Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# I SISTEMI DI NUMERAZIONE: DALLA DIDATTICA AI FRATTALI

Tesi di Laurea in
Principi della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Piero Plazzi

Presentata da:
Antonella Natale

I Sessione
Anno Accademico 2014/2015

*Ai miei genitori, con affetto,*
*riconoscente per il sostegno*
*e l'amore ricevuti*

# Introduzione

Un sistema di numerazione è un modo di esprimere e rappresentare i numeri attraverso un insieme di simboli (vedi [27]).
A partire dalle popolazioni primitive sono stati adottati diversi sistemi di numerazione (additivo, sottrattivo, moltiplicativo, ibrido ...) fino a giungere all'epoca attuale in cui si è diffuso il sistema di numerazione posizionale.
Pensando alla nozione di numero viene spontaneo porre le seguenti domande: come, quando, dove e perché l'uomo ha iniziato a concepire i numeri?
A causa della mancanza di documenti che possano testimoniare dove e quando sia nata l'idea di numero e come si sia sviluppato il modo di nominare e rappresentare i numeri, non si avranno mai delle risposte ben precise. Secondo Dehaene [6], matematico e neuropsicologo francese, *l'uomo possiede un innato senso del numero, alla cui rappresentazione sono deputati precisi circuiti cerebrali che si sono evoluti in modo da consentire la migliore percezione della realtà circostante.* Si può, quindi, ipotizzare che vi sia stata una iniziale capacità di valutare la quantità numerica e che si sia sviluppata la capacità di comparare insiemi di oggetti.
Questo aspetto viene approfondito nel primo capitolo, dove vengono ripercorse le varie tappe dello sviluppo del concetto di numero naturale a partire dai primi segni sui bastoni e sulle ossa utili per il conteggio, dall'impiego di parti del corpo come sistema numerico o di altri "strumenti di conto" (come l'abaco, le cordicelle annodate etc.); analizzando, in particolare, i contributi apportati dalle varie civiltà. I sistemi che si prendono in considerazione sono il mesopotamico, l'egizio, il greco, il romano, il cinese, l'indo-arabo (evidenziando inoltre il ruolo di Leonardo Fibonacci) e il maya.
Successivamente (capitolo 2), vengono esplicitate le potenzialità dei sistemi di nume-

razione e alcune possibili applicazioni nell'ambito della didattica, dove le riflessioni su alcune applicazioni elementari (criteri di divisibilità, prova del nove ... ) legate all'attuale rappresentazione numerica possono risultare piuttosto sorprendenti considerata la meccanicità con cui vengono eseguite. Viene, poi, dedicato un modesto spazio ai giochi matematici la cui risoluzione si basa sulla rappresentazione numerica in un determinato sistema. Tale scelta è stata intrapresa nella convinzione che la matematica non può essere ridotta a tecnica e calcoli, al pari di quanto sosteneva Giuseppe Peano il quale nel 1925 pubblica il libro *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, con lo scopo di *rendere dilettevole e meno noioso lo studio dell'aritmetica* (cit. in [28]). Si può dire, in generale, che il gioco favorisce una condizione mentale di riflessione e di ragionamento, che è proprio della matematica, come affermava Leibniz *questi sono di grande aiuto nello sviluppare l'arte della riflessione* (cit. in [29]). Un indovinello, un gioco e un problema matematico hanno qualcosa in comune: pongono una sfida intellettuale, la cui accettazione porta, chi lo risolverà, a realizzare uno sforzo, che è visto dall'esterno come fastidioso e perfino noisoso ma per coloro che amano la matematica e le sfide intellettuali una fonte di soddisfazione.
La personale esperienza di tirocinio presso una scuola secondaria di primo grado (in particolare con alunni di classe prima ma con successivo coinvolgimento anche di quelli delle classi seconda e terza), ha mostrato come l'esposizione di alcuni giochi in ambito didattico permetta di trasformare il "fare matematica" in un'attività veramente ludica e soprattutto intellettualmente stimolante, dandone un'immagine più serena e allontanando quella repulsione che troppi studenti provano e che dichiarano sfacciatamente: "La matematica? A me non piace, non ha senso e non ne ho mai capito niente".
Una trattazione più generale dei sistemi di numerazione e delle rappresentazioni dei numeri (in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$) è presentata nel terzo capitolo dove viene dedicato ampio spazio al sistema di numerazione polinomiale (vedi [5]) e vengono presentati algoritmi per il cambio della rappresentazione di un numero da un sistema polinomiale a un altro. Infine, vengono definiti sistemi di numerazione astratti in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ utilizzati, poi, per generare alcuni tipi di frattali (capitolo 4). Tra questi si ricordano il *sistema di Cantor* in $\mathbb{R}$, in cui ogni numero possiede un'unica rappresentazione che permette di caratterizzare i punti appartenenti al frattale denominato *insieme ternario di Cantor*; e il *sistema di*

*Gauss* in $\mathbb{C}$, utilizzato nella costruzione di un'importante famiglia connessa con frattali conosciuta con il nome di *Curva del drago*.

# Indice

# Elenco delle figure

# Capitolo 1

# Aspetti storici e cognitivi del concetto di numero naturale

*Gli effetti della matematica, siano essi conclusioni teoriche*
*che applicazioni pratiche, sono divini, extranaturali e sopranaturali,*
*suscitano quindi meraviglia, stupore e sbalordimento nelle brigate.*
*Luca Pacioli*

## 1.1 Contare ed enumerare

Il contare è un fatto che a noi sembra, oggi, del tutto istintivo; ma vi fu un tempo in cui l'essere umano non sapeva contare, né immaginava che si potesse fare o che avesse un senso. La situazione che si è presentata ai tempi degli uomini delle caverne, o prima ancora, è, in un certo qual modo, analoga a quella che avviene oggi per un bambino. I primi studi fondamentali riguardo la formazione del concetto di numero nel bambino si devono allo psicologo e pedagogista svizzero Piaget, il quale distingue differenti stadi che gradualmente portano il bambino al possesso di abilità per riuscire a stabilire una corrispondenza biunivoca fra due insiemi, in questo modo impara, spontaneamente, a confrontare insiemi associando ad essi un numero che li metta in relazione. [24]
La mancanza di testimonianze scritte, però, ci costringe a fare soltanto delle ipotesi, ma d'altronde limitare lo studio delle radici storiche della Matematica alle sole testimonianze

scritte sarebbe scorretto; a sostegno di ciò interviene, in particolare, G.G. Joseph, il quale afferma: *Per quanto è dato sapere, non è mai esistita una società che non abbia utilizzato qualche forma di conteggio o di riscontro (che non abbia cioè accompagnato una raccolta di oggetti con gruppi di segni facilmente manipolabili, quali pietre, nodi, o intagli su legno o su ossa). Se definiamo la Matematica come un'attività che scaturisce da concetti relativi a configurazioni numeriche o spaziali ovvero contribuisce a generarli e li impiega in connessione con qualche forma di logica, possiamo legittimamente includere nel nostro studio la proto-matematica, che esisteva quando non erano ancora disponibili forme di registrazione scritta* [14].
L'idea di numero è nata sicuramente da esigenze pratiche, utilitaristiche e concrete. Probabilmente, uno dei primi "approcci" dell'uomo, con l'obiettivo di organizzare le quantità, è stato di contare in base 5, di questo ne sono testimonianza alcuni ritrovamenti, del 1937 in Cecoslovacchia risalenti al 30000 a. C., di alcune ossa di lupo che presentano, profondamente incise, cinquantacinque intaccature, disposte in due serie: venticinque nella prima e trenta nella seconda e all'interno di ciascuna serie le intaccature sono distribuite in gruppi di cinque.

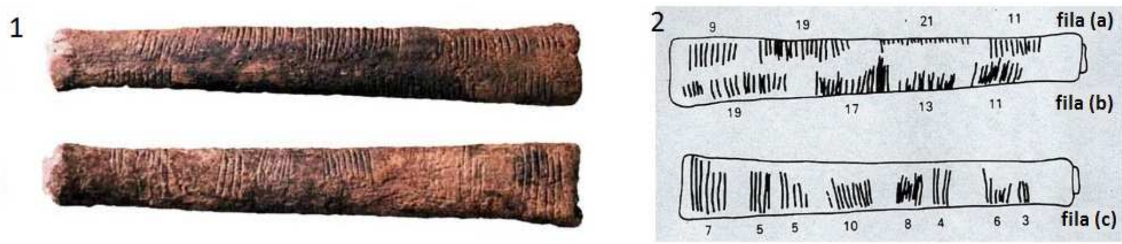


Figura 1.1: Ossa di lupo risalenti al 30000 a.C. in [35] e [36]

In questo reperto sembrano essere presenti i due concetti fondamentali: la *corrispondenza biunivoca* tra la rappresentazione usata (insieme delle tacche) e l'insieme di oggetti da contare, e il concetto di *raggruppamento* che porterà a quello di *base* per un sistema di numerazione.
Questi resti archeologici mostrano, quindi, come fin dall'alba della storia dell'umanità, talvolta in maniera inconsapevole, l'uomo denomina le quantità attraverso ciò che definiamo corrispondenza biunivoca, facendo ricorso ad un procedimento astratto quale il

conteggio, senza tener conto della natura delle quantità implicate.
È possibile effettuare la stessa operazione servendosi di una raccolta di sassi, di conchiglie, di bastoncini, o di qualsivoglia materiale; ma una fase importante dell'evoluzione della modalità del "far di conto" fu l'utilizzo del corpo umano: *viene spontaneo servirsi delle dita delle mani, degli arti e delle diverse parti del corpo umano, come è in effetti avvenuto storicamente per diversi popoli nel Medioevo, sia in Europa, sia in Asia* [12].
Il computo "corporale" costituì una tappa importante del processo di incremento delle potenzialità conoscitive ed epistemiche del conteggio stesso, dal momento che i metodi legati alle parti del corpo (ad esempio toccandosi in sequenza il mignolo, l'anulare, il medio, l'indice e il pollice della mano destra, quindi il polso, il gomito, la spalla, l'orecchio e l'occhio dallo stesso lato, si poteva elencare una raccolta costituita da dieci oggetti, ossia tanti quanti i riferimenti corporei di questa successione [17]), rispetto alla pratica dell'intaglio o alla disposizione di sassi (o altro) in mucchi, non utilizzano solo il principio della corrispondenza biunivoca, ma introducono anche la nozione di successione, nella quale è presente la nozione di ordine. Si assiste, in questo modo, al *passaggio dalla conta per comparazione alla conta per successione*: mentre prima si associava un oggetto con un altro che faceva da riferimento, ora, invece, considerando una sequenza di parti del corpo prestabilite, tale successione finisce per diventare sempre più astratta, ossia sempre meno legata a parti del corpo, ma più legata a una successione astratta.
Un ulteriore fase del processo di astrazione fu la ricerca di segni per i numeri o *numerali.* Con tale espressione si intende il modo di esprimere il numero e quindi la quantità, possono essere parole, come, ad esempio, *sei* o *six*, o simboli, come 6. Si osserva che ad uno stesso numero corrispondono diversi numerali, ma le proprietà aritmetiche dei numeri non dipendono in alcun modo dai numerali usati per indicarli.
Grazie alle sequenze di numerali, l'uomo è riuscito a contare nel senso più compiuto del termine, ossia è riuscito a *enumerare.* Precisamente, enumerare significa attribuire a ogni elemento di un insieme finito un nome che dipende esclusivamente dall'ordine con il quale l'elemento stesso viene preso in considerazione; all'insieme viene poi assegnato, quale etichetta, il numero dei suoi elementi, che è il nome dell'ultimo elemento considerato. Il contare è un processo più complesso che non sempre sboccia nel precedente che, in un certo senso, lo corona e in cui si possono distinguere diverse fasi, come la

percezione, la memorizzazione e la trasmissione della grandezza numerica. La prima di queste fasi è una capacità di distinguere, a colpo d'occhio, insiemi con una quantità diversa di elementi non superiore a quattro, nel caso in cui vi siano molti elementi si opera una disaggregazione dell'insieme, considerando gli elementi uno per uno o a coppie. La memorizzazione delle quantità avviene, come già analizzato, mediante corrispondenza biunivoca con una quantità di riferimento. Dalla memorizzazione alla trasmissione il passo è breve, in quanto si usano le medesime tecniche, e vi sono, fondamentalmente, tre modi per effettuare la trasmissione: parlato, mimico e scritto [5].
L'ultima fase nel processo di astrazione è quella che associa a ogni numero una rappresentazione simbolica, che consenta di operare su di essi in modo efficace. La rappresentazione di un numero richiede di combinare più simboli diversi. Si potrebbe adottare un simbolo per rappresentare l'unità, ripetendolo poi tante volte quante sono le unità contenute nel numero che si vuole rappresentare, ma questo schema non consentirebbe una rappresentazione accettabile di numeri grandi. Viene, quindi, adottato uno schema in cui i numeri sono rappresentati con combinazioni di simboli diversi, detti cifre. Ifrah in [12], riferendosi alle cifre, afferma: *Per la loro universalità che traspare dalle molteplici soluzioni proposte al problema della numerazione, per la loro storia che converge lentamente ma sicuramente verso la formula oggi prevalsa ovunque, quella della numerazione decimale di posizione, le cifre possono testimoniare meglio e più della babele delle lingue l'unità profonda della cultura umana. Nel considerare le cifre, la prodigiosa e feconda diversità delle società e delle loro vicende si cancella davanti a un senso di continuità quasi assoluta. Le cifre non sono tutta la storia dell'uomo, ma la riuniscono, la riassumono, la percorrono da capo a capo.*
Nel corso dei secoli il modo di rappresentare i numeri è cambiato non solo in termini di simboli usati, ma anche come principio di funzionamento, per tale motivo vennero inventati e adottati, in tempi diversi e presso popolazioni diverse, molti sistemi di numerazione.

## 1.2 Sistemi di numerazione nella storia

Uno dei primi sistemi di numerazione di cui si è a conoscenza è basato sull'uno, il due e il molto. Uno e due, quindi, rappresentano i primi concetti numerici astratti intellegibili dell'essere umano, mentre il numero tre è sempre stato sinonimo di pluralità, moltitudine. In molti altri casi, invece, ci si ferma al cinque, essendo le quantità superiori difficili da essere distinte le una dalle altre. Accanto ai sistemi basati sul cinque, molto presente nei sistemi di numerazione, ritroviamo quelli basati sul dieci, tale scelta è stata condizionata, probabilmente, dal numero delle dita delle mani; queste ultime rappresentano da sempre il più semplice metodo e strumento per contare. Per conservare l'informazione, inoltre, si usavano tacche su ossa o segni su pietre, come testimoniato, ad esempio, dai suddetti ritrovamenti in Cecoslovacchia.

### 1.2.1 Sumeri e Babilonesi

In Mesopotamia, nel 3500 a.C., come strumento di calcolo venivano utilizzati cilindri, coni e sfere di piccole dimensioni (chiamati successivamente *calculi*). I responsabili dell'amministrazione per registrare una certa quantità di oggetti prendevano i corrispondenti calculi e li mettevano in una sfera d'argilla, che verrà chiamata *bulla*, con un diametro di circa sette centimetri.

Figura 1.2: Strumenti di calcolo risalenti al 3500 a.C. [42]

Uno dei primi popoli che si stanziò nella mezzaluna fertile fu quello dei Sumeri, il quale venne sottomesso intorno al 1700 a.C. dall'imperatore Hammurabi, fondatore dell'impero babilonese. Egli assorbì la cultura sumerica: in particolare il principio di rappresentazione dei numeri.
I sumeri usavano un sistema sessagesimale costruito sulle "basi" alterne 10 e 6. L'importanza della base 60, probabilmente, risiede nella proprietà di tale numero di essere divisibile esattamente per 2,3,4,5,6,12,15,20,30.
I due sistemi di misura degli angoli e del tempo in uso ancora oggi, nonostante la "mentalità decimale", sono un'eredità del sistema a base 60.
La numerazione sumerica (arcaica) si basava sulla progressione 1 - 10 - 60 - 600 - 3600 - 36000, attribuendo un segno grafico diverso solo a ciascuno di tali numeri.

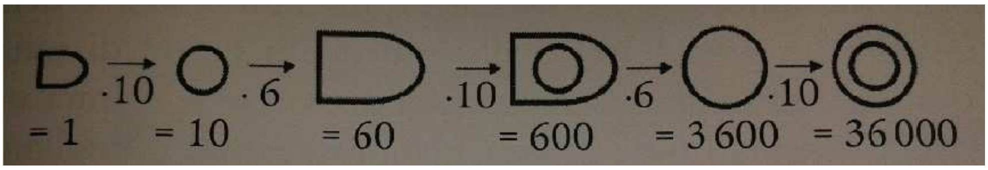


Figura 1.3: Sistema sumerico [13]

L'unità semplice era rappresentata da una tacca sottile, la decina da una piccola impronta circolare, il numero 60 da una tacca spessa, il numero 600 da una combinazione della tacca grande e del cerchietto, il numero 3600 da una grossa impronta circolare e infine il numero 36000 da una combinazione della grossa impronta circolare e del cerchietto.
Si tratta di un *sistema di numerazione additivo*, in quanto, per rappresentare un numero i contabili dovevano ripetere le cifre che avevano a disposizione tante volte quanto era necessario e sommare poi il loro valore, e *non posizionale*, poiché le cifre mantenevano sempre lo stesso valore in qualsiasi sequenza erano scritte. Il problema della numerazione additiva era la sua scarsa praticità, infatti per rappresentare numeri grandi era necessaria una quantità molto elevata di segni.
Successivamente i Sumeri adottarono la ben nota scrittura cuneiforme.
Le difficoltà della numerazione sumerica vennero affrontate e in parte risolte dai matematici babilonesi. Intorno al 200 a.C. si hanno tracce sicure di *numerazione posizionale*, secondo la quale il valore delle cifre cambia in relazione alla posizione occupata ed è

collegato alle successive potenze della base (inclusa la potenza 0, che corrisponde alle unità). La scrittura cuneiforme permetteva di rappresentare solo due numeri (1 e 10), vedi figura 1.4.

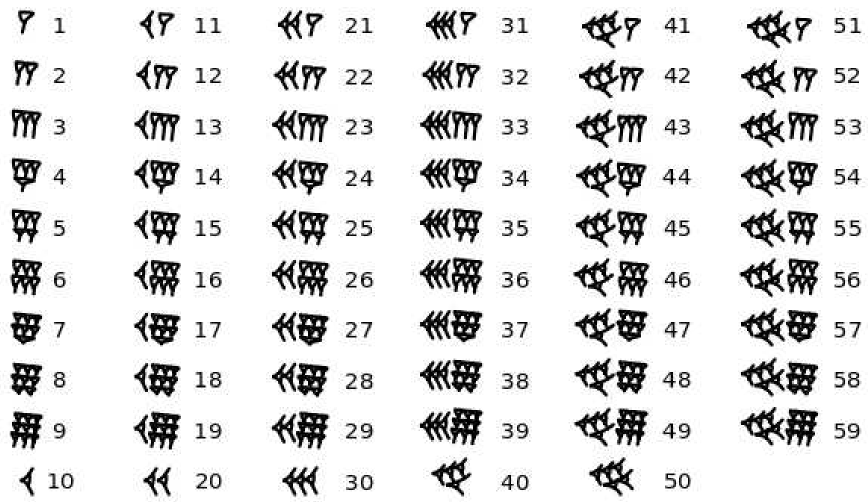


Figura 1.4: Simboli numerici mediante la scrittura cuneiforme [37]

Per i numeri da 1 a 59 veniva utilizzato un sistema numerico additivo, mentre per quelli oltre il 60 il principio posizionale. I Babilonesi, come altri popoli di quel tempo, non possedevano un simbolo per lo zero, talvolta lasciavano uno spazio vuoto dove lo volevano intendere e successivamente introdussero un simbolo, formato da due cunei obliqui, per indicare un posto vuoto (questa fu la prima volta che il concetto di zero apparve nell'universo matematico e dovranno passare circa 1000 anni perché divenisse un numero a se stante). Nonostante ciò non vennero risolte tutte le ambiguità.
Le abilità matematiche dei babilonesi, grazie alle quali riuscirono a guidare per quasi 2000 anni il progresso intellettuale nel mondo antico, sono confermate dal ritrovamento di oltre 400 tavolette di argilla. Ad esempio, i babilonesi estesero il principio posizionale anche alle frazioni (rappresentate nella nostra notazione separate da punti e virgole): nella *Tavoletta YBC 7289* [3] è disegnato un quadrato con le sue diagonali e su una diagonale è inciso il numero sessagesimale 1, 24; 51; 10; che corrisponde a 1,4142129, approssimazione della radice quadrata di 2, ottenuto come rapporto tra diagonale e lato.

### 1.2.2 Egizi

Alcuni dei primi segni della matematica, come la conosciamo oggi, sono emersi lungo le rive del fiume Nilo ad opera degli Egizi le cui conoscenze matematiche si desumono da due importanti papiri, Papiro di Mosca e Papiro Rhind, risalenti al 1700 a.C. circa, contenenti alcuni problemi algebrico-geometrici con le relative soluzioni.
Il sistema di numerazione egizio era decimale e additivo. A differenza dei Babilonesi, per gli Egizi non esisteva lo zero, né come segno né come spazio vuoto.
La rappresentazione dei numeri era basata su una forma di scrittura pittografica, i *geroglifici*: il numero 1 era rappresentato da una linea verticale, ma quando lo si doveva esprimere più dettagliatamente veniva indicato con un piccolo pezzo di fune, il 10 da un pezzo di corda più lungo, a forma di ferro di cavallo, il 100 da un giro di corda avvolta, il 1000 da un fiore di loto, il 10000 da un dito ad uncino,il 100000 da un girino stilizzato, il 1000000 dal dio-sole, Ra. I simboli potevano essere ripetuti fino a nove volte, attraverso la riunione in piccoli gruppi di non più di quattro simboli. L'ordine dei simboli non aveva importanza, anche se gli Egizi erano soliti scriverli in ordine decrescente, sia da destra a sinistra che da sinistra a destra.

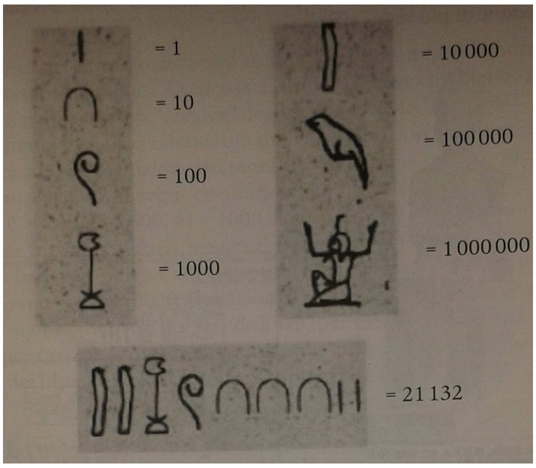


Figura 1.5: Scrittura geroglifica dei numeri nell'antico Egitto [13]

La scrittura dei grandi numeri risultava estremamente ingombrante e per tale motivo nella *scrittura ieratica* i segni si semplificano notevolmente permettendo, soprattutto agli

scribi, una scrittura più rapida.
Uno degli aspetti più curiosi della matematica egizia riguardava le frazioni, in particolare gli egizi riducevano tutte le frazioni a quelle unitarie, cioè aventi come numeratore l'unità, tramite tavole. Una frazione generale veniva rappresentata come somma di frazioni con l'unità al numeratore. Per le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, disponevano di geroglifici speciali.

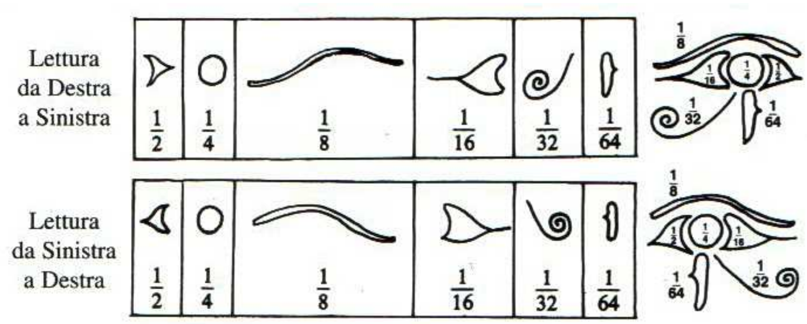


Figura 1.6: Composizione di geroglifici speciali per ottenere l'occhio di Horus [38]

Accostando opportunamente questi geroglifici si otteneva la figura dell'occhio di Horus, il dio dalla testa di falco: la mitologia narra che Horus venne ferito a un occhio dal dio Seth, il quale prese, poi, l'occhio e lo ridusse in pezzi, ma per volontà degli dei venne ricomposto.

### 1.2.3 Greci

I primi a considerare il concetto astratto di numero indipendente dal loro uso come numeri concreti, ossia come "numeri di" (pere, giorni, persone, ecc.), furono i greci; ciò è testimoniato da quanto si legge negli *Elementi di Euclide*: *un numero è una pluralità composta da unità*. Lo studio teorico, ossia indipendente da ogni uso pratico, delle proprietà dei numeri, intesi come entità autonome, è l'oggetto di una disciplina creata dalla cultura greca, *l'aritmetica*. I primi a studiare le proprietà dei numeri pari e dispari, dei numeri primi e della proporzionalità numerica furono i pitagorici, i quali, oltretutto, ricercarono in tali proprietà la chiave per la comprensione dell'universo. Nel capitolo V del libro I della *Metafisica* di Aristotele si legge (cit. in [39]):

*I filosofi pitagorici si dedicarono a coltivare la matematica e furono i primi a farla progredire [...] Partirono dal presupposto che le cose esistenti sono numeri, non intesi come a sé stanti, ma come realmente intrinseci alle cose. Vale a dire, le cose sono composte di numeri, gli elementi dei numeri sono elementi propri di tutti gli esseri esistenti e la totalità dell'universo è armonia e numero. A motivo di ciò vi è che le proprietà numeriche erano inerenti alla scala musicale, ai cieli e a molte altre cose.*

Per quanto riguarda la rappresentazione dei numeri del loro sistema, i greci utilizzavano due sistemi numerici: il primo, più antico, detto *alfabetico* o jonico, il secondo detto *attico* (dalla regione di applicazione: Attica), o erodianico (da Erodiano, grammatico del 2° sec. d.C. che lo descrisse). Quest'ultimo rimase in uso dal V sino al I sec. a.C. per essere poi progressivamente sostituito dal precedente. Il metodo alfabetico, in uso sin dalla fine dell'VIII secolo a.C., si basava sul principio posizionale e faceva uso di 27 simboli, ovvero le 24 lettere dell'alfabeto greco oltre ad altre tre lettere arcaiche scomparse dall'uso comune e che rappresentano i numeri 6 (stigma), 90 (koppa), 900 (sampi o san).

La tavola in figura 1.7 mostra l'accoppiamento fra la lettera dell'alfabeto ed il suo contrassegno numerico:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | alpha | 1 | ι | iota | 10 | ρ | rho | 100 |
| β | beta | 2 | κ | kappa | 20 | σ | sigma | 200 |
| γ | gamma | 3 | λ | lambda | 30 | τ | tau | 300 |
| δ | delta | 4 | μ | mu | 40 | υ | upsilon | 400 |
| ε | epsilon | 5 | ν | nu | 50 | φ | phi | 500 |
| ς | stigma | 6 | ξ | xi | 60 | χ | chi | 600 |
| ζ | zeta | 7 | ο | omicron | 70 | ψ | psi | 700 |
| η | eta | 8 | π | pi | 80 | ω | omega | 800 |
| θ | theta | 9 | ϙ | coppa | 90 | ϡ | sampi | 900 |

Figura 1.7: Corrispondenza fra le lettera dell'alfabeto greco e i rispettivi contrassegni numerici [40]

Per indicare le migliaia, le decine e le centinaia di migliaia venivano usati sempre gli stessi simboli provvisti, però, di un apice a sinistra (iota), come si può notare dalla tabella in figura 1.8.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | α' | | | | | | | | |
| 2 | β' | 11 | ια' | 20 | κ' | 100 | ρ' | 1000 | ,α |
| 3 | γ' | 12 | ιβ' | 21 | κα' | 200 | σ' | 2000 | ,β |
| 4 | δ' | 13 | ιγ' | 30 | λ' | 300 | τ' | 10.000 | ,ι |
| 5 | ε' | 14 | ιδ' | 40 | μ' | 400 | υ' | 20.000 | ,κ |
| 6 | ς' | 15 | ιε' | 50 | ν' | 500 | φ' | 100.000 | ϊ |
| 7 | ζ' | 16 | ις' | 60 | ξ' | 600 | χ' | | |
| 8 | η' | 17 | ιζ' | 70 | ο' | 700 | ψ' | | |
| 9 | θ' | 18 | ιη' | 80 | π' | 800 | ω' | | |
| 10 | ι' | 19 | ιθ' | 90 | ϙ' | 900 | ϡ' | | |

Figura 1.8: Simboli per rappresentare ordini di grandezza superiori a quello dell'unità [41]

Il metodo attico, probabilmente derivato dal metodo geroglifico egizio, è un metodo di rappresentazione additivo ripetitivo modificato: i numeri da uno a quattro erano rappresentati da trattini verticali ripetuti, per il numero cinque si usava un nuovo simbolo (vedi figura 1.9), cosicché per i numeri dal sei al nove si aggiungeva al simbolo che rappresentava il cinque dei trattini indicanti le unità , e i numeri cinquanta, cinquecento, cinquemila e così via si scrivevano mediante la combinazione delle lettere che indicavano cinque, dieci, cento, mille e così di seguito, rispettivamente.

| Γ | Δ | Η | Χ | Μ |
|---|---|---|---|---|
| Pente | Deka | Hekaton | Khilioi | Murioi |
| Πεντε | Δεκα | Ηεκατον | Χιλιοι | Μυριοι |
| 5 | 10 | 100 | 1000 | 10000 |

| Δ | 𐅄 | Η | 𐅅 | Χ | 𐅆 | Μ | 𐅇 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 | 50000 |

Figura 1.9: Simboli numerici dei Greci [13]

Per i calcoli si usava l'abaco (la cosiddetta "tavola di conto"), conosciuto anche in precedenza, che funzionava effettivamente con un sistema posizionale, tendenzialmente decimale, trasmesso poi ai Romani: di quest'epoca sono gli abaci maggiormente conservati.

### 1.2.4 Etruschi e Romani

In Italia, più precisamente nelle regioni attualmente riferibili alla Toscana, all'Umbria e al Lazio, si affermarono gli Etruschi, dal X secolo a.C fino al I secolo a.C, quando furono definitivamente assorbiti dai conquistatori romani.
Gli Etruschi adoperavano un sistema di numerazione additivo rappresentato dai segni mostrati in figura 1.10.

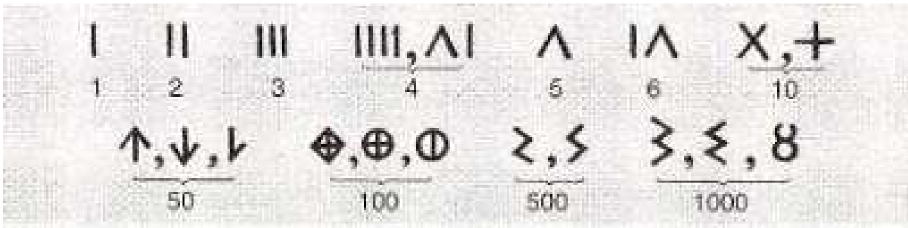


Figura 1.10: Simboli numerici degli Etruschi [30]

La scelta di segni relativamente semplici era determinata dalla facilità di scrittura, soprattutto per quanto riguardava le incisioni su pietra. La loro scrittura era particolare in quanto procedeva da destra verso sinistra. Tale direzione di scrittura venne modificata dagli antichi Romani, i quali, però, conservarono in parte la simbologia dei segni etrusca.
Presso i Romani il modo primitivo di contare era basato sull'uso delle dita delle mani: $I$, un dito, corrispondeva ad una unità; $V$, la mano aperta e stilizzata, indicava cinque unità; $X$, due mani aperte, stilizzate, affiancate e opposte, significavano dieci unità.
La numerazione si perfezionò solo successivamente quando i numeri vennero indicati con le lettere dell'alfabeto. Nel sistema più antico i simboli erano:

$$L = 50,\ C = 100,\ I) = 500,\ (I) = 1000.$$

Il simbolo per il numero 500 era una parte del simbolo per il numero 1000 e solo successivamente diventò la lettera $D$. Una semplificazione simile si verificò quando si introdusse il simbolo M per il numero 1000, che in seguito divenne una linea orizzontale, posta sopra una o più lettere. Due linee verticali da entrambi i lati moltiplicavano, invece, il numero per 100. I simboli divennero quindi:

$$I = 1, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.$$

Il sistema numerico dei romani, quindi, era *additivo ripetitivo parzialmente sottrattivo.* La scrittura dei numeri si basa, fondamentalmente, sulla seguente regola: "se una lettera di valore inferiore è collocata alla sinistra di una lettera di valore superiore i due valori vengono sottratti, se invece è collocata alla destra i due valori vengono sommati".

**Esempio 1.1.**
$XIX = 19$;
$CD = 400$;
$XI = 11$;
$LV = 55$.

I Romani, inoltre, ignorarono sempre l'uso dello zero.
Presso i Romani, ma anche per i Greci, erano in vigore due diversi tipi di abaco: uno in marmo, legno o metallo, con i gettoni liberi, e l'altro più contenuto nelle dimensioni, quindi più leggero e trasportabile, che al posto dei gettoni aveva dei bottoncini simili a chiodini, chiamati *claviculi*, fissati alla tavola in modo da poter scorrere lungo delle scanalature suddivise in due parti, quella inferiore più lunga e quella superiore più corta, in mezzo alle quali erano rappresentati i simboli numerici $I$, $X$, $C$, e così via (vedi figura 1.11). Per effettuare i calcoli si spostavano i chiodini scorrevoli verso la parte superiore della scanalatura, permettendo una discreta velocità nei conti e nella lettura dei numeri ottenuti.

Figura 1.11: Abaco romano [31]

L'operazione più effettuata sull'abaco a gettoni era certamente l'addizione: si posiziona-

vano i gettoni del primo addendo a sinistra e quelli del secondo a destra, si provvedeva a sommare i gettoni dello stesso ordine e si leggeva così il risultato finale.
L'abaco era quindi fondamentalmente posizionale: i gettoni avevano valori diversi a seconda delle colonne.

### 1.2.5 Cinesi

In Cina, fin dal II secolo a.C. e per molti secoli a venire, è testimoniato che non si avvertì la necessità di utilizzare, come strumento di calcolo, l'abaco. Si utilizzava, infatti, un diverso sistema di scrittura che, costituiva un vero e proprio strumento di calcolo: i cosiddetti *numeri a bastoncini* o "ad aste", derivanti da una trasposizione grafica di veri e propri bastoncini, solitamente in bambù, in avorio o in legno, che venivano utilizzati per contare e per eseguire i conteggi.
Il vantaggio dell'uso dei bastoncini e, in seguito, della scrittura dei numeri a bastoncini, consisteva nella facilità e nella rapidità di lettura dei numeri. In maniera molto intuitiva, infatti, i numeri da uno a cinque erano ottenuti dall'allineamento di una a cinque linee verticali, rispettivamente. Dal numero sei in poi si utilizzava un bastoncino orizzontale sotto al quale se ne aggiungevano di verticali, fino a rappresentare il numero nove. Arrivati alla decina si ricominciava ad utilizzare singoli bastoncini disposti in orizzontale (vedi figura 1.12 ) e le centinaia venivano rappresentate come le unità.

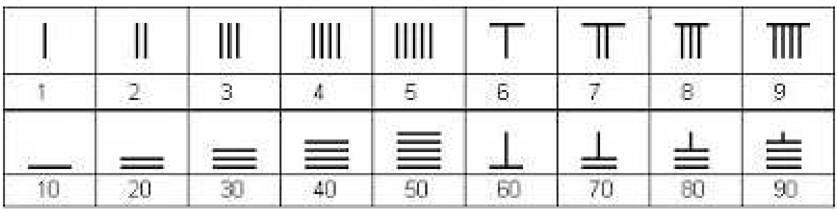


Figura 1.12: Sistema numerico cinese ad aste [30]

L'uso dei bastoncini era così funzionale che tardò l'introduzione di strumenti come l'abaco, infatti, la prima chiara descrizione dell'abaco in Cina, noto come *suan pan* (letteralmente "vassoio per calcolare") si ebbe nel Classico di Lu Ban, un testo di falegnameria del XV secolo, in cui però non è specificata la quantità di posizioni decimali che po-

tevano essere utilizzate (cit. in [43]). Lo suan pan cinese, al posto delle scanalature, aveva delle asticelle di bambù divise in due parti da un'unica barretta in legno. Nelle asticelle erano inserite, in modo da poter scorrere, delle palline: cinque nella parte in basso (sono quelle che valgono una unità rispettivamente), e due in alto, che valgono una cinquina . I numeri venivano così registrati tramite lo scorrimento delle palline verso la sbarretta separatrice. Un abaco con sette palline in ogni asticella, come lo suan pan, viene chiamato abaco 2 : 5; il vantaggio di questo tipo di abaco è quello di poter contare sia secondo un sistema di numerazione decimale che esadecimale.
Rispetto al sistema dei bastoncini, l'abaco era più pratico da utilizzare, ma a causa della limitatezza dello spazio, aveva il difetto strutturale di rendere difficili e lunghe la rappresentazione e la lettura di un numero che avesse molte posizioni decimali. A sostegno di ciò si ricordano le parole del celebre matematico Zhu Zaiyu: "per l'estrazione di radice serve un abaco con 81 posizioni decimali e 567 palline, oppure occorre utilizzare contemporaneamente quattro o cinque abachi normali" [11].
Il sistema di numerazione cinese è, dunque, parzialmente posizionale e decimale. Successivamente, nella rappresentazione scritta dei numeri, vennero utilizzati dei simboli, o più propriamente degli *ideogrammi* (figura 1.13).

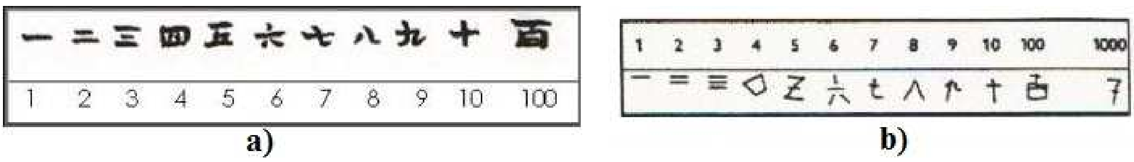


Figura 1.13: Ideogrammi cinesi(a) semplificati (b) [30]

La struttura del calcolo procedeva per colonne verticali, con lettura dall'alto verso il basso. Il metodo per rappresentare i numeri era *additivo e moltiplicativo*, infatti quando uno dei primi 9 numeri era posto prima del 10 o di una delle sue potenze $(100, 1000\ldots)$ funzionava da moltiplicatore; quando invece era posto dopo, da addendo.
Nella figura 1.14 sono riportati alcuni esempi.
Il problema per gli antichi cinesi era l'assenza di un simbolo per lo zero. Nell'uso delle bacchette lasciavano uno spazio bianco in corrispondenza dell'ordine decimale mancante,


Figura 1.14: Esempi di alcune rappresentazioni numeriche mediante ideogrammi cinesi [30]

ma ciò era motivo di numerose ambiguità. La creazione di nuovi simboli per rappresentare le decine, le centinaia e le migliaia non risolse la limitatezza della scrittura dei numeri.

Nell'antica Cina, inoltre, c'è sempre stato un fascino diffuso dei numeri e fino ad oggi, i cinesi credono ancora nel potere mistico dei numeri. A tal proposito alcuni considerano lo yang-ying un metodo di rappresentazione "binaria" dei numeri basato su due simboli: — (yang, maschio) e - - (ying, femmina) [32].

### 1.2.6 Indiani

Il sistema posizionale con un simbolo per lo zero, la grande conquista matematica che avrebbe cambiato il volto della matematica per sempre, si ebbe in India.
A partire dalla metà del III secolo a.C. gli Indiani, come i Cinesi, svilupparono un sistema decimale posizionale, il quale venne raffinato e perfezionato diventando l'antenato del moderno sistema numerico utilizzato in tutto il mondo. Come afferma John D.Barrow in [2]: *Il sistema di numerazione indiano rappresenta probabilmente l'innovazione intellettuale di maggior successo mai escogitata da essere umano.*
Le iscrizioni più antiche con numeri indiani, rinvenute in più parti dell'India, mostrano una serie di trattini verticali utilizzati secondo regole ripetitive, secondo le quali il valore di un numero era rappresentato dalla mera ripetizione di segni unitari uguali: un trattino per l'uno, due per il due, tre per il tre, riprendendo poi gli stessi raggruppamenti per comporre numeri più alti. Successivamente, pur continuando ad usare il principio ripe-

titivo vennero aggiunti nuovi simboli di ordine superiore per indicare i numeri successivi al tre. Questa scrittura, detta *kharosthi*, si presentava nel modo esposto in figura 1.15.

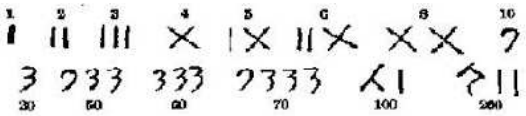

Figura 1.15: Scrittura Kharosthi degli Indiani [30]

Il sistema in questione era già posizionale a notazione decimale, infatti le cifre assumevano un diverso valore in base alla loro posizione e si incrementavano in base 10.
Una successiva graduale evoluzione portò all'adozione della notazione in caratteri *Brahmi* (mostrato in figura 1.16).

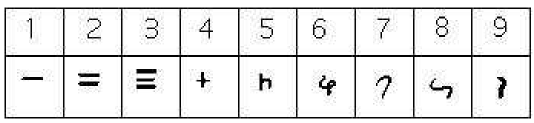

Figura 1.16: Scrittura Brahmi degli Indiani [30]

Il riferimento a nove cifre, anziché dieci, dimostra che, a quel tempo, lo zero non era ancora conosciuto, infatti venne introdotto molto più tardi, verso il IX secolo d.C., completando di fatto il moderno sistema di numerazione per gli interi.
Per facilitare i calcoli idearono l'abaco a polvere, una sorta di calcolatrice virtuale sulla sabbia, costituito da uno spazio piano, da una manciata di sabbia sparsa con cura e da un bastone sottile: sulla sabbia si tracciano una serie di colonne, di cui la prima a destra è riservata alle unità, la seconda alle decine, la terza alle centinaia e così via.
L'implementazione dello zero avvenne nella notazione cosiddetta *Devanagari* (divina) che, come mostra la figura 1.17, portò un'ulteriore evoluzione anche nella simbologia delle cifre.

Agli Indiani si deve il merito di aver trasformato lo zero da mero simbolo grafico che indicava una posizione vuota in un numero a se stante utile per il calcolo. La ragione per cui lo zero abbia assunto la forma circolare è stata oggetto di molte ipotesi. Secondo

| European | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arabic-Indic | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ |
| Eastern Arabic-Indic (Persian and Urdu) | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ |
| Devanagari (Hindi) | ० | १ | २ | ३ | ४ | ५ | ६ | ७ | ८ | ९ |
| Tamil | | ௧ | ௨ | ௩ | ௪ | ௫ | ௬ | ௭ | ௮ | ௯ |

Figura 1.17: Scrittura Devanagari e comparazione con altri sistemi numerici [30]

il matematico e divulgatore scientifico Robert Kaplan [15] *lo zero circolare è nato dal fatto che i matematici antichi erano soliti rappresentare i numeri con ciottoli posati sulla sabbia: una volta tolto il ciottolo, restava soltanto l'impronta e, così, potrebbe essere stato naturale rappresentarlo con un cerchietto vuoto.*
Ciò che più colpisce è la ricchezza di significati che gli Indiani attribuiscono allo zero: esso poteva essere indicato con più nomi differenti, tra cui *shunya*, termine che letteralmente significa "vuoto".

### 1.2.7 Arabi

Gli Arabi, in stretti rapporti commerciali con l'India, vennero a contatto con la matematica indiana: assorbirono le cifre, lo zero, la posizione e gli efficienti metodi di calcolo.
I sistemi di numerazione fondamentalmente usati nei testi di scienziati arabi erano tre (cit. in [45]):

1. il primo prevedeva la scrittura in parole per esteso del numero, un importo che derivava dalle pratiche di conteggio con le dita usate soprattutto dalla comunità dei commercianti e contabili;

2. il secondo era il sistema sessagesimale derivato da quello babilonese, secondo il quale si usavano come simboli le lettere dell'alfabeto arabo ed era applicato prevalentemente nelle opere di astronomia;

3. il terzo era il sistema di numerazione indiano che si diffondeva sempre più, divenendo il modo usuale di scrivere e calcolare anche per la gente comune.

Lo zero, shunya in India, divenne *as-sifr*, che significa "assenza di qualunque cosa". Nonostante lo zero fosse pratico e indispensabile nel commercio e negli affari, tale *cifra del niente* incontrò forti resistenze in Europa, dovute al fatto che l'altro sistema in uso, quello romano, non era posizionale e non conteneva lo zero.
Nel XIII secolo Leonardo da Pisa, più noto come Fibonacci, tentò di mostrare la ragion pratica di quel numero: battezzò lo zero arabo *zephirum*, o *cephirum*, da cui poi deriverà *zefiro*, zefro o severo, infine abbreviata in dialetto veneziano in *zero* (*cifra* deriva dalla stessa parola).
*Gli indiani* - scrive Fibonacci nel suo *Liber abaci* (cit. in [44]) - *usano nove figure: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 e con queste, assieme al segno 0, che gli arabi chiamano cephirum, scrivono qualsiasi numero. [...] et dovete sapere chel zeuero per se solo non significa nulla, ma è potentia di fare significare.... Et decina o centinaia o migliaia non si puote scrivere senza questo segno 0.*
Occorsero secoli di opposizione e diffidenza prima che gli europei si arrendessero alla *cifra del nulla.*

### 1.2.8 Maya, Inca e Aztechi

Ricordiamo, infine, i Maya, uno dei popoli più evoluti dell'America precolombiana (III-X sec. d.C.), i quali adoperavano un sistema di numerazione vigesimale in notazione posizionale, procedendo quindi, secondo potenze di 20. Come si evince dalla figura 1.18 utilizzavano un puntino per l'unità, una barretta orizzontale per le cinquine, e un simbolo per lo zero che veniva chiamato "ombelico" o più spesso "conchiglia".

Come strumenti per contare i Maya utilizzavano fagioli e legnetti: dall'1 fino al 4 usavano i fagioli con un metodo additivo, invece, quando arrivavano al 5, dato che ogni cinque dita si completa una mano, sostituivano i cinque fagioli con un legnetto disposto in orizzontale, disponendo il tutto dal basso verso l'alto.
Tra le altre civiltà precolombiane, dal punto di vista del percorso storico considerato, si distingue quella degli Incas (XIII-XVI secolo) per il metodo adoperato nella registrazione dei numeri. Si utilizzava, infatti, un sistema di cordicelle annodate detto *quipu* (la cui

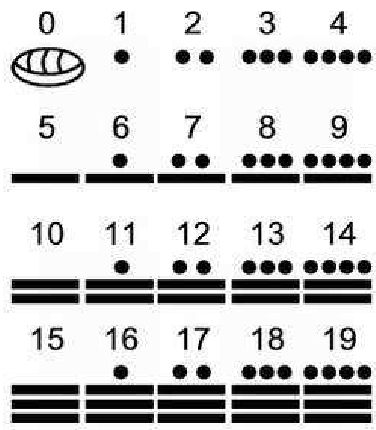


Figura 1.18: Sistema numerico dei Maya [46]

traduzione è, appunto, nodo). Tale sistema era costituito, in particolare, da una corda principale a cui erano legate, a intervalli regolari e da diversi tipi di nodi, cordicelle multicolori, lunghe circa mezzo metro.

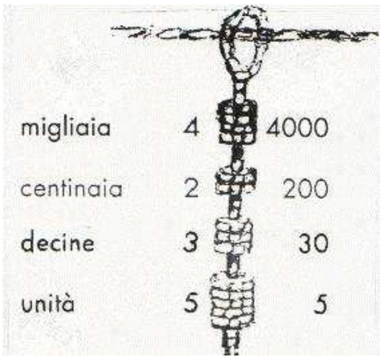


Figura 1.19: Metodo di registrazione dei numeri mediante il quipu [47]

Procedendo dal basso verso l'alto, a ogni livello, corrispondeva una potenza di dieci in ordine crescente, mentre il numero dei nodi praticati ad un certo livello indicava il numero di unità del valore relativo al livello.
Un'applicazione dei quipu si aveva nell'esecuzione dell'addizione: ogni addendo veniva rappresentato su una cordicella e la cordicella sulla quale rappresentare la somma, tenendo conto dei riporti, era legata a quelle singole degli addendi.

## 1.3 Considerazioni generali sull'importanza della storia della matematica

Dai risultati di molteplici ricerche in didattica della matematica si evince che la storia evolutiva del bambino che apprende sembra ripercorrere tutta la storia dello sviluppo del concetto di numero dell'umanità tramite le varie rappresentazioni di esso. Pertanto questo capitolo sottolinea la necessità di non dimenticare la storia del numero quando si studia matematica.

L'approccio storico evidenzia, inoltre, l'aspetto evolutivo del pensiero matematico contro un'opinione diffusa che vede la matematica come una disciplina essenzialmente statica, mettendo in evidenza che spesso furono necessari decenni e perfino secoli di sforzi prima che potessero essere compiuti dei passi avanti significativi. In questo modo, invece, di ricevere l'impressione che gli argomenti siano completamente definiti, ci si accorge che l'obiettivo raggiunto spesso non è che un punto di partenza, che molte lacune devono essere colmate o che le estensioni veramente importanti devono ancora essere create. Le presentazioni levigate dei corsi non riescono a descrivere le lotte del processo creativo, le frustrazioni e la lunga e ardua via che i matematici devono percorrere prima di raggiungere una struttura sufficientemente grande e solida. Una volta diventato consapevole di ciò, lo studente non ha soltanto compreso meglio lo svolgimento dei fatti, ma ha acquisito anche il coraggio di perseguire con tenacia la soluzione dei propri problemi senza farsi sgomentare dall'incompletezza o dalle manchevolezze del proprio lavoro.

Una tale trattazione, inoltre, offre materiale iconografico che può essere utilizzato nelle classi al fine di rendere lo studio della matematica più stimolante e più vicino alle attività della vita quotidiana.

# Capitolo 2

# Prospettiva didattica

*Se l'esperienza del fare matematica è spesso rappresentata*
*dall'oscillazione tra l'ispirazione mistica dell'eureka*
*e la freddezza del calcolo del computer,*
*per me rappresenta, invece, la possibilità di restare innamorato.*
*Edward Frenkel*

## 2.1 Breve rassegna dei programmi scolastici

In questo paragrafo si analizzano, sommariamente, i vari programmi minesteriali (per la matematica) che si sono succeduti nel corso degli anni, ponendo l'attenzione, quasi esclusivamente, sull'argomento del presente lavoro di tesi tralasciando gli obiettivi, le conoscenze e le competenze di tutti gli altri argomenti.
Nei programmi del lontano passato si parla di aritmetica, indicando con questa parola l'insieme di concetti, di tecniche, di problemi legati ai numeri e alle operazioni.
Nel 1907, la *Raccolta completa dei Programmi d'insegnamento e orari* (cit. in [48]) stabilisce la seguente articolazione degli argomenti per il ginnasio:

**Classe prima** Aritmetica pratica: dalla numerazione fino alle frazioni esclusivamente.

**Classe seconda** Frazioni ordinarie e decimali. Sistema metrico decimale.

Come la *Legge Casati* del 1859, secondo la quale la matematica nei primi tre anni del ginnasio (corrispondenti all'incirca alle tre classi dell'odierna scuola secondaria di I grado) ha un ruolo marginale, anche la *Riforma Gentile* del 1923 non riconosce valore formativo alla scienza. Il programma del 1923 risulta ancora un programma d'esame concepito esclusivamente per accertare l'apprendimento di nozioni e non per contribuire al processo formativo dei giovani.
Nella Legge 16 giugno 1977, n. 348 si legge, all'Articolo 1 (cit. in [48]):
*" [...] L'insegnamento di matematica, osservazioni ed elementi di scienze naturali assume la denominazione di scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali.*
Si assiste così a una svolta decisiva nella visione della matematica come disciplina scolastica e nel considerare l'alunno come soggetto centrale di apprendimento: i programmi fanno riferimento ai contenuti finalizzandoli all'educazione e allo sviluppo cognitivo dello studente, il quale attraverso la comprensione e l'interiorizzazione dei concetti fondamentali delle discipline, pone le basi per gli apprendimenti futuri.
Nei Programmi della scuola media del 1979, infatti, nel capitolo intitolato *"Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali"* vi è una parte denominata "Indicazioni per la matematica" suddivisa a sua volta in "Obiettivi, Contenuti, Suggerimenti metodologici, Orientamenti per la *lettura* dei contenuti".
Gli aspetti dei Programmi del 1979 e del 1985 sono stati sviluppati con continuità nelle Indicazioni Nazionali del 2004 e nelle Indicazioni per il Curriculo del 2007 (per la scuola dell'infanzia e il primo ciclo d'istruzione); entrambe sostituite dalle Indicazioni Nazionali per il curriculo del 2012, un testo di riferimento unico per tutte le scuole autonome.

Nel documento [49] si legge:

**Competenze al termine della scuola primaria**

Riconoscere e utilizzare rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...).

**Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola primaria**

I sistemi di numerazione.
Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla

retta.
Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, rappresentarli sulla retta ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure.

**Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria**

I sistemi di numerazione.
Utilizzare i numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.
Conoscere sistemi di notazioni dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi o culture diverse dalla nostra.

**Obiettivi di apprendimento al termine della scuola secondaria di primo grado**

Il sistema di numerazione decimale posizionale e altri sistemi di numerazione.
Leggere, confrontare numeri decimali finiti.
Operare con i numeri decimali finiti utilizzando i consueti algoritmi scritti.
Convertire numeri naturali in sistemi di numerazione non posizionali.
Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale in diversi modi, essendo consapevoli di vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni.

Nel documento [50] degli *Assi culturali* per la scuola secondaria di secondo grado si legge:

**Abilità**

Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici.
Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire da una all'altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni, ...).

Nel 1999 l'Unione Matematica Italiana (UMI) ha diffuso una nuova edizione del "Syllabus di Matematica", molto più estesa ed elaborata della precedente, redatta quindici anni prima. Con "Syllabus di Matematica" si intende una specie di manifesto delle conoscenze e abilità minime indispensabili per affrontare un corso di laurea con elevati contenuti

matematici; si rivolge, quindi, principalmente agli allievi degli ultimi anni della scuola secondaria di secondo grado che intendono mettere alla prova le proprie doti individuali e le conoscenze apprese in vista di una possibile, prossima, iscrizione ad una Facoltà scientifica.
Il Syllabus si compone di cinque “temi” illustrati nel primo capitolo; ognuno dei temi è suddiviso in una sezione intitolata “sapere”, nella quale si elencano le conoscenze minime necessarie per poter frequentare con profitto un corso di matematica a livello universitario; e in un’altra sezione, intitolata “saper fare”, nella quale si elencano le capacità operative collegate.
Nel **Tema 1: strutture numeriche; aritmetica** si legge [51]:

**Sapere** Rappresentazione dei numeri come allineamenti con virgola, finiti o periodici. *Basi numeriche.

**Saper fare** *Saper rappresentare un numero naturale in basi diverse.

*Osservazione* 1. L’asterisco sta ad indicare un argomento che viene in genere nuovamente trattato nei corsi universitari e la cui conoscenza non è quindi da considerarsi un prerequisito, anche se tuttavia può essere d’aiuto.

Osservando quanto stabilito nella *Raccolta completa dei Programmi d’insegnamento* del 1907 si può concludere che la trattazione dell’argomento della presente tesi è limitata alle sole prime due classi del ginnasio; mentre nell’odierna organizzazione scolastica vi è una distribuzione spaziale molto più ampia e una maggiore attenzione all’apprendimento delle varie nozioni al fine di rendere lo studente il più possibile un partecipante attivo in questo percorso continuo, in cui l’interiorizzazione dei concetti fondamentali e la riflessione che ne dovrebbe derivare pongono solide basi per apprendimenti futuri.

## 2.2 Applicazioni aritmetiche legate ai sistemi numerici

In questo paragrafo si riflette su alcune applicazioni elementari, legate alla numerazione in base dieci, mostrando degli effetti alquanto sorprendenti considerato l'approccio meccanico con cui, generalmente, si opera.

### 2.2.1 Criteri di divisibilità

Dato un sistema posizionale, i criteri di divisibilità sono delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè un numero sia divisibile per un altro, e all'atto pratico, più semplici e brevi dello svolgimento della divisione completa.

**Definizione 2.1.** Sia $m$ un intero non nullo, si dice che $m$ è un *divisore* di $a$ se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $a = k \cdot m$

La divisibilità fra interi può essere trattata anche mediante le congruenze. In linea con i nostri scopi si richiamano la definizione di congruenza modulo un intero $m > 1$ e un risultato che mostra la compatibilità dell'addizione e della moltiplicazione rispetto alla congruenza modulo $m$.

**Definizione 2.2.** Siano $a$ e $b$ due interi e un intero $m > 1$ , detto *modulo*. Si dice che $a$ e $b$ sono *congruenti modulo* $m$, in simboli $a \equiv b \pmod{m}$, se $m$ divide $a - b$.

**Teorema 2.2.1.** *Se* $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $c \equiv d \pmod{m}$, *allora* $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ *e* $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Rileggendo la definizione 2.1 alla luce della definizione 2.2 si può affermare che:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è divisibile per } m \text{ se e solo se risulta } a \equiv 0 \pmod{m}.$$

Se si prende in considerazione il sistema posizionale decimale e si suppone di avere un numero naturale $x$ con la seguente rappresentazione in base dieci (vedi cap. 3)

$$x = a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0, \quad \text{con } a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \quad \text{e } n \geq 0$$

è possibile enunciare alcuni criteri di divisibilità.

**Divisibilità per 3**

Dal teorema 2.2.1 e dall'essere $10 \equiv 1 \pmod 3$, si ha $10^h \equiv 1 \pmod 3$ per ogni $h \geq 0$. Moltiplicando, poi, ambo i membri per $a$ risulta $a \cdot 10^h \equiv a \pmod 3$. Pertanto

$$x = a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0 \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i \pmod 3$$

*$x$ è divisibile per 3, cioè $x \equiv 0 \pmod 3$, se e solo se è divisibile per 3 la somma delle sue cifre*

**Divisibilità per 9**

Analogamente a quanto detto prima, si ha $10^h \equiv 1 \pmod 9$ per ogni $h \geq 0$ e quindi *$x$ è divisibile per 9 se e solo se è divisibile per 9 la somma delle sue cifre.*

**Divisibilità per 2 o 5**

Qualunque numero naturale $x$ si può scrivere come $x = 10n + a_0$, dove $a_0$ è la cifra delle unità e $n \geq 0$. Risultando $10 \equiv 0$ sia modulo 2 che modulo 5 si ha

*$x$ è divisibile per 2 o per 5 se lo è la sua cifra delle unità.*

**Divisibilità per 4 o 25**

Se $x = 100a_2 + 10a_1 + a_0$, poiché $100 \equiv 0$ sia modulo 4 che modulo 25 si ha *$x$ è divisibile per 4 o per 25 se e solo se è divisibile per 4 o per 25 il numero costituito dalle sue ultime due cifre.*

**Divisibilità per $2^n$ o $5^n$**

Generalizzando, se $x$ ha più di $n$ cifre poichè $10^n \equiv 0$ sia modulo $2^n$ che modulo $5^n$, si ha che

*$x$ è divisibile per $2^n$ o per $5^n$ se lo è il numero costituito dalle sue ultime n cifre.*

**Divisibilità per 11**

Dal teorema 2.2.1 e dall'essere $10^0 \equiv 1 \pmod{11}$, e $10^1 \equiv -1 \pmod{11}$, si ottiene, in generale, che le successive potenze di 10 sono congrue a 1 se l'esponente è pari, e congrue a $-1$ se l'esponente è dispari. Pertanto

$$x = a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0 \equiv (-1)^n + \ldots + a_2 - a_1 + a_0;$$

*x è divisibile per 11 se se è divisibile per 11 la somma delle sue cifre prese con segno alterno a partire dall'ultima, che ha segno più.*.

**Divisibilità per 7**

Risulta $10^0 \equiv 1 \pmod 7$, $10^1 \equiv 3 \pmod 7$, $10^2 \equiv 2 \pmod 7$, $10^3 \equiv 6 \pmod 7$, $10^4 \equiv 4 \pmod 7$, $10^5 \equiv 5 \pmod 7$, $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, ...
Le successive potenze di 10 ripetono periodicamente la stessa sequenza: *1,3,2,6,4,5* o, usando le congruenze con interi negativi, *1,3,2,-1,-3,-2.* Pertanto,

$$x = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 2a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 - \ldots \pmod 7$$

*x è divisibile per 7 se*

$$(a_0 - a_3 + a_6 - \ldots) + 3(a_1 - a_4 + a_7 - \ldots) + 2(a_2 - a_5 + a_8 - \ldots) \equiv 0 \pmod 7$$

*Osservazione* 2. Si può generalizzare quanto mostrato e affermare che è possibile cercare un criterio di divisibilità per qualsiasi numero $d$, procedendo nel modo seguente:

- si calcolano i resti $r_0, r_1, r_2, \ldots$ delle rispettive divisioni di $10^0, 10^1, 10^2, \ldots$ per $d$;
- dette $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ le cifre del numero $x$, risulta

$$x \equiv r_0 a_0 + r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n \pmod d.$$

Allora $x$ è divisibile per $d$ se $r_0 a_0 + r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n \equiv 0 \pmod d$
Infine, la periodicità della successione dei resti, assicurata dal fatto che i resti non nulli della divisione per $d$ sono al più $d - 1$, permette di raggruppare opportunamente le cifre.

