Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

LA LOGICA DEL SECONDO ORDINE E LA PROVA ONTOLOGICA DI GÖDEL

Tesi di Laurea in Logica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Plazzi Piero

Presentata da:
Tavaglione Antonella

III Sessione
2013/2014

Introduzione

L'argomento di questa tesi è stato scelto in seguito alla lettura personale del libro *La prova matematica dell'esistenza di Dio* di Gödel [5]. Tale testo tratta della prova ontologica di Gödel (1970) e spiega brevemente il linguaggio logico utilizzato per la sua dimostrazione. Così nel mio lavoro ho deciso di dedicare il primo capitolo all'evoluzione della prova ontologica nella storia della filosofia e della logica e all'analisi, da un punto di vista logico, della prova di Gödel. Nella prima sezione, quindi, ho riportato l' argomentazione di Anselmo d'Aosta, il primo a proporre una prova ontologica, e a seguire quelle di Scoto, Spinoza, Leibