Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

SCUOLA di SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

LA TEORIA DEI NUMERI TRANSFINITI NEI SUOI ASPETTI MATEMATICI E FILOSOFICI

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ROSSELLA LUPACCHINI

Correlatore: Prof.
ANDREA BONFIGLIOLI

Presentata da:
ANNACHIARA BARTOLINI

Sessione III
Anno Accademico 2013-2014

«L'essenza della matematica risiede nella sua libertà.»
G. Cantor

Introduzione

La presente tesi si occupa di indagare, da un punto di vista matematico e filosofico, la teoria dei numeri transfiniti cardinali ed ordinali. I primi sono stati introdotti per esprimere la cardinalità ('grandezza') dei diversi insiemi infiniti e per stabilire quali insiemi siano più grandi degli altri; i secondi per estendere i numeri naturali anche ad insiemi con cardinalità superiore.

Questa teoria fu formulata per la prima volta dal matematico Georg Cantor, nato nel 1845 a San Pietroburgo ma vissuto in Germania, dove studiò matematica e filosofia. Un primo risultato in questo senso è la dimostrazione dell'impossibilità di mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme dei numeri naturali con quello dei numeri reali e viene esposto nella corrispondenza con il matematico tedesco Dedekind. Altri importanti matematici da cui Cantor venne influenzato furono i suoi maestri Weierstrass e Kronecker, che divenne poi un fiero oppositore della sua idea di considerare l'infinito come oggetto di speculazione matematica, posizione per cui fu criticato da molti.

Nel primo capitolo viene introdotta la nozione di equipotenza tra due insiemi come esistenza di una funzione biunivoca tra l'uno e l'altro; si definisce quindi un insieme numerabile come equipotente ad $\mathbb{N}$. Si dimostra la numerabilità di $\mathbb{Q}$ e, con l'argomento diagonale, la non numerabilità di $\mathbb{R}$ e si introducono i rispettivi numeri cardinali transfiniti $\aleph_0$ e $\mathbf{c}$. Viene quindi presentata l'ipotesi del continuo, affermazione indecidibile sulla presenza di un numero cardinale intermedio tra i due citati. Vengono quindi presentati alcuni risultati di aritmetica cardinale transfinita.

Nel secondo capitolo vengono esposti alcuni aspetti filosofici della teoria dell'infinito di Cantor: dopo aver introdotto la distinzione tra infinito potenziale e attuale, si enunciano i principi dell'infinito attuale e del finitismo. Col primo si intende la corrispondenza tra ogni infinito potenziale un relativo infinito attuale e col secondo si esprime la possibilità di trattare matematicamente i numeri transfiniti come finiti. Si fa inoltre riferimento alla posizione platonico-realista di Cantor, alla sua concezione di esistenza matematica dei numeri transfiniti, e alla riduzione del concetto di numero a quello di insieme.

Nel terzo capitolo si introducono, a partire dalla nozione di tipo d'ordine, i numeri ordinali finiti e transfiniti e la loro aritmetica. Si dimostra quindi la legge di tricotomia che afferma la possibilità di confrontarli e il principio di induzione transfinita.

Nel quarto capitolo si citano alcuni aspetti della teoria degli ordinali, facendo riferimento ai principi generativi che permettono di costruire i numeri ordinali e alla definizione astrazionista di tali oggetti.

Indice

Capitolo 1

Numeri cardinali

In questo capitolo viene presentata la teoria dei numeri transfiniti del matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918) a partire dal concetto di numero cardinale; essa riveste un ruolo fondamentale all'interno della matematica poiché da questa ha origine la moderna teoria degli insiemi. Si dimostra inoltre la non numerabilità dell'insieme dei numeri reali e viene esposta l'ipotesi del continuo.

I risultati qui esposti sono presentati secondo una trattazione moderna, diversa da quella di Cantor, poiché seguendo quest'ultima, definita 'teoria ingenua degli insiemi', si incorrerebbe in alcuni paradossi, come spiegato in nota[1].

1.1 Equipotenza fra due insiemi e potenza di un insieme

In questa sezione vengono introdotti in modo rigoroso il concetto di insiemi equipotenti e quello di insiemi numerabili facendo riferimento a [1, 6]; ne vengono mostrati degli esempi, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, e viene definita la potenza del continuo.

Definizione 1.1.1 (Insiemi equipotenti)**.** Siano A e B due insiemi non vuoti. Si dice che B è equipotente ad A o che ha la stessa potenza di A, se esiste un'applicazione $f : A \xrightarrow[1-1]{\text{su}} B$. Scriveremo $A \sim B$.

Definizione 1.1.2 (Numero cardinale finito)**.** Sia $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Se $A \sim N_n$ si dice che A ha numero cardinale n, o che ha cardinalità n. L'insieme vuoto si dice che ha numero cardinale zero o cardinalità zero.

Ogni insieme equipotente a un N_n (per un certo $n \in \mathbb{N}$) si chiama insieme finito. Anche l'insieme vuoto si definisce finito.

[1] Cantor non ha definito in modo rigoroso il concetto di insieme e da questa lacuna hanno origine il paradosso di Burali-Forti, presentato nell'Osservazione 3.2.17, e quello di Russell, che afferma che non è possibile definire l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi: si otterrebbe l'antinomia che l'insieme dovrebbe contenere se stesso se e solo se non contiene se stesso

Teorema 1.1.3. *Nessun insieme finito non vuoto è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.*

La definizione che segue è stata formulata per la prima volta da Dedekind (1831-1916) nel 1888.

Definizione 1.1.4 (Insieme infinito)**.** Un insieme si dice infinito se esiste un suo sottoinsieme proprio ad esso equipotente.

Definizione 1.1.5 (Insieme numerabile)**.** Un insieme A si dice che è numerabile, o che ha la potenza del numerabile, o che ha numero cardinale $\aleph_0$, se $A \sim \mathbb{N}$.

Cantor enuncia le seguenti proprietà degli insiemi numerabili (come riportato in Lolli, [4]):

1. Se A è numerabile e B è un sottoinsieme di A, allora B è finito o numerabile.

Dimostrazione. Sia $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ con $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$. Supponiamo $B \neq \emptyset$ (se $B = \emptyset$ allora B è finito). Siano

$$n_1 = \min\{n : a_n \in B\}; \quad n_2 = \min\{n : a_n \in B \setminus \{a_{n_1}\}\};$$

in generale, definito $a_{n_{k-1}}$, sia

$$n_k = \min\Big\{n : a_n \in B \setminus \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_{k-1}}\}\Big\}.$$

Se per un certo k risulta $B \setminus \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}\} = \emptyset$ allora $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}\}$ è finito. In caso contrario, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste n_k tale che $a_{n_k} \in B$; allora $B \sim \mathbb{N}$ perché, posto $f(k) = a_{n_k}$, si ha $f : \mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{\text{su}} B$; dunque B è numerabile. □

2. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono insiemi numerabili (possono essere anche un'infinità numerabile) allora $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ è numerabile.

Dimostrazione. Si considera prima il caso $k = 2$. Consideriamo quindi gli insiemi numerabili A e B. Consideriamo prima il caso $A \cap B = \emptyset$ e poniamo $N' = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $N'' = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$. Essendo $N' \sim \mathbb{N} \sim N''$, dall'ipotesi $A \sim \mathbb{N}$ e $B \sim \mathbb{N}$ segue $A \sim N'$ e $B \sim N''$; siano

$$f : A \xrightarrow[1-1]{\text{su}} N' \qquad \text{e} \qquad g : B \xrightarrow[1-1]{\text{su}} N''.$$

Poniamo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Allora $h : A \cup B \xrightarrow[1-1]{\text{su}} \mathbb{N}$ e quindi $A \cup B$ è numerabile.

Se invece $A \cap B \neq \emptyset$ si pone $C = A \setminus B$ e si ha $A \cap B = C \cup B$ con $C \cap B = \emptyset$; poiché $C \subseteq A$, C è finito o numerabile per la proprietà precedente. Allora per quanto visto nel caso precedente $C \cup B$ è numerabile.

La dimostrazione del caso generale si ottiene per induzione. □

Esaminiamo ora degli esempi di insiemi numerabili.

Osservazione 1.1.6. $\mathbb{Z}$ è numerabile.

Dimostrazione. $\mathbb{Z}$ può essere scritto come $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$, indicando con $\mathbb{Z}^-$ gli interi negativi; la funzione $f : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = -x$ è iniettiva e suriettiva quindi $\mathbb{Z}^-$ è numerabile. $\{0\}$ è finito quindi per la proprietà precedente $\mathbb{Z}$ è numerabile. □

Teorema 1.1.7. *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.*

Dimostrazione. Si ragiona come nella dimostrazione dell'Osservazione 1.1.6. Quindi

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}\,,$$

con $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ e $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$. $\mathbb{Q}^+$ è equipotente a $\mathbb{Q}^-$ poiché la funzione $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$ definita da $f(x) = -x$ è iniettiva e suriettiva. $\{0\}$ è finito quindi per dimostrare la numerabilità di $\mathbb{Q}$ basta dimostrare la numerabilità di $\mathbb{Q}^+$.

Gli elementi di $\mathbb{Q}^+$ si possono disporre nella matrice infinita:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si ordinino gli elementi della tabella seguendo le cosiddette 'contro-diagonali', ottenendo la successione $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \dots\right)$, eliminando le frazioni equivalenti a quelle via via precedentemente considerate.