**Divisibilità per 19**

Il metodo appena esplicitato non è, però, conveniente se la successione dei resti che si ripetono è troppo lunga; per esempio nel caso di $d = 19$ otteniamo una sequenza di 18 resti. In questo caso possiamo procedere osservando che $20 \equiv 1 \pmod{19}$ e considerando che qualsiasi numero $x$ si può scrivere come $x = 10n + a_0$, si ha:

$$2x = 20n + 2a_0 \equiv n + 2a_0 \pmod{19}$$

*$x$ è divisibile per 19 se lo è la somma $n$ delle sue decine e del doppio delle sua unità.*

Ciò che ha consentito, partendo dalla divisibilità di $2x$ per 19, di giungere alla divisibilità di $x$ per 19 è il seguente teorema:

**Teorema 2.2.2.** *Se $a$ divide $b \cdot c$ e $MCD(a, b) = 1$ allora $a$ divide $c$.*

*Osservazione* 3.

- I criteri di divisibilità dipendono dalla base del sistema di numerazione in uso, pertanto, i criteri che si usano sono quelli del sistema posizionale decimale.
  Si considera, ad esempio, il criterio di divisibilità per 2, secondo il quale, in sostanza, un numero naturale è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra è 0, o 2, o 4, o 6, o 8; ma questa affermazione non è vera in ogni base. Essa lo è, infatti, quando si scrivono i numeri in base dieci, ma se si cambia sistema di numerazione questo criterio può diventare falso; come accade, ad esempio, se si scrivono i numeri in base tre: il numero quattro in base tre si scrive 11, è divisibile per due, ma non termina con nessuna delle cifre prima citate e sempre nella stessa base il numero cinque si scrive 12, ma non è divisibile per due.

- Si possono dare criteri anche per altre basi, per i resti delle divisioni (vedi la prova del nove).

- Le cifre in ogni caso devono avere il significato consueto.

*Osservazione* 4.
Come per gli altri criteri, il criterio di divisibilità per 9 fallisce nei sistemi numerici non a base dieci; nel senso che la somma delle cifre non indica più la divisibilità per 9.
Si verifica che nel sistema ottale il criterio di divisibilità visto per 9 in base dieci corrisponde, in realtà, a quello per 7; ad esempio se prendiamo il numero $(777)_{otto}$ diviso per 7 in ottale dà $(111)_{otto}$ con resto zero e sommando le cifre in ottale si ottiene $7+7+7 = 25_{otto}$, le quali sommate nuovamente in ottale danno $2 + 5 = 7_{otto}$ congruo a zero modulo 7. Si

può, dunque, affermare che un numero è divisibile per 7, se nella numerazione ottale le sue cifre sommate danno 7 o multipli di 7.
In generale, in un sistema posizionale in base $b$ si può considerare il criterio di divisibilità per $b-1$ così come di ogni suo sottomultiplo.

### 2.2.2 Prova del nove

Nella sezione precedente si è mostrato, in particolare, che un numero scritto nel sistema decimale sia congruo alla somma delle sue cifre modulo 9; questo consente altresì di dare un'immediata giustificazione della cosiddetta *prova del nove*: un procedimento conosciuto sin dall'antichità il cui scopo è quello di "controllare" l'esattezza di un'operazione elementare (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione fra numeri naturali).

Si mostra il procedimento della prova del nove[1] nel caso della moltiplicazione (fino a qualche anno fa molto utilizzata nelle scuole elementari e medie per sviluppare nello studente un approccio "logico" e un'autonomia nello svolgimento dei compiti):

- Dati due numeri naturali $a$ e $b$ si suppone di calcolare, "a mano", il loro prodotto, che si indica con $p$;
- Si sommano poi le cifre di $a$ e del numero che si ottiene fino ad avere un numero $a_1$ con una sola cifra, con l'avvertenza che se quest'ultimo è 9, venga sostituito con 0;
- Si ripete quanto detto per il numero $b$ e per $p$ , e si indicano i numeri ottenuti rispettivamente, con $b_1$ e con $p_1$;
- Si sommano poi le cifre del numero $a_1b_1$ ottenendo un numero $c$ minore di 9.

Se il risultato $p$, ottenuto inizialmente, è corretto, allora per le precedenti considerazioni, necessariamente accade che $c = p_1$.
D'altra parte, è chiaro che, se si verifica l'ultima uguaglianza, si può soltanto affermare che $p$ differisce per un multiplo di 9 dal risultato reale della moltiplicazione. Tenendo però presente che è abbastanza improbabile sbagliare esattamente per un multiplo di 9,

[1]La base considerata è naturalmente dieci.

se l'esito è positivo, si può dire che la prova del 9, pur non essendo una verifica certa della correttezza dell'operazione, fornisce fiducia nel fatto che i calcoli sono stati svolti in modo corretto.

**Esempio 2.1.** Verificare la correttezza della seguente moltiplicazione:

$$59714 \cdot 24339 = 1453379046$$

Si traccia una tabella nella quale, in alto a sinistra, si scrive il numero ad una sola cifra ottenuto sommando, ripetutamente, le cifre del primo fattore ($5+9+7+1+4=26 \rightarrow 2+6=8$) e, in alto a destra, quello ottenuto ripetendo lo stesso procedimento per il secondo fattore($2+4+3+3+9=21 \rightarrow 2+1=3$):

| | |
|---|---|
| 8 | 3 |
| | |

Successivamente, si moltiplicano i due numeri ora ottenuti ($8 * 3 = 24$) e in basso a sinistra si scrive il numero a una sola cifra ottenuto sommando le cifre del risultato della suddetta moltiplicazione ($2+4=6$):

| | |
|---|---|
| 8 | 3 |
| 6 | |

Infine, in basso a destra si scrive il numero, a una sola cifra, ottenuto sommando le cifre del risultato ipotetico ($1+4+5+3+3+7+9+0+4+6=42 \rightarrow 4+2=6$):

| | |
|---|---|
| 8 | 3 |
| 6 | 6 |

Avendo ottenuto i due numeri in basso uguali, si può dire che la prova del nove ha avuto esito positivo.
Si ricorda che in caso di esito negativo, la moltiplicazione è sicuramente errata.

*Osservazione* 5.
Si può considerare una "prova del $b-1$" in un sistema a base $b$: se $b$ è grande c'è una minore probabilità di ottenere un *falso positivo*, ossia risultato dell'operazione errato nonostante l'esito positivo della prova.

## 2.3 Giochi matematici come strumento didattico

Nella pratica didattica è importante insegnare a pensare, a ragionare, piuttosto che trasmettere contenuti che si dimenticano velocemente; occorre, pertanto, dare più valore al processo che al "risultato numerico"(ottenuto applicando ciecamente le regole studiate), incoraggiando gli alunni nella risoluzione del problema mostrando loro che non esiste un'unica "strada da percorrere ". Bisogna ammettere che, quanto detto, non è facilmente attuabile anche a causa di una certa ostilità nei confronti della materia, considerata noiosa e per niente interessante. Per smentire tutto ciò potrebbe risultare utile l'introduzione di giochi matematici, quest'ultimi possono essere considerati dei problemi con enunciati divertenti e intriganti, che suscitano curiosità e la voglia di fermarsi un po' a pensare. Tale visione inquadra perfettamente il pensiero del famoso esperto di giochi matematici, Martin Gardner: *Ho sempre pensato che il modo migliore per rendere la matematica interessante a studenti e non, sia quello di accostarla come fosse un gioco. [...] Sicuramente il modo migliore per tenere sveglio uno studente è quello di presentargli giochi matematici abbastanza complicati, puzzles, trucchi "magici", giochi di prestigio, paradossi, modelli, giochi di parole, insomma tutte quelle cose che gli insegnanti pedanti cercano di evitare perché sembrano frivole.*[8]
I giochi e la matematica hanno molto in comune: entrambi forniscono ai ragazzi un insieme di strumenti che potenziano e arricchiscono le loro strutture mentali e rendono loro possibile esplorare e interpretare il mondo reale.

### 2.3.1 Giochi di strategia

I giochi si possono classificare in modi diversi ma, in relazione alla matematica, un elemento che permette di distinguere due grandi gruppi di giochi è l'intervento o meno del caso, ottenendo rispettivamente i *giochi d'azzardo* e i *giochi di strategia*. Quest'ultimi sono detti anche giochi a informazione completa, poiché in qualunque momento della partita è possibile conoscere tutte le giocate possibili e le loro conseguenze (almeno teoricamente). In alcuni casi è possibile determinare una *strategia vincente*, ossia un insieme di condizioni che permettono a uno dei giocatori (generalmente i giocatori sono due) di riconoscere quali configurazioni, ottenibili nel corso di una partita, debbano considerarsi vincenti e quali perdenti, in base alle seguenti definizioni:

- una configurazione è perdente , se determina la sconfitta immediata del giocatore di turno o se gli consente di effettuare solo mosse che generano configurazioni favorevoli all'avversario fino alla sua vittoria in un numero finito di passi;

- una configurazione è vincente, se determina la vittoria immediata del giocatore di turno o se gli consente di effettuare almeno una mossa che generi una configurazione sfavorevole all'avversario fino alla sua sconfitta in un numero finito di passi.

L'esistenza di una strategia vincente presuppone, quindi, che il gioco termini, dopo un numero finito (non assolutamente controllabile) di mosse, con la vittoria di uno dei due giocatori.
Tra i giochi di strategia ricordiamo il gioco degli scacchi, del go, del mancala, del tris, del NIM etc.

**Un esempio: Il NIM**

Si analizza di seguito il gioco del NIM (vedi [20]) la cui strategia vincente, ideata dal matematico statunitense Charles Leonard Bouton, si basa sulla rappresentazione dei numeri nel sistema binario.
Si tratta di un gioco per il quale servono dei gettoni, monete, sassi o carte da gioco, ma generalmente si usano fiammiferi che vengono messi su diverse file.
I due giocatori, a turno, prelevano una parte o tutti i fiammiferi di una fila, e soltanto di una fila: vince chi riesce a prendere l'ultimo fiammifero, oppure, in un'altra versione, perde il giocatore al quale rimane l'ultimo fiammifero.
Nella versione più comune, quella mostrata nel film del registra francese Alain Resnais *L'anno scorso a Marienbad* (1961) (cit. in [21]), sono previsti sedici fiammiferi, disposti su quattro file rispettivamente di 1, 3, 5 e 7 fiammiferi. Pitoëff, il "giocatore che non

perde mai", continua a sfidare Albertazzi (figura 2.1) in questo gioco, davanti agli occhi di camerieri e clienti dell'albergo che li osservano immobili come statue, esclamando di tanto in tanto una possibile spiegazione: "Chi fa la prima mossa vince sempre . . . Si deve prendere sempre un numero pari di fiammiferi . . . il più piccolo numero intero dispari. E' una serie logaritmica. Si sceglie ogni volta una riga diversa, si divide per tre . . . sette per sette quarantanove". Frammenti di un discorso che non aiutano certo a capire il gioco.

Figura 2.1: Giorgio Albertazzi e Sacha Pitoëff in un fotogramma del film *L'anno scorso a Marienbad (1961)*, in [33]

Il nome NIM deriva probabilmente dalla parola *nim* che nell'inglese antico significa *prendere*, *togliere*. Un'altra curiosa interpretazione consiste nell'applicare una simmetria centrale alla parola NIM ottenendo la parola WIN, che in inglese significa *vincere*. La strategia per vincere al gioco, valida per un numero qualsiasi di file e di fiammiferi, consiste nell'esprimere il numero dei fiammiferi, di ciascuna fila, in base due e di incolonnare le corrispondenti unità. Se nella configurazione iniziale la somma di tutte le cifre di ciascuna colonna è pari, esiste una strategia vincente per il secondo giocatore che consiste nel prendere un numero di fiammiferi tale da lasciare tutte le colonne con somma pari; mentre se la somma delle cifre di almeno una colonna è dispari esiste la strategia vincente per il primo giocatore dato che nella sua giocata può lasciare tutte le colonne con somma pari fino alla configurazione finale, in cui tutti i numeri saranno zero e quindi tutte le colonne avranno somma pari.

Per fissare meglio il procedimento si considera la versione mostrata nel suddetto film stabilendo che vince la partita il giocatore che ritira l'ultimo fiammifero.

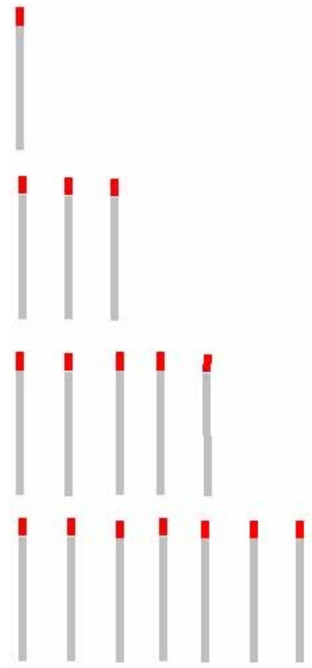

Figura 2.2: Versione del NIM, con 1,3,5,7 fiammiferi disposti su quattro file, in [33]

Si ha la seguente conversione in binario:

$$\begin{aligned} (1)_{dieci} &\rightarrow (1)_{due} \\ (3)_{dieci} &\rightarrow (11)_{due} \\ (5)_{dieci} &\rightarrow (101)_{due} \\ (7)_{dieci} &\rightarrow (111)_{due} \end{aligned}$$

Dato che nella configurazione iniziale la somma delle cifre di ciascuna colonna è pari, il primo giocatore non potrà vincere se il secondo giocatore conosce e mette in atto la strategia vincente. Il primo giocatore, qualsiasi giocata faccia, sarà costretto a lasciare almeno una colonna dispari. Ad esempio, supponendo che elimini un fiammifero dal gruppo in cui ce ne sono tre, si avrà:

$$\begin{aligned}
(1)_{dieci} &\rightarrow \quad (1)_{due}\\
(2)_{dieci} &\rightarrow \quad (10)_{due}\\
(5)_{dieci} &\rightarrow \quad (101)_{due}\\
(7)_{dieci} &\rightarrow \quad (111)_{due}
\end{aligned}$$

Al secondo giocatore, quindi, basterà modificare un numero in modo che tutte le colonne abbiano somma pari, fino alla posizione finale. Nell'esempio, basterà togliere un solo fiammifero da qualunque fila eccetto dalla seconda.

### 2.3.2 Giochi di prestigio

In classe, può risultare molto efficace l'esecuzione di qualche gioco di prestigio basato su un ragionamento matematico. Se si esegue un gioco di questo tipo, senza spiegarne il trucco, ma invitando gli alunni a scoprirlo, l'innata tendenza umana ad andare nel profondo della questione per risolvere il mistero, dovrebbe spingerli ad applicarsi con impegno in tale ricerca. In questa fase, tra l'altro, dovrebbero essere indotti a collegare in maniera più concreta i concetti astratti con l'esperienza pratica, dovendo necessariamente interpretare in chiave matematica ogni singolo passo dell'esibizione alla quale hanno assistito.

#### Il magico 9

Fra gli innumerevoli giochi di "magia" matematica se ne considera uno denominato *Il magico 9* (vedi [23]). Tale gioco consiste, inizialmente, nello scrivere il numero 9 su un bigliettino, conservato in una busta durante tutta l'esecuzione del gioco, senza mostrarlo al pubblico. Successivamente si forniscono agli spettatori le seguenti istruzioni (specificando che ognuno di loro dovrà eseguirle in modo autonomo):

1. pensare a un numero intero composto da due sole cifre (ad esempio: 75);
2. eseguire la somma di queste due cifre ($75 \rightarrow 7 + 5 = 12$);
3. sottrarre il risultato così ottenuto dal numero scelto inizialmente ($75 - 12 = 63$);

4. se come risultato si è ottenuto un numero composto da una sola cifra ci si ferma; altrimenti, occorre eseguire la somma delle sue cifre ($63 \rightarrow 6 + 3 = 9$) e il procedimento risulta così concluso.

A questo punto, si chiede a ogni spettatore di esclamare ad alta voce il risultato ottenuto. Tutti gli spettatori diranno in coro: "9"! Lo stupore aumenterà sempre più fino al momento culmine in cui si aprirà la busta e si mostrerà che la previsione fatta risulta corretta.
Il trucco c'è anche se non c'è, in quanto la spiegazione del perché ciò avvenga sempre risiede nella caratterizzazione di un qualsiasi numero naturale $N$ di due cifre: $N$ è composto da $X$ decine e $Y$ unità, ossia $N = 10X + Y$. Eseguendo le due operazioni richieste, si ottiene, quindi:

$$N - (X + Y) = 10X + Y - X - Y = 9X.$$

Il risultato è, di conseguenza, sempre un multiplo di 9. La conclusione discende dal criterio di divisibilità per 9 in base al quale, in sostanza, la somma delle cifre di un multiplo di 9 è sempre uguale a 9 (o a un multiplo di 9 di minor valore).

### La cifra trasferita

Il titolo di questa sottosezione si riferisce a un altro gioco di "magia matematica" (vedi [22] e [25]). Quest'ultimo basato sulla numerazione binaria, in particolare sulla conversione in binario di un numero naturale $n > 1$ scritto in decimale. Un metodo pratico per riuscire ad effettuare mentalmente questa operazione può essere schematizzato nel seguente modo:

1. Si individua la più grande potenza $2^k$ che non supera $n$ e si assegna un 1 alla $k$-esima posizione, da destra iniziando da zero, nella notazione binaria;

2. Si calcola una quantità $r = n - 2^k$;

3. Se $r = 0$, si passa al punto successivo; altrimenti, si torna al punto 1) ponendo $n = r$;

4. Si ottiene la codifica binaria di $n$ assegnando degli zeri a tutte le eventuali posizioni corrispondenti a potenze di 2 (inferiori a $n$) non coinvolte in precedenza.

Il gioco in questione, ideato dallo statunitense Mel Stover, necessita di un mazzo di carte e dell'interazione del pubblico per aggiungere quel pizzico di casualità che vada a smentire la credenza di aver prestabilito il tutto. Si chiede, infatti, a uno spettatore di dire quante carte desidera che vengano prelevate. Si pone, mostrandone la figura, una carta sopra l'altra finché non si giunge a contarne una quantità uguale a quella proposta. Le carte così selezionate si ricompongono, senza mescolarle, in un nuovo mazzetto e le altre vengono riposte.
A questo punto, si eseguono delle manovre (fig.2.3):

1. si sposta una carta da sopra a sotto il mazzetto;

2. si scarta la carta successiva.

Si ripetono queste due mosse finché resta in mano una sola carta.

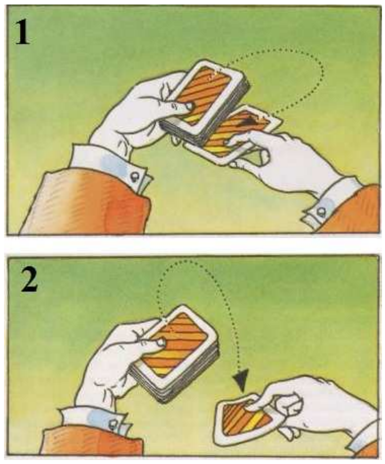


Figura 2.3: Procedimento per giungere a una sola carta, in [34]

Prima di effettuare questo procedimento, che terminerà dopo un numero finito di passi, si dichiara al pubblico che riuscirà a prevedere quale sarà l'ultima carta. Di fronte allo stupore nel vedere che la previsione fatta sia corretta (salvo "imprevisti di conto") viene naturale chiedersi il perché ciò avvenga o, più esplicitamente il "come ha fatto" l'esecutore del gioco. Quest'ultimo, in realtà, ha solo effettuato una serie di operazioni di carattere aritmetico, in dettaglio:

- Ha convertito in binario il numero corrispondente alla quantità di carte dichiarata dallo spettatore (ad esempio per $n = (19)_{dieci}$ si ha $(10011)_{due}$);
- Ha spostato in fondo al numero ottenuto la sua prima cifra (da $(10011)_{due}$ si ricava $(00111)_{due}$ ovvero $(111)_{due}$ in quanto si scartano gli zeri non significativi);
- Ha convertito in decimale questo nuovo numero binario (da $(111)_{due}$ si ottiene $(7)_{dieci}$);
- Ha memorizzato la carta che occupa, nella prima fase del conteggio delle carte, la posizione corrispondente al valore decimale ottenuto nel passo precedente (nell'esempio considerato, la settima posizione).

