornarsi.
Certo teniamo anche presente che il numero di allievi non è praticamente

raddoppiato ma quasi o comunque è cresciuto di un terzo in tutte le classi rispetto al pre-riforma. Il lavoro è tale che ci sono più verifiche da correggere e se loro non studiano non si riesce ad utilizzare il metodo perchè si allungano i tempi di verifica. Quindi il tempo per imparare qualcosa di nuovo non c'è veramente. Se venisse offerto qualche corso anche in estate sono sicura che molti di noi lo farebbero. In realtà purtroppo siamo pochi che ci mettiamo a studiare come autodidatti; alcuni fanno parte di associazioni di insegnanti che si ritrovano e autoaggiornano, ma i ben disposti rimangono pochi.

I complessi

- Quali sono i diversi metodi per introdurre i complessi? Quali sono gli aspetti positivi e negativi?

- Di aspetti cattivi non ne vedo nell'introdurre i complessi. Aspetti negativi nell'introdurre in generale qualsiasi concetto di matematica non ne vedo. Secondo me è fondamentale anche non nello scientifico, ad esempio ad elettronica, in cui io ho insegnato in un itis un anno solo, se non facevi i complessi in terza non riuscivi a fare nulla con il collega di elettronica.
Devo dire che molti dei miei studenti proprio nel momento in cui mostro che c'è qualcosa oltre ciò che stiamo facendo si interessano. A volte io porto anche articoli scritti sui giornali. Ad esempio ho portato un articolo sulle algebre di Lie e un ragazzo si è talmente interessato che ha fatto il dottorato di ricerca ad Amsterdam, quindi ha avuto un grande successo. Ricapitolando di lati negativi non ne vedo.
Su come introdurre i complessi ci sono molteplici metodi. Io li ho introdotti in tutti i metodi possibili: prendendo la soluzione di x^2+1 che però è un pò calato così, oppure nel piano lo si introduce molto bene, con Pascal facendo la rappresentazione grafica con gli assi e anche lì viene abbastanza bene, diventa calato dall'alto se lo introduciamo come completamento dei nume-

ri reali, ma in questo caso i ragazzi la studiano senza capire più di tanto. Possono essere introdotti in tutti i modi che vuoi; io ho visto i miei colleghi fare cose molto complicate.
Il lavoro sui complessi io lo faccio da sempre e ha portato ad esempio ai frattali. Un ragazzo ha fatto una tesina su questi e si è andato a leggere proprio un libro e tutta la teoria sul caos in fisica. Questi sono spunti per qualcosa che è oltre, come a dire "guardate bambini mangiate tutto ma non toccare il cioccolato perché vi fa male" e quindi loro la cioccolata la mangiano specialmente quando gliela nascondi, così a lezione gli fai vedere che c'è qualcosa dietro e loro sono più stimolati.
Poi come introdurli io non ti so dire, ma una volta impostati si devono fare bene: la scrittura trigonometria, la teoria di De Moivre, la risoluzione di un'equazione nel campo complesso bisogna farle necessariamente. E' molto bella anche la rappresentazione che le colloca come lati di un poligono regolare e le questioni ad essi connesse. E' interessante, anche se più noiosa, la scrittura del tipo $a + i * b$, la norma , il modulo. Data invece in termini più particolari e scorrevoli può essere nel piano in funzione di ρ. Converrà in ogni caso che senti anche gli altri colleghi....

La storia della matematica

-Crede che la storia della matematica sia fondamentale nell'insegnamento? E perché?

-La storia della matematica è fondamentale. Tutta la nostra didattica dovrebbe essere permeata e non formata da sezioni chiuse. La storia della matematica è importante anche per vedere la storia del concetto.
Faccio un esempio: prendi il segmento parabolico e mi calcoli l'area, non c'è problema calcolo un integrale definito. Ma Archimede l'ha già calcolato e puoi buttarlo lì senza dimostrazione al terzo anno oppure ti vai a vedere

come l'ha calcolato, contestualizzandolo, dicendo in che secolo viveva, cosa c'era intorno, quale era il ruolo dello storico e quali strumenti aveva, che non riusciva a superare concetto di infinito. Possiamo parlare della crescita matematica e di come si è sviluppata. Poi ci sono anche degli aneddoti che un po' spezzano la didattica, l'aiutano, ci fanno anche capire come alcuni concetti, o per meglio dire risultati, e alcune teorie che sembravano a se stanti possano servire (come gli spazi di Hilbert). Vedi, la storia della matematica e della fisica spesso vanno insieme. Effettivamente alcune teorie fanno da supporto ad altre e ci portano a certi risultati; ecco questo se riusciamo a darlo, io ad esempio lo do, è molto positivo. Io ad esempio porto le foto, metto sul sito la vita degli autori per vedere cosa c'è intorno, come ad esempio Gauss o la storia delle donne nella matematica. Le prime donne infatti entrano camuffate con un nome maschile altrimenti non venivano prese in considerazione. Ciò lo puoi anche contestualizzare con quello che loro stanno facendo in Storia e Filosofia perché la matematica si presta sia come storia del concetto filosofico (come limite per arrivare a tutta la formulazione del '900) sia come concetto stesso di filosofia o di storia; un esempio sono gli antichi greci come Pitagora. Ecco secondo me è fondamentale e poi li risveglia.
Ad esempio io i numeri complessi li introduco da Scipione dal ferro e Bombelli perché ho studenti che abitano in Via Scipione dal ferro e questo suscita il loro interesse e mi chiedono "ma veramente?! chi era?!", e poi da li parto con il trinomio così permette ai ragazzi di ragionare e risolvere un problema da cui scaturisce il numero complesso. Quindi proprio facendo la storia del numero complesso veicoli dentro questo concetto e ciò è bellissimo più che mettersi lì a fare "$x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$" e la risposta dei ragazzi potrebbe essere "e a noi che ce ne frega a 17 anni che non ha soluzioni? vivevo bene prima e vivo bene adesso anche senza i complessi", invece se dico che Scipione dal ferro, bolognese, allievo di Bombelli arriva a questi risultati loro si interessano e mi chiedono "allora come finisce?non ce lo dite?".

B.2 Professoressa Maria Teresa Bagnacavalli

- Buongiorno professoressa.

- Buongiorno.

La riforma

- Quali sono i maggiori cambiamenti che la riforma ha apportato?

- Personalmente ho insegnato fino allo scorso anno nei corsi di PNI e anche ora sono su un corso potenziato di matematica e fisica (interno al nostro liceo) che prevede in quarta e in quinta 1 ora in più di matematica. Quindi molti argomenti già avevo l'abitudine di trattarli e, alcuni di questi, in modo approfondito. A livello di programmi senz'altro le seguenti modifiche:
1) in terza: lo spostamento di logaritmi ed esponenziali dalla quarta alla terza, l 'introduzione della statistica.
2) In quarta : lo studio della geometria analitica dello spazio, il calcolo combinatorio e il calcolo delle probabilità (che solitamente svolgevo in quinta) e l'eliminazione del calcolo matriciale connesso allo studio più approfondito dei sistemi lineari. Un notevole snellimento della trigonometria.
3) In quinta: l'introduzione delle distribuzioni di probabilità e delle equazioni differenziali.
In generale posso dire che, se da un lato noto la tendenza a ridurre in tutti gli ambiti casi troppo particolari che possono condurre a calcoli complessi, è vero che nel fare questa operazione si perde in profondità e si rischia di non riuscire a comunicare agli studenti lo spessore e la complessità dei problemi. Altra differenza è la richiesta di risolvere problemi che abbiano attinenza

con la realtà e quindi la necessità di insegnare a costruire e a leggere modelli.

- Ai ragazzi ha giovato la riforma? la diminuzione delle ore disponibili per ogni argomento ha permesso di trattarli in modo sufficientemente adeguato ?

- È un po' presto per dirlo. Quest'anno si diplomeranno i primi studenti della riforma, occorrerà aspettare e vedere come affronteranno gli studi universitari. Finora la maggior parte dei nostri studenti, anche i più fragili, tornavano a trovarci riferendo di trovarsi bene all'università ottenendo risultati brillanti. Alcuni argomenti (ad esempio la trigonometria o il calcolo di derivate o di integrali) probabilmente necessitavano di un ridimensionamento. Quello che mi dispiace dover tagliare , soprattutto in quinta, sono parte delle dimostrazioni di teoremi, perché trovo che la matematica debba anche insegnare ai ragazzi la buona abitudine di dar conto di quello che si afferma e si fa. Inoltre si impara a dimostrare dimostrando...
Penso che ai ragazzi gioverà la riforma quando noi insegnanti l'avremo metabolizzata e rielaborata, cioè l'avremo fatta nostra. Ci vorrà un po' di tempo.

I complessi

- Quali sono i diversi metodi per introdurre i complessi? Quali sono gli aspetti positivi e negativi?