Si può costruire una funzione biunivoca $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$f(\tfrac{1}{1}) \longleftrightarrow 1, \quad f(\tfrac{2}{1}) \longleftrightarrow 2, \quad f(\tfrac{1}{2}) \longleftrightarrow 3, \quad f(\tfrac{1}{3}) \longleftrightarrow 4, \quad \dots,$$

quindi è provata la numerabilità di $\mathbb{Q}$. □

Nella dimostrazione del teorema che segue, uno dei risultati più noti della teoria dei numeri transfiniti, Cantor utilizza per la prima volta nella matematica l'argomento diagonale, che avrà in seguito numerose applicazioni.

Teorema 1.1.8 (Cantor)**.** *L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ è un insieme infinito non numerabile.*

Dimostrazione. Ogni numero di A si può scrivere in modo unico (evitando lo 0 periodico) nella forma decimale:

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

con $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Evidentemente A contiene un sottoinsieme numerabile, ad esempio l'insieme $A' = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$; quindi A sarà almeno numerabile. Supponiamo per assurdo che A sia numerabile; allora esiste $f : \mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{\text{su}} A$ con

$$\begin{aligned}
&f(1) = 0, a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \ldots \\
&f(2) = 0, a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \ldots \\
&\vdots \\
&f(m) = 0, a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \ldots
\end{aligned}$$

Poniamo $b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ con

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 \quad \text{se } a_{nn} \neq 1 \\
b_n &= 2 \quad \text{se } a_{nn} = 1.
\end{aligned}$$

Quindi $b \neq f(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ perché $b_n \neq a_{nn}$. Dunque $b \in A$ e $b \notin f(\mathbb{N})$; perciò f non è suriettiva, contro l'ipotesi. Dunque A non è numerabile. □

Definizione 1.1.9 (Potenza del continuo)**.** Si dice che un insieme A ha potenza del continuo, o che ha cardinalità $\mathbf{c}$, se è equipotente all'intervallo $E = (0, 1]$ (o, equivalentemente, se è equipotente a $\mathbb{R}$; vedi esempi seguenti).

Esempio 1.1.10. Usando la notazione della Definizione 1.1.9, consideriamo i seguenti esempi.

- $\mathbb{R}$ ha cardinalità $\mathbf{c}$: infatti si può considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} - 1 & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2x-2} + 1 & \text{per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

  Si ha $f : E'' \xrightarrow[1-1]{\text{su}} \mathbb{R}$ con $E'' = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Si può provare che $E'' \sim E$ (vedasi Teorema 1.1.11).

- $A = \{(x, y) : x, y \in E\} = E \times E$ ha cardinalità $\mathbf{c}$. Infatti x e y si possono scrivere (in modo unico evitando lo 0 periodico) come segue

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots, \quad y = 0, b_1 b_2 \ldots$$

Poniamo: $f((x,y)) = 0, a_1b_1a_2b_2\dots$ Allora $f : E \times E \xrightarrow{1-1} E$. Se f è iniettiva, allora $\mathrm{card}\,(E \times E) \leq \mathrm{card}\,(E)$. Ma poiché si può definire una funzione $g : E \xrightarrow{1-1} E \times E$, allora vale anche la disuguaglianza: $\mathrm{card}\,(E) \leq \mathrm{card}\,(E \times E)$. Quindi $\mathrm{card}\,(E) = \mathrm{card}\,(E \times E)$.

- l'insieme di tutte le successioni di numeri naturali ha cardinalità $\mathbf{c}$.
- l'insieme dei numeri irrazionali ha cardinalità $\mathbf{c}$. Per questo risultato è necessario introdurre un altro teorema:

Teorema 1.1.11. *Sia A un insieme infinito; se B è un sottoinsieme di A, finito o numerabile, e $A \setminus B$ è infinito, allora $A \sim\ A \setminus B$.*

Poiché $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \sim\ \mathbb{N}$, allora (l'insieme infinito) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cioè l'insieme dei numeri irrazionali, ha la potenza del continuo.

Il Teorema 1.1.11 permette di mostrare un altro risultato:

Proposizione 1.1.12. *Se A è un insieme infinito e B è un insieme finito o numerabile, allora $A \sim A \cup B$.*

Dimostrazione. Siano $D = B \setminus A$ e $C = A \cup D$. Si ha che D è finito o numerabile perché $D \subseteq B$; d'altra parte C è infinito perché $A \subseteq C$. Per il Teorema 1.1.11 si ha $A = C \setminus D \sim C$; ma $A \cup B = A \cup D = C$ quindi $A \sim A \cup B$. □

1.2 Cardinalità

Definizione 1.2.1 (Numeri cardinali)**.** Se A e B sono insiemi, per esprimere che $A \sim B$ si scrive $\mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, B$ e si dice che A e B hanno lo stesso numero cardinale. Se $A \sim\ \mathbb{N}$ si pone $\mathrm{card}\, A = \aleph_0$; se $A \sim\ \mathbb{R}$ si pone $\mathrm{card}\, A = \mathbf{c}$.

$\aleph_0$, $\mathbf{c}$ sono esempi di numeri cardinali *transfiniti* (mentre i numeri naturali sono chiamati numeri cardinali finiti).

Il teorema che segue è stato enunciato da Cantor e dimostrato subito dopo, nel 1898, da Schröder e Bernstein.

Teorema 1.2.2 (Cantor, Schröder, Bernstein)**.** *Se A e B sono due insiemi ciascuno equipotente a un sottoinsieme dell'altro, allora A e B sono equipotenti.*

Cenno di dimostrazione. Supponiamo che $f : A \hookrightarrow B$ e $g : A \hookrightarrow B$ siano le due funzioni iniettive assunte per ipotesi e supponiamo che nessuna delle due sia suriettiva, altrimenti non c'è nulla da dimostrare. Si può dimostrare (non senza qualche difficoltà) che A si può scomporre in $A_1 \cup A_2$, con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e B in $B_1 \cup B_2$, con $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, in modo che

$$B_1 = \{f(z) : z \in A_1\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{g(z) : z \in B_2\}.$$

Si può allora definire una biezione $h : A \to B$ ponendo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2, \end{cases}$$

e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Definizione 1.2.3 (Relazione di 'minore' tra numeri cardinali)**.** Se A e B sono insiemi, con la notazione

$$\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$$

si intende che esiste $B' \subseteq B$ tale che $A \sim B'$ e che non esiste $A' \subseteq A$ tale che $B \sim A'$.

Da questa definizione e dal Teorema 1.2.2 di Cantor-Schröder-Bernstein segue che se $A \sim B'$ con $B' \subseteq B$ allora $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$.

Con il seguente teorema si enuncia che è sempre possibile confrontare due numeri cardinali.

Teorema 1.2.4 (Legge di tricotomia dei numeri cardinali)**.** *Se α e β sono numeri cardinali, allora è vera una e una sola delle seguenti affermazioni: $\alpha = \beta$, $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$*

Teorema 1.2.5. *Se k è un numero cardinale finito, allora $k \leqslant \aleph_0$. Se α è un numero cardinale transfinito, allora $\aleph_0 \leqslant \alpha$.*

Il risultato che segue, anche se con una diversa formulazione, venne esposto per la prima volta da Cantor nel 1878; tuttavia solo nel 1963 Paul Cohen dimostrò che tale congettura fosse indecidibile, dopo che Kurt Gödel nel 1940 ebbe provato che non si poteva dimostrare la sua verità.

È nel tentativo di dimostrare questo risultato che Cantor formulò il concetto di numero transfinito.

Ipotesi del continuo (Cantor) *Non esiste alcun insieme A tale che*

$$\aleph_0 \leq \operatorname{card} A \leq \mathbf{c}.$$

In base a questa ipotesi si indicherà $\mathbf{c}$ anche con $\aleph_1$.

Più in generale si ha l'*ipotesi generalizzata del continuo*: si ammette che se A è un insieme infinito allora non esiste nessun numero cardinale α tale che

$$\operatorname{card} A \leq \alpha \leq \operatorname{card} (\mathcal{P}(A)),$$

indicando con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A.

Con il seguente teorema si ottiene il risultato che, qualunque sia il numero cardinale α, esiste sempre un numero cardinale maggiore di α.

Teorema 1.2.6. *Se A è un insieme e $\mathcal{P}(A)$ il suo insieme delle parti, allora*

$$\operatorname{card} A \leq \operatorname{card}(\mathcal{P}(A)).$$

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso banale $A = \emptyset$; allora $\operatorname{card} A = 0$ mentre $1 = \operatorname{card}(\{\emptyset\}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\emptyset))$ e la tesi è verificata perché $0 \leq 1$.

Quindi si può considerare $A \neq \emptyset$. Per ogni $a \in A$ si ha $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$; poniamo $B = \{\{a\} : a \in A\}$. Consideriamo l'applicazione $f : A \to B$ per cui $f(a) = \{a\}$. Allora $f : A \xrightarrow[1-1]{\text{su}} B$ da cui $A \sim B$. Questo prova $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card}(\mathcal{P}(A))$.

Proviamo che $\mathcal{P}(A)$ non è equipotente a un sottoinsieme di A. Supponiamo per assurdo che ci sia un $A' \subseteq A$ tale che $A' \sim \mathcal{P}(A)$. Sia $g : A' \xrightarrow[1-1]{\text{su}} \mathcal{P}(A)$ e sia $C = \{a \in A' : a \notin g(a)\}$. Poiché $C \subseteq A$, si ha $C \in \mathcal{P}(A)$, e poiché g è un'applicazione suriettiva, esiste un $\bar{a} \in A'$ tale che $g(\bar{a}) = C$. Deve valere o $\bar{a} \in C$ o $\bar{a} \notin C$; ma se $\bar{a} \in C$ allora $\bar{a} \notin g(\bar{a}) = C$ che è assurdo; se $\bar{a} \notin C$ allora poiché $g(\bar{a}) = C$, risulta $\bar{a} \notin g(\bar{a})$ e quindi $\bar{a} \in C$, che è assurdo. □

Osservazione 1.2.7. Non è possibile parlare dell'insieme di tutti gli insiemi; infatti, se fosse possibile, chiamato C l'insieme di tutti gli insiemi, sarebbe $\mathcal{P}(C) \subseteq C$,[2] e quindi $\operatorname{card}(\mathcal{P}(C)) \leq \operatorname{card} C$, contrariamente al teorema.

