ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LE FUNZIONI CIRCOLARI ED ESPONENZIALI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ERMANNO LANCONELLI

Presentata da:
STEFANIA PERUGINI

Sessione III
Anno Accademico 2013 - 2014

L'angolazione da cui guardi la realtà, la posizione da cui la cambi... bastano piccole differenze in ciò per causare grandi mutamenti nell'animo

---

Neon Genesis Evangelion

Indice

Elenco delle figure

Introduzione

La mia tesi nasce dal desiderio di affrontare in modo sufficientemente completo le funzioni circolari e le funzioni esponenziali, volendo porre l'accento sulla loro costruzione e sulla deduzione delle relative proprietà.
L'obiettivo è quello di favorire un approccio che faccia riferimento alle proprietà non solo per la loro validità formale, ma soprattutto per il legame che intercorre con la funzione stessa.
Pertanto,le proprietà non saranno considerate solamente in quanto tali ma verranno presentate come espressione delle caratteristiche delle funzioni che andremo a costruire.

Di questo ci occuperemo nei capitoli *I* e *II* dove, per l'appunto, costruiremo rigorosamente le funzioni circolari e le funzioni esponenziali rispettivamente attraverso un procedimento analitico tratto dal libro *Analisi Matematica* di Giovanni Prodi. [4]

Nel *III* capitolo, dopo aver introdotto il numero di Nepero e come limite di una particolare successione monotona, calcoleremo i limiti notevoli dell'esponenziale e della sua inversa, che sono alla base del calcolo differenziale di queste funzioni, concludendo poi la sessione dimostrando l'irrazionalità del numero e, base dei logaritmi naturali.

Nel capitolo successivo daremo, delle funzioni circolari ed esponenziali, i rispettivi sviluppi in serie di Taylor ma solamente nel V capitolo potremo renderci veramente conto di come i risultati ottenuti siano fra loro dipendenti.
In particolare verrà messa in evidenza di come il legame del tutto naturale che si osserva fra le funzioni circolari e le funzioni esponenziali rappresenta le fondamenta di argomenti molto notevoli e pieni di significato, come l'estensione ai numeri complessi dell'esponenziale o le celebri identità di Eulero.

L'ultimo capitolo vedrà come protagonista π, così misterioso quanto affascinante, che per secoli ha smosso gli animi dei matematici intenzionati a volerne svelare la natura.
Come per il numero di Nepero, non potrà mancare un paragrafo dedicato alla dimostrazione della sua non razionalità.

Capitolo 1

Le funzioni circolari

L'interesse verso le funzioni circolari risale al tempo dei Babilonesi e una quantità considerevole del lavoro fondamentale fu svolto da matematici greci, indiani e arabi.
Fino alla metà del Seicento i seni (o coseni, tangenti etc..) erano numeri dati da tavole. Solo intorno al 1650 comincia ad emergere un punto di vista diverso, quello funzionale, o meglio, dato che il concetto di funzione non era ben definito, quello geometrico. Con l'accentuarsi del carattere funzionale delle grandezze trigonometriche, ora riunite sotto il nome di funzioni circolari, siamo praticamente entrati nella trigonometria moderna. Oggi, queste funzioni, costituiscono un'importante parte dell'analisi e vengono studiate in quanto tali, slegandosi in parte con i problemi da cui erano sorte.
Spesso vengono definite come rapporti fra i lati di un triangolo rettangolo contenente l'angolo o, equivalentemente, possono essere definite come le lunghezze di diversi segmenti costruiti dal cerchio unitario. Definizioni più moderne le esprimono come somme infinite o soluzioni di certe equazioni fondamentali, ottenendone anche la loro estensione ai numeri complessi.
Una delle caratteristiche più interessanti delle funzioni circolari risiede nel fatto che esse (come anche le funzioni esponenziali), si presentano spontaneamente come omomorfismi tra certi gruppi molto notevoli ed elementari. Per questo motivo ne verrà data una costruzione che, pur essendo meno "usuale", mette in luce anche l'importanza del concetto di continuità (che è ragionevole ed è, allo stesso tempo, necessaria per determinarli).

1.1 Alcune premesse

Nel seguito costruiremo rigorosamente le funzioni circolari attraverso un procedimento puramente analitico.
A tale scopo è opportuno fare alcune osservazioni preliminari.

Definizione 1.1. Indichiamo con $\mathbb{U}$ la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$ centrata nell'origine:

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

L'insieme dei complessi unitari è un gruppo rispetto alla moltiplicazione, è dunque, sempre rispetto a tale operazione, un sottogruppo di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Definiamo inoltre:

$$\mathbb{U}_1 = \{z \in \mathbb{U} \mid Re(z) \geqslant 0, Im(z) \geqslant 0\}$$

$$\mathbb{U}_2 = \{z \in \mathbb{U} \mid Re(z) \leqslant 0, Im(z) \geqslant 0\}$$

$$\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{U} \mid Re(z) \leqslant 0, Im(z) \leqslant 0\}$$

$$\mathbb{U}_4 = \{z \in \mathbb{U} \mid Re(z) \geqslant 0, Im(z) \leqslant 0\}$$

E' chiaro che questi insiemi rappresentano la parte di $\mathbb{U}$ che si trova, rispettivamente, nel *I*,*II*,*III*,*IV* quadrante.

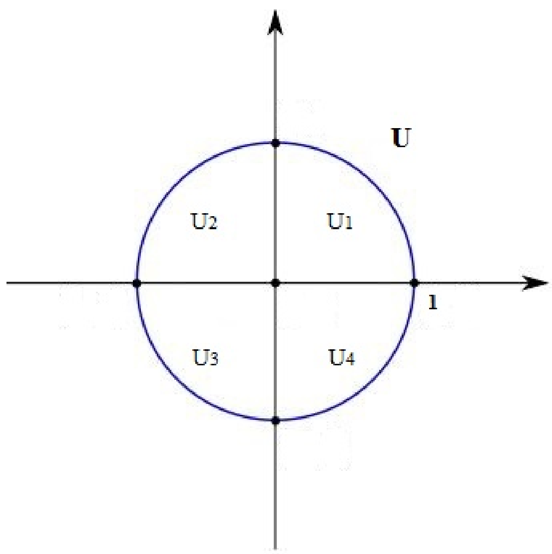

Figura 1.1: Circonferenza unitaria

Proposizione 1.1.1. *Ogni $z \in \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$ ha una e una sola radice quadrata in $\mathbb{U}_1$.*

Dimostrazione. Si tratta di provare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geqslant 0$ con $a^2 + b^2 = 1$ esistono unici $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geqslant 0$ con $x^2 + y^2 = 1$ tali che

$$a + ib = (x + iy)^2$$

cioè

$$a = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad b = 2xy$$

Ciò segue considerato che $a \geqslant -1$ mentre

$$1 + a = 2x^2 \quad \text{e} \quad 1 - a = 2y^2$$

per cui necessariamente

$$x = \sqrt{\frac{1+a}{2}} \quad y = \sqrt{\frac{1-a}{2}}$$

In effetti si verifica che queste soddisfano tutte le richieste. □

Proposizione 1.1.2. *Sia $z \in \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$, definiamo per ricorrenza la successione z_n mediante le relazioni seguenti:*

$$z_0 = z_1, \quad z_{n+1}^2 = z_n \quad \textit{con} \quad z_{n+1} \in \mathbb{U}_1$$

per ogni intero $n \geqslant 1$.
La successione z_n tende a 1 al tendere di n all' infinito.

Dimostrazione. Posti $x_n = Re(z_n)$, $y_n = Im(z_n)$ si ha:

$$x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = x_n$$

da cui

$$x_{n+1}^2 \geqslant x_n$$

Ora, essendo $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, si ha:

$$x_{n+1} \geqslant x_{n+1}^2$$

perciò

$$x_{n+1} \geqslant x_n$$

Dunque la successione x_n è crescente (a meno che non sia $z = 1$, nel qual caso è $z_n = 1$ per ogni n).
Pertanto la successione x_n risulta crescente e limitata, quindi convergente, ma allora anche la successione $y_n = \sqrt{1 - x_n^2}$ converge.
Segue che la successione z_n è convergente e sia

$$l = \lim_{n\to\infty} z_n$$

Per continuità è chiaro che

$$l^2 = l$$

ma questa soluzione ha in $\mathbb{U}_1$ la sola soluzione $l = 1$. □

Osservazione 1. Dalla *Proposizione 1.1.1* segue immediatamente il seguente risultato:
Esiste un'unica successione σ_n in $\mathbb{U}$ tale che

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = i, \quad ...$$

e, in generale

$$\sigma_{n+1}^2 = \sigma_n$$

dove σ_{n+1} è un elemento di $\mathbb{U}_1$.