- Li introduco come ampliamento del campo dei reali, cogliendo l'occasione per parlare di gruppi, anelli, campi e spazi vettoriali (in maniera elementare e piuttosto veloce: circa 2 ore). So bene che proprio per questo argomento una introduzione storica potrebbe essere opportuna e mi rendo altresì conto che sarebbe senz'altro più allettante per gli studenti, ma questo argomento viene trattato in genere verso la fine della quarta, schiacciato fra la trigonometria, la geometria solida e le trasformazioni, e la necessità di

verificare....
Il risultato è che al massimo si riesce a riservare più di una decine di ore.

La storia della matematica

-Crede che la storia della matematica sia fondamentale nell'insegnamento? E perché?

- No, non utilizzo quasi mai la storia della matematica nelle mie lezioni per diversi motivi.
Innanzi tutto il tempo: in 4 ore settimanali si deve far rientrare le spiegazioni, le valutazioni, la correzione di esercizi e l'ascolto delle problematiche incontrate dagli studenti. Si deve lasciar spazio alla discussione di metodi risolutivi diversi, e questo spesso impegna parecchio tempo. In secondo luogo i testi stessi non sono assolutamente organizzati in questo modo: quasi tutti presentano richiami a come si è potuto giungere quel concetto o come il tal matematico ha rielaborato una certa teoria, ma sempre alla fine del capitolo, come appendice, non come introduzione alla tematica. Infine (e non ho difficoltà ad ammetterlo e su questo punto mi sono confrontata spesso anche con altri colleghi) non credo di avere la preparazione adeguata.
Perché non ci vengono proposti , magari da docenti universitari che si dedicano a questo studio, corsi di aggiornamento di storia della matematica validi per l'introduzione di questo o quell'argomento che tengano ovviamente conto delle ore che si intende dedicare all'argomento stesso?.

Bibliografia

Materiale per la legge Gelmini:

http://www.ihttp://www.leonexiii.it/wp-content/uploads/2014/04/articolo-Caprioli.pdf;

ndire.it/lucabas/lkmw$_f$ile/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf;

http : //www.studenti.it/superiori/scuola/riforma_gelmini_dei_licei.php;

Materiale utilizzato per creare una impostazione dei complessi:

Leonardo Sasso, *Nuova Matematica a colori* (Edizione Blu per la riforma, secondo biennio), Petrini, 2012 ;

Richard Courant e Herbert Robbins, *CHE COS'è LA MATEMATICA?*, Boringhieri, 1971;

Materiale utilizzato per il pensiero degli esperti nella storia della matematica:

http://www.syllogismos.it/education/StoriaInClasse.pdf :

GIORGIO T. BAGNI, *La matematica e la sua didattica, Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche.*, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA «LA SAPIENZA», 2014;

Fulvia Furinghetti, *Storia della matematica per insegnanti e studenti* ;

Materiale per le indicazioni nazionali:

CURRICOLI STANDARD COMPETENZE NELL'ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE , Unità Italiana di Eurydice, F.F. Parretti, 2002;

Bulletin officiel spécial n° 2 du 19 février, 2009;

http://www.mathunion.org/icmi/activities/database-project/introduction/;

file:///C:/Users/Aspire/Desktop/indicazioni%20internazionali/Cinesi,%20scuola%20e%20matematica.htm;

http://www.justlanded.com/italiano/Stati-Uniti/Guida-Stati-Uniti/Istruzione/Il-sistema-scolastico-americano;

http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Mathematics_Appendix_A.pdf;

http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_Liceo%20scientifico.pdf;

Materiale utilizzato per le domande del TIMMS:

http://timss.bc.edu/timss_advanced/downloads/TA08_Assessment_Frameworks.pdf;

http://www.invalsi.it/timssadv/ ;

Ringraziamenti

Ringrazio per primo il mio relatore Giorgio Bolondi per la sua disponibilità e pazienza.
Ringrazio anche chi ha reso possibile la costruzione della tesi ossia le professoresse G.Ghera e M.T Bagnacavalli, professoresse di grande passione verso l'insegnamento, che si sono rese sempre disponibili, la professoressa Piumi e i ragazzi della 5^aE, 5^aH e 5^aF. Ringrazio con affetto la mia famiglia e i parenti che hanno sempre creduto in me e che mi sono vicini in questo momento così importante; ma soprattutto ringrazio mio fratello Luca che è sempre stato in silenzio durante il mio studio.
Dei ringraziamenti speciali vanno inoltre il mio ragazzo e i miei amici più cari Gino, Crucio, Fede, Spado, junny, Ele che mi hanno sostenuto e sopportato nei momenti più difficili dandomi affetto e gioia.