Questo pone delle limitazioni al cosiddetto principio di comprensione, che assume che ad ogni definizione corrisponda un insieme. Esso era stato usato implicitamente nella teoria ingenua degli insiemi, prima che questa venisse formalizzata come teoria assiomatica, ma ne deriva il paradosso di Russell, spiegato in Nota [1].

1.2.1 Aritmetica cardinale

Somma di numeri cardinali:

Se α e β sono numeri cardinali e A e B sono due insiemi tali che $\operatorname{card} A = \alpha$ e $\operatorname{card} B = \beta$, con $A \cap B = \emptyset$, definiamo la somma di α e β ponendo

$$\alpha + \beta = \operatorname{card}(A \cup B).$$

La somma è indipendente dalla scelta di A e B.

Se α è un numero cardinale transfinito e n un numero cardinale finito, si hanno i seguenti risultati:

(i) $n + \alpha = \alpha$;

(ii) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

[2] Si noti anche l'indecidibile ambiguità se scrivere $\mathcal{P}(C) \in C$ (poiché C è l'insieme di tutti gli insiemi e quindi ha anche $\mathcal{P}(C)$ come elemento) oppure $\mathcal{P}(C) \subseteq C$ (poiché i sottoinsiemi di C sono elementi di C e quindi l'unione di essi, ossia $\mathcal{P}(C)$, è un sottoinsieme di C)!

(iii) $\aleph_0 + \mathbf{c} = \mathbf{c}$;

(iv) $\mathbf{c} + \mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Dimostrazione. (i) e (iii) seguono dalla Proposizione 1.1.12.

(ii) Posti $N' = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $N'' = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$, si hanno $N' \cap N'' = \emptyset$ e $N' \cup N'' = \mathbb{N}$, con $\operatorname{card} N' = \operatorname{card} N'' = \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$ da cui (ii).

(iv) Si ha: $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, con $\operatorname{card} \mathbb{R}^+ = \operatorname{card} \mathbb{R}^- = \mathbf{c}$; poiché $\operatorname{card}(\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-) = \mathbf{c}$, allora segue (iv). $\square$

Prodotto di numeri cardinali

Se α e β sono numeri cardinali e A e B sono due insiemi tali che $\operatorname{card} A = \alpha$ e $\operatorname{card} B = \beta$, definiamo il prodotto di α per β ponendo

$$\alpha \cdot \beta = \operatorname{card}(A \times B).$$

Il prodotto è indipendente dalla scelta di A e B.

Se m è un numero cardinale finito, allora si hanno i seguenti risultati:

(i) $m \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$;

(iii) $\aleph_0 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$;

(iv) $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$.

Dimostrazione. (i) Posto $A_j = \{(j,n) : n \in \mathbb{N}\}$, si ha $N_m \times \mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^m A_j$. Poiché ogni A_j è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ allora è numerabile e poiché l'unione di insiemi numerabili è numerabile allora esiste $f : N_m \times \mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{\text{su}} \mathbb{N}$ da cui (i).

(ii) è assicurata dalla numerabilità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ che si ottiene con un ragionamento analogo a quello esposto per dimostrare la numerabilità di $\mathbb{Q}$.

(iii) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Consideriamo allora l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times A \to \mathbb{R}$ definita da $f((n,a)) = n + a$; f è un'applicazione biunivoca perché è chiaramente iniettiva ed è suriettiva perché per ogni $x \in \mathbb{R}$, posto $k = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, si ha $x = k + (x-k)$ e $0 \leq x - k \leq 1$ da cui segue (iii).

(iv) è assicurata dal secondo punto dell'Esempio 1.1.10. $\square$

Potenza di numeri cardinali

Siano α e β numeri cardinali, A e B siano insiemi tali che $\operatorname{card} A = \alpha$ e $\operatorname{card} B = \beta$, e poniamo $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$. Definiamo allora la potenza di β di esponente α ponendo:

$$\beta^\alpha = \operatorname{card}(B^A).$$

La potenza è indipendente dalla scelta di A e B.

Se $\alpha = n$ e $\beta = m$ (prendiamo $A \sim N_n$ e $B \sim N_m$), allora m^n è il numero delle applicazioni da A a B. Infatti, supponiamo $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Per definire una $f : A \to B$ dovremo associare ad ogni a_j un b_k; poiché ad ognuno degli n elementi a_j si può associare un b_k in m modi, si deduce che gli elementi di B^A sono effettivamente m^n.

I due teoremi che seguono permettono di ottenere importanti risultati riguardo all'elevamento a potenza dei numeri cardinali:

Teorema 1.2.8. *Se α è un numero cardinale e $\operatorname{card} A = \alpha$, allora:*

$$2^\alpha = \operatorname{card}(\mathcal{P}(A)).$$

Dimostrazione. $\operatorname{card}(\{0,1\}) = 2$. Sia $B \in \mathcal{P}(A)$, da cui $B \subseteq A$; consideriamo la funzione caratteristica $\chi_B : A \to \{0,1\}$. Si ha ovviamente $\chi_B \in \{0,1\}^A$; posto $F(B) = \chi_B$, si ha $F : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$.

Proviamo che F è una funzione biunivoca. Cominciamo col provare l'iniettività.

Se $B_1 \neq B_2$, allora esiste un $\overline{x} \in A$ tale che

$$\overline{x} \in B_1 \quad \text{e} \quad \overline{x} \notin B_2,$$

oppure

$$\overline{x} \notin B_1 \quad \text{e} \quad \overline{x} \in B_2;$$

nel primo caso si ha: $\chi_{B_1}(\overline{x}) = 1 \neq 0 = \chi_{B_2}(\overline{x})$, mentre nel secondo si ha il viceversa; quindi se $\chi_{B_1} \neq \chi_{B_2}$, si ha $F(B_1) \neq F(B_2)$ e questo prova l'iniettività.

Per la suriettività, si consideri un qualunque elemento f di $\{0,1\}^A$ e consideriamo l'insieme $B = \{x \in A : f(x) = 1\}$; allora $B \in \mathcal{P}(A)$ e $f = \chi_B$ da cui $F(B) = f$, cioè f è suriettiva. Allora $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$ e quindi $\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = \operatorname{card}(\{0,1\}^A) = 2^\alpha$. $\square$

Teorema 1.2.9. *Qualunque sia il numero cardinale finito $n > 1$ si ha*

$$n^{\aleph_0} = \mathbf{c}.$$

Questo teorema può essere provato, ad esempio, usando la rappresentazione n-adica dei numeri reali.

Non è difficile dimostrare quanto segue: se n è un numero cardinale finito, allora:

(i) $\mathbf{c}^n = \mathbf{c}$;

(ii) $\mathbf{c}^{\aleph_0} = \mathbf{c}$;

(iii) $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathbf{c}$.

Osservazione 1.2.10. Se A è un insieme tale che $\operatorname{card} A = \aleph_0$ allora $\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = \mathbf{c}$. Quindi l'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme numerabile ha la potenza del continuo. Infatti $2^{\aleph_0} = \operatorname{card}(\mathcal{P}(A))$; ma $2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$, dal Teorema 1.2.9.

È di interesse considerare la cardinalità del seguente insieme:

Osservazione 1.2.11. Consideriamo $F := [0,1]^{[0,1]} = \big\{f \,\big|\, f : [0,1] \to [0,1]\big\}$. Allora, posto

$$\mathbf{f} = \operatorname{card} F,$$

si ha $\mathbf{c} \leq \mathbf{f}$.

Infatti, considerando le funzioni costanti $F' = \{f \equiv r\}_{r \in [0,1]}$, si ha chiaramente $\mathbb{R} \sim F'$, da cui $\mathbf{c} \leq \mathbf{f}$.

Proviamo che non è $\mathbb{R} \sim F$; supponiamo che esista $g : [0,1] \xrightarrow[1-1]{\text{su}} F$ e sia $f_r := g(r)$; consideriamo una qualsiasi funzione $\varphi \in F$ tale che

$$\varphi(r) \neq f_r(r) \quad \forall\, r \in [0,1].$$

Allora $\varphi \neq f_r$ per ciascun $r \in [0,1]$. Ciò prova che non esiste nessuna applicazione suriettiva di $[0,1]$ su F. Pertanto $\mathbf{c} \leq \mathbf{f}$.

Si possono dimostrare[3] i seguenti risultati:

(i) $\mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}$;

(ii) $n^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}$;

(iii) $\aleph_0^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}$;

(iv) $\mathbf{f}^n = \mathbf{f}$;

(v) $\mathbf{f}^{\aleph_0} = \mathbf{f}$;

(vi) $\mathbf{f}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}$.

---

[3]Basta avere provato alcuni risultati dell''algebra' delle operazioni tra transfiniti:

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \operatorname{card} F = \operatorname{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = \mathbf{c}^{\mathbf{c}}; \\
\text{(ii)} & n^{\mathbf{c}} = n^{\aleph_0 \cdot \mathbf{c}} = (n^{\aleph_0})^{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}; \\
\text{(iii)} & \aleph_0^{\mathbf{c}} = \aleph_0^{\aleph_0 \cdot \mathbf{c}} = (\aleph_0^{\aleph_0})^{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}; \\
\text{(iv)} & \mathbf{f}^n = (\mathbf{c}^{\mathbf{c}})^n = \mathbf{c}^{n \cdot \mathbf{c}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}; \\
\text{(v)} & \mathbf{f}^{\aleph_0} = (\mathbf{c}^{\mathbf{c}})^{\aleph_0} = \mathbf{c}^{\mathbf{c} \cdot \aleph_0} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}; \\
\text{(vi)} & \mathbf{f}^{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}.
\end{array}$$

Capitolo 2

Aspetti filosofici della teoria di Cantor

In questo capitolo si introducono i concetti di infinito attuale e potenziale e i principi del dominio e del finitismo, alla base della costruzione dei numeri transfiniti; viene discussa inoltre la nozione di esistenza e l'approccio realista, o platonico, di Cantor nei confronti della matematica. É stato fatto riferimento a [2].

2.1 Principi della teoria

Già Aristotele riflettendo sull'infinito distingue tra:

- infinito potenziale,
- infinito attuale.

In matematica si fa comunemente riferimento a quello del primo tipo quando si usano espressioni come 'sia n un numero arbitrariamente grande' o 'dato un arbitrariamente piccolo ϵ'. In entrambi i casi, qualsiasi valore specifico dato a n, o a ϵ, sarà finito ma si può assumere che sia più grande, o, rispettivamente, più piccolo, di ogni limite finito preassegnato. Cantor esprime così[1] l'idea di 'variabilità illimitata' legata a questo tipo di infinito:

> «L'infinito potenziale si può constatare soprattutto quando si ha una indeterminata quantità *variabile finita* che o cresce oltre ogni limite (si può considerare ad esempio il tempo che è misurato a partire da un istante iniziale) o assume un valore inferiore a qualsiasi limite finito (come, ad esempio, nella presentazione corretta del differenziale). Più in generale, parlo di *Infinito Potenziale* ogni volta che sia richiesta una quantità *indeterminata* che può assumere innumerevoli determinazioni.»

[1]in *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, 1887-1888

Con ‘infinito attuale’ si intende invece una collezione infinita compiutamente data. Per usare le parole di Cantor: «L’*Infinito Attuale* deve essere concepito come una quantità che da una parte è *non variabile*, ma piuttosto è fissata e determinata in tutte le sue parti - una vera costante - ma che allo stesso tempo supera in grandezza ogni quantità finita dello stesso tipo.»

Cantor formula inoltre un’ulteriore distinzione tra un infinito attuale che può essere aumentato, o transfinito, e un altro infinito detto Assoluto che non lo può essere (per la trattazione di quest’ultimo si rimanda a [2]); al contrario di quanto avveniva in precedenza, considera l’infinito attuale (del primo tipo) come oggetto di studio anche in ambito scientifico. Le sue riflessioni filosofiche, volte a legittimare l’uso dell’infinito attuale in matematica, si basano su due principi:

- il **principio dell’infinito attuale** secondo cui ogni infinito potenziale presuppone un corrispondente infinito attuale;
- il **principio del finitismo** secondo il quale il transfinito può essere trattato matematicamente come il finito.

Il primo, detto anche principio del dominio, si giustifica con la considerazione che non è possibile fare riferimento al concetto di variabilità illimitata insita nell’idea di infinito potenziale senza presupporre un dominio completo di questa variabilità. Cantor esprime questo concetto dicendo [2]:

> «Non c’è dubbio che non possiamo fare a meno di quantità variabili nel senso dell’infinito potenziale; e da questo può essere dimostrata la necessità dell’infinito attuale. Affinché vi sia una quantità variabile in uno studio matematico, il dominio di variabilità deve essere conosciuto in anticipo per mezzo di una definizione. Comunque questo dominio non può essere esso stesso variabile poiché altrimenti collasserebbe ogni sostegno per lo studio. Quindi questo dominio è un definito ed effettivamente infinito insieme di valori. Ne segue che ogni infinito potenziale, se applicabile rigorosamente in matematica, presuppone un infinito attuale.»

Un esempio di dominio infinito completo è dato dall’insieme dei numeri naturali. Nel considerare tale insieme si potrebbe obiettare che non ci è possibile concepire la totalità di questo insieme e che ciò che comprendiamo è solo l’operazione (l’addizione di una unità) che ha originato i suoi elementi; quindi anche se il processo di generazione del numero ci è chiaro non riusciamo a portarlo a compimento. Tuttavia, la risposta di Cantor a questa obiezione è che anche per un numero finito ma molto grande, la nostra capacità intellettiva non è sufficiente per cogliere tutti i suoi elementi con l’intuizione eppure lo possiamo considerare come oggetto della conoscenza umana ed è possibile indagare su di esso scientificamente. Quindi dovrebbe valere un ragionamento analogo per i numeri transfiniti.

[2] in *Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actualunendlichen Zahlen*, 1886

Altri esempi di domini infiniti completi sono quelli originati dai concetti di numero razionale e reale. Secondo Cantor senza di essi non c'è modo di sviluppare una teoria dei numeri reali e questi costituiscono una base per fondare correttamente sia l'aritmetica che l'analisi. A questo proposito occorre ricordare che sia Cantor che Dedekind avevano contribuito, indipendentemente, alla cosiddetta 'aritmetizzazione dell'analisi', dando una definizione dei numeri reali (rispettivamente come classe di equivalenza di una successione di numeri razionali o come una sezione di numeri razionali) che non facesse riferimento a intuizioni geometriche; per questa operazione, tuttavia, è necessario assumere la presenza di un dominio completo di numeri razionali e quindi anche di un dominio completo di numeri naturali. Quindi i due studiosi sono riusciti ad eliminare dall'analisi la dipendenza dalle considerazioni di natura geometrica o spaziale formulando definizioni astratte in termini di concetti basati sui domini numerici. Il principio del dominio che sottostà a tale costruzione teorica permette quindi di porre l'analisi su fondamenti più chiari. Nella trattazione dei numeri reali si notano degli aspetti che si ritrovano anche nella riflessione sui transfiniti: a ogni numero reale corrisponde una collezione ma anche essi stessi sono elementi di una collezione; si ha quindi una ricorsione in cui le collezioni di oggetti possono a loro volta diventare elementi di un'altra collezione e c'è quindi il tentativo di ridurre diversi oggetti matematici a insiemi.

Con il principio del dominio Cantor si avvicina quindi ad una posizione di riduzionismo insiemistico, approccio che fa corrispondere la matematica allo studio di insiemi e che quindi la riduce alla teoria degli insiemi. L'elemento riduzionista riveste un ruolo importante nella teoria di Cantor per sostenere l'esistenza dei numeri infiniti e compare anche nel principio del finitismo.

Quest'ultimo assume due valenze: gli insiemi, sia finiti che infiniti, possono essere trattati come oggetti e tutti gli insiemi hanno le stesse proprietà di base degli insiemi finiti. Purtroppo Cantor non dà mai una definizione chiara di insieme e questo costituisce un punto debole nella sua teoria. Una delle descrizioni che ne dà [3] è: «Con 'insieme' intendo in generale qualsiasi molteplicità che può essere pensata come uno, cioè ogni totalità di elementi definiti che possono essere uniti in un tutto da una legge.».

Purtroppo Cantor non spiega in che cosa consista tale unità che rende l'insieme una cosa sola, e non solo una molteplicità. Questo 'poter essere pensata come una cosa sola' sembra quasi una caratteristica che viene imposta alla collezione da noi come esseri pensanti e che siamo noi a creare l'unità dell'insieme a partire dai suoi elementi. A questo aspetto si ricollega la caratterizzazione dell'insieme come 'totalità unita in un tutto', poiché sembra che l'unità emerga da questa legge, vista come intensione. Anche se il principio del finitismo può essere considerato come un principio che includa in sè la visione estensionale dell'insieme, poiché gli elementi degli insiemi finiti possono essere elencati, tuttavia è un principio intensionale che garantisce che

[3]in *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 1883

gli insiemi transfiniti possano essere trattati come quelli finiti, anche se non è possibile enumerare i loro elementi.

2.2 Il platonismo cantoriano

Cantor considera la scienza una libera costruzione concettuale e sottolinea che la conoscenza non è basata tanto sui sensi quanto su idee che costituiscono il quadro concettuale attraverso il quale possiamo leggere la natura. Non a caso i suoi studi sui numeri transfiniti partono dalla analisi del continuo, che costituisce un elemento essenziale della percezione dello spazio e del tempo. Secondo Cantor prima ci formiamo una teoria matematica astratta concettuale dello spazio e delle grandezze continue e successivamente investighiamo le nozioni di tempo e spazio fisico sulla base di questa, congetturando che lo spazio fisico si accordi con tale teoria. Una posizione simile a questa è stata assunta da Dedekind, che afferma [4]:

> «Per mezzo della costruzione logica della scienza dei numeri e del dominio numerico continuo raggiunto con questa, noi siamo nella posizione di investigare con precisione le nostre concezioni di spazio e di tempo, collegando queste al dominio numerico creato nel nostro intelletto».

Secondo Cantor e Dedekind, quindi, la matematica e le scienze naturali devono essere basate in buona parte su strutture concettuali fornite da noi, non semplicemente dettate dalla Natura anche se questa può fornire degli spunti.