Proposizione 1.1.3. *La successione $(2^n|\sigma_n - 1|)_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente e limitata, quindi ha estremo superiore positivo che indicheremo con 2π.*

Dimostrazione. Per ogni intero $n \geqslant 0$ abbiamo

$$|\sigma_{n+1} + 1| = \sqrt{2 + 2Re(\sigma_{n+1})} \leqslant 2$$

quindi

$$2^n|\sigma_n - 1| = 2^n|\sigma_{n+1}^2 - 1| = \frac{|\sigma_{n+1} + 1|}{2} 2^{n+1}|\sigma_{n+1} - 1| \leqslant 2^{n+1}|\sigma_{n+1} - 1|$$

da cui la successione è non decrescente.
D'altro canto, per $n \geqslant 2$, si ha:

$$2^{n+1}\frac{|\sigma_n - 1|}{|\sigma_n + 1|} = 2^{n+1}\frac{|\sigma_{n+1}^2 - 1|}{|\sigma_{n+1}^2 + 1|} = \frac{|\sigma_{n+1} + 1|}{2|\sigma_{n+1}^2 + 1|} 2^{n+2}\frac{|\sigma_{n+1} - 1|}{|\sigma_{n+1} + 1|} =$$

$$= \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2Re(\sigma_{n+1})}\right| 2^{n+2}\frac{|\sigma_{n+1} - 1|}{|\sigma_{n+1} + 1|} \geqslant 2^{n+2}\frac{|\sigma_{n+1} - 1|}{|\sigma_{n+1} + 1|}$$

da cui la successione $\left(2^{n+1}\frac{|\sigma_n - 1|}{|\sigma_n + 1|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente, dunque

$$2^n|\sigma_n - 1| = \frac{|\sigma_n + 1|}{2} 2^{n+1}\frac{|\sigma_n - 1|}{|\sigma_n + 1|} \leqslant 8\frac{|\sigma_2 - 1|}{|\sigma_2 + 1|} = 8$$

□

Osservazione 2. Dal punto di vista geometrico $2^n|\sigma_n - 1|$ è la lunghezza del perimetro di un poligono regolare di 2^n lati inscritto nella circonferenza di raggio unitario.
Pertanto 2π può interpretarsi come la lunghezza della circonferenza stessa, ma facendo attenzione che in generale la lunghezza di una curva è un concetto tutt'altro facile da definire.

Proposizione 1.1.4. *Vale la seguente relazione di limite:*

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(\sigma_n - 1) = 2\pi i$$

Dimostrazione. Per la *Proposizione 1.1.3* abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} 2^n|\sigma_n - 1| = 2\pi$$

D'altra parte, per ogni intero $n \geqslant 0$ risulta

$$Re\left(2^n(\sigma_n - 1)\right) = 2^n\frac{\sigma_n + \bar{\sigma_n} - 2}{2} = 2^n\frac{\sigma_n^2 + 1 - 2\sigma_n}{2\sigma_n} = 2^n\frac{(\sigma_n - 1)^2}{2\sigma_n}$$

da cui

$$|Re(2^n(\sigma_n - 1))| \leqslant 2^n\frac{|\sigma_n - 1|}{2|\sigma_n|} = 2^n\frac{|\sigma_n - 1|^2}{2} \leqslant \frac{(2\pi)^2}{2^{n+1}} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

1.2 Omomorfismi continui $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$

L'idea di base è formalizzare il concetto intuitivo di rotazione nel piano di un angolo $t \in \mathbb{R}$. L'oggetto più naturale con cui identificare una rotazione nel piano (complesso) è un elemento della circonferenza unitaria. Quindi si tratta di studiare una funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ che ad ogni angolo associa la corrispondente rotazione. E' chiaro che una rotazione di un angolo t_1 seguita da una rotazione in senso opposto di un angolo t_2, cioè una rotazione di un angolo $-t_2$, deve essere equivalente a una rotazione di un angolo $t_1 - t_2$. Ovvero h deve essere un omomorfismo del gruppo $(\mathbb{R}, +)$ nel gruppo $(\mathbb{U}, *)$.
Inoltre una rotazione avviene in modo continuo quindi è ragionevole supporre che h sia una funzione continua rispetto le topologie usuali di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{U}$.
Tuttavia vedremo che queste condizioni non determinano univocamente h, per fare ciò è ancora necessario stabilire delle "unità di misura" per gli angoli e un "senso" di rotazione.

Dire che h è un tale omomorfismo equivale a dire che $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ è un'applicazione continua verificante le condizioni:

$$|h(t)| = 1 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

$$h(t_1 + t_2) = h(t_1)h(t_2) \qquad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Ponendo $f = Re(h), \quad g = Im(h)$ si ha:

$$h(t) = f(t) + ig(t)$$

con f e g funzioni reali continue essendo h una funzione continua.
Pertanto le (1.1) e (1.2) si possono tradurre nelle seguenti relazioni:

$$f(t)^2 + g(t)^2 = 1 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} f(t_1 + t_2) = f(t_1)f(t_2) - g(t_1)g(t_2) \\ g(t_1 + t_2) = f(t_1)g(t_2) + g(t_1)f(t_2) \end{cases} \qquad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Definizione 1.2. Una coppia di funzioni reali continue (f, g) soddisfacente le relazioni (1.3) e (1.4) si dice una coppia di funzioni circolari.
E' chiaro che se (f, g) è una coppia di funzioni circolari, $h = f + ig$ è un omomorfismo continuo di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{U}$.

1.3 Proprietà degli omomorfismi continui $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$

Osservazione 3. In $\mathbb{U}$ esiste un elemento, -1, diverso dall'elemento neutro 1, tale che il suo quadrato sia 1.
Tuttavia in $\mathbb{R}$ non esiste alcun elemento $x \neq 0$ tale che $2x = 0$.
Questo nega la possibilità di un qualsiasi isomorfismo della retta reale nella circonferenza unitaria, e pertanto, di un isomorfismo continuo.
Abbiamo comunque il seguente risultato:

Teorema 1.3.1. *Ogni omomorfismo continuo non banale* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ *è suriettivo.*

Dimostrazione. La funzione $f = Re \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, $\mathbb{R}$ è connesso, quindi $f(\mathbb{R})$ è connesso.
Poiché h è non banale esiste $x \in f(\mathbb{R}) \setminus \{1\}$ e, ovviamente, $\{1\} \in f(\mathbb{R})$, quindi $[x, 1] \subseteq f(\mathbb{R})$.
Segue che per ogni $z \in \mathbb{U}$ con $Re(z) \geq x$ almeno uno tra z e $\bar{z} = z^{-1}$ appartiene a $h(\mathbb{R})$.
D'altro canto, $h(\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $\mathbb{U}$ e quindi se contiene uno fra z e z^{-1} allora li contiene entrambi, pertanto $\{z \in \mathbb{U} \mid Re(z) \geqslant x\} \subseteq h(\mathbb{R})$, cioè $h(\mathbb{R})$ contiene un intorno di 1.
Tenendo conto di questo risultato, sia dapprima z un punto qualunque di $\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$ e sia z_n la successione $z_0 = z,\ z_{n+1}^2 = z_n$.
Poiché $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ e $h(\mathbb{R})$ contiene un intorno di 1, esiste un indice $\overline{n}$ tale che $z_{\overline{n}} \in h(\mathbb{R})$.
D'altra parte, per costruzione, $z = z_{\overline{n}}^{2\overline{n}}$ ed essendo $h(\mathbb{R})$ un sottogruppo se ne deduce che $z \in h(\mathbb{R})$.
Supponiamo poi che $z \in \mathbb{U}_3 \cup \mathbb{U}_4$, allora $\bar{z} = z^{-1} \in \mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_2$ perciò $z^{-1} \in h(\mathbb{R})$ e necessariamente anche $z \in h(\mathbb{R})$.
Abbiamo quindi concluso che ogni elemento di $\mathbb{U}$ si trova in $h(\mathbb{R})$.
Pertanto h è suriettivo. □

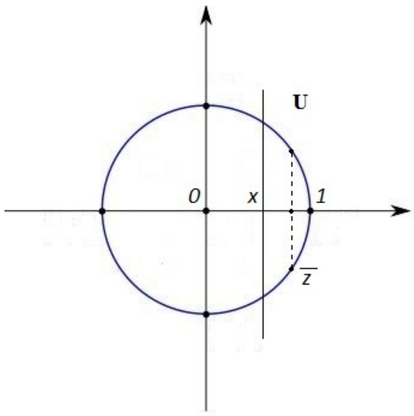

Figura 1.2: Rappresentazione dell'insieme $\{z \in \mathbb{U} \mid Re(z) \geqslant x\}$

Teorema 1.3.2. *Ogni omomorfismo continuo non banale* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ *è periodico e ha un periodo minimo.*

Dimostrazione. Ricordando la dimostrazione del *Teorema 1.3.1*:
esiste $x \in Re \circ h(\mathbb{R}) \setminus \{1\}$ tale che $\{z \in \mathbb{U} \mid Re(z) \geqslant x\} \subseteq h(\mathbb{R})$.
Ancor più, $h(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ contiene l'intorno bucato $V = \{z \in \mathbb{U} \mid x \leqslant Re(z) < 1\}$ di 1.
Riprendiamo la successione in $\mathbb{U}$ definita come
$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_{n+1}^2 = \sigma_n \quad \text{con} \quad \sigma_{n+1} \in \mathbb{U}_1 \quad \text{per ogni } n \geqslant 1.$
Poiché $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1$ ed è facile verificare che $\sigma_n \neq 1$ per ogni intero positivo n, esisterà un indice $\overline{n}$ tale che $\sigma_{\overline{n}} \in V \subseteq h(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, cioè $\sigma_{\overline{n}} = h(t_0)$ per qualche $t_0 \neq 0$.
Dunque $h(2^{\overline{n}} t_0) = \sigma_{\overline{n}}^{2^{\overline{n}}} = 1$ e posto $T = |2^{\overline{n}} t_0| > 0$ abbiamo:
$h(t + T) = h(t)h(T) = h(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Cioè h è periodico.
Siano ora $K = \{t \in \mathbb{R} \mid h(t) = 1\}$ il nucleo di h e $K^+ = K \cap \mathbb{R}^+$.
Per quanto detto $K^+ \neq \varnothing$ mentre K è chiuso in quanto controimmagine continua del chiuso $\{1\}$ e chiaramente $K \neq \mathbb{R}$ poiché h è non banale.
Se fosse $\inf(K^+) = 0$ allora K conterrebbe reali arbitrariamente piccoli così come i loro multipli, essendo un sottogruppo di $\mathbb{R}$, da cui risulterebbe K denso in $\mathbb{R}$ e, essendo chiuso, $K = \mathbb{R}$, assurdo.
Dunque $a := \inf(K^+) > 0$ e sempre poiché K è chiuso, $a \in K$, ovvero a è il minimo elemento di K^+.
Constatando che K^+ è l'insieme di tutti i periodi di h segue che h ha un periodo minimo. □

Osservazione 4. Se h è un omomorfismo continuo di minimo periodo $a > 0$, la restrizione di h all'intervallo $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[$ è iniettiva.
Ricordando che a è un elemento del nucleo di h, i punti $\frac{a}{2}$ e $-\frac{a}{2}$ vengono mandati in un medesimo punto diverso da 1 il cui quadrato è 1, dunque necessariamente $h(\frac{a}{2}) = h(-\frac{a}{2}) = -1$.
I punti $\frac{a}{4}$ e $-\frac{a}{4}$ vengono mandati in due punti distinti (sempre per l'iniettività di h), fra loro coniugati (poiché $\frac{a}{4}$ e $-\frac{a}{4}$ sono opposti) e opposti fra loro (poiché $\frac{a}{4} - (-\frac{a}{4}) = \frac{a}{2}$ che viene mandato in -1).
Pertanto, per i valori $h(\frac{a}{4})$ e $h(-\frac{a}{4})$ si hanno solo due possibilità:

$$\begin{cases} h(\frac{a}{4}) = i \\ h(-\frac{a}{4}) = -i \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} h(\frac{a}{4}) = -i \\ h(-\frac{a}{4}) = i \end{cases}$$

Teorema 1.3.3. *Sia* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ *un omomorfismo continuo di minimo periodo* $a > 0$ *tale che* $h(\frac{a}{4}) = i$.
Allora h *porta in modo biettivo l'intervallo* $[0, \frac{a}{4}]$ *in* $\mathbb{U}_1$*, l'intervallo* $[\frac{a}{4}, \frac{a}{2}]$ *in* $\mathbb{U}_2$*, l'intervallo* $[-\frac{a}{2}, -\frac{a}{4}]$ *in* $\mathbb{U}_3$*, l'intervallo* $[-\frac{a}{4}, 0]$ *in* $\mathbb{U}_4$.

Dimostrazione. Riserviamoci delle funzioni circolari $f = Re \circ h$, $g = Im \circ h$.
Poiché $h(]0, \frac{a}{4}[)$ non contiene né 1, né -1, né i, né $-i$ segue che gli insiemi $f(]0, \frac{a}{4}[)$ e $g(]0, \frac{a}{4}[)$ non contengono alcuno dei punti -1, 0, 1.
Tuttavia, essendo insiemi connessi come immagini continue di un connesso, dovranno essere contenuti nell'intervallo $]-1, 0[$ oppure nell'intervallo $]0, 1[$.
D'altra parte, l'insieme $h([0, \frac{a}{4}])$ contiene i punti 1 e i, quindi sia $f([0, \frac{a}{4}])$ che $g([0, \frac{a}{4}])$ contengono i punti 0, 1, pertanto devono coincidere con l'intervallo $[0, 1]$.
Segue che $h([0, \frac{a}{4}])$ è contenuta in $\mathbb{U}_1$ ma osservando che l'applicazione *Re* porta in modo biettivo $\mathbb{U}_1$ in $[0, 1]$ deve essere che $h([0, \frac{a}{4}]) = \mathbb{U}_1$.
Analogo discorso si può fare per gli altri intervalli.
Ma si può osservare che l'intervallo $[\frac{a}{4}, \frac{a}{2}]$ si può ottenere dall'intervallo $[0, \frac{a}{4}]$ mediante una traslazione di ampiezza $\frac{a}{4}$. Poiché $h(\frac{a}{4}) = i$ alla traslazione di $\frac{a}{4}$ corrisponde la moltiplicazione per i (geometricamente la rotazione di un angolo retto) e questa porta $\mathbb{U}_1$ in $\mathbb{U}_2$ in modo biettivo. $\square$

Osservazione 5. Dalla dimostrazione del *Teorema 1.3.3* risulta che $f = Re \circ h$ porta in modo biettivo l'intervallo $[0, \frac{a}{4}]$ nell'intervallo $[0, 1]$.
Essendo essa continua, si può affermare che è monotona in senso stretto.
Essendo poi $f(0) = 1$, $f(\frac{a}{4}) = 0$ si deduce che è decrescente.
Analogamente si prova che la funzione $g = Im \circ h$ è crescente in $[0, \frac{a}{4}]$.
Allo stesso modo si può completare lo studio qualitativo delle funzioni circolari f e g, ritrovando proprietà già note.

1.4 Costruzione delle funzioni circolari

Abbiamo mostrato che ogni omomorfismo continuo non banale $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ è periodico e i suoi periodi sono multipli di un periodo minimo.
Affrontiamo ora il problema dell'esistenza e della determinazione di questi omomorfismi. In particolare vediamo se, per ogni reale positivo a, vi sono effettivamente omomorfismi di minimo periodo a, e quanti sono.
Cominciamo con alcune considerazioni:

i Se esiste un omomorfismo h tale che $h(\frac{a}{4}) = i$ ne esiste anche uno $\bar{h}$ tale che $\bar{h}(\frac{a}{4}) = -i$:
basta prendere, per l'appunto, il coniugato di h che è pure un omomorfismo.

ii Se abbiamo un omomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ continuo non banale di minimo periodo a, allora per ogni $b > 0$ risulta chiaramente che l'applicazione $t \mapsto h(\frac{a}{b}t)$ è anch'essa un omomorfismo continuo non banale di minimo periodo b.

Dunque possiamo limitarci a studiare solo gli omomorfismi continui non banali di periodo fissato a.

Teorema 1.4.1. *Per ogni numero reale positivo a, esiste un unico omomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ continuo di minimo periodo a tale che $h(\frac{a}{4}) = i$.*

Dimostrazione. Iniziamo supponendo che h esista e richiamiamo la successione σ_n in $\mathbb{U}$.
Osserviamo che per ogni omomorfismo h soddisfacente alle condizioni dell'enunciato si deve avere:

$$h(a) = 1, \quad h(\tfrac{a}{2}) = -1, \quad h(\tfrac{a}{4}) = i, \quad \dots \quad , h(\tfrac{a}{2^n}) = h(\tfrac{a}{2^{n+1}})^2$$

Pertanto per ogni intero $n \geq 0$ abbiamo $h(\frac{a}{2^n}) = \sigma_n$.
Ora posto

$$D = \left\{ \frac{ap}{2^n} \mid p, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$$

è sufficiente provare che

$$h : D \to \mathbb{U} \qquad h\left(\frac{ap}{2^n}\right) = \sigma_n^p$$

è ben definito e si prolunga per continuità ad un omomorfismo continuo $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$.

Per quanto riguarda la buona definizione abbiamo che se
$p, q, n, m \in \mathbb{Z}$ con $n \geq m \geq 0$ sono tali che $\frac{ap}{2^n} = \frac{aq}{2^m}$
allora $p = 2^{n-m}q$, quindi

$$h\left(\frac{ap}{2^n}\right) = \sigma_n^p = \sigma_n^{2^{n-m}q} = (\sigma_n^{2^{n-m}})^q = \sigma_m^q = h\left(\frac{aq}{2^m}\right)$$

cioè h è ben definito.
Inoltre h è un omomorfismo:

$$h\left(\frac{ap}{2^n} + \frac{aq}{2^m}\right) = h\left(\frac{a(p + 2^{n-m}q)}{2^n}\right) = \sigma_n^{p+2^{n-m}q} = \sigma_n^p \sigma_n^{2^{n-m}q} =$$

$$= \sigma_n^p (\sigma_n^{2^{n-m}})^q = \sigma_n^p \sigma_m^q = h\left(\frac{ap}{2^n}\right) h\left(\frac{aq}{2^m}\right)$$

e segue facilmente che ogni estensione continua di h è ancora un omomorfismo.
Infine supponiamo $n = m$, si ha:

$$\left|h\left(\frac{ap}{2^n}\right) - h\left(\frac{aq}{2^n}\right)\right| = |\sigma_n^p - \sigma_n^q| = \left|\sigma_n^q(\sigma_n^{p-q} - 1)\right| = \left|\sigma_n^q(\sigma_n - 1)\sum_{i=0}^{p-q-1} \sigma_n^i\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\sigma_n^q|\,|\sigma_n - 1| \sum_{i=0}^{p-q-1} \left|\sigma_n^i\right| \leqslant |\sigma_n - 1|\,(p-q) \leqslant \frac{a}{2^n}(p-q) = \left|\frac{ap}{2^n} - \frac{aq}{2^n}\right|$$

per la *Proposizione 1.1.3*, quindi h è lipschiziano e pertanto uniformemente continuo.
D'altra parte D è denso in $\mathbb{R}$, dunque esiste un'unica estensione continua di h su tutto $\mathbb{R}$. □

Dunque esistono solo due omomorfismi di minimo periodo a, uno reciproco (o coniugato) dell'altro.
Questi due omomorfismi corrispondono ai due versi di rotazione, come siamo abituati a vederli intuitivamente.

1.5 Alcuni risultati notevoli

Proposizione 1.5.1. *Detto* h_a *l'unico omomorfismo* $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$ *di minimo periodo* a *tale che* $h(\frac{a}{4}) = i$*, vale la seguente relazione di limite:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{h_a(t) - 1}{t} = \frac{2\pi i}{a}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se esiste il limite da destra, questo coincide con il limite da sinistra:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{h_a(t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{h_a(-t) - 1}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{h_a(t) - 1}{t\, h_a(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{h_a(t) - 1}{t}$$

Quindi è sufficiente provare che esiste:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{h_a(t) - 1}{t} = \frac{2\pi i}{a}$$

Definiamo per comodità:

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C} \qquad \varphi(t) = \frac{h_a(t) - 1}{t}$$

Dalla *Proposizione 1.1.4* abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(\sigma_n - 1)}{a} = \frac{2\pi i}{a}$$

D'altra parte, per ogni $p, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$:

$$\varphi\left(\frac{ap}{2^n}\right) = \frac{h_a\left(\frac{a}{2^n}\right)^p - 1}{\frac{a}{2^n}} \cdot \frac{h_a\left(\frac{a}{2^n}\right)^{p-1} + h_a\left(\frac{a}{2^n}\right)^{p-2} + \cdots + 1}{p} =$$

$$= \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) \cdot \frac{h_a\left(\frac{a}{2^n}\right)^{p-1} + h_a\left(\frac{a}{2^n}\right)^{p-2} + \cdots + 1}{p} =$$

$$= \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) \cdot \frac{h_a\left(\frac{a(p-1)}{2^n}\right) + h_a\left(\frac{a(p-2)}{2^n}\right) + \cdots + 1}{p}$$

Ora, ricordando che h è continuo:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{tale che se} \quad t \in [0, \delta_\varepsilon] \quad \text{allora} \quad |h_a(t) - 1| < \varepsilon$$

Supponiamo quindi $\frac{ap}{2^n} \in [0, \delta_\varepsilon]$, abbiamo:

$$\left|\varphi\left(\frac{ap}{2^n}\right) - \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)\right| = \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) \cdot \frac{\left|h_a\left(\frac{a(p-1)}{2^n}\right) - 1 + h_a\left(\frac{a(p-2)}{2^n}\right) - 1 + \cdots + 1 - 1\right|}{p} \leq$$

$$\leq \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) \cdot \frac{\left|h_a\left(\frac{a(p-1)}{2^n}\right) - 1\right| + \left|h_a\left(\frac{a(p-2)}{2^n}\right) - 1\right| + \cdots + |1 - 1|}{p} < \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right)\varepsilon$$

Pertanto

$$\lim_{\frac{ap}{2^n} \to 0^+} \varphi\left(\frac{ap}{2^n}\right) = \lim_{\frac{a}{2^n} \to 0^+} \varphi\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{2\pi i}{a}$$

Essendo φ continua e $\left\{\frac{ap}{2^n} \mid p, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\right\}$ denso in $\mathbb{R}^+$ segue che esiste in $\mathbb{C}$ il limite di $\varphi(t)$ da destra, da cui la tesi. □

Osservazione 6. Assumendo $a = 2\pi$ la relazione di limite trovata assume la forma:

$$\lim_{t \to 0} \frac{h_{2\pi}(t) - 1}{t} = i$$

Di conseguenza, anche le formule del calcolo differenziale risulteranno particolarmente semplici.

Proposizione 1.5.2. *$h_{2\pi}$ è derivabile e soddisfa:*

$$h'_{2\pi}(t) = i\, h_{2\pi}(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Essendo

$$\lim_{u \to 0} \frac{h_{2\pi}(u) - 1}{u} = i \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

si ha:

$$\lim_{u \to 0} \frac{h_{2\pi}(t + u) - h_{2\pi}(t)}{u} = h_{2\pi}(t) \lim_{u \to 0} \frac{h_{2\pi}(u) - 1}{u} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

□

Definizione 1.3. Le funzioni $Re \circ h_{2\pi}$, $Im \circ h_{2\pi}$ si indicano con i simboli cos, sin rispettivamente.
D'ora in poi, parlando di funzioni circolari, ci riferiremo a queste.

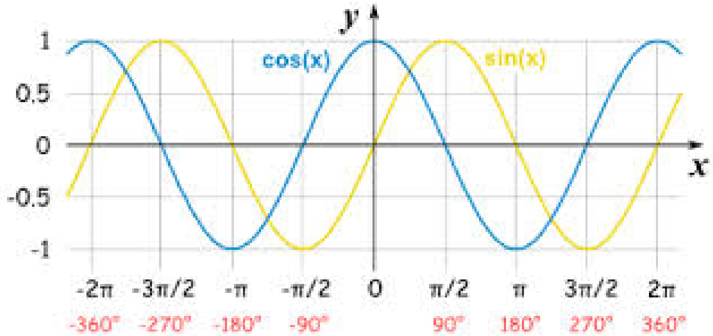

Figura 1.3: Grafico delle funzioni circolari *cos* e *sin*

E' dunque immediato il Teorema di Pitagora:

$$sin^2(t) + cos^2(t) = 1 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Si verifica facilmente che *sin* e *cos* sono periodiche di minimo periodo 2π.

Inoltre da *Proposizione 1.5.1* e *Proposizione 1.5.2* si ottengono subito le seguenti relazioni:

$$\lim_{t\to 0} \frac{cos(t)-1}{t} = 0 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{sin(t)-1}{t} = 1$$

e

$$sin' = cos \qquad cos' = -sin$$

A questo punto è possibile ricavare ogni enunciato di trigonometria dalle proprietà di $h_{2\pi}$, ad esempio le formule di duplicazione:

$$sin(2t) = Im(h_{2\pi}(2t)) = Im(h_{2\pi}(t)^2) = 2Re(h_{2\pi}(t))Im(h_{2\pi}(t)) = 2sin(t)cos(t)$$

Capitolo 2

Le funzioni esponenziali

Ci proponiamo ora di studiare gli omomorfismi della retta reale nella semiretta dei reali positivi viste come gruppi abeliani rispetto le ordinarie operazioni di somma e prodotto rispettivamente.
Se imponiamo a questi omomorfismi la continuità otteniamo funzioni di grande importanza: le funzioni esponenziali.
Il metodo di costruzione sarà il medesimo di quello usato per le funzioni circolari: costruzione di un omomorfismo su un sottogruppo denso, poi prolungamento per continuità.

Proposizione 2.0.3. *Fissato un numero reale positivo a, esiste un unico omomorfismo f del gruppo additivo $\mathbb{Q}$ dei razionali nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+$ dei reali positivi tale che $f(1) = a$.*

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ un omomorfismo tale che $f(1) = a$.
Per ogni $n \in \mathbb{Z},\ n > 0$ deve essere

$$f(n) = f(1)^n = a^n$$

Deve essere poi

$$f(0) = 1$$

Inoltre per ogni intero $m < 0$, posto $m = -k$:

$$f(m) = f(-k) = \frac{1}{f(k)} = \frac{1}{a^k}$$

Cioè per ogni $m \in \mathbb{Z}$ risulta

$$f(m) = a^m$$

Dunque è ben individuato un omomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ tale che $1 \mapsto a$.
Estendiamo ora tale omomorfismo al gruppo dei razionali.