Nella fase del procedimento di eliminazione delle carte l'esecutore non dovrà fare altro che creare suspense e osservare gli occhi increduli e curiosi degli spettatori.
Ovviamente, esiste una spiegazione matematica di questo apparente trucco che può essere esposta come segue:

- togliere la prima cifra di un numero binario $n$ (sicuramente un 1) equivale a sottrarre da $n$ la maggiore potenza di 2 non superiore a $n$; ovvero equivale a calcolare $n - 2^k$ (con $2^k \leq n < 2^{k+1}$);
- spostare di una posizione verso sinistra tutte le cifre del numero risultante (per fare spazio a quella da inserire in fondo) equivale a moltiplicare per 2 il valore precedente; ovvero, equivale a calcolare $2(n - 2^k)$;
- aggiungere un 1 in fondo allo sviluppo, equivale a sommare un 1 al valore precedente; ovvero, equivale a calcolare $2(n - 2^k) + 1$.

Questo ragionamento ci consente di stabilire che, assegnate $n$ carte, il numero $P$ della posizione da prendere in considerazione è dato dalla formula:

$$P = 2(n - 2^k) + 1; \quad (2^k \leq n < 2^{k+1}).$$

Ripetendo il procedimento all'incontrario si scartano tutte le carte, meno quella memorizzata.

# Capitolo 3

# Sistemi di numerazione ordinari e generalizzazioni

*La matematica, che ci insegna a fare astrazione*
*dalla materia, dal moto e dal tempo, ci rende capaci*
*di intendere e contemplare le specie intellegibili.*
*Giordano Bruno*

## 3.1 Rappresentazione dei numeri interi

I risultati mostrati nel presente paragrafo sono tratti da Capelo, Ferrari, Padovan [5].

**Definizione 3.1.** Un *sistema di numerazione* $S$ è un qualunque insieme infinito di numeri naturali, $S = \{u_o, u_1, u_2, \ldots\}$, valori di una successione strettamente crescente:

$$u_n < u_{n+1}; \;\; \textit{per ogni } n \geq 0; \textit{ inoltre } u_0 = 1. \tag{3.1}$$

*Osservazione* 6. Se $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ è intero, per ogni $n$, il sistema $S$ si dice *semplice*, in caso contrario *complesso*: se $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = b$ è costante il sistema si dice a *base costante.*

**Definizione 3.2.** Sia $S = \{u_o, u_1, u_2, \ldots\}$ un sistema di numerazione e $x \geq 1$ un numero naturale. Si chiama *rappresentazione* di $x$ nel sistema $S$ una $(n + 1) - pla$ ordinata di numeri naturali $R = (q_0, \dots, q_n)$ tali che

$$x = q_n u_n + \ldots + q_0 u_0 \quad q_n \neq 0 \tag{3.2}$$

$$0 \leq q_i < \frac{u_{i+1}}{u_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{3.3}$$

*Osservazione* 7. La rappresentazione è detta *fondamentale* se

$$q_i u_i + \ldots + q_0 u_0 < u_{i+1} \quad \textit{per ogni } i = 0, 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

**Esempio 3.1.** Nel nostro sistema decimale ($u_0 = 1$, $u_1 = 10$, $\dots$, $u_n = 10^n, \dots$), il numero 546 può scriversi nella forma (3.2) nel modo seguente:

$$546 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1$$

e quindi una sua rappresentazione (fondamentale, come è facile verificare) è $R = (6, 4, 5)$

**Teorema 3.1.1** (Teorema di rappresentazione)**.**
*Sia $S = \{u_o, u_1, u_2, \dots\}$ un sistema di numerazione e $x \geq 1$ un numero naturale. Allora $x$ ammette una ed una sola rappresentazione fondamentale in $S$.*

*Dimostrazione. Esistenza.*
Per $x = 1$ il teorema è facilmente dimostrabile in quanto si può scrivere

$$1 = u_0 \cdot 1 \quad \text{e} \quad q_0 = 1 < \frac{u_1}{u_0} = u_1.$$

Sia $x > 1$ un numero intero e sia $n \geq 0$ tale che: $u_n \leq x < u_{n+1}$[1].
Si divide $x$ per $u_n$ ottenendo, per il teorema della divisione, il quoziente $q_n$ ed il resto $r_n$; si itera poi in procedimento dividendo $r_n$ per $u_{n-1}$, ottenendo il quoziente $q_{n-1}$ e il resto $r_{n-1}$, e così via fino ad ottenere resto nullo. Quanto detto può essere così schematizzato:

[1] $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione strettamente crescente, allora $u_n \to +\infty$ e quindi $u_n \leq x < u_{n+1}$ con $n = \max\{i;\ u_i \leq x\}$

$$\begin{cases} x = q_n u_n + r_n \\ r_n = q_{n-1} u_{n-1} + r_{n-1} \\ \dots \\ r_{i+1} = q_i u_i + r_i \\ \dots \\ r_2 = q_1 u_1 + r_1 \\ r_1 = q_0 u_0 = q_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Sostituendo $r_1$ nell'espressione di $r_2$, $r_2$ in quella di $r_3$,..., $r_n$ in quella di $x$, otteniamo

$$x = q_n u_n + \ldots + q_0 u_0 \tag{3.6}$$

Lo stesso procedimento di sostituzione permette di ottenere

$$r_{i+1} = q_i u_i + \ldots + q_0 u_0;\ (i = 0, \ldots, n). \tag{3.7}$$

Sapendo che $0 \leq r_i < u_i$ $(i = 0, \ldots, n)$, da 3.7 si ha

$$q_i u_i + \ldots + q_0 u_0 < u_{i+1};\ (i = 0, \ldots, n), \tag{3.8}$$

e in particolare $q_i u_i < u_{i+1}$. Quest'ultima condizione insieme con 3.6 permettono di concludere che $x$ ammette una rappresentazione $R = (q_0, \ldots, q_n)$ in $S$ e che questa è una rappresentazione fondamentale (come risulta da 3.8)

*Unicità.*

Si suppone per assurdo che $x$ ammetta nel sistema $S$ due rappresentazioni fondamentali, $R = (q_0, \ldots, q_n)$ e $R' = (q'_0, \ldots, q'_m)$. Possiamo supporre $m = n$ perché in caso contrario, se fosse ad esempio $m > n$, considerando la 3.4, avremmo da una parte la disuguaglianza $x = q_n u_n + \ldots + q_0 u_0 < u_{n+1}$ e dall'altra parte $x = q'_m u_m + \ldots + q'_n u_n + \ldots + q'_0 u_0 \geq q'_m u_m \geq u_m \geq u_{n+1}$. Si ha pertanto

$$x = q_n u_n + \ldots + q_0 u_0$$

$$x = q'_n u_n + \ldots + q'_0 u_0$$

e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$0 = (q_n - q'_n) u_n + \ldots + (q_0 - q'_0) u_0.$$

Sia ora $i$ il più grande intero $\leq u$ tale che $q_i \neq q'_i$ e per fissare le idee si suppone $q_i < q'_i$. Si ha pertanto

$$0 = (q_i - q'_i)u_i + (q_{i-1} - q'_{i-1})u_{i-1} + \ldots + (q_0 - q'_0)u_0$$

ovvero

$$(q'_i - q_i)u_i = (q_{i-1} - q'_{i-1})u_{i-1} + \ldots + (q_0 - q'_0)u_0$$

e siccome $q_i < q'_i$ risulta

$$u_i < (q'_i - q_i)u_i = (q_{i-1} - q'_{i-1})u_{i-1} + \ldots + (q_0 - q'_0)u_0 \leq q_{i-1}u_{i-1} + \ldots + q_0u_0,$$

che contraddice la 3.4.
L'assurdo è sorto dall'aver supposto che $x$ ammetta in $S$ due rappresentazioni fondamentali diverse, pertanto è provata l'unicità. □

*Osservazione* 8. La dimostrazione è costruttiva poiché l'algoritmo 3.5 fornisce la rappresentazione del numero nel sistema di numerazione dato.

**Proposizione 3.1.2.** *Sia* $S = \{u_o, u_1, u_2, \ldots\}$ *un sistema di numerazione e* $x \geq 1$ *un numero intero. Se* $S$ *è semplice ogni numero naturale* $\geq 1$ *ha una rappresentazione unica, che è quella fondamentale*

*Dimostrazione.* Occorre dimostrare che, nelle ipotesi del teorema, la 3.3 implica la 3.4. Si procede per induzione. Per $i = 0$ l'affermazione è vera in quanto da 3.3 risulta $q_0u_0 < u_1$, che è la 3.4 con $i = 0$. Si suppone allora che la 3.4 sia vera per $i = k$, ossia

$$q_ku_k + \ldots + q_0u_0 < u_{k+1},$$

sommando, poi, $q_{k+1}u_{k+1}$ ad ambo i membri della disequazione si ottiene

$$q_{k+1}u_{k+1} + q_ku_k + \ldots + q_0u_0 < u_{k+1} + q_{k+1}u_{k+1}.$$

A questo punto basta dimostrare che

$$u_{k+1} + q_{k+1}u_{k+1} \leq u_{k+2}. \tag{3.9}$$

Questo è di facile verifica in quanto, essendo $S$ un sistema semplice, il rapporto $\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}$ è un intero che risulta, dalla 3.3, strettamente maggiore del numero naturale $q_{k+1}$, pertanto si ha

$$1 + q_{k+1} \leq \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}},$$

che è la 3.9 dopo aver diviso entrambi i membri per $u_{k+1}$. $\square$

In un sistema complesso, invece, non è in generale possibile dimostrare che la 3.3 implica la 3.4, ovvero che ogni rappresentazione è la rappresentazione fondamentale.
In alcuni degli esempi di sistemi di numerazione che seguono si fa vedere, infatti, che in un sistema complesso i numeri naturali possono ammettere più di una rappresentazione: quella fondamentale, che si può ottenere con l'algoritmo 3.5, ed eventualmente altre, che si ottengono in un altro modo.

## Esempi di sistemi di numerazione

### Sistema decimale

$u_0 = 1,\ u_1 = 10,\ u_2 = 100,\ \ldots\ u_n = 10^n,\ \ldots$
Esempio banale di un sistema semplice.

### Sistema della decadi

$u_0 = 1,\ u_1 = 10,\ u_2 = 20,\ \ldots\ u_n = n \cdot 10,\ \ldots \quad (n \geq 1)$
Si tratta di un sistema complesso dato che $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}$ non è intero, per ogni $n > 1$.
In tale sistema esistono numeri con più di una rappresentazione, ad esempio il numero 55 può scriversi come $55 = u_5 + 5u_0$ e quindi ammette la rappresentazione $R = (5, 0, 0, 0, 0, 1)$ fondamentale dato che $u_6 = 60 > u_5 + 5u_0$, ma si può anche scrivere $55 = u_4 + u_1 + 5u_0$ o $55 = u_3 + u_2 + 5u_0$ e avere quindi le rispettive rappresentazioni, non fondamentali, $R' = (5, 1, 0, 0, 1)$ e $R'' = (5, 0, 1, 1)$.

### Sistema di Fibonacci

$u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ \ldots\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ \ldots$

Poiché $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ non è intero, per ogni $n > 0$, il sistema è complesso. Un numero può ammettere più rappresentazioni non fondamentali, in particolare è non fondamentale ogni rappresentazione che contenga due cifre 1 consecutive. Infatti, se $q_{i-1} = q_{i-2} = 1$ allora

$$q_{i-1}u_{i-1} + q_{i-2}u_{i-2} + \ldots + q_0u_0 \geq u_{i-1} + u_{i-2} = u_i$$

e ciò contraddice la 3.4.
Il sistema di Fibonacci è *binario* nel senso che usa solo le cifre 0, 1. Infatti:

$$0 \leq q_i < \frac{u_{i+1}}{u_i} = \frac{u_i + u_{i-1}}{u_i} < \frac{u_i + u_i}{u_i} = 2$$

**Sistema fattoriale**

$u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 6,\ u_3 = 24,\ \ldots\ u_n = (n+1)!,\ \ldots$
Poiché $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n + 2$ è intero, per ogni $n$, il sistema è semplice. Ogni numero $x$ ha una unica rappresentazione (quella fondamentale):

$$x = \sum_{i=0}^{n} q_i(i+1)! \quad \text{con } q_i \in \mathbb{N},\ q_i \leq i+1$$

## Sistemi di numerazione polinomiali

Se si considera un numero intero $b$ strettamente maggiore di 1 e si prende la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $u_n = b^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene un caso particolare di sistema di numerazione: il *sistema di numerazione polinomiale*. Per tale sistema valgono, ovviamente, tutti i risultati suddetti.

**Definizione 3.3.** Il *sistema di numerazione polinomiale* $S = \{1, b, b^2, \ldots, b^n, \ldots\}$ si rappresenta con una coppia $(b, C)$, dove $b > 1$ è un intero che prende il nome di *base* del sistema, e $C = \{q \in \mathbb{N};\ q < b\} = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ è l'insieme delle cifre.
Più in generale un sistema di numerazione è a *base costante* se consiste in una coppia $(b, C)$ con $|b| > 1$ e $C$ insieme finito di numeri (cifre) contenente anche 0.
Si chiama *rappresentazione* di un numero naturale $x$, nel presente sistema $S$, la $(n+1)-$*pla* ordinata $(q_0, \ldots, q_n)_b$ tali che

$$x = q_nb^n + \ldots + q_0b^0;\ \ q_n \neq 0\,(n \geq 0)\ e\ q_i \in C\ (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.10}$$

Il sistema di numerazione polinomiale è un sistema semplice dato che $\frac{b^{n+1}}{b^n} = b$, quindi dalla proposizione 3.1.2 segue che ogni numero naturale ha un'unica rappresentazione, quella fondamentale.

Nel seguito, adottando un metodo di rappresentazione posizionale con zero, si identifica la rappresentazione $(q_0, \ldots, q_n)_b$ con l'allineamento $(q_n, \ldots, q_0)_b$. I numeri interi negativi sono rappresentati facendo precedere dal segno meno $(-)$ le rappresentazioni dei loro opposti; lo *zero* è rappresentato in ogni sistema con la cifra 0.

*Osservazione* 9 (Nomenclatura).
Il generico sistema di numerazione polinomiale con base $b$ viene chiamato sistema di numerazione $b-$*esimale*, (o $b-$*adico* o $b-$*ario*.) In particolare, i sistemi di numerazione con base $b = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 15, 16$ vengono denominati, con termini derivati dai numerali distributivi latini o greco-latini, *binario, ternario, quaternario, quinario, senario, ottale, quinidenario e esadecimale*; e i sistemi di numerazione con base $b = 10, 12, 20, 60$ vengono denominati, con termini derivati dai numerali ordinali latini, *decimale, duodecimale, vigesimale e sessagesimale.*

**Cambio di base per i numeri interi**

Sia $x > 1$ un numero intero e siano $(a_n, \ldots, a_0)_b$ e $(\alpha_\nu, \ldots, \alpha_0)_\beta$ gli allineamenti associati alle sue rappresentazioni nei due sistemi polinomiali di base $b$ e $\beta$, rispettivamente. Si pone il seguente problema, noto come *problema di cambio di base (da b a $\beta$)*: supponendo di conoscere gli $a_i$ determinare gli $\alpha_i$.

Nella presente sezione si mostrano, sostanzialmente, due metodi per risolvere tale problema, facendo riferimento ai sistemi d'uso comune come quello *binario* (cifre: 0,1 detti *bit* nel linguaggio informatico), *decimale* (cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), *ottale* (cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7), *duodecimale* (cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B), ed *esadecimale* (cifre: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F).

**Primo metodo**

Per passare da $(a_n, \dots, a_0)_b$ a $(\alpha_\nu, \dots, \alpha_0)_\beta$ si può calcolare la somma $\sum_{i=0}^n a_i b^i$ con l'aritmetica della base $\beta$, dopo aver opportunamente espresso gli $a_i$ e $b$ nella base $\beta$, il che si può fare usando una tavola di conversione, come la seguente:

| $base2$ | $base8$ | $base10$ | $base12$ | $base16$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 11 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 100 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 101 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 110 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 111 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 1000 | 10 | 8 | 8 | 8 |
| 1001 | 11 | 9 | 9 | 9 |
| 1010 | 12 | 10 | $A$ | $A$ |
| 1011 | 13 | 11 | $B$ | $B$ |
| 1100 | 14 | 12 | 10 | $C$ |
| 1101 | 15 | 13 | 11 | $D$ |
| 1110 | 16 | 14 | 12 | $E$ |
| 1111 | 17 | 15 | 13 | $F$ |
| 10000 | 20 | 16 | 14 | 10 |

**Esempio 3.2.**

$(B2A)_{dodici} \to (?)_{otto}$ Si ha che

$$(B2A)_{dodici} = (B \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + A)_{dodici} = (13 \cdot 14^2 + 2 \cdot 14 + 12)_{otto},$$

ottenuto utilizzando la tabella di conversione. Pertanto, $(B2A)_{dodici} = (3122)_{otto}$

*Osservazione* 10.

Di notevole importanza è il passaggio da un allineamento in base $b$ a un allineamento in

base $\beta = b^k$, con raggruppamenti di $k$ cifre, in base $b$, che danno luogo a una sola cifra, in base $\beta$; viceversa una sola cifra, nella base $\beta$, da luogo a $k$ cifre, in base $b$.
Si considerano, ad esempio, le basi potenze di 2, in particolare l'ottale e l'esadecimale.
Per passare dalla base 8 alla base 2 basta scrivere, partendo da destra, le cifre ottali in base 2 usando terne di cifre binarie; riprendendo l'esempio 3.2 si ha:

$$(3122)_{otto} = (\underbrace{011}_{3}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{010}_{2}) = (11001010010)_{due};$$

e viceversa, per passare dalla base 2 alla base 8, basta raggruppare le cifre binarie a tre a tre, a partire da destra e aggiungendo zeri a sinistra se necessario, e convertire poi le terne in cifre ottali.
Per passare dalla base 2 alla base 16 si procede in modo analogo, con blocchi di quattro cifre binarie; e viceversa, per passare dalla base 2 alla base 16, basta raggruppare le cifre binarie a quattro a quattro, aggiungendo zeri a sinistra se necessario, e convertire poi le quaterne in cifre esadecimali. Ad esempio:

$$(11001010010)_{due} = (\underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{0010}_{2}) = (652)_{sedici}.$$

*Osservazione* 11.
Pur considerando basi diverse, quando è possibile si rappresentano le cifre allo stesso modo; anche se in determinati casi si preferisce rappresentarle mediante blocchi di altre cifre (come mostrato nell'esempio dell'osservazione precedente).

**Secondo metodo**

Generalmente la base $\beta$ non è quella decimale e considerata la scarsa dimestichezza nel lavorare con l'aritmetica di tale base, si può passare prima in base 10 e successivamente usare l'algoritmo 3.5, in linea con il seguente schema:

$$(x)_b \to (x')_{dieci} \to (x'')_\beta.$$

**Esempio 3.3.** $(B2A)_{dodici} \to (?)_{otto}$ equivale a $(B2A)_{dodici} \to (?)_{dieci} \to (?)_{otto}$

$$(B2A)_{dodici} = (B \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + A)_{dodici} = (11 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 + 12)_{dieci} = (1618)_{dieci}$$

Dall'algoritmo 3.5 si ottiene:

$$\begin{array}{r|l}
1618 & 8^3 \\
\hline
82 & 3 \to (3)_{otto} \\
82 & 8^2 \\
\hline
18 & 1 \to (1)_{otto} \\
18 & 8 \\
\hline
2 & 2 \to (2)_{otto} \\
2 & 1 \\
\hline
0 & 2 \to (2)_{otto}
\end{array}$$

Pertanto $(1618)_{dieci} = (3122)_{otto}$

Con il metodo appena esposto si ottengono dapprima i coefficienti delle unità più grandi e poi via via quelli delle unità più piccole. Esiste una variante di tale metodo, maggiormente adoperata a livello didattico, che permette di ottenere dapprima i coefficienti delle unità più piccole e poi via via quelli delle unità più grandi. L'algoritmo, eseguito con l'aritmetica della base $b$, è il seguente:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = resto(x : \beta) \\
&\alpha_1 = resto([x : \beta] : \beta) \\
&\alpha_2 = resto([[x : \beta] : \beta] : \beta) \\
&\dots
\end{aligned}$$

ossia i vari coefficienti $\alpha_i$ $(i \geq 0)$ si ottengono come resto di una divisione tra la parte intera $[[[x \underbrace{: \beta] \dots] : \beta]}_{i}$ e la base $\beta$.

Tale algoritmo termina quando si ottiene un quoziente nullo.

**Esempio 3.4.** Per mostrare le differenze delle varie procedure si considera la rappresentazione dell'esempio 3.3: $(1618)_{dieci} = (?)_{otto}$. Si ha:

$$\begin{array}{ccccc} 1618 & 8 & & & \\ 2 & 202 & 8 & & \\ & 2 & 25 & 8 & \\ & & 1 & 3 & 8 \\ & & & 3 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 2 & 1 & 3 & \end{array}$$

La rappresentazione cercata è $(3122)_{otto}$

## 3.2 Rappresentazione dei numeri razionali e reali

Nel seguito si usa la seguente notazione:
se $x \geq 0$ è un numero reale si scrive $x = [x] + \{x\}$, dove $[x]$ è la *parte intera* di $x$, ossia il più grande numero intero non superiore a $x$ e $\{x\}$ è la *parte frazionaria*[2] di $x$, ossia il numero reale definito da $\{x\} = x - [x]$: risulta pertanto $0 \leq \{x\} < 1$.
Per rappresentare i numeri reali bisogna estendere, in qualche modo, i concetti di sistema di numerazione e rappresentazione. A tal fine si ricordano delle definizioni e si mostra un risultato di notevole importanza ai fini della rappresentazione.

**Definizione 3.4.** Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [3] si dice *definitivamente periodica* se esistono due numeri interi $k \geq 1$ e $\overline{n} \geq 0$ tali che $x_n = x_{n+k}$ per ogni intero $n > \overline{n}$. I più piccoli interi $\overline{n}$ e $k$ che soddisfano tali condizioni sono detti rispettivamente *lunghezza dell'antiperiodo* e *lunghezza del periodo* della successione, pertanto si chiama *periodo* della successione la $k-$pla $(x_{\overline{n}+1}, \dots, x_{\overline{n}+k})$ e se $\overline{n} \geq 1$ si chiama *antiperiodo* della successione la $\overline{n}-$pla $(x_1, \dots, x_{\overline{n}})$.
Se $\overline{n} = 0$ la successione è detta *puramente periodica* o, semplicemente, periodica.

**Teorema 3.2.1.** *Sia $0 \leq x \leq 1$ un numero reale e $b > 1$ un numero intero. Esiste una ed una sola successione $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri interi tali che $0 \leq \chi_i \leq b-1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$,*

[2] La parte frazionaria {x} può non essere razionale.

[3] I numeri $x_n$ con $n \in \mathbb{N}$ si possono supporre in generale reali o complessi, ma quello che interesserà è che siano cifre di un sistema di numerazione.

*non periodica di periodo $b-1$, tale che*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{b^n}. \tag{3.11}$$

*Se $x = 1$, l'unico sviluppo è con cifre tutte uguali a $b-1$.*

*Osservazione* 12. Ogni successione $(\chi_n)_{n=1}^{\infty}$ nelle condizioni del teorema 3.2.1 definisce un unico numero reale $0 \leq x < 1$ come somma della serie in 3.11. Questo perché in tali condizioni la serie 3.11 è convergente, dato che

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n}{b^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = 1.$$

**Definizione 3.5.** Sia $(b, C)$ con $b > 1$ intero e $C = \{0, 1, \ldots, b-1\}$, un sistema di numerazione polinomiale con base $b$. Ad ogni numero reale $x \geq 0$, decomposto nella forma

$$x = [x] + \{x\} = \sum_{i=o}^{n} q_i b^i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j}{b^j} \tag{3.12}$$

con $q_i$, $\chi_j \in C$ e $\chi_j$ non definitivamente periodica di periodo $(b-1)$, si associa come rappresentazione l'*allineamento* $(q_n \ldots q_0 * \chi_1 \chi_2 \ldots)$.
Un numero rappresentabile come $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j}{b^j}$ in un sistema $(b, C)$ con $\chi_j \in C$ si dice *frazione del sistema.*

I numeri reali negativi si rappresentano anteponendo il segno "-" (meno) alle rappresentazioni dei loro opposti.

*Osservazione* 13.
Considerata la decomposizione $x = [x] + \{x\}$, dalla 3.12 si può affermare che per rappresentare un numero reale $x \geq 0$ basta rappresentare la sua parte intera $[x]$ con l'allineamento $(q_n \ldots q_0)_b$, la sua parte frazionaria $\{x\}$ con l'allineamento $(\chi_1 \chi_2 \ldots)_b$ e concatenarli. L'esistenza dell'allineamento $(q_n \ldots q_0 * \chi_1 \chi_2 \ldots)_b$ è assicurata dai teoremi 3.1.1 e 3.2.1.

*Osservazione* 14. Nel caso della base dieci l'asterisco "$*$", che separa la rappresentazione della parte intera da quella della parte frazionaria, viene in genere sostituito col punto "." o con la virgola ",".

**Definizione 3.6.** L'allineamento $(q_n \dots q_0 * \chi_1\chi_2 \dots)_b$ si dice *periodico* [*definitivamente periodico*] se la successione $(\chi_n)_{n=1}^{\infty}$ è periodica [definitamente periodica].

Nel seguito si denota con $(q_n \dots q_0 * \chi_1 \dots \chi_{\bar{n}}\overline{\chi_{\bar{n}+1} \dots \chi_{\bar{n}+k}})_b$ l'allineamento definitivamente periodico di *antiperiodo* $(\chi_1, \dots \chi_{\bar{n}})$ e *periodo* $(\chi_{\bar{n}+1} \dots \chi_{\bar{n}+k})$ dove $\bar{n} \geq 0$ e $k \geq 1$ (per $\bar{n} = 0$ si ha un allineamento *periodico*, se invece $\bar{n} \geq 1$ si ha un allineamento *periodico misto*). Si noti che periodo e antiperiodo non sono univocamente determinati: $(0,\overline{3})_{dieci} = (0,\overline{33})_{dieci}$; $(0,\overline{35})_{dieci} = (0,3\overline{53})_{dieci}$; ecc. . . .

Se $x$ ha un allineamento definitivamente periodico di periodo $(0)$ (ossia $(q_n \dots q_0 * \chi_1 \dots \chi_{\bar{n}}\overline{0})_b$, detto allineamento *finito* o *limitato*), si esprime nel seguente modo:

$$x = \sum_{i=o}^{n} q_i b^i + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \frac{\chi_j}{b^j} = \frac{\sum_{i=o}^{n} q_i b^{i+\bar{n}} + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \chi_j b^{\bar{n}-j}}{b^{\bar{n}}}. \tag{3.13}$$

La frazione 3.13, il cui numeratore è un numero intero e il denominatore è una potenza non negativa di $b$, prende il nome di *frazione b-adica* (frazione decimale se $b = dieci$). Il numero reale $x$, esprimendosi come una frazione $b$-adica, si dice *numero b-adico* (o $b$-esimale, in particolare si parla di numero decimale se $b = dieci$).

*Osservazione* 15.
L'insieme dei numeri $b$-esimali finiti dipende dalla base $b$. Si ha, ad esempio, che il numero $\dfrac{1}{3_{dieci}} = \dfrac{1}{(10)_{tre}}$ non è un numero decimale finito in quanto $\dfrac{1}{3_{dieci}} = (0,\overline{3})_{dieci}$ mentre è un numero 3-adico finito dato che $\dfrac{1}{(10)_{tre}} = (0,1)_{tre} = (0,1000\dots)_{tre}$.
I numeri $b$-adici finiti hanno due rappresentazioni: la rappresentazione (*propria*) $(q_n \dots q_0 * \chi_1 \dots \chi_{\bar{n}})_b$ (con $\chi_{\bar{n}} \neq 0$) e la rappresentazione (*impropria*) $(q_n \dots q_0 * \chi_1 \dots (\chi_{\bar{n}}-1)\overline{b-1})_b$. Per escludere questa doppia possibilità si esclude che la successione $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia definitivamente periodica di periodo $b-1$.

A meno del caso esaminato nell'osservazione 15, la rappresentazione è unica. Pertanto, dati due numeri reali $x = (q_n \dots q_0 * \chi_1\chi_2 \dots)_b$ e $y = (p_n \dots q_0 * \pi_1\pi_2 \dots)_b$ si osserva che l'ordine naturale dei numeri reali coincide con l'ordine lessicografico dei rispettivi allineamenti propri, infatti: $x < y$ se e solo se per il più grande indice per cui $p_i \neq q_i$ si ha $q_i < p_i$ o, se $q_i = p_i$ per $i = 0, 1, \ldots, n$, per il più piccolo indice per cui $\pi_j \neq \chi_j$ si ha $\pi_j < \chi_j$.

Si ricorda che i numeri razionali sono numeri reali della forma $x = \dfrac{m}{n}$ con $m$ e $n$ $(n \neq 0)$ interi. Si può pertanto dire che le frazioni $b$-adiche definiscono dei numeri razionali, che si rappresentano tramite allineamenti finiti. Di seguito si riporta un importante risultato, grazie al quale è possibile affermare che il generico numero razionale definito dalla frazione irriducibile $\dfrac{c}{d}$ è rappresentato in base $b$ da un allineamento definitivamente periodico (finito o puramente periodico); e, reciprocamente, a ogni allineamento $b$-adico definitivamente periodico corrisponde una ed una sola frazione irriducibile $\dfrac{c}{d}$ di cui esso è la rappresentazione in base $b$ (indipendentemente da $b$). La frazione corrispondente $\dfrac{c}{d}$, e ogni altra frazione a essa equivalente, è detta *frazione generatrice* dell'allineamento.

**Teorema 3.2.2.** *[5]*
*Sia $(b, C)$ un sistema di numerazione polinomiale e si suppone che $b$ ammetta la decomposizione $b = b_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot b_p^{\beta_p}$ dove i $b_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ sono numeri primi e i $\beta_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ sono numeri interi positivi.*
*Sia $\dfrac{c}{d}$ una frazione propria irriducibile e si suppone che $d$ ammetta la decomposizione $d = d_1^{\delta_1} \ldots d_q^{\delta_q}$ dove $d_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ sono numeri primi e i $\delta_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ sono numeri interi positivi. Posto $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$ e $D = \{d_1, \ldots, d_q\}$, valgono le seguenti affermazioni:*

**i)** *Se $D \subset B$ (ogni divisore primo di $d$ è un divisore di $b$) allora $x = \dfrac{c}{d}$ è rappresentato dall'allineamento finito $(0 * \chi_1 \ldots \chi_n)_b$ $(\chi_n \neq 0)$ dove $n$ è l'esponente della più piccola potenza di $b$ divisibile per $d$.*

**ii)** *Se $D \cap B = \varnothing$ ($d$ e $b$ sono primi tra loro) allora $x = \dfrac{c}{d}$ è rappresentato dall'allineamento (puramente) periodico $(0 * \overline{\chi_1 \ldots \chi_k})_b$ dove la lunghezza del periodo $k$ è il più piccolo numero intero tale che $b^k - 1$ è un multiplo di $d$ e in particolare $k \leq d - 1$.*

**iii)** *Se $D \cap B \neq \varnothing$ e $D \not\subseteq B$ ($d$ e $b$ non sono primi tra loro ma non tutti i divisori primi di $d$ sono divisori di $b$) allora $x = \dfrac{c}{d}$ è rappresentato dall'allineamento definitiva-*

*mente periodico (o periodico misto)* $(0 * \chi_1 \dots \chi_n \overline{\chi_{n+1} \cdots \chi_{n+k}})_b$ *dove la lunghezza del periodo* $k$ *è il più piccolo numero intero tale che* $b^k - 1$ *è un multiplo di* $Q = \frac{d}{T}$*, dove* $T$ *è il più grande divisore di* $d$ *composto di fattori primi tutti divisori di* $b$*; e la lunghezza dell'antiperiodo* $n$ *è l'esponente della più piccola potenza di* $b$ *divisibile per* $T$*.*

*Reciprocamente, sia* $0 < x < 1$ *un numero reale rappresentato dall'allineamento* $(0 * \chi_1 \dots \chi_n \overline{\chi_{n+1} \cdots \chi_{n+k}})_b$ *con* $n \geq 0$ *e* $k \geq 0$*. Valgono le seguenti affermazioni:*

**i')** *Se* $n \geq 1$ *e* $k = 0$ *allora una funzione generatrice dell'allineamento (finito)* $(0 * \chi_1 \dots \chi_n)_b$ *con* $\chi_n \neq 0$*, è la frazione* $b$*-adica*

$$\frac{\chi_1 b^{n-1} + \chi_2 b^{n-2} + \ldots + \chi_{n-1} b + \chi_n}{b^n}.$$

**ii')** *Se* $n = 0$ *e* $k \geq 1$ *allora una frazione generatrice dell'allineamento (puramente periodico)* $(0 * \overline{\chi_1 \cdots \chi_k})_b$*, con* $\chi_1 \dots \chi_k \neq b - 1$ *(ossia non periodico di periodo* $b - 1$*), è la frazione*

$$\frac{(\chi_1 \cdots \chi_k)_b}{b^k - 1} = \frac{(\chi_1 \cdots \chi_k)_b}{(\underbrace{(b-1)\dots(b-1)}_{k\,volte})}.$$

**iii')** *Se* $n > 0$ *e* $k \geq 1$ *allora una frazione generatrice dell'allineamento (periodo misto)* $(0 * \chi_1 \dots \chi_n \overline{\chi_{n+1} \cdots \chi_{n+k}})_b$ *con* $\chi_{n+1} \dots \chi_{n+k} \neq b - 1$*, è la frazione*

$$\frac{(\chi_1 \cdots \chi_n)_b \cdot b^k + (\chi_{n+1} \cdots \chi_{n+k})_b - (\chi_1 \cdots \chi_n)_b}{(b^k - 1) b^n} = \frac{(\chi_1 \cdots \chi_n \chi_{n+1} \cdots \chi_{n+k})_b - (\chi_1 \cdots \chi_n)_b}{(\underbrace{(b-1)\dots(b-1)}_{k\,volte}\underbrace{(0\dots0}_{n\,volte})}.$$

## Cambio di base per le parti frazionarie

Dato un generico numero razionale mediante un numero $b$-adico che lo approssimi con l'accuratezza desiderata, si affronta il problema di cambio di base, di due sistemi numerici differenti, nel caso delle parti frazionarie.
Sia $0 < x < 1$ un numero reale e sia $(*a_1 \dots a_m)_b$ l'allineamento che lo rappresenta in un sistema di numerazione polinomiale di base $b$, di modo che $x = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b^i}$.

Si considera ora un altro sistema di numerazione polinomiale con base $\beta$ e ci si propone di determinare l'allineamento $(*\alpha_1 \dots \alpha_\mu)$ tale che $\sum_{j=1}^{\mu} \frac{\alpha_j}{\beta^j}$ costituisca una buona approssimazione di $x$.
Si osserva che più $\mu$ è grande, ossia più è grande il numero di cifre che prendiamo in considerazione, più l'accuratezza dell'approssimazione è migliore. Inoltre, $\mu$ non è dato a priori ma a tal proposito è importante il seguente risultato.

**Proposizione 3.2.3.** *Ogni numero razionale $x$ che abbia una rappresentazione finita nella base $b$ ha anche una una rappresentazione finita nella base $\beta$ se ogni divisore primo di $b$ divide anche $\beta$*

*Dimostrazione.* Sia $x$ con una rappresentazione finita nella base $b$ allora $x$ può essere scritto come frazione $b$-adica: $x = \frac{K}{b^k}$ con $K$ e $k$ interi positivi. Se ogni divisore primo di $b$ divide $\beta$ allora, dato un intero positivo $k$, esiste un intero positivo $j$ tale che $\frac{\beta^j}{b^k}$ è intero. Moltiplicando $\frac{\beta^j}{b^k}$ per l'intero positivo $K$ si ottiene che $K \cdot \frac{\beta^j}{b^k}$ è uguale a un certo intero positivo $J$. Si ha così che $x$ può essere anche scritto come frazione $\beta$-adica: $x = \frac{J}{\beta^j}$ e dunque l'asserto. □

*Osservazione* 16.
Il viceversa non vale in generale: ad esempio $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$$(\frac{2}{10})_{dieci} = (0,2)_{dieci}$$

$$(\frac{1}{5})_{cinque} = (0,1)_{cinque}$$

ma ogni divisore primo di 10 non divide 5.

Un metodo per ottenere gli $\alpha_j$ è quello di esprimere gli $a_i$ e $b$ nella base $\beta$ e poi calcolare la somma dei quozienti $\frac{(a_m)_\beta}{(b)_\beta^m} + \dots + \frac{(a_1)_\beta}{(b)_\beta}$ usando l'aritmetica della base $\beta$. Questo metodo, come già visto per il cambio di base per i numeri interi, è poco comodo se $\beta \neq 10$.

Un altro metodo consiste nel lavorare con l'aritmetica della base $b$ in cui è dato il numero e seguire i passi del seguente algoritmo:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & [\beta x] \\ \alpha_2 & = & [\beta\{\beta x\}] \\ \alpha_3 & = & [\beta\{\beta\{\beta x\}\}] \\ \ldots & & \end{array} .$$

L'algoritmo termina quando si ottiene la parte frazionaria $\{\ldots\beta\{\beta\{\beta x\}\}\ldots\}$ nulla oppure un numero soddisfacente di cifre dell'allineamento $\beta$-adico.

**Esempio 3.5.** $(.69)_{dieci} \to (?)_{otto}$

$$\begin{array}{lcl} (.69)_{dieci} \cdot (8)_{dieci} = (5.52)_{dieci} & \to & (\alpha_1)_{otto} = (5)_{otto} \\ (.52)_{dieci} \cdot (8)_{dieci} = (4.16)_{dieci} & \to & (\alpha_2)_{otto} = (4)_{otto} \\ (.16)_{dieci} \cdot (8)_{dieci} = (1.28)_{dieci} & \to & (\alpha_3)_{otto} = (1)_{otto} \\ (.28)_{dieci} \cdot (8)_{dieci} = (2.24)_{dieci} & \to & (\alpha_4)_{otto} = (2)_{otto} \end{array}$$

e la rappresentazione cercata è $(*5412\ldots)_{otto}$.

Prima di concludere tale sezione si riporta un importante risultato riguardo le frazioni di un sistema di numerazione qualunque $(b, C)$.

**Proposizione 3.2.4.** *[7]*
*L'insieme delle frazioni è un insieme compatto.*

## 3.3 Sistemi di numerazione in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$

In $\mathbb{R}$, o in $\mathbb{C}$, un sistema numerico astratto è definito da una base $b$ che è un numero reale o complesso e dall'insieme $C$ delle cifre che è un insieme finito di numeri reali o complessi (che include lo 0).

In un sistema $(b, C)$ che ha per base un numero reale o complesso $b$ $(|b| > 1)$ :

1. Gli <u>interi</u> sono i numeri della forma $\sum_{j=0}^{n} c_j b^j$ con $c_j \in C$: il loro insieme si indica con $W$;

2. Le frazioni, il cui insieme si indica con $F$, sono i numeri della forma $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j}$ con $c_j \in C$: la serie converge assolutamente in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) essendo $|b| > 1$;

3. I numeri rappresentabili sono gli elementi di $W + F$ che si esprimono, quindi, nella forma
$$\sum_{j=-\infty}^{n} c_j b^j = \sum_{j=0}^{n} c_j b^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{b^j}.$$

**Esempio 3.6** (Sistema di Cantor [7]).
È un sistema di numerazione astratto in $\mathbb{R}$ con $b = 3$ e $C = \{0; 2\}$.
Ogni numero rappresentabile ha una rappresentazione unica: vedi 4.2.1.

**Esempio 3.7** (Sistema di Gauss [9]).
Èun sistema di numerazione astratto in $\mathbb{C}$ con $b = -1 + i$ e $C = \{0; 1\}$

- $W = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ *interi gaussiani*
- $W + F = \mathbb{C}$

La rappresentazione degli interi Gaussiani nella base $b = -1 + i$ può essere visualizzata nel piano complesso come segue: si suddivide il piano in quadrati unitari e si vanno a selezionare, ombreggiandoli, quelli che raffigurano gli interi Gaussiani che possono essere scritti nella base $b$ usando le cifre 0 e 1. Dato che in tale base tutti i numeri complessi sono rappresentabili (ogni quadrato del piano viene ombreggiato), $b = -1 + i$ è detta "*buona*" base.

Si osserva che per gli interi l'unicità della rappresentazione è sempre verificata, mentre per le frazioni, se tutti i numeri complessi sono rappresentabili in una data base, viene a mancare l'unicità della rappresentazione: possono esserci numeri complessi con almeno due sviluppi diversi: di fatto ce ne sono con tre (ma non di più).