In quest'ottica la formazione dei concetti è più simile a un processo di scoperta di un mondo di idee simile a quello delineato da Platone. In particolare Cantor propone un principio platonico secondo il quale la creazione di un concetto coerente e consistente per la mente umana è la scoperta di un'idea astratta esistente indipendentemente; tale concezione prende anche il nome di 'realismo matematico' in quanto afferma la realtà dei concetti matematici indipendentemente dalla mente umana.

Queste convinzioni spiegano la concezione di Cantor della matematica [5]:

> «La matematica è completamente libera nel suo sviluppo ed è solo vincolata dalla considerazione autoevidente che i suoi concetti devono essere sia consistenti in se stessi sia stare in una ordinata relazione con i concetti precedenti fissata mediante definizioni».

Viene inoltre specificato che è possibile parlare dell'esistenza degli oggetti matematici sia in riferimento alla loro coerenza (realtà intrasoggettiva o immanente) sia al fatto che descrivono un mondo esterno rispetto all'intelletto (realtà transoggettiva o transiente). In riferimento ai numeri, Cantor introduce così il primo tipo di realtà:

---

[4] in *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888

[5] in *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 1883

> «In primo luogo, gli interi possono essere considerati reali in quanto occupano un posto ben definito nella nostra comprensione sulla base di definizioni e possono essere differenziati con precisione da tutte le altre parti del nostro pensiero e possono stare in determinate relazioni con queste parti e quindi modificare la sostanza del nostro pensiero in una determinata maniera; propongo di chiamare questo tipo di realtà realtà intrasoggettiva o immanente».

Queste due realtà risultano profondamente connesse. La matematica si occupa della prima e la seconda segue automaticamente. Cantor credeva che anche i numeri transfiniti potessero essere rappresentati nel mondo fisico e che la natura contenesse una gamma di differenti infiniti, nonostante riconoscesse che per la matematica questo aspetto fosse irrilevante.

Altro elemento da sottolineare è il fatto che parlando di 'ordinate relazioni con i concetti esistenti' Cantor si riferisce ad una coerenza che può essere meglio intesa come coerente integrazione con le strutture concettuali precedenti che non come semplice non contraddizione; tra l'altro una delle critiche rivolte a Cantor era stata l'aver considerato la nozione di infinito, ritenuta auto-contraddittoria. Il rilievo che lo studioso tedesco dà alla coerenza non è un mezzo per evitare la discussione dell'esistenza, ma piuttosto come un modo per garantirla. la coerenza può essere vista come il requisito minimo che la matematica deve soddisfare ma viene considerato da Cantor come il più importante principio di esistenza. Così nel caso dei numeri transfiniti la coerente integrazione del concetto di 'numero transfinito', data dalla riduzione del concetto di numero a quello di insieme, garantisce che ci siano degli oggetti che vi rientrano.

In realtà, come osservò Frege, la coerenza non è una condizione sufficiente per l'esistenza. Anche Cantor stesso probabilmente ne era consapevole ma riguardo ai transfiniti afferma: 'il transfinito è suscettibile di formazioni, specificazioni ed individuazioni di collezioni', intendendo che è possibile articolare una teoria coerente del transfinito: non vi è quindi una distinzione tra esistenza e possibilità di esistenza di questi oggetti.

Capitolo 3

Numeri ordinali

In questo capitolo viene introdotto in modo rigoroso il concetto di numero ordinale a partire da quello di tipo ordinale e si delineano le operazioni concettuali svolte da Cantor nella definizione di tali oggetti matematici. Segnaliamo esplicitamente che la moderna trattazione dei numeri ordinali è diversa da quella di Cantor; abbiamo deciso di seguire l'impostazione cantoriana per mettere in luce i suoi aspetti filosofici.

3.1 Tipi ordinali

In questa sezione si introduce in modo formale il concetto di 'tipo ordinale', che si può descrivere intuitivamente seguendo le parole di Cantor: il tipo ordinale è «il concetto generale che si ottiene da un insieme astraendo dalla natura dei suoi elementi, ma non dall'ordine con cui sono dati.».

Definizione 3.1.1 (Relazione d'ordine parziale)**.** Dato un insieme A, $\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine parziale in A, se gode delle seguenti proprietà:

- riflessiva: $x\mathcal{R}x$ per ogni $x \in A$;
- antisimmetrica: $(x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ per ogni $x, y \in A$;
- transitiva: $(x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ per ogni $x, y, z \in A$.

Un classico esempio di relazione d'ordine parziale è, dato un insieme X, la relazione $\subseteq$ sull'insieme $A = \mathcal{P}(X)$.

Definizione 3.1.2 (Insieme totalmente ordinato)**.** Un insieme ordinato $(A; \mathcal{R})$ si dice totalmente ordinato se per ogni $x, y \in A$ vale $x\mathcal{R}y$ oppure $y\mathcal{R}x$. In tal caso la relazione $\mathcal{R}$ si dice di ordine totale.

L'esempio della inclusione $\subseteq$ di cui sopra *non* dà, in generale, un ordinamento totale. Il classico esempio di insieme totalmente ordinato è $\mathbb{R}$ con l'usuale relazione d'ordine $\leq$.

Fissiamo da ora in poi alcune notazioni. Indicheremo con A un insieme non vuoto; con $\mathcal{R}$ una relazione d'ordine *totale* su A, e con $(A; \mathcal{R})$ la struttura ottenuta dall'insieme A con il fissato ordinamento totale (e parleremo semplicemente di 'insieme ordinato', sottintendendo che l'ordine è *totale*).

In genere si denota $\mathcal{R}$ con la scrittura $\leq$ e si scrive: $x \leq y$ al posto di $x\mathcal{R}y$.

Definizione 3.1.3 (Insiemi ordinati simili)**.** Siano $(A_1; \mathcal{R}_1)$ e $(A_2; \mathcal{R}_2)$ due insiemi ordinati; si dice che $(A_1; \mathcal{R}_1)$ è simile ad $(A_2;\mathcal{R}_2)$, se esiste $f : A_1 \to A_2$ tale che:

(i) f sia biunivoca (in particolare $A_1 \sim A_2$);

(ii) f sia isotona cioè: $(x\mathcal{R}_1 y) \Rightarrow (f(x)\mathcal{R}_2 f(y))$.

Per esprimere che $(A_1; \mathcal{R}_1)$ è simile ad $(A_2; \mathcal{R}_2)$, si scrive

$$(A_1; \mathcal{R}_1) \simeq (A_2; \mathcal{R}_2).$$

È facile riconoscere che '$\simeq$' è una relazione di equivalenza (per la proprietà di simmetria è essenziale utilizzare il fatto che gli ordinamenti siano totali).

Introduciamo ora una nozione cruciale per i nostri scopi: quella di tipo ordinale di un insieme. Per fare un esempio, consideriamo l'insieme finito $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, e osserviamo che A può essere *totalmente* ordinato in $k!$ modi; tuttavia, tutti gli insiemi ordinati che così si ottengono sono tra loro simili (come è facile riconoscere). Intuitivamente, il numero k basta a qualificare questi ordinamenti (da cui la seguente definizione nel caso finito).

Definizione 3.1.4 (Tipo ordinale di un insieme ordinato)**.** Se $A = \{a_1, \dots, a_k\} \sim N_k$, si dice che A ha tipo ordinale k (o tipo d'ordine k) e si scrive:

$$k = \operatorname{tipo\,ord} A.$$

Si pone per convenzione:

$$\operatorname{tipo\,ord} \emptyset = 0.$$

Per gli insiemi finiti i tipi ordinali e i numeri cardinali dunque coincidono.

Più in generale, se $(A; \mathcal{R})$ e $(A'; \mathcal{R}')$ sono due insiemi ordinati simili, si scrive:

$$\operatorname{tipo\,ord}(A; \mathcal{R}) = \operatorname{tipo\,ord}(A'; \mathcal{R}'),$$

e si dice che $(A; \mathcal{R})$ e $(A'; \mathcal{R}')$ hanno lo stesso tipo ordinale.

Se $(A; \mathcal{R})$ è un insieme ordinato, l'associato tipo d'ordine si dice finito o transfinito, a seconda che il numero cardinale di A sia finito o transfinito.

Considerando $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ con la relazione $\leq$ poniamo:

$$\omega = \operatorname{tipo ord}(\mathbb{N}; \leq), \quad \eta = \operatorname{tipo ord}(\mathbb{Q}; \leq) \quad \text{e} \quad \lambda = \operatorname{tipo ord}(\mathbb{R}, \leq).$$

Non è difficile riconoscere che $\omega \neq \eta$ (e ovviamente $\eta \neq \lambda \neq \omega$) poiché $(\mathbb{N}, \leq)$ ha un minimo, mentre $(\mathbb{Q}, \leq)$ non ce l'ha.

3.1.1 Aritmetica ordinale

Somma di tipi ordinali

Siano α_1 e α_2 due tipi ordinali e $(A_1; \mathcal{R}_1)$ e $(A_2; \mathcal{R}_2)$ due insiemi ordinati tali che: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, e $\alpha_1 = \operatorname{tipo ord}(A_1; \mathcal{R}_1)$, $\alpha_2 = \operatorname{tipo ord}(A_2; \mathcal{R}_2)$.