Essendo unica la radice $n-esima$ di un numero reale positivo nell'insieme dei reali positivi e osservando che

$$f\left(\frac{1}{n}\right)^n = f(1) = a$$

l'unica scelta possibile per ogni intero $n > 0$ sarà

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$$

Segue che per ogni $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ deve essere

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (\sqrt[n]{a})^m$$

Mostriamo quindi che tale definizione è ben posta, cioè dati $m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$ con $n, n' > 0$ tali che $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ risulta

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n']{a})^{m'} \tag{2.1}$$

L'uguaglianza (2.1) è evidente quando $m = m' = 0$.
Supponiamo dapprima $m, m' > 0$.
Elevando ambo i membri alla potenza $mn' = m'n$ si ha:

$$[(\sqrt[n]{a})^m]^{m'n} = [(\sqrt[n]{a})^n]^{mm'} = a^{mm'} = [(\sqrt[n']{a})^{n'}]^{mm'} = [(\sqrt[n']{a})^{m'}]^{mn'}$$

e anche in questo caso la (2.1) è verificata per l'unicità della radice $m'n - esima$.
Se poi m e m' sono negativi basta prendere i reciproci di entrambi i membri nell'uguaglianza ed elevare alla potenza $(-m')n = (-m)n'$.
Osservando infine che per ogni $m, m', n, n' \in \mathbb{Z}$, $n, n' > 0$:

$$f\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) = f\left(\frac{mn' + m'n}{nn'}\right) = (\sqrt[nn']{a})^{mn'+m'n} =$$

$$= (\sqrt[nn']{a})^{mn'}(\sqrt[nn']{a})^{m'n} = (\sqrt[n]{a})^m(\sqrt[n']{a})^{m'} = f\left(\frac{m}{n}\right) f\left(\frac{m'}{n'}\right)$$

segue che f è effettivamente un omomorfismo. $\square$

Definizione 2.1. L'omomorfismo $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ viene indicato con $\{x \mapsto a^x\}$ che si accorda bene con la consueta notazione delle potenze.

Proposizione 2.0.4. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Allora l'omomorfismo*

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto a^x$$

è crescente ed è uniformemente continuo su ogni intervallo superiormente limitato.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, essendo $a > 1$, per ogni $h \in \mathbb{Q}$, $h > 0$ risulta

$$a^h > 1$$

Segue che per ogni $x, x' \in \mathbb{Q}$, $x' > x$, posto $x' = x + h$ allora

$$a^{x'} = a^{x+h} = a^x a^h > a^x$$

cioè l'omomorfismo $\{x \mapsto a^x\}$ è crescente.
Osserviamo inoltre che

$$\forall\, \sigma > 0 \quad \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \,:\, 1 + n\sigma > a \quad \forall\, n \geqslant \overline{n}$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+\sigma)^n \geqslant 1 + n\sigma > a$$

quindi

$$1 + \sigma > a^{\frac{1}{n}} > 1$$

dunque

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \sigma$$

cioè

$$\forall\, \sigma > 0 \quad \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} \,:\, |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \sigma \quad \forall\, n \geqslant \overline{n}$$

Pertanto

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

D'altra parte, essendo l'omomorfismo crescente, per ogni $h \in \mathbb{Q}$, $0 < h \leqslant \frac{1}{n}$ si ha:

$$1 < a^h \leqslant a^{\frac{1}{n}}$$

quindi per il Teorema del confronto anche

$$\lim_{h \to 0^+} a^h = 1 \tag{2.2}$$

Possiamo ora dimostrare l'uniforme continuità su ogni intervallo di $\mathbb{Q}$ superiormente limitato.
Considero l'intervallo $]-\infty, m[$ con m razionale.
Dalla relazione di limite (2.2) segue:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \,:\, 0 < h < \delta \;\Rightarrow\; a^h - 1 < \frac{\varepsilon}{a^m}$$

Ma allora, per ogni $x, x' \in]-\infty, m[$ tali che $|x - x'| < \delta$, $x' \geqslant x$ si ha:

$$0 \leqslant a^{x'} - a^x = a^x(a^{x'-x} - 1) < a^m \frac{\varepsilon}{a^m} = \varepsilon$$

La tesi risulta così provata. $\square$

Osservazione 7. Nel caso sia $0 < a < 1$ si può dimostrare in modo analogo che l'omomorfismo $\{x \mapsto a^x\}$ è decrescente e uniformemente continuo su ogni intervallo inferiormente limitato.

Teorema 2.0.5. *Fissato un numero reale positivo a, esiste un unico omomorfismo continuo del gruppo additivo $\mathbb{R}$ nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+$ che manda 1 in a. Per ogni $a \neq 1$ esso è, inoltre, un isomorfismo di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^+$.*

Dimostrazione. Per la *Proposizione 2.0.3* risulta costruito un unico omomorfismo $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tale che $f(1) = a$.
Se questo omomorfismo può essere prolungato in un omomorfismo continuo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ esso è unico in virtù della continuità e della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
Dimostriamo che esiste.
Se $a = 1$ allora $f(\mathbb{Q}) = 1$ ed è chiaro che si prolunga a tutta la retta reale nell'omomorfismo banale che manda $\mathbb{R}$ in 1.
Sia $a > 1$.
Per la *Proposizione 2.0.4*, per ogni intero $m > 0$, la restrizione di f all'intervallo $\mathbb{Q} \cap [-m, m]$ risulta uniformemente continua e $f(\mathbb{Q} \cap [-m, m]) \subset [a^{-m}, a^m]$ che è un sottoinsieme chiuso in $\mathbb{R}$, contenuto in $\mathbb{R}^+$, ed è perciò completo.
Pertanto f può essere steso ad ogni intervallo $[-m, m]$ con m intero > 0.
Poiché per ogni x reale esiste m intero positivo tale che $|x| < m$ risulta definita su tutto $\mathbb{R}$ una funzione continua la cui restrizione a $\mathbb{Q}$ è proprio f.
L'estensione di f così ottenuta la indichiamo ancora con $\{x \mapsto a^x\}$.
Essa è crescente ed è un omomorfismo di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^+$.
Infatti se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ esistono $r, s \in \mathbb{Q}$ tali che

$$x < r < s < y$$

Siano poi r_n, s_n successioni in $\mathbb{Q}$ tali che r_n tende decrescendo a x e s_n tende crescendo a y.
Allora esiste un indice $\overline{n}$ per cui

$$a^x \leqslant a^{r_{\overline{n}}} < a^r < a^s < a^{s_{\overline{n}}} \leqslant a^y$$

(ricordando che, essendo $a > 1$, $\{x \mapsto a^x\}$ è crescente in $\mathbb{Q}$).
Inoltre per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, siano x_n, y_n successioni razionali che convergono a x, y rispettivamente, $(x_n + y_n)$ è una successione in $\mathbb{Q}$ che converge a $x + y$ e

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} a^{y_n} = a^x a^y$$

Tenendo ora conto di quello che accade in $\mathbb{Z}$ è facile mostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

Pertanto, per il teorema della funzione inversa, l'omomorfismo $\{x \mapsto a^x\}$ è biettivo (e la funzione inversa risulta continua).
Quindi la tesi è verificata per $a > 1$.
Nel caso sia $0 < a < 1$ la dimostrazione può essere svolta in modo analogo (tenendo conto che ora l'omomorfismo f definito in $\mathbb{Q}$ risulta decrescente). $\square$

Definizione 2.2. L'omomorfismo $\{x \mapsto a^x\}$ si dice funzione esponenziale di base a.
Se $a \neq 1$ l'omomorfismo inverso si dice logaritmo di base a e si indica $\{y \mapsto log_a y\}$.
Dal teorema della funzione inversa segue inoltre che questa funzione risulta strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

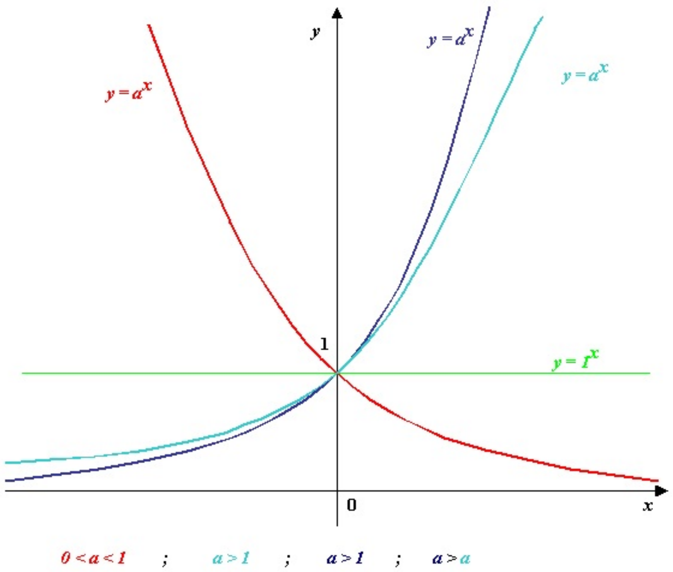

Figura 2.1: Grafico della funzione $\{x \mapsto a^x\}$ al variare di a

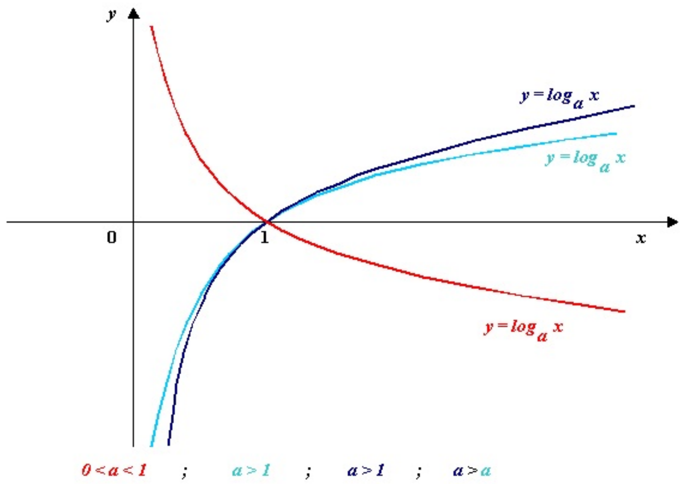

Figura 2.2: Grafico della funzione $\{y \mapsto log_a y\}$ al variare di a

Osservazione 8. Qualunque siano i numeri reali x e y e qualunque sia $a > 0$, le funzioni