Considerando la base $b = -1 + i$ dell'esempio 3.7, il numero complesso $\dfrac{1+3i}{5}$ ha ben tre diverse rappresentazioni in base $-1 + i$:

$$\frac{1+3i}{5} = (0.\overline{010})_{-1+i} = (11.\overline{001})_{-1+i} = (1110.\overline{100})_{-1+i}.$$

Il sistema di Gauss dell'esempio 3.7 sarà ripreso nel capitolo successivo dove verrà utilizzato per ottenere importanti frattali.

# Capitolo 4

# Frattali

*Si ritiene che in qualche modo i frattali abbiano delle corrispondenze con la struttura della mente umana, è per questo che la gente li trova così familiari. Questa familiarità è ancora un mistero e più si approfondisce l'argomento più il mistero aumenta.*

*Benoît Mandelbrot*

In questo capitolo conclusivo viene analizzata la possibilità di generare frattali rappresentando i numeri in determinate basi. Prima di presentare alcuni importanti frattali si esplicitano, sommariamente, alcune proprietà che caratterizzano i frattali in generale.

## 4.1 Prime definizioni e proprietà

È difficile dare una definizione generale di frattale in quanto le varie definizioni possibili determinano famiglie diverse. A volte il modo migliore per descriverle consiste nel considerare i processi matematici che le generano. Un frattale di un certo tipo viene ad essere il risultato di un'iterazione infinita di un processo, che sebbene sia di natura molto semplice dà luogo a strutture di una complessità all'apparenza straordinaria il cui studio, mediante la geometria frattale, permette di avvicinarsi e descrivere meglio "l'irregolarità" delle forme reali.

Tra le caratteristiche generali dei frattali che li distinguono dagli oggetti ordinari della geometria euclidea si ricordano le seguenti:

- possiedono una dimensione non intera (frazionaria: "frattale");
- hanno una struttura fine che risulta molto intricata a qualsiasi scala di osservazione;
- non sono facilmente descrivibili con i metodi geometrico-matematici solitamente utilizzati.

Per quanto riguarda la dimensione è ben noto che nella geometria euclidea le dimensioni sono intere: infatti il punto, la linea, la superficie e il volume hanno dimensione, rispettivamente, pari a 0, 1, 2 e 3; mentre i frattali sono figure che hanno una dimensione frazionaria.

Date le numerose e differenti definizioni di dimensione frattale, ai fini dei nostri scopi ci limitiamo, esclusivamente[1], alla nozione di *dimensione di autosomiglianza* (*similarity dimension*), relativa a quei frattali che risultano figure ottenute, iterativamente, dall'unione di copie di se stesse a scale differenti (*self-similarity*).
Per giungere a una definizione di dimensione autosimilare si mostrano alcune proprietà legate all'autosomiglianza (*self-similarity*), alla cui base ci sono particolari trasformazioni geometriche: i movimenti rigidi (tra cui la traslazione e la rotazione), la riflessione e l'omotetia. Quest'ultima permette di ingrandire o ridurre una figura lasciandone inalterata la forma.

**Definizione 4.1.** Una funzione $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è detta *omotetia* se esistono $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\theta(x - x_0) = r(x - x_0) \tag{4.1}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$; $r$ e $x_0$ sono detti, rispettivamente, rapporto e centro dell'omotetia.
In particolare si parla di *dilatazione* se $r > 1$, di *contrazione* se $0 < r < 1$ e se $r = 1$ si ottiene ovviamente l'identità, ovvero la trasformazione nella quale ogni punto corrisponde

[1]Per le altre dimensioni si rimanda al testo [7], in particolare al capitolo 6.

a se stesso.
Come conseguenza della 4.1 si ha

$$|\theta(x) - \theta(y)| = r|x - y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Una similitudine in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $f = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x) - f(y)| = r|x - y| \quad con\ r > 0.$$

Se $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $K$ e $f[K]$ si dicono simili.
Un'omotetia composta con rototraslazioni e riflessioni è una similitudine.

Sia $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ una lista finita di numeri positivi detta *lista di rapporti*, a partire dalla quale è possibile costruire in $\mathbb{R}^n$ un *sistema di funzioni iterative* $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, dove $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una similitudine con rapporto $r_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.
Si dice, inoltre, che la lista di rapporti ha *valore di similitudine* $s$ (*sim-value*) se esiste un numero positivo $s$ tale che $r_1^s + r_2^s + \ldots + r_n^s = 1$.
Nel caso in cui $r_i < 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, ovvero nel caso di contrazioni, si ha l'unicità del valore $s$, come mostrato dal seguente risultato di analisi.

**Teorema 4.1.1.**
*Sia $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ una lista di rapporti in cui $r_i < 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Allora esiste un unico numero non negativo $s$ tale che $\sum_{i=1}^{n} r_i^s = 1$.*
*Inoltre, $s$ è 0 se e solo se $n = 1$.*

*Dimostrazione.* Si considera la funzione $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definita da

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i^s.$$

Pertanto $\phi$ è una funzione derivabile ed essendo $\phi(0) = n \geq 1$ e $\lim_{s \to \infty} \phi(s) = 0 < 1$, per il teorema dei valori intermedi esiste almeno un valore $s$ tale che $\phi(s) = 1$.
Si calcola poi la derivata di $\phi$ ottenendo

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^s \log r_i,$$

la quale è $< 0$ e quindi $\phi$ è una funzione strettamente decrescente. Pertanto esiste un'unica soluzione $s$ dell'equazione $\phi(s) = 1$.
Infine, se $n > 1$ allora $\phi(0) > 1$ e quindi $s \neq 0$. □

**Definizione 4.2.** Dato un insieme non vuoto e compatto $K \in \mathbb{R}^n$ e un sistema di contrazioni $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (la corrispondente lista di rapporti $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ è costituita da $r_i$, con $i = 0, \ldots, n$, tutti $< 1$), il valore $s$ definisce la *dimensione di autosimilarità* di $K$ se e solo se $K$ è invariante per il sistema di funzioni iterative dato: questo se e solo se $K$ soddisfa la relazione

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} f_i[K]. \tag{4.2}$$

*Osservazione* 17.
Nel caso in cui ci sia sovrapposizione tra i vari "pezzi" $f_i[K]$ può accadere che la dimensione "naturale" dell'insieme $K$ sia minore strettamente di $s$. Per avere l'uguaglianza è necessario che sia soddisfatta una condizione detta *condizione di Moran dell'insieme aperto*: un sistema di funzioni iterative $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ soddisfa la suddetta condizione se e solo se esiste un insieme aperto non vuoto $U$ per il quale risulta

$$f_i[U] \cap f_j[U] = \varnothing \; per \; i \neq j \; e \; U \supset f_i[U] \; per \; ogni \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Tale insieme aperto $U$ prende il nome di *insieme aperto di Moran* per il sistema di funzioni iterative.
Solo in questi casi verrà usato $s$ come valore della dimensione di autosimilarità: questa può essere anche intera (nel qual caso non si tratta di un frattale)

Un'applicazione della *condizione di Moran* è data dalla verifica che la dimensione del generico intervallo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ assuma il valore consueto 1.
L'intervallo $[a, b]$ è un insieme compatto e autosimile dato che è unione di due intervalli più piccoli $[a, \frac{(a+b)}{2}]$ e $[\frac{(a+b)}{2}, b]$ (e così iterativamente), che risultato simili (con rapporto $\frac{1}{2}$) all'intero insieme $[a, b]$. Il valore di similitudine della lista di rapporti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è la soluzione $s$ dell'equazione

$$(\frac{1}{2})^s + (\frac{1}{2})^s = 2(\frac{1}{2})^s = 1,$$

e così $s = 1$. Pertanto la dimensione di autosomiglianza dell'intervallo $[a, b]$ è 1.

Di seguito si analizzano alcuni esempi di frattali autosimili ottenuti da un processo iterativo e dall'applicazione della numerazione posizionale in una determinata base per costruire sistemi astratti che li descrivono.

## 4.2 L'insieme ternario di Cantor

L'insieme ternario di Cantor $C$, un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, è costruito come limite di un processo iterativo che inizia dall'intervallo $[0;1]$ e consiste in trisezioni ripetute di questo intervallo e dei suoi sottointervalli e in una applicazione della numerazione posizionale in base 3 (sistema di Cantor: esempio 3.6).
Il processo di costruzione di $C$ può essere così schematizzato:

**Passo 1)** Si triseca il segmento $[0;1] = E_0$ in tre segmenti congruenti, rimuovendo quello intermedio (senza gli estremi) e unendo i due intervalli (chiusi) rimanenti $[0;\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3};1] = E_1$, quest'ultimo di lunghezza complessiva $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$.

**Passo 2)** Si ripete la trisezione in parti congruenti sui due intervalli di $E_1$ rimuovendo gli intervalli di mezzo di entrambi e chiamando $E_2$ l'unione dei rimanenti $2^2$ intervalli chiusi di lunghezza complessiva $4 \cdot \frac{1}{9} = 2^2 \cdot \frac{1}{3^2}$.
...

**Passo n+1)** Si ripete la trisezione in parti congruenti sui $2^n$ intervalli di $E_n$, di lunghezza complessiva $2^n \cdot \frac{1}{3^n}$ , rimuovendo i rispettivi intervalli di mezzo e chiamando $E_{n+1}$ l'unione dei rimanenti $2^{n+1}$ intervalli.
...

L'insieme $C$ è l'intersezione di tutti gli insiemi $E_n$ ottenuti con i suddetti passi e risulta che ha misura (lunghezza) nulla, nel senso che $C$ si può ricoprire con intervalli di lunghezza complessiva piccola a piacere, precisamente $\frac{2^n}{3^n}$ per ogni $n$.

L'insieme ternario di Cantor è un insieme invariante per il sistema di funzioni iterative $(f_1, f_2)$, dove

$$f_1 = \frac{x}{3}$$

$$f_2 = \frac{x+2}{3},$$

corrispondenti alla lista di rapporti $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Dato che l'insieme $C$ soddisfa l'equazione 4.2:

$$C = f_1[C] \cup f_2[C],$$

dalla definizione 4.2, si ha che la dimensione autosimilare è la soluzione $s$ dell'equazione

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

ossia $s = \dfrac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.6309$. Quindi $C$ ha dimensione frattale $< 1$.

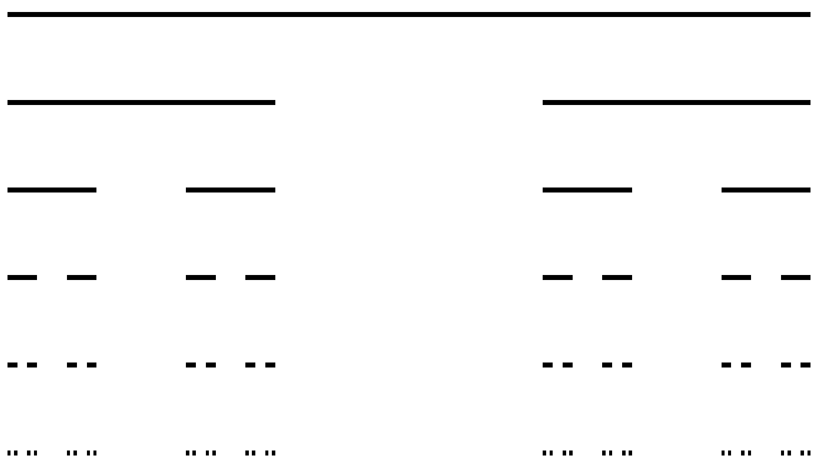

Figura 4.1: Sviluppo dell'insieme di Cantor [55]

Si verifica che la costruzione iterativa riportata sopra equivale ad eliminare dall'intervallo $[0; 1]$ tutti i numeri che contengono la cifra 1 nella loro rappresentazione ternaria e pertanto $C$ è costituito da tutti e soli i numeri di $[0;1]$ con uno sviluppo in base tre in cui compaiono soltanto le cifre 0 e 2 (questo sviluppo è unico): $C$ è l'insieme delle frazioni del sistema.

**Proposizione 4.2.1.** *Sia $x \in [0;1]$; $x$ appartiene all'insieme ternario di Cantor $C$ se e solo se nello sviluppo di $x$ in base 3 compaiono soltanto le cifre 0 e 2.*

*Dimostrazione.* La cifra che occupa il primo posto a destra della virgola è 1 se e solo se $x$ è tra $(0.100000\ldots)_{tre} = \frac{1}{3}$ e $(0.122222\ldots)_{tre} = \frac{2}{3}$. Il primo intervallo intermedio ottenuto in seguito alle trisezione di $[0;1]$ è l'intervallo $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, pertanto rimuovendo tale intervallo (aperto) l'insieme $E_1$ della suddetta costruzione è costituito da numeri reali che in base tre hanno una rappresentazione con prima cifra dopo la virgola diversa da 1. Un numero $x$ in $E_1$ ha al secondo posto, a destra della virgola, cifra 1 se e solo se $x$ appartiene ai due intervalli di mezzo $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)$ $\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ ottenuti in seguito alla trisezione fatta al Passo 2 della costruzione. Dunque, rimuovendo questi due intervalli, l'insieme $E_2$ è costituito da numeri reali che in base tre hanno una rappresentazione con prime due cifre dopo la virgola diverse da 1, quindi 0 o 2. Procedendo in questo modo si ottiene che i numeri reali che appartengono all'insieme $C$ hanno in base tre una rappresentazione in cui non compare la cifra 1. □

Per quanto riguarda l'unicità di questo sviluppo basta osservare che, per quanto detto nel capitolo precedente, i numeri $b-$adici che hanno più di una rappresentazione ne hanno una finita (con periodo 0) e una impropria (con periodo $b-1$); pertanto, in questo caso si dovrebbe avere $(0,\ldots c\overline{2})_{tre} = (0,\ldots(c+1)\overline{0})_{tre}$ dove $c$ è una costante. Ma $c$ deve essere 0 e quindi risulta $c+1=1$; poiché la cifra 1 non compare mai negli sviluppi dei numeri appartenenti all'insieme di Cantor non può esserci più di una rappresentazione. Questo prova che nel sistema di Cantor l'insieme $F$ delle frazioni, che è $C$, ha rappresentazione unica.

Un modo alternativo per provare l'unicità del suddetto sviluppo consiste nell'osserva innanzitutto che nel processo di costruzione di ottiene una successione di intervalli chiusi (perché gli estremi non vengono scartati) e nidificati (in quanto i successivi sono inclusi nei precedenti); pertanto, per un importante risultato è possibile affermare che esiste

almeno un punto in comune a ogni intervallo. Essendo, inoltre, l'ampiezza dell'intervallino, al passo $n$, $3^{-n}$ si ha che l'intersezione di tutti gli intervalli contiene *uno e un solo punto.*
Si osserva che, ad ogni passo della procedura, ci si restringe nel terzo di sinistra (scrivendo nello sviluppo la cifra 0) oppure nel terzo di destra (scrivendo nello sviluppo la cifra 2), ma in qualunque modo si procede si ottiene sempre una successione di scelte fra destra e sinistra (fra 0 e 2) che può essere codificata come $a : \mathbb{N} \to \{0, 2\}$. Si definisce, allora, un'applicazione $\varphi$ avente per dominio l'insieme $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ delle successioni di scelte e codominio l'insieme $C$ di Cantor. L'unicità della suddetta rappresentazione in base tre si prova mostrando che che l'applicazione $\varphi$ è iniettiva. A tal proposito, si considerano due diverse successioni di scelte $a$ e $b$: esiste, quindi, almeno un $n$ che possiamo considerare come il minimo tale che le cifre $a_n$ e $b_n$ che occupano, rispettivamente, il posto $n$-esimo dopo la virgola siano diverse; ciò significa che le successioni $a$ e $b$ conducono al passo $n$-esimo a scegliere due sottointervalli disgiunti dello stesso intervallo. In questo modo, si ottiene che il punto di $C$ individuato da $a$ appartiene a uno dei due sottointervalli, mentre quello individuato da $b$ appartiene all'altro e così i due punti non possono che essere distinti.
Si può poi dimostrare che i numeri rappresentabili nel Sistema di Cantor si possono ottenere con un unico allineamento: però l'insieme dei numeri rappresentabili ha misura nulla, dato che è $C$, e ha la potenza del continuo.

## 4.3 Il tappeto di Sierpinski e la spugna di Menger

In questa sezione si descrive un particolare frattale noto come "tappeto di Sierpinski" (*Sierpinski carpet*), sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, ricorrendo alla rappresentazione ternaria delle coppie dei numeri che vi appartengono.
Si considera un quadrato $[0; 1]^2$ di lato unitario e si procede nel modo seguente:

**Passo 1)** Si suddivide il quadrato in nove quadrati congruenti;

**Passo 2)** Si rimuove il quadrato centrale;

**Passo 3)** Si ripetono i passi precedenti per ogni nuovo quadrato.

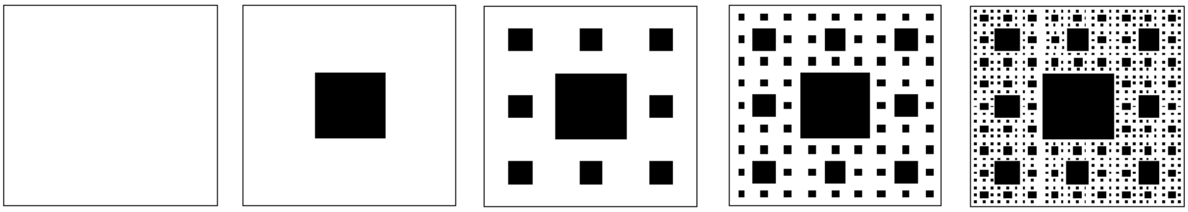

Figura 4.2: Prime 4 iterazioni del procedimento per la costruzione del Tappeto di Sierpinski [53]

Il tappeto di Sierpinski $T$ è l'insieme intersezione di tutti gli insiemi ottenuti a ogni interazione.
L'insieme $T$ è un compatto (il bordo dei quadrati che rimangono ad ogni iterazione non viene eliminato) ed è invariante rispetto al sistema di funzioni iterative $(f_1, f_2, \dots, f_8)$, dove le $f_i$ con $i = 1, 2, \dots, 8$ sono le similitudini di rapporto $\frac{1}{3}$ che hanno come centri i vertici del quadrato iniziale e i punti medi dei suoi lati, rispettivamente.
Dato che l'insieme $T$ soddisfa l'equazione 4.2

$$T = f_1[T] \cup f_2[T] \cup \dots \cup f_8[T],$$

dalla definizione 4.2, si ha che la dimensione autosimilare è la soluzione $s$ dell'equazione

$$8\Big(\frac{1}{3}\Big)^s = 1,$$

ossia $s = \dfrac{\log 8}{\log 3} \simeq 1.8928$.

Allo scopo di fornire una caratterizzazione, in termini di numerazione ternaria, dei punti appartenenti all'insieme $T$, si osserva che la costruzione iterativa sopra riportata equivale ad eliminare dal quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ tutte le coppie di numeri che contengono la cifra 1 nella loro rappresentazione ternaria (in analogia a quanto mostrato per l'insieme di Cantor). Pertanto, ogni punto dell'insieme $T$ è rappresentato da una coppia $(x; y)$ di numeri ternari nella forma $x = (0.x_1x_2x_3\dots)_{tre}$ $y = (0.y_1y_2y_3\dots)_{tre}$, dove ogni cifra è 0 o 2.

La costruzione per ottenere il tappeto di Sierpinski può essere generalizzata nello spazio tridimensionale a partire da un cubo, scoprendo un altro oggetto straordinario, la spugna di Menger $M$ (vedi figura 4.3).

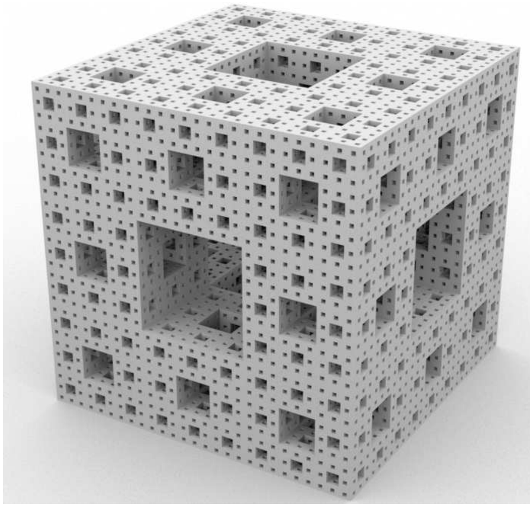

Figura 4.3: Spugna di Menger [54]

È un compatto (il bordo dei cubi rimanenti ad ogni iterazione non viene eliminato) ed è invariante rispetto al sistema di funzioni iterative $(f_1, f_2, \ldots, f_{20})$, dove le $f_i$ con $i = 1, 2, \ldots, 20$ sono le similitudini di rapporto $\frac{1}{3}$ che hanno come centri i vertici del cubo iniziale e i punti medi dei suoi spigoli, rispettivamente.
Dato che l'insieme $M$ soddisfa l'equazione 4.2:

$$M = f_1[M] \cup f_2[M] \cup \ldots \cup f_{20}[M],$$

dalla definizione 4.2, si ha che la dimensione autosimilare è la soluzione $s$ dell'equazione

$$20(\frac{1}{3})^s = 1,$$

ossia $s = \dfrac{\log 20}{\log 3} \simeq 2.7268$.
La spugna di Menger è costituita da tutte e sole le terne $(x; y; z)$, dove $x$, $y$ e $z$ hanno uno sviluppo in base tre costituito solo dalle cifre 0 e 2.