Si definisca in $A_1 \cup A_2$ la relazione $\mathcal{R}$ nel modo seguente:

$$(x\mathcal{R}y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x, y \in A_1 \quad \text{e} \quad x\mathcal{R}_1 y, \\ \text{oppure } x, y \in A_2 \quad \text{e} \quad x\mathcal{R}_2 y, \\ \text{oppure } x \in A_1, y \in A_2. \end{array}$$

Il tipo ordinale di $(A_1 \cup A_2; \mathcal{R})$ si chiama somma di α_1 e α_2, e si scrive:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \operatorname{tipo ord}(A_1 \cup A_2; \mathcal{R}).$$

Per i tipi ordinali non vale la proprietà commutativa; infatti si osserva che:

$$1 + \omega = \operatorname{tipo ord}\{0\} + \operatorname{tipo ord}\{1, 2, 3, \ldots\} = \operatorname{tipo ord}\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \omega,$$

mentre

$$\omega + 1 = \operatorname{tipo ord}\{1, 2, 3, \ldots\} + \operatorname{tipo ord}\{0\} = \operatorname{tipo ord}\{1, 2, 3, \ldots, 0\},$$

e l'insieme ordinato $\{1, 2, 3, \ldots, 0\}$ ha un massimo e non può quindi essere simile a $(\mathbb{N}, \leq)$; segue dunque $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$.

Vale invece, per la somma, la proprietà associativa.

Esempio 3.1.5. Si può riconoscere facilmente che vale

$$n + \omega + \omega = (n + \omega) + \omega = \omega + \omega,$$

e anche

$$\omega + n + \omega = \omega + (n + \omega) = \omega + \omega.$$

Prodotto di tipi ordinali

Siano χ e μ due tipi ordinali $\neq 0$. Siano $(K;\mathcal{R}')$ e $(M;\mathcal{R}'')$ due insiemi ordinati tali che $\chi = \text{tipo ord}\,(K;\mathcal{R}')$ e $\mu = \text{tipo ord}\,(M;\mathcal{R}'')$. Si consideri il prodotto cartesiano $K \times M$, e si definisca in esso la relazione d'ordine $\mathcal{R}$ nel modo seguente:

$$(k_1, m_1)\mathcal{R}(k_2, m_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} m_1 \neq m_2 \quad \text{e} \quad m_1\mathcal{R}''m_2, \\ \text{oppure} \quad m_1 = m_2 \quad \text{e} \quad k_1\mathcal{R}'k_2. \end{array}$$

Allora il tipo ordinale di $(K \times M;\mathcal{R})$ si chiama prodotto di χ per μ e si scrive:

$$\mu \cdot \chi = \text{tipo ord}\,(K \times M;\mathcal{R}).$$

Si pone: $\mu \cdot \chi = 0$ se $\mu = 0$ oppure $\chi = 0$.

Se α, β, γ sono tipi ordinali, allora in generale $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$. Infatti, ad esempio (con ovvie notazioni):

$$\omega \cdot 2 = \text{tipo ord}\,\{a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots\} \neq \omega,$$

mentre

$$2 \cdot \omega = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\} = \omega.$$

Si noti che sia $2 \cdot \omega$ che $\omega \cdot 2$ hanno cardinalità $\aleph_0$, ma $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

Si può provare che non vale una delle leggi distributive: precisamente[1]

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma, \quad \text{mentre} \quad \gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha + \gamma \cdot \beta.$$

Invece vale la proprietà associativa che permette di definire il prodotto di n tipi ordinali

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n;$$

se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha$, si scrive α^n, detta potenza di α di esponente n. Ad esempio, con ovvia notazione, si ha

$$\omega^2 = \Big\{1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \quad \ldots\Big\}.$$

[1]Per dimostrare che la prima legge distributiva non vale basta osservare che

$$(\omega + 1) \cdot 2 = \omega + 1 + \omega + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega \cdot 2 + 1,$$

mentre

$$\omega \cdot 2 + 1 \cdot 2 = \omega \cdot 2 + 2.$$

3.2 Numeri ordinali

Nel caso di insiemi finiti, i concetti di numero cardinale e ordinale indicano solo un diverso "uso" del numero: con l'ordinale si fa riferimento al processo del contare

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n$$

per arrivare al numero complessivo, ossia

$$n,$$

indicato dal cardinale. Nel caso transfinito, invece, i due concetti divergono in modo sostanziale.

Definizione 3.2.1 (Insieme bene ordinato)**.** Un insieme totalmente ordinato $(A; \leq)$ si dice bene ordinato se ogni sottoinsieme non vuoto di A ha un minimo rispetto a $\leq$.

Ad esempio $(\mathbb{N}, \leq)$ è bene ordinato, ma $(\mathbb{Q}, \leq)$ non lo è, poiché $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ non ha un minimo.

Proposizione 3.2.2. *Sia $(A; \leq)$ un insieme bene ordinato; allora ogni elemento di A ammette un successivo, cioè per ogni $a \in A$ esiste $a' \in A$ tale che $a \leq a'$ e non esiste $b \in A$ con $b \neq a'$ tale che $a \leq b \leq a'$.*

Dimostrazione. Sia a un elemento di A e sia A' il sottoinsieme di A degli elementi di A che seguono a. A' è dotato di un primo elemento, che chiameremo a'; si ha $a \leq a'$ e, per come è stato definito a', non esiste $b \in A$ diverso da a' tale che $a \leq b \leq a'$. $\square$

Definizione 3.2.3 (Numeri ordinali)**.** I tipi ordinali degli insiemi bene ordinati si dicono numeri ordinali.

Se $(A, \leq)$ è un insieme bene ordinato, si pone per definizione

$$\operatorname{ord}(A, \leq) := \operatorname{tipo} \operatorname{ord}(A, \leq).$$

Come è facile dimostrare, sono esempi di numeri ordinali ω, $\omega + 1$, $2 \cdot \omega$, ω^2.

Non sono numeri ordinali η e λ.

Teorema 3.2.4. *Se $(A; \leq)$ è un insieme bene ordinato con un numero ordinale transfinito, allora esiste un insieme B con $B \subseteq A$ tale che*[2]

$$\operatorname{ord}(B; \leq) = \omega.$$

Dimostrazione. $(A; \leq)$ ha un primo elemento a_1; questo, per la Proposizione 3.2.2, ha un successivo a_2, che, a sua volta, ha un successivo $a_3 \ldots$

Poiché $\operatorname{card} A$ è transfinito, esiste la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A, dato che a_n ha un successivo a_{n+1} per ogni $n \in \mathbb{N}$; posto $B = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, si ha $\omega = \operatorname{ord}\{a_1, a_2, \ldots\}$. $\square$

[2]Con $(B, \leq)$ indichiamo la restrizione di $\leq$ proveniente da A all'insieme B.

Per introdurre la nozione di 'relazione di minore' tra numeri ordinali è necessario dare la definizione di segmento (di un insieme bene ordinato) e chiarire, attraverso due teoremi, il concetto di similitudine di un insieme rispetto ad un suo segmento.

Definizione 3.2.5 (Segmento di un insieme bene ordinato)**.** Sia $(A; \leq)$ un insieme bene ordinato. Se $m \in A$ e $A_m = \{a \in A : a \leq m\}$, allora $(A_m; \leq)$ si chiama segmento di $(A; \leq)$.

[Per giustificare il nome 'segmento', si tenga a mente che l'insieme bene ordinato $(A; \leq)$ ha sempre un minimo.]

Osservazione 3.2.6. È immediato riconoscere che se $(A; \leq)$ è un insieme bene ordinato, $(B; \leq)$ un suo segmento e $(C; \leq)$ un segmento di $(B; \leq)$, allora $(C; \leq)$ è un segmento di $(A; \leq)$.

Teorema 3.2.7. *Se $(A; \mathcal{R})$ e $(A'; \mathcal{R}')$ sono due insiemi ordinati e simili e la funzione $f : A \xrightarrow[1-1]{\text{su}} A'$ è isotona, allora ogni segmento di $(A; \mathcal{R})$ viene trasformato in un segmento di $(A'; \mathcal{R}')$.*

Dimostrazione. Sia $(A_m; \mathcal{R})$ un segmento di $(A, \mathcal{R})$ e sia $m' = f(m)$. Poiché f è isotona e per ogni $a \in A_m$ vale $a\mathcal{R}m$, allora $f(a)\mathcal{R}'f(m)$; se $a'\mathcal{R}'m'$, allora esiste $a \in A$ tale che $a' = f(a)$ e necessariamente si ha $a\mathcal{R}m$. $\square$

Teorema 3.2.8. *Un insieme bene ordinato non è simile a nessun suo segmento proprio. Due suoi segmenti differenti non sono simili.*

Definizione 3.2.9 (Relazione di minore tra numeri ordinali)**.** Se α e β sono numeri ordinali tali che $\alpha = \mathrm{ord}(A'; \mathcal{R}')$ e $\beta = \mathrm{ord}(A''; \mathcal{R}'')$, si dice che α è minore o uguale a β se $(A'; \mathcal{R}')$ è simile a un segmento di $(A'', \mathcal{R}'')$.

Vale la relazione di minore stretto se $(A'; \mathcal{R}')$ è simile a un segmento proprio di $(A'', \mathcal{R}'')$ e quindi $\alpha \neq \beta$.

Vale la proprietà transitiva; infatti si ha:

Proposizione 3.2.10. *Se α, β e γ sono numeri ordinali e $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, allora $\alpha < \gamma$.*

Dimostrazione. Siano $\alpha = \mathrm{ord}\,(A'; \mathcal{R}')$, $\beta = \mathrm{ord}(A''; \mathcal{R}'')$ e $\gamma = \mathrm{ord}\,(A'''; \mathcal{R}''')$; se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, allora $(A'; \mathcal{R}') \simeq (A''_m; \mathcal{R}'')$ e $(A''_m; \mathcal{R}'') \simeq (A'''_m; \mathcal{R}''')$, poiché $(A''_m; \mathcal{R}'')$ è un segmento di $(A''; \mathcal{R}'')$ e $(A'''_m; \mathcal{R}''')$ è un segmento di $(A'''; \mathcal{R}''')$. Per il Teorema 3.2.7 si ha quindi che $(A'; \mathcal{R}')$ è simile a un segmento di $(A'''; \mathcal{R}''')$, da cui $\alpha < \gamma$. $\square$

Per dimostrare la confrontabilità tra numeri ordinali è necessario prima presentare il teorema che permette di assegnare un numero ordinale all'insieme dei numeri ordinali minori di quel numero. Per dimostrare quest'ultimo occorre premettere due lemmi.

Lemma 3.2.11. *Se $(A; \leq)$ è un insieme bene ordinato e $(B_1; \leq)$, $(B_2; \leq)$ sono due suoi segmenti tra loro diversi allora uno di essi è segmento dell'altro.*

Dimostrazione. Siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $B_1 = \{a \in A : a \leq a_1\}$ e $B_2 = \{a \in A : a \leq a_2\}$. Se $a_1 = a_2$ allora $B_1 = B_2$; dunque consideriamo $a_1 \neq a_2$; supponiamo $a_1 \leq a_2$; poiché $a \leq a_1$ implica $a \leq a_2$, si ha $B_1 \subseteq B_2$, da cui l'asserto. □

Lemma 3.2.12. *Se α e β sono due numeri ordinali allora può essere vera una sola delle seguenti affermazioni:*

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta.$$

Dimostrazione. Se fosse $\alpha \leq \beta$ e $\alpha = \beta$ allora si avrebbe $\alpha \leq \alpha$, contrariamente al Teorema 3.2.8. Per lo stesso motivo non può essere $\beta < \alpha$ e $\alpha = \beta$; se fosse $\alpha < \beta$ e $\beta < \alpha$ si avrebbe per la Proposizione 3.2.10 $\alpha \leq \alpha$, giungendo quindi alla stessa contraddizione. □

Teorema 3.2.13. *Sia μ un numero ordinale, e sia W_μ l'insieme dei numeri ordinali minori o uguali a μ (se $\mu = 0$, poniamo $W_\mu = \emptyset$).*

Allora gli elementi di W_μ sono tra loro confrontabili (con la relazioni di minore o uguale); essi possono quindi essere ordinati secondo la grandezza crescente e si ha

$$\operatorname{ord} W_\mu = \mu.$$

Dimostrazione. Sia $\mu = \operatorname{ord}(M, \mathcal{R})$. Per ogni $\alpha \in W_\mu$ vale $\alpha \leq \mu$ perciò (per definizione di $\leq$ tra ordinali) α è il numero ordinale di un segmento di $(M; \mathcal{R})$.

Quindi i numeri ordinali di W_μ sono i numeri ordinali dei segmenti di $(M; \mathcal{R})$. Essi quindi sono confrontabili per il Lemma 3.2.11. Se $\alpha \in W_\mu$ e $\alpha = \operatorname{ord}(M_m; \mathcal{R})$, con $(M_m; \mathcal{R})$ un opportuno segmento di $(M; \mathcal{R})$, allora l'applicazione $f : W_\mu \to M$, tale che $f(\alpha) = m$ è iniettiva e suriettiva; inoltre se $\alpha_1 \leq \alpha_2$ con $\alpha_1 = \operatorname{ord}(M_{m_1}; \mathcal{R})$ e $\alpha_2 = \operatorname{ord}(M_{m_2}; \mathcal{R})$, allora $(M_{m_1}; \mathcal{R})$ risulta un segmento di $(M_{m_2}; \mathcal{R})$ e quindi $m_1 \mathcal{R} m_2$, perciò f è isotona. Quindi $(W_\mu; \leq) \simeq (M; \mathcal{R})$. Ciò prova il teorema. □

Un importante risultato riguardante i numeri ordinali consiste nella possibilità di confrontarli. Detto formalmente:

Teorema 3.2.14 (Legge di tricotomia per i numeri ordinali)**.** *Se α e β sono numeri ordinali allora è vera una e una sola delle seguenti affermazioni:*

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta.$$

Dimostrazione. Per il Lemma 3.2.12 può essere vera una sola delle tre.

Occorre ora quindi provare che necessariamente una delle tre è vera.

Consideriamo gli insiemi W_α e W_β utilizzando la stessa notazione del Teorema 3.2.13. $W_\alpha \cap W_\beta$ è un insieme bene ordinato perché tale è $(W_\alpha; \leq)$; sia

$$\gamma = \operatorname{ord}(W_\alpha \cap W_\beta; \leq).$$

Proviamo ora che γ è confrontabile con α e che $\gamma \leq \alpha$. Supponiamo $\gamma \neq \alpha$; allora $W_\alpha \cap W_\beta$ è un sottoinsieme proprio di W_α e

$$W_\alpha = (W_\alpha \cap W_\beta) \cup (W_\alpha \setminus (W_\alpha \cap W_\beta)).$$

Sia $\mu \in W_\alpha \cap W_\beta$ e $\nu \in W_\alpha \setminus (W_\alpha \cap W_\beta)$; μ e ν sono confrontabili perché appartenenti a W_α e $\mu \neq \nu$; perciò $\mu \leq \nu$ oppure $\nu \leq \mu$. Se $\nu \leq \mu$, poiché $\mu \leq \alpha$ e $\mu \leq \beta$, si ha $\nu \leq \alpha$ e $\nu \leq \beta$, da cui $\nu \in W_\alpha \cap W_\beta$ contro l'ipotesi.

Dunque $\mu \leq \nu$. $W_\alpha \setminus (W_\alpha \cap W_\beta)$ ha un primo elemento λ e $(W_\alpha \cap W_\beta; \leq)$ è il segmento di $(W_\alpha; \leq)$ determinato da λ; per il teorema precedente vale $\lambda = \mathrm{ord}(W_\alpha; \leq)$ e quindi $\gamma = \lambda$. Dunque in ogni caso è $\gamma \leq \alpha$. Analogamente si prova che $\gamma \leq \beta$. D'altra parte non può essere $\gamma \leq \alpha$ e $\gamma \leq \beta$ perché in tal caso sarebbe $\gamma \in W_\alpha \cap W_\beta$, mentre $\gamma = \lambda \in W_\alpha \setminus (W_\alpha \cap W_\beta)$.

Pertanto: o $\gamma = \alpha$ e $\gamma = \beta$ e quindi $\alpha = \beta$, oppure $\gamma = \alpha$ e $\gamma \leq \beta$ e quindi $\alpha \leq \beta$, oppure $\gamma \leq \alpha$ e $\gamma = \beta$ e quindi $\beta \leq \alpha$. □

Teorema 3.2.15. *Se A è un insieme di numeri ordinali allora $(A; \leq)$ è bene ordinato.*

Dimostrazione. Sia $A' \neq \emptyset$, $A' \subseteq A$. Sia $\alpha \in A'$; se α non è il primo elemento di A', consideriamo l'insieme dei numeri ordinali minori di α, W_α; $(W_\alpha; \leq)$ è ben ordinato e quindi anche $(A' \cap W_\alpha)$ lo è. Esso ha quindi un primo elemento che è anche primo elemento di $(A', \leq)$. Dunque $(A, \leq)$ è bene ordinato. □

Osservazione 3.2.16. I numeri ordinali possono essere ordinati formando una successione transfinita:

$$\begin{array}{cccc}
0, & 1, & \cdots & \omega, \\
\omega + 1, & \omega + 2, & \cdots & \omega \cdot 2, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \omega \cdot \omega = \omega^2, \\
\omega^2 + 1, & \omega^2 + 2, & \cdots & \omega^2 \cdot 2, \\
\omega^2 \cdot 2 + 1, & \omega^2 \cdot 2 + 2 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Osservazione 3.2.17. A questo proposito occorre rilevare il paradosso, già notato da Cantor, formalizzato da Burali-Forti. Per Cantor è infatti possibile dividere gli ordinali in classi: una prima classe numerica, data dagli ordinali finiti (numeri naturali), una seconda, il cui primo elemento è ω, è data dagli ordinali numerabili

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega^2, \ldots \omega^\omega,$$

ognuno dei quali ha cardinalità $\aleph_0$; il numero cardinale della classe è maggiore del numero cardinale di ogni suo elemento ma è anche il più piccolo cardinale transfinito che sia maggiore di $\aleph_0$ (ossia $\aleph_1$). La terza classe è formata da tutti gli ordinali che hanno cardinalità $\aleph_1$ e avrà cardinalità $\aleph_2$ e si itera questo procedimento all'infinito, ottenendo così la successione:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1} \ldots$$

Il numero ordinale di questo insieme dovrebbe però contemporaneamente essere il massimo numero ordinale, perché deve essere maggiore di tutti i suoi elementi, e non esserlo, poiché dato un numero ordinale è sempre possibile trovare il suo successore: si ha evidentemente un paradosso.

3.3 Induzione transfinita

È possibile applicare agli insiemi bene ordinati un procedimento dimostrativo simile all'induzione matematica, detto induzione transfinita. Il relativo principio può essere formulato affermando:

Sia $A(\alpha)$ un'affermazione relativa a un qualunque numero ordinale $\alpha \geq \alpha_0$. Per dimostrare che $A(\alpha)$ è vera per ogni α si può seguire il seguente ragionamento:

(i) Si dimostra che $A(\alpha)$ è vera per $\alpha = \alpha_0$.

(ii) Si dimostra che se $A(\alpha)$ è vera per tutti i numeri ordinali α tali che $\alpha_0 \leq \alpha < \beta$ allora $A(\beta)$ è vera.