$$\{y \mapsto (a^x)^y\} \quad e \quad \{y \mapsto a^{xy}\}$$

sono omomorfismi continui di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$ che portano 1 in a^x, pertanto devono coincidere per il *Teorema 2.0.5* .
Da ciò si ricava la relazione

$$(a^x)^y = a^{xy} \tag{2.3}$$

Osserviamo inoltre che le note identità:

$$\bullet\, log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y) \qquad \bullet\; log_a x^y = y\, log_a x$$

sono conseguenza immediata della proprietà di trasformare prodotti in somme degli omomorfismi.
Dalla relazione (2.3) si possono dedurre molte altre importanti formule, come per esempio:

$$\bullet\, log_a y = (log_a b)(log_b y) \qquad \bullet\; log_a b = \frac{1}{log_b a} \qquad \bullet\; a^x = b^{(log_b a)x}$$

Infatti:

$$a^{(log_a b)(log_b y)} = \left(a^{log_a b}\right)^{log_b y} = b^{log_b y} = y = a^{log_a y}$$

e di conseguenza

$$(log_a b)(log_b a) = log_a a = 1$$

Inoltre, dall'identità

$$log_b a^x = x\, log_b a$$

segue

$$b^{log_b a^x} = b^{x(log_b a)}$$

cioè

$$a^x = b^{(log_b a)x}$$

Capitolo 3

Il numero e di Nepero

In questo paragrafo vedremo alcuni limiti notevoli che sono alla base del calcolo differenziale per le funzioni esponenziali e logaritmiche.
Per prima cosa definiamo il numero e di Nepero, come limite di una particolare successione limitata.

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le successioni definite come:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Proposizione 3.0.6. *La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $a_n < b_n$ per ogni intero $n \geqslant 1$.*

Dimostrazione. Per provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente basta mostrare che $a_n \geqslant a_{n-1}$ per ogni $n \geqslant 2$.
Questa disuguaglianza equivale a

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

che equivale ancora a

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{1}{n}$$

Quest'ultima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

ponendo $x = -\frac{1}{n^2}$.

Per provare la decrescenza dalla successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ basta dimostrare che $b_n < b_{n-1}$ per ogni $n \geqslant 2$, ma con ragionamenti analoghi a quelli precedenti si vede che questo equivale a dimostrare la disuguaglianza

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$

che segue dalla disuguaglianza di Bernoulli ponendo $x = \frac{1}{n^2-1}$.
Infine per provare che $a_n < b_n$, basta osservare che

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n > a_n$$

□

Proposizione 3.0.7. *Le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono allo stesso limite.*

Dimostrazione. Poiché $a_1 \leqslant a_n < b_n \leqslant b_1$, le due successioni sono limitate, quindi esse convergono a dei limiti finiti per il teorema sul limite delle successioni monotone.
Inoltre, essendo $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n$, segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Pertanto i due limiti coincidono. □

Definizione 3.1. Il limite delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice numero di Nepero e si denota con la lettera e.

Osservazione 9. Successive approssimazioni di e si possono ottenere utilizzando le stime

$$a_n < e < b_n$$

per ogni $n \geq 1$.
In particolare:

$$2 = a_1 < e < b_6 < 3$$

quindi

$$2 < e < 3$$

3.1 Alcuni limiti notevoli

Utilizzeremo la formula

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

per calcolare alcuni limiti notevoli.
Consideriamo la funzione

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

definita quando la base è positiva, cioè per x appartenente all'insieme $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

Proposizione 3.1.1. *Si ha che:*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il limite a $+\infty$.
Se $n\le x<n+1$ e $n>0$ si ha:

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$$

Per le proprietà di monotonia delle potenze sia rispetto alla base che rispetto all'esponente segue:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Il primo e ultimo termine di questa catena di disuguaglianze tendono ad e, infatti:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1}=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$

Pertanto, per il teorema del confronto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Per quanto riguarda il limite a $-\infty$, posto $x=-t-1$, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=e$$

□

Corollario 3.1.2. *Sia a reale positivo, $a \neq 1$, allora:*

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{log_e a} \qquad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = log_e a$$

Dimostrazione. Ponendo $x = \frac{1}{y}$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} log_a \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = log_a e = \frac{1}{log_e a}$$

Il limite per $x \to 0^-$ si calcola in modo analogo.
Osserviamo infine che il secondo limite si riduce al primo ponendo $a^x - 1 = y$, infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{log_a(1+y)} = log_e a$$

□

Osservazione 10. Si noti che, se $a = e$, i limiti precedenti assumono la forma particolarmente semplice:

$$\bullet \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \bullet \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

dove ln indica la funzione logaritmo in base e e si chiama *logaritmo naturale*.

3.2 Derivazione

Dal limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

otteniamo la seguente formula di derivazione:

$$(e^x)'=e^x$$

Infatti, per ogni x reale, si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h}=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

Inoltre, per ogni $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, è ben definita su tutto $\mathbb{R}$ la funzione

$$a^x=e^{ln(a^x)}=a^{x\,lna}$$

Pertanto, dalla regola di derivazione della funzione composta:

$$\left(e^{x\,lna}\right)'=e^{x\,lna}\cdot lna=a^x\,lna$$

da cui

$$(a^x)'=a^x\,lna$$

Infine, dal teorema di derivazione della funzione inversa, essendo $e^x\neq 0$ e $a^x\neq 0$ per ogni x reale, otteniamo:

$$(lnx)'=\frac{1}{(e^y)'_{|y=lnx}}=\frac{1}{e^{lnx}}=\frac{1}{x}$$

e di conseguenza

$$(log_ax)'=\frac{1}{(a^y)'_{|y=log_ax}}=\frac{1}{a^{log_ax}\cdot log_ea}=\frac{1}{x\cdot log_ea}=\frac{1}{x}log_ae$$

3.3 Non razionalità di e

Teorema 3.3.1. *Il numero di Nepero e non è razionale.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che e sia razionale, possiamo quindi scrivere

$$e = \frac{p}{q}$$

con p, q interi positivi (essendo $2 < e < 3$).
Dal noto sviluppo in serie di Taylor (del quale daremo una spiegazione dettagliata nel prossimo capitolo)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

segue:

$$e = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

quindi

$$\frac{p}{q} q! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q!}{n!}$$

Ora:

$$0 < p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots <$$

$$< \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots = \frac{1}{q} < 1$$

per la formula della serie geometrica.
Osservando che il primo membro di questa catena di uguaglianze e disuguaglianze è un intero positivo segue un assurdo.
L'assurdo è dovuto all'aver supposto e razionale. $\square$

Capitolo 4

Sviluppi in serie di Taylor della funzione esponenziale e delle funzioni circolari

Cominciamo subito a fornire una condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di una funzione:

Teorema 4.0.2. *Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo della retta reale $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, si supponga inoltre f di classe $C^\infty(I)$.*
Se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M\frac{n!}{h^n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $x \in I$, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

è puntualmente convergente in I e la sua somma è $f(x)$.
Si può inoltre dimostrare che la serie converge uniformemente alla sua somma nei compatti di I.

Dimostrazione. Essendo $f \in C^\infty(I)$ possiamo applicare la formula di Taylor con resto di Lagrange per un arbitrario valore di $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove ξ è un numero reale strettamente compreso tra x e x_0.
Denotando ora con $P_n(x)$ l' $n - esimo$ polinomio di Taylor con centro in x_0 otteniamo:

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq M\frac{(n+1)!}{h^{n+1}}\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{h^{n+1}}$$

Osservando inoltre che nelle ipotesi fatte

$$\frac{|x - x_0|}{h} < 1$$

segue che

$$M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{h^{n+1}} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Definizione 4.1. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor della funzione f con centro in x_0.

Corollario 4.0.3. *Nelle ipotesi del Teorema 4.0.2 supponiamo che esista $k > 0$ tale che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq K$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, per ogni $x \in I$.
Allora $f(x)$ risulta sviluppabile in serie di Taylor in I.

Dimostrazione. Ricordando la precedente dimostrazione si trova:

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq K \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Osservando che per ogni α reale vale

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$$

e ponendo

$$\alpha = K^{\frac{1}{n}} |x - x_0|$$

si conclude che

$$\lim_{n \to \infty} |f(x) - P_n(x)| = 0$$

□

4.1 La funzione esponenziale

Per $f(x) = e^x$ i calcoli sono particolarmente semplici.
Abbiamo già visto che

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Essendo poi che

$$f^{(n)}(0) = 1$$

per ogni n naturale, poniamo $x_0 = 0$.
Prendendo un qualsiasi intervallo del tipo $]-R, R[$ con R reale positivo otteniamo:

$$|f^{(n)}(x)| \leq K = e^R$$

Dunque, applicando il *Corollario 4.0.3*, si vede immediatamente che la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor su ogni intervallo $]-R, R[$, ottenendo così:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per l'arbitrarietà di $R > 0$ si conclude che la somma della serie è proprio la funzione $x \mapsto e^x$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$.
Si osserva immediatamente la convergenza assoluta della serie esponenziale su tutta la retta reale, ma non solo, tale serie è uniformemente convergente su ogni insieme limitato di $\mathbb{R}$ (cosa che era naturale aspettarsi, ricordando le proprietà viste nella costruzione delle funzioni esponenziali).

4.2 Le funzioni *sin* e *cos*

Sia $f(x) = sinx$, sappiamo che:

$$f'(x) = cosx, \quad f^{(2)}(x) = -sinx, \quad f^{(3)}(x) = -cosx, \quad f^{(4)}(x) = sinx$$

Dunque, per induzione:

$$f^{(4k)}(x) = sinx, \quad f^{(4k+1)}(x) = cosx, \quad f^{(4k+2)}(x) = -sinx, \quad f^{(4k+3)}(x) = -cosx$$

per ogni intero positivo k, e, in $x_0 = 0$:

$$f^{(4k)}(0) = 0, \quad f^{(4k+1)}(0) = 1, \quad f^{(4k+2)}(0) = 0, \quad f^{(4k+3)}(0) = -1$$

Inoltre per ogni x reale vale che

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1$$

Pertanto la funzione $x \mapsto sinx$ è sviluppabile in serie di Taylor su tutto $\mathbb{R}$ con sviluppo:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Analogamente, per $f(x) = cosx$ si trova:

$$f^{(4k)}(x) = cosx, \quad f^{(4k+1)}(x) = -sinx, \quad f^{(4k+2)}(x) = -cosx, \quad f^{(4k+3)}(x) = sinx$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, e, in $x_0 = 0$:

$$f^{(4k)}(0) = 1, \quad f^{(4k+1)}(0) = 0, \quad f^{(4k+2)}(0) = -1, \quad f^{(4k+3)}(0) = 0$$

Pertanto, con considerazioni analoghe a quelle fatte per il *seno*, anche la funzione $x \mapsto cosx$ ammette sviluppo in serie di Taylor su tutta la retta reale e si ha:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Nel prossimo capitolo potremo renderci subito conto di come questi sviluppi siano dipendenti fra loro e di come intervengano in modo cruciale nella trattazione di argomenti molto profondi e notevoli.

Capitolo 5

La funzione esponenziale complesso e le celebri identità

Gli studi che abbiamo compiuto, separatamente, per le funzioni circolari ed esponenziali verranno a fondersi nella definizione di esponenziale complesso.
Come sappiamo la funzione esponenziale può essere definita in molti modi, una delle più usate, poiché generalizzabile a molti ambiti, è la definizione attraverso la sua serie di potenze.

Definizione 5.1. Sia z una variabile complessa, definiamo la funzione

$$z \mapsto e^z$$

come la funzione definita dalla somma della seguente serie:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

detta serie esponenziale.

La definizione risulta ben posta poiché una facile applicazione del criterio del rapporto mostra che la serie di potenze converge in modo assoluto per ogni $z \in \mathbb{C}$.
Tale serie, inoltre, converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto del campo complesso e, di conseguenza, è differenziabile in senso complesso in ogni punto del piano complesso.

Osservazione 11. In modo diverso, ma del tutto equivalente, si può definire la funzione esponenziale complesso come il limite della successione

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

per ogni z in $\mathbb{C}$.

Infatti, dal teorema binomiale segue:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k}\, \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$$

dove

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\prod_{h=0}^{k-1}(n-h)}{k!}$$

Di conseguenza si ottiene:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-(k-1)}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \left(1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

In ogni addendo della sommatoria il fattore

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

ha valore assoluto minore di 1, e tende a 1 per $n \to \infty$.
Si può quindi passare al limite sotto il segno di serie, ottenendo:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

da cui discende l'uguaglianza delle definizioni:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Osservazione 12. La convergenza assoluta della serie che definisce la funzione esponenziale implica che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

Da cui l'importante proprietà di omomorfismo:

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

per ogni coppia di numeri complessi z e w.

Osservazione 13. E' importante osservare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ la definizione di esponenziale complesso di un numero reale è consistente con quella di esponenziale reale.
Pertanto la funzione

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto e^z$$

ristretta alla retta reale coincide con la funzione esponenziale reale che abbiamo definito precedentemente:

$$x \mapsto e^x$$

In particolare tale funzione eredita tutte le proprietà formali della classica funzione esponenziale nel campo reale.

Deduciamo ora una formula estremamente importante: la *formula di Eulero*.
Calcolando l'esponenziale e^z in $z = iy$ dove y è un numero reale, otteniamo:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!}$$

Osservando che

$$i^0 = i^4 = \ldots = 1, \quad i = i^5 = \ldots = i, \quad i^2 = i^6 = \ldots = -1, \quad i^3 = i^7 = \ldots = -i$$

Possiamo scrivere:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Dai noti sviluppi in serie di Taylor per le funzioni circolari segue la formula di Eulero:

$$e^{iy} = cosy + i\, siny$$

per ogni y reale.

Osservazione 14. La formula di Eulero stabilisce una relazione fra l'esponenziale e le funzioni circolari: considerando separatamente la parte reale e la parte immaginaria di e^{iy} si ottengono le sorprendenti identità:

$$cosy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad siny = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Queste identità sono del tutto inaspettate a partire dalla definizione geometrica di *seno* e *coseno*, inoltre possono essere utilizzate per definire le funzioni circolari nel campo complesso:

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad sinz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Teorema 5.0.1. *Sia z una variabile complessa, allora vale la seguente identità:*

$$e^z = e^x(cosy + i\,siny)$$

dove $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.

Dimostrazione. Posto $z = x + iy$, per la proprietà di omomorfismo della funzione esponenziale complesso si ha:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Ora la tesi segue immediatamente dalla formula di Eulero:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(cosy + i\,siny)$$

□

Osservazione 15. A questo risultato si sarebbe potuti arrivare ricordando che la funzione esponenziale fornisce un isomorfismo di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^+$ e la funzione $h_{2\pi}$ fornisce un omomorfismo di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{U}$.
Allora è evidente che l'applicazione

$$z = x + iy \mapsto e^x\, h_{2\pi}(y) = e^x(cosy + i\,siny)$$

fornisce un omomorfismo di $\mathbb{C}$ (dotato della struttura di gruppo rispetto all'addizione) su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (dotato della struttura di gruppo rispetto alla moltiplicazione).
Questo legame del tutto naturale che si osserva fra le funzioni circolari e la funzione esponenziale fa sorgere spontanea l'idea di una possibile periodicità di quest'ultima.
In effetti è così.

Proposizione 5.0.2. *Sia z una variabile complessa, la funzione*

$$z \mapsto e^z$$

risulta periodica con periodo $2\pi i$.

Dimostrazione. La dimostrazione discende immediatamente dal *Teorema 5.0.1* e dalla 2π-periodicità delle funzioni circolari:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x e^{i(y+2\pi)} =$$

$$= e^x(cos(y + 2\pi) + i\,sin(y + 2\pi)) = e^x(cosy + i\,siny) = e^z$$

□

5.1 L'identita $e^{i\pi} + 1 = 0$

Ponendo $y = \pi$ in $e^{iy} = cosy + i\,siny$ abbiamo

$$cos\pi = -1 \qquad sin\pi = 0$$

da cui la celebre identità:

$$e^{i\pi} = -1$$

che possiamo scrivere nella forma

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Tale equazione è nota come *identità di Eulero*.
Essa rappresenta una specie di totem della conoscenza matematica in quanto collega cinque costanti fondamentali:

0: l'elemento neutro per l'addizione, oltre al fatto che senza di esso la moderna notazione posizionale non sarebbe possibile.

1: l'elemento neutro per la moltiplicazione o anche il primo numero della successione dei numeri naturali.

i**:** l'unità immaginaria, la cui introduzione ha reso possibile nel campo complesso la risolubilità di tutte le equazioni polinomiali non costanti.

π**:** inizialmente definito come il rapporto fra una circonferenza e il suo diametro, ma nascosto anche nei ritmi delle onde acustiche come di quelle del mare; onnipresente tanto in matematica quanto in natura.

e**:** una costante fondamentale connessa allo studio dei logaritmi in analisi, come lo studio delle equazioni differenziali (ad esempio la soluzione dell'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = y$ con condizione iniziale $y(0) = 1$ è $y = e^x$).

Vi sono racchiusi, inoltre, gli operatori fondamentali dell'aritmetica: uguaglianza, addizione, moltiplicazione, esponenziazione.