## 4.4 Le curve del drago

"Curva del Drago" ([9]) è un nome generico dato a una famiglia di frattali prodotti mediante un processo iterativo basato sulla rappresentazione dei numeri complessi.
Riprendendo quanto detto alla fine del capitolo precedente, si considerano le rappresentazioni degli interi Gaussiani usando la base $-n+i$ (oppure $-n-i$) con $n \in \mathbb{R}$; si ricorda che un numero complesso rappresentato in base $b$ si indica anche mediante il suo sviluppo $(a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} \ldots)_b$ dove ogni $a_r$ con $r \in ]-\infty, \ldots, -1, 0, \ldots k[ \cap \mathbb{Z}$ è una delle ammissibili cifre per la base $b$.
Da un punto di vista geometrico queste basi generano nel piano delle figure straordinarie. Si analizza, ad esempio, cosa si ottiene utilizzando la rappresentazione in base $1-i$, la quale, pur non essendo una base che permetta di rappresentare tutti gli interi Gaussiani, dà vita a un'interessante forma il cui bordo è un esempio di curva frattale (figura 4.6), denominata "*Snowflake spiral*". Si ricorda che gli interi Gaussiani formano un reticolo quadrato nel piano complesso, costituito da quadrati ombreggiati con tonalità diverse a seconda della lunghezza del rispettivo sviluppo, dell'intero Gaussiano, in base $b$. Si parte dal numero 0 e successivamente si considera l'unico altro numero che nella base $1-i$ ha espansione di lunghezza uno: $1 = (1)_{1-i}$. Si considerano, poi, i due numeri con espansione di lunghezza pari a due: $1-i = (10)_{1-i}$ e $2-i = (11)_{1-i}$. In generale, si considerano i $2^r$ numeri che presentano nel proprio sviluppo $r+1$ cifre: i $2^r$ quadrati corrispondenti presentano la stessa tonalità e possono essere ottenuti, in particolare, mediante una traslazione dell'unione di tutte le altre regioni, ottenute nei passi precedenti, lungo il vettore $(1-i)^r$. In questo modo si ottiene un infinito "puzzle" in cui ogni pezzo corrisponde a una potenza di due.

Come si nota dalla figura 4.4, in particolare dallo spazio bianco, l'intero piano non è ricoperto e quindi vi sono degli interi Gaussiani che non possono essere rappresentati nella base $1-i$ e questo conferma l'affermazione che la suddetta base non è una "buona" base.

Fino ad ora si è parlato di rappresentazione della parte intera dello sviluppo, per descrivere la rappresentazione della parte a destra della virgola si procede nel modo seguente: si considera la figura 4.4 e per rappresentare $2r$ cifre dopo la virgola si suddivide

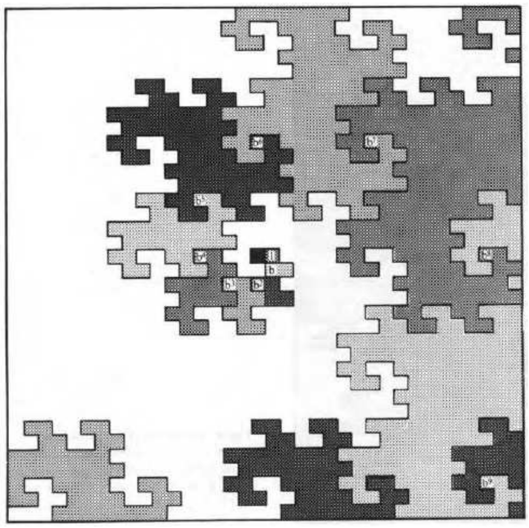

Figura 4.4: Snowflake Spiral generata dalla base $1 - i$ [9]

ogni quadrato in $2^r$ quadrati di lato $2^{-r}$; ciascuno dei quali raffigura un numero complesso $x + iy$ dove $x$ e $y$ sono multipli di $2^{-r}$. Ad esempio per rappresentare due cifre a destra della virgola si suddivide ogni quadrato "intero" in quattro quadrati; inoltre, dato che $b^{-1} = \dfrac{(1+i)}{2}$ e $b^{-2} = \dfrac{i}{2}$ si ha che i quadrati più piccoli appena ottenuti raffigurano i numeri complessi $x + iy$ dove $x$ e $y$ sono multipli di $\dfrac{1}{2}$.
Si ottiene un modello di spirale simile a quello della figura 4.4, però ad ogni passo $r$ ogni quadrato riduce la sua dimensione di un fattore pari a $2^{-r}$ e viene ruotato in senso antiorario di un angolo di ampiezza $\dfrac{360°}{2^r}$.

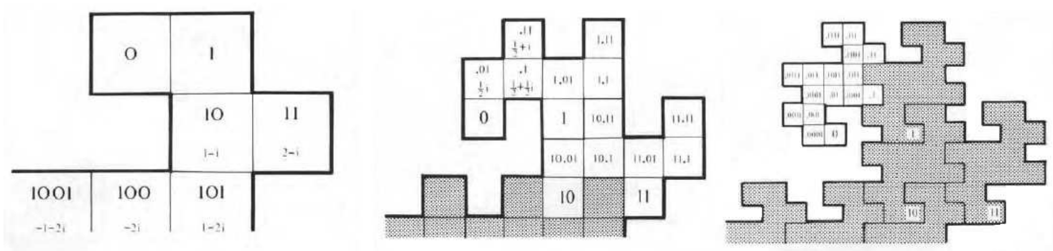


Figura 4.5: Prime iterazioni della costruzione di una Snowflake Spiral nella base 1-i.[9]

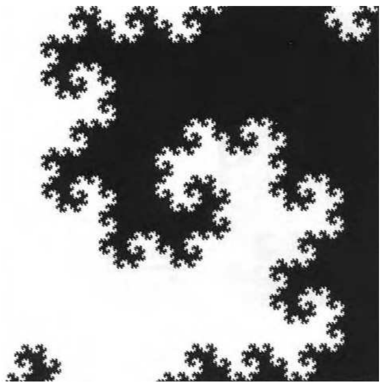

Figura 4.6: Regione di limitazione dell'approssimazione in figura 4.5. [9]

Se si ripete lo stesso ragionamento considerando la base $-1+i$ si ottengono delle regioni, caratterizzate dalla stessa forma di quelle ottenute nella spirale generata dall'utilizzo della base $1-i$, che ricoprono tutto il piano (figura 4.7) e questo significa che la base $-1+i$ è una "buona" base per gli interi Gaussiani.

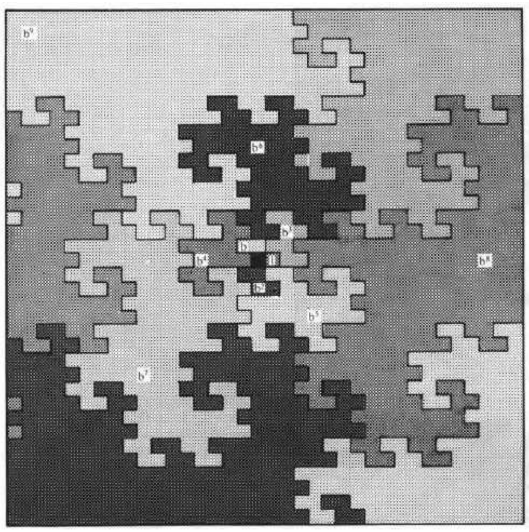

Figura 4.7: Snowflake Spiral generata dalla base -1+i. [9]

La dimensione frattale del bordo della *Snowflake Spiral* è stata calcolata da Mandelbrot e può essere approssimata al valore 1.5236 (per dettagli vedere [10]). Essa è la

frontiera dell'insieme delle Frazioni nella base $1 - i$.
All'interno del reticolo quadrato contenente $2^r$ $(r \geq 0)$ quadrati derivati dall'uso della rappresentazione in base $-1 + i$ è possibile tracciare una spezzata di "ordine $r$" detta *curva drago* e se si prendono due copie di questa curva unendo l'inizio di una con la fine dell'altra si ottiene una straordinaria figura che prende il nome di *Twindragon* di ordine $r$, vedi figura 4.8.

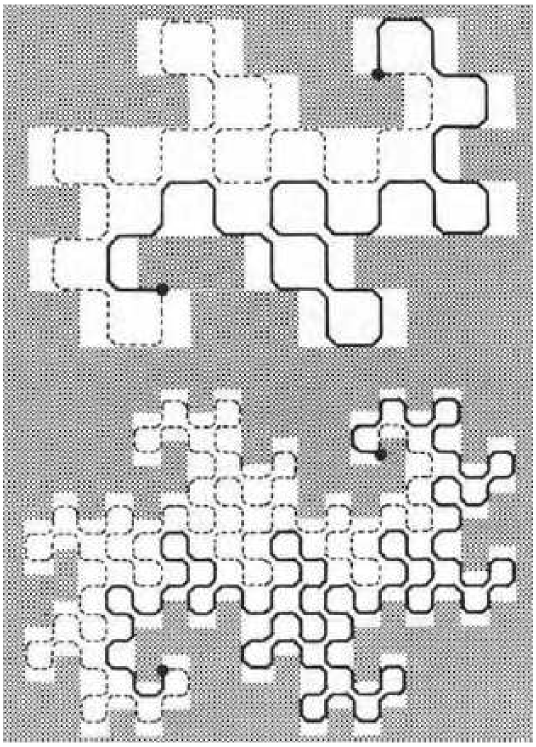

Figura 4.8: Costruzione della Twindragon a partire da due curve drago dello stesso ordine derivate dalla rappresentazione in base -1+i.[9]

Come riportato nel capitolo precedente, l'insieme della frazioni costituisce un insieme chiuso e limitato e in particolare l'insieme delle frazioni in un sistema di numerazione con base $-1 + i$ e insieme delle cifre $\{0, 1\}$ forma una *Twindragon* limite di quelle di ordine $r$ (figura 4.9).
La dimensione della *Twindragon* è 2: la dimensione della sua frontiera è frazionaria.

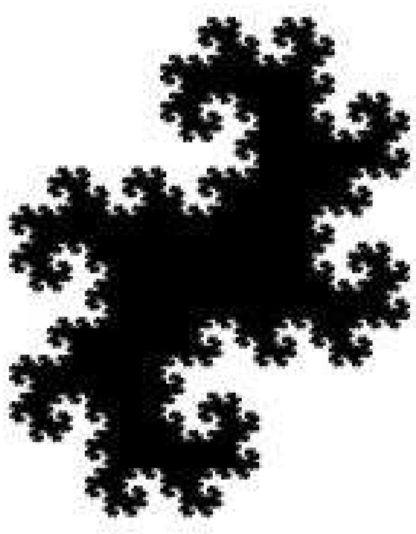

Figura 4.9: Twindragon.[7]

Come curiosità si mostra la possibilità di costruire la *Twindragon* utilizzando una striscia di un foglio di carta [2]. Si inizia piegando la striscia di carta in due parti uguali e si prosegue con piegamenti successivi (vedi figura 4.10).

Al fine di esprimere meglio il procedimento di costruzione si indica il risultato di $n$ piegamenti successivi con una sequenza $S_n$, di lunghezza $2^n - 1$ costituita dalle lettere $R$ e $L$ ($R$ e $L$ indicano il movimento rigido di rotazione che si effettua verso destra e verso sinistra rispettivamente).

Data, inoltre, una generica sequenza $S$ con $\overline{S}$ si indica la stessa sequenza letta da destra verso sinistra scambiando le lettere $R$ e $L$; ad esempio $\overline{RRRL} = RLLL$.
Detto questo, si ha che all'$n+1$-esima iterazione la sequenza $S_{n+1}$ può essere descritta nel seguente modo:

$$S_{n+1} = S_n R \overline{S_n}. \tag{4.4}$$

La ragione di ciò risiede nel fatto che l'$n+1$-esima piegatura si ottiene effettuando un'altra piegatura, verso destra, alle $n$ piegature precedenti. Una volta aperta la striscia di carta si osserva che ogni piegatura forma un angolo retto ed è ruotata leggermente.
La formula ricorsiva 4.4 ha anche un'interpretazione geometrica: detta $\Gamma_n$ la curva drago

[2]Per ulteriori dettagli vedi la voce [2] nella bibliografia di [9]

ottenuta all'$n$-esima iterazione e detto $O$ il suo punto finale, effettuando una rotazione di $\Gamma_n$ di centro $O$ e angolo 90° si ottiene una nuova curva che unita a $\Gamma_n$ nel punto $O$ dà vita alla curva drago $\Gamma_{n+1}$.

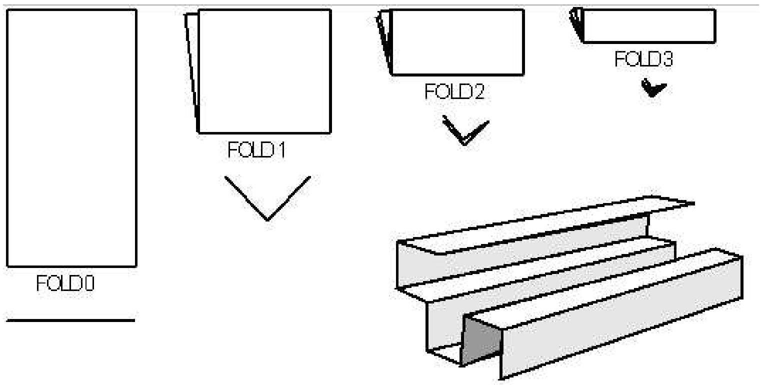


Figura 4.10: Tre piegamenti della striscia di carta [57]

# Bibliografia


[1] Bagni G. T., *Storia della Matematica*, Volumi 1 e 2, Pitagora, Bologna, 1996.

[2] Barrow J., *Da zero a infinito*, la grande storia del nulla, Milano, Mondadori, 2000.

[3] Boyer C., *Storia della matematica*, Isedi, Milano, 1976 [Ed. orig. USA, 1968].

[4] Buffa G., *Tra numeri e dita*, Zanichelli, Bologna, 1986.

[5] Capelo A., Ferrari M., Padovan G., *I sistemi di numerazione*, Progetto strategico del CNR Tecnologie e innovazioni didattiche, formazione e aggiornamento in matematica degli insegnanti, Quaderno n. 7, Decibel-Zanichelli, Padova, 1990.

[6] Dehaene S., *The number sense*: how the mind creates mathematics, Oxford University Press, Oxford 1997.

[7] Edgar G., *Measure, topology, anda fractal geometry*, Springer, $2008^2$.

[8] Gardner M., *Enigmi e giochi matematici*, Sansoni, Firenze, 2004.

[9] Gilbert W., "Fractal geometry derived from complex bases", *The Mathematical Intelligencer*, Vol.4 n.2 (1982), pag.78-86.

[10] Gilbert W., "The fractal dimension of sets derived from complex bases", *Canadian Mathematical Bulletin*, Vol.29 n.4 (1986), pag.495-500.

[11] Heath T., *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, England, 1921

[12] Ifrah G., *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori, Milano, 1989 [Ed.orig. in lingua francese, 1981].

[13] Israel G., Gasca A.M., *Pensare in matematica*, Zanichelli, Bologna, 2012.

[14] Joseph G., *C'era una volta un numero.* La vera storia della matematica, Saggiatore, Milano, 2000.

[15] Kaplan R., *Zero, storia di una cifra*, Rizzoli, Milano, 1999.

[16] Kline M., *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, 1991.

[17] Lucangeli, D., Mammarella I.C., *Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento*, Franco Angeli, Milano, 2010.

[18] Mandelbrot B., *Fractal forms, chance and dimension*, Freeman, San Francisco, 1977.

[19] Mandelbrot B., *Gli oggetti frattali: Forma, caso e dimensione*, Einaudi, Torino, 2000.

[20] Pedoe D., *The gentle art of mathematics*, Macmillan, New York, 1959.

[21] Peiretti F. *Matematica per gioco*, TEA, Milano, 2012.

[22] Peres E., *Giochi Matematici*, Editori Riuniti, Roma, 1986.

[23] Peres E., *L'elmo della mente. Manuale di magia matematica*, Salani Editore, Milano, 2006.

[24] Piaget J., *Lo sviluppo mentale del bambino*, Einaudi, Torino, 2000.

[25] Rossetti C., *Magia delle carte*, Hoepli, Milano, 1935.

[26] Seife C., *Zero, la storia di un'idea pericolosa*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002.

# Sitografia


[27] http://it.wikipedia.org/wiki/Sistemadinumerazione

[28] www.mat.uniroma3.it/users/primaria/LucianoAritmetica.ppt

[29] http://www.mathesistorino.it/?pageid=1460

[30] http://matematicamedie.blogspot.it/2009/01/contributi-antichi-sistemi-di.html

[31] http://www.pte.it

[32] https://www.youtube.com Video della storia della matematica di Marcus du Sautoy

[33] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/GAMEMATH/Nim.htm

[34] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/CifraTrasferita.htm

[35] http://matematica.orizzontescuola.it/la-matematica-preistorica

[36] http://naturamatematica.blogspot.it/20100901archive.html

[37] http://it.wikipedia.org/wiki/Sistemadinumerazionebabilonese

[38] http://www.esonet.org/index.php/articoli//396-la-fenice-e-locchio-di-horus

[39] http://www.utem.it/Dispense/Matematica/Leoriginidelpensieroscientifico-SilvanaLeggerini1.pdf

[40] http://web.unife.it/altro/tesi/A.Montanari/grecia.htm

[41] http://3.bp.blogspot.com/wa77chrZVg

[42] http://linventiondesnombres.e-monsite.com/pages/ii-en-mesopotamie

[43] http://www.treccani.it/enciclopedia/la-scienza-in-cina-i-ming-matematica-e-astronomia

[44] http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Feb03/Cap5.html

[45] http://web.math.unifi.it/archimede/notestoria/numeri/numeri1/node3.html

[46] https://raaavin.wordpress.com/base

[47] http://crema.di.unimi.it/ citrini/Tesi/r9/quipu.html

[48] http://www.consiglio.regione.toscana.it:8085/news-ed-eventi/pianeta-galileo/atti/2011/17donofrio.pdf

[49] http://www.indicazioninazionali.it/documentiIndicazioninazionali

[50] http://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/all1dm139new.pdf

[51] http://users.mat.unimi.it/users/libor/Varie/syllabus.pdf

[52] http://ecademy.agnesscott.edu/lriddle/ifs/siertri/binary.htm

[53] http://it.wikipedia.org/wiki/TappetodiSierpinski

[54] http://mathworld.wolfram.com/MengerSponge.html

[55] http://pearlsatrandomstrung.blogspot.it/counting-uncounting-and-dust-part-seven.html

[56] http://crema.di.unimi.it/ citrini/GC/Progettifatti/CDGC/dragon.html

[57] http://www.wahl.org/fe/HTMLversion/link/FE3W/c3.htm

# Ringraziamenti

Al termine di questo fantastico percorso è doveroso e piacevole fare dei ringraziamenti. Innanzitutto, ringrazio i miei genitori e tutta la mia famiglia, i quali dal giorno in cui li ho salutati, per intraprendere questo percorso, non hanno mai smesso di sostenermi moralmente e materialmente, credendo sempre in me.
Ringrazio sentitamente il prof. Piero Plazzi per la grande e costante disponibilità e per l'entusiasmo trasmessomi durante tutto il periodo di stesura della presente tesi.
Ringrazio Assunta, Giuliana, Linda, Mariarosaria, Miriam, Rosanna, Sara, Teresa, le mie care amiche di sempre che anche a chilometri di distanza non hanno smesso di farmi sentire la loro presenza in ogni momento, bello e brutto.
Ringrazio le nuove persone conosciute con cui ho condiviso degli aspetti caratterizzanti quest'esperienza e che in qualche modo hanno arricchito il mio essere; in particolare ringrazio la mia coinquilina Vincenza e la mia collega/amica Agnese.
Infine, ma non per importanza, ringrazio Marco Petrillo, una persona unica e speciale che pur non essendo stata al mio fianco dal principio ha reso ogni momento positivo molto più bello e ogni momento negativo più sopportabile, trasmettendomi costantemente amore e comprensione.