Si conclude quindi che, se β è un qualsiasi numero ordinale maggiore di α, allora $A(\alpha)$ è vera per ogni numero ordinale.

Dimostrazione. Si dimostra per assurdo. Supponiamo che $A(\gamma)$ sia falsa e consideriamo l'insieme ben ordinato $(W_{\gamma+1}; \leq)$, dove $W_{\gamma+1}$ è l'insieme dei numeri ordinali minori di $\gamma + 1$. Sia B il sottoinsieme di $W_{\gamma+1}$ dei numeri ordinali α per cui $A(\alpha)$ è falsa; poiché $(B, \leq)$ è ben ordinato, esso ha un primo elemento δ e per (i) vale $\delta > \alpha_0$. Allora $A(\alpha)$ è vera per ogni numero ordinale α tale che: $\alpha_0 \leq \alpha < \delta$; allora $A(\delta)$ è vera per (ii). Da ciò l'assurdo. $\square$

Una formulazione analoga è data in [3]: supponiamo che S sia un sottoinsieme di un insieme bene ordinato $(X, \leq)$ e che per ogni elemento x di X tale che tutto il segmento iniziale S_x è incluso in X, x appartenga ad S; allora $X = S$.

Istituendo un confronto con il principio di induzione dei numeri naturali (dato $S \subseteq \omega$, se $0 \in S$ e per ogni $n \in S$ anche $n + 1 \in S$, allora $S = \mathbb{N}$), si rilevano due differenze principali:

- nel principio di induzione transfinita non si fanno ipotesi riguardo ad un elemento iniziale come lo 0;

- questo principio, invece di estendersi ad ogni elemento a partire da quello precedente, si estende ad ognuno a partire da quello dell'insieme di tutti i precedenti; un elemento di un insieme bene ordinato può infatti non avere un elemento precedente immediato.

Il principio di induzione matematica, quindi, applicato a un insieme bene ordinato qualsiasi, non è equivalente al principio di induzione transfinita. Ad esempio, se X è l'insieme $\omega \cup \{\omega\}$ e si definisce un ordine in X ordinando gli elementi di ω con la consueta relazione di minore e ponendo $n \leq \omega$ per tutti gli n in ω, allora $(X, \leq)$ è un insieme bene ordinato ma esiste un sottoinsieme S, diverso da X, tale che $0 \in S$ e per ogni $n \in S$, $n + 1 \in S$ ed è $S = \omega$.

Capitolo 4

Aspetti filosofici dei numeri ordinali

4.1 Principi generativi

L'introduzione di Cantor dei numeri ordinali transfiniti appare basata su due principi:

1 se α è un numero ordinale (finito o transfinito) allora c'è un numero ordinale $\alpha + 1$ che è l'immediato successore di α

2 data una successione crescente di numeri ordinali c'è un numero ordinale che li segue tutti come loro limite

Questi sembrano essere, per come sono posti, principi di esistenza che postulano l'esistenza di nuovi numeri che estendono la successione dei numeri naturali nel campo dell'infinito. Tali numeri sembrano esistere indipendentemente dagli insiemi ma in realtà il loro collegamento con questi ultimi è molto stretto. Questi principi, inoltre, possono essere meglio considerati come la determinazione di quali ordinali esistono, dopo che è stata introdotta la loro legittimizzazione tramite i concetti di insieme ben ordinato e di tipo ordinale. Quest'ultimo è considerato da Cantor un concetto legittimo in quanto 'ha una immediata e oggettiva rappresentazione nella nostra intuizione'. L'arbitrarietà di tale osservazione costituisce il punto debole della linea di ragionamento, che Cantor cerca di rafforzare appellandosi all'idea di astrazione: secondo lui il tipo (o il numero) è una sorta di insieme ben ordinato la cui esistenza è stabilita astraendo dalla natura degli elementi di un dato insieme. Nel tentativo di mostrare che i numeri ordinali transfiniti esistono Cantor ha anche l'obiettivo di mostrare l'unità tra il finito e il transfinito, che persegue sia parlando di oggetti di un dominio (i numeri) nei termini di un altro (insiemi), sia mostrando che è possibile costruire un'aritmetica con i numeri transfiniti simile a quella dei finiti e quindi i transfiniti non sono più considerati dei semplici 'simboli dell'infinito' ma veri e propri numeri.

Inoltre, anche se nei principi generativi non c'è un esplicito riferimento al riduzionismo si nota come essi si basino su principi di esistenza di insiemi, la cui legittimità

Cantor assume come garantita dal concetto di insieme visto nel paragrafo 2.1; è da lui sostenuta inoltre, nella sua disquisizione sul transfinito, la divisione in classi di insiemi basata sulla dimensione; considerando contemporaneamente il principio del dominio e quello del finitismo è possibile notare come Cantor, similmente al caso dei numeri reali, abbia una concezione iterativa dell'insieme, basata in questo caso sull'idea che è sempre possibile trovare un insieme di dimensione maggiore considerando l'insieme delle funzioni che vanno dall'insieme precedente in $\{0, 1\}$.

Nel primo principio generativo, l'operazione di ottenere un successore è data dall'aggiunta di un nuovo elemento a un insieme, quindi l'esistenza di un successore è legata all'esistenza di un insieme; il secondo principio potrebbe far pensare che il numero ω sia semplicemente creato come il primo numero dopo tutti i numeri naturali, mentre ω esiste perché possiamo esibire l'insieme di tutti i numeri naturali; per stabilire l'esistenza di ulteriori ordinali Cantor fa appello all'esistenza di ulteriori insiemi bene ordinati: per passare dagli ordinali di una classe a quelli della successiva è necessario riunire tutti i 'nuovi ordinali' in un insieme prima di provare l'esistenza di un ordinale della classe superiore. Per il principio di esistenza di tali insiemi Cantor utilizza il secondo principio generativo intendendo, come ordinale limite, l'unico ordinale che rappresenta il dominio infinito che contiene tutti gli ordinali precedenti. Vi è quindi un riferimento al principio del dominio formulato nel primo capitolo, ma mentre quest'ultimo asseriva solo che ci fosse un dominio infinito che conteneva tutti i valori di una quantità variabile (ad esempio tutti i numeri naturali), in questo caso si afferma l'esistenza del più piccolo dominio con tale caratteristica.

4.2 Astrazionismo di Cantor

Poiché Cantor voleva presentare una nozione di numero cardinale che non facesse riferimento ad assunzioni sul buon ordinamento di un insieme bene ordinato, che non era riuscito a dimostrare, e per rafforzare il collegamento tra insieme e numero ordinale, viene da lui assunta una posizione astrazionista: la descrizione che Cantor dà della potenza di un insieme è il concetto derivante da una doppia astrazione rispetto alla natura e all'ordine degli elementi di un dato insieme; tale concetto è esso stesso equivalente all'insieme di partenza ed è dato dall'insieme delle 'unità' che lo costituiscono, dopo che ogni elemento dell'insieme viene ridotto a simbolo rappresentativo. Quindi il numero per Cantor è il concetto generale in cui rientrano tutti e soli gli insiemi equivalenti a un dato insieme. Tale definizione è stata criticata da Russell che sottolinea l'assenza di giustificazione sia dell'esistenza che dell'unicità di questo concetto e da Frege, che rileva l'impossibilità di trasformare un insieme in un numero attraverso un processo di astrazione e che nota come, se tutti gli elementi fossero ridotti ad una unità questa dovrebbe essere la stessa unità ma allora l'insieme avrebbe sempre un solo elemento.

Come i tipi ordinali anche i numeri cardinali sono per Cantor delle semplici immagini concettuali; quindi la spiegazione di Cantor in termini di astrazione sembra più un tentativo di chiarire il processo di 'rappresentazione del numero nell'intuizione' piuttosto che di evitare elementi psicologistici come intendeva fare.

Capitolo 5

Conclusioni

Nonostante l'arbitrarietà delle definizioni di insieme e di quelle per astrazione e i paradossi che nascono dall'implicita assunzione di alcuni principi che verranno riformulati in modo più rigoroso solo con teorie assiomatiche successive (vedasi Nota[1]), questa teoria ha dato vita a una nuova branca della matematica, ossia la teoria degli insiemi ed ha avuto importanti riflessi anche in ambito filosofico.

Da notare la creatività di Cantor, nella formulazione di una teoria radicalmente nuova, che spinse Russell ad affermare: «La soluzione delle difficoltà che in passato circondavano l'infinito matematico è probabilmente la massima conquista che la nostra epoca ha da vantare»; celebre è rimasto il commento di Hilbert: «Nessuno potrà mai cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi.».

[1] Si fa qui riferimento ai principi di:

- estensionalità, che dice che due insiemi che hanno gli stessi elementi sono uguali;
- comprensione, vedi Osservazione 1.2.7;
- scelta, che assume che è sempre possibile operare un numero arbitrario di scelte arbitrarie tra insiemi non vuoti.

In seguito Zermelo, nella sua assiomatizzazione formulerà come assiomi il primo e il terzo mentre il secondo verrà riformulato in modo da non dare origine ad antinomie

Bibliografia

[1] Geymonat L, Storia del pensiero filosofico e scientifico, Milano, Garzanti,1973

[2] Hallett M., Cantorian set theory and limitation of size, New York, Oxford University Press, 1984

[3] Halmos P., Naive set theory, Princeton, Van Nostrand Company, 1960

[4] Lolli G., Dagli insiemi ai numeri, Torino, Bollati Boringhieri, 1994

[5] Lolli G., Guida alla teoria degli insiemi, Milano, Springer, 2008

[6] Pini B., Primo corso di Analisi Matematica, Bologna, Cooperativa Libraria Universitaria, 1964