Capitolo 6

La natura di π

π non è un numero intero, e ci si è chiesti per molto tempo se fosse un numero razionale, ossia un numero esprimibile come frazione di numeri interi.
Per molti secoli i matematici pensarono che non lo fosse ma la certezza arrivò solamente nel 1761 grazie a Johann Heinrich Lambert, matematico tedesco, che dimostrò che se x è un numero razionale diverso da zero allora la sua tangente è irrazionale e viceversa. Dal fatto che $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ segue dunque l'irrazionalità di $\frac{\pi}{4}$ e dunque di π.
E' possibile classificare ulteriormente i numeri reali in algebrici e trascendenti: i numeri reali vengono detti algebrici se sono soluzioni di un'equazione polinomiale a coefficienti interi, in caso contrario sono invece detti trascendenti.
I numeri razionali sono tutti algebrici, in quanto $\frac{a}{b}$ è sempre soluzione dell'equazione $bx - a = 0$.
Esistono poi numeri algebrici non razionali, tra cui per esempio $\sqrt{2}$, che è soluzione dell'equazione polinomiale a coefficienti interi $x^2 - 2 = 0$.

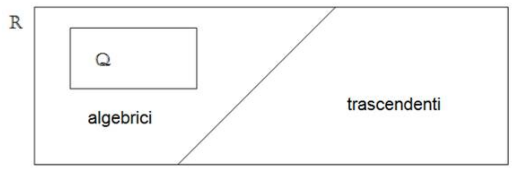

Figura 6.1: Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ dei numeri algebrici e trascendenti

Eulero aveva espresso nel 1794 il parere che π non potesse essere soluzione di una tale equazione, anche se la definizione di numero trascendente è posteriore.
Il primo numero di cui si mostrò la trascendenza fu e, e successivamente si moltiplicarono gli sforzi per dimostrare che π fosse trascendente.
Abbiamo visto che l'identità di Eulero per eccellenza è quella che lega fra loro i cinque numeri più importanti della matematica: $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Nel 1882 Ferdinand Von Lindemann, matematico tedesco, dimostrò che l'equazione $e^{ix} + 1 = 0$ non può avere alcuna soluzione algebrica (ricordiamo che la relazione $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$ lega la forma algebrica di un numero complesso alla sua forma esponenziale). Pertanto, essendo π soluzione di tale equazione, esso non può essere un numero algebrico.

Concludo riportando una dimostrazione puramente analitica dell'irrazionalità di π, dovuta a Adrien-Marie Legendre (1794). [1]

6.1 La non razionalità di π

Sia x un numero reale, $0 < x < 1$.
Per le proprietà della funzione esponenziale con base in $]0, 1[$ si ha:

$$0 < x^2 < x < 1$$

quindi

$$0 < x - x^2 < 1$$

Ma ancora, per ogni intero positivo n:

$$0 < \left(x - x^2\right)^n \leq \left(x - x^2\right) < 1$$

cioè

$$0 < x^n(1 - x)^n < 1$$

Consideriamo quindi la funzione

$$f(x) = \frac{x^n(1 - x)^n}{n!}$$

risulta allora

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}$$

se $0 < x < 1$.

Grazie al teorema binomiale possiamo osservare anche:

$$f(x) = \frac{x^n(1 - x)^n}{n!} = \frac{\left(x - x^2\right)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} (-1)^h x^{n+h}$$

Pertanto, essendo f un polinomio di grado $2n$, ovviamente

$$f^{(k)}(x) = 0$$

per ogni intero $k > 2n$.
Inoltre

$$f^{(k)}(0) = 0$$

per ogni intero $0 \leq k < n$ poiché il minimo esponente con cui compare x in f è n.
Quindi sia $k \in \{n, n + 1, \ldots, 2n\}$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{h=k-n}^{n} \binom{n}{h} \frac{(n + h)!}{(n + h - k)!} (-1)^h x^{n+h-k}$$

Valutando ora $f^{(k)}$ in 0, l'unico termine non nullo risulta essere quello di indice $n+h-k=0$, cioè $h=k-n$, pertanto:

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{k-n} k!(-1)^h = \frac{k!}{(k-n)!(2n-k)!}(-1)^h \quad \in \mathbb{Z}$$

Segue che ogni $k-esima$ derivata

$$f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

da cui, essendo

$$f(1-x) = f(x)$$

abbiamo anche

$$f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z}$$

Supponiamo ora per assurdo che π^2 sia razionale, cioè assumiamo

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

con a, b interi positivi.

Definiamo poi la funzione

$$F(x) = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x)\, \pi^{2n-2k} = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x)\, \frac{a^{n-k}}{b^{n-k}}$$

Essendo

$$f^{(2k)}(0),\ f^{(2k)}(1) \in \mathbb{Z}$$

per ogni k intero positivo, è chiaro che anche

$$F(0),\ F(1) \in \mathbb{Z}$$

in quanto somme e prodotti di numeri interi.

Date le funzioni $f(x)$ e $F(x)$ vale la seguente identità:

$$\pi^2 a^n f(x)\, sin(\pi x) = \frac{d}{dx}\left(F'(x)\, sin(\pi x) - \pi F(x)\, cos(\pi x)\right)$$

Infatti:

$$\frac{d}{dx}\left(F'(x)\, sin(\pi x) - \pi F(x)\, cos(\pi x)\right) =$$
$$= F''(x)\, sin(\pi x) + \pi F'(x)\, cos(\pi x) - \pi F'(x)\, cos(\pi x) + \pi^2 F(x)\, sin(\pi x) =$$
$$= sin(\pi x)\, \left(F''(x) + \pi^2 F(x)\right)$$

Possiamo quindi ricondurci a mostrare:

$$\pi^2 a^n f(x) = F''(x) + \pi^2 F(x)$$

Ora:

$$F''(x)+\pi^2 F(x) = b^n \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k+2)}(x)\,\pi^{2n-2k} + \pi^2 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(x)\,\pi^{2n-2k} \right) =$$

$$= b^n\, (\, f^{(2)}(x)\,\pi^{2n}+f(x)\,\pi^{2n+2}-f^{(4)}(x)\,\pi^{2n-2}-f^{(2)}(x)\,\pi^{2n}+f^{(6)}(x)\,\pi^{2n-4}+f^{(4)}(x)\,\pi^{2n-2}- \dots$$

$$\dots+(-1)^{n-1}f^{(2n)}(x)\,\pi^2+(-1)^{n-1}f^{(2n-2)}(x)\,\pi^4+(-1)^n f^{(2n+2)}(x)+(-1)^n f^{(2n)}(x)\,\pi^2\,)$$

Nella sommatoria, gli unici due termini che non si elidono sono:

$$f(x)\,\pi^{2n+2} \quad \text{e} \quad (-1)^n f^{(2n+2)}(x)$$

Tuttavia, per quanto detto

$$f^{(2n+2)}(x) = 0$$

pertanto:

$$F''(x) + \pi^2 F(x) = b^n f(x)\,\pi^{2n}\pi^2 = b^n f(x)\,\frac{a^n}{b^n}\,\pi^2 = f(x)\,a^n\pi^2$$

Tenendo conto di questo risultato, dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue:

$$\pi^2 a^n \int_0^1 f(x)\,sin(\pi x)dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\,(F'(x)\,sin(\pi x) - \pi F(x)\,cos(\pi x))\,dx =$$
$$= F'(1)\,sin\pi - \pi F(1)\,cos\pi - F'(0)\,sin0 + \pi F(0)\,cos0 = \pi\,(F(1) + F(0))$$

da cui

$$\pi a^n \int_0^1 f(x)\,sin(\pi x)dx = F(1) + F(0)$$

Ma allora, ricordando che $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ se $0 < x < 1$, si ha:

$$0 < \pi a^n \int_0^1 f(x)\,sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!} \int_0^1 sin(\pi x)dx < \frac{\pi a^n}{n!}$$

Essendo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi a^n}{n!} = 0$$

esisterà un indice $\overline{n}$ tale che

$$\frac{\pi a^{\overline{n}}}{\overline{n}!} < 1$$

Quindi per ogni $n \geq \overline{n}$

$$0 < F(1) + F(0) < 1$$

da cui segue un assurdo in quanto $F(1)$ e $F(0)$ sono numeri interi.

L'assurdo è dato dall'aver supposto π^2 razionale.
Dunque π^2, e così anche π, è non razionale.

Bibliografia

[01] Apostol, Mathematical Analysis, 2nd ed., World Student Series Edition, 1977

[02] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica I*, Pitagora Editrice, Bologna

[03] G. Mauceri, *Appunti per il corso di Analisi Matematica I: la funzione esponenziale e il logaritmo*

[04] G. Prodi, *Analisi Matematica 2 edizione*, Bollati Borighieri, 1972

[05] L. Roi, *Funzioni Esponenziali e Logaritmiche*, Edizioni H-Alpha

[06] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mladinska Knjiga, McGraw-Hill, 1970

[07] La natura del Pi Greco: http://www.didasfera.it/kids/s2-filosofia?unita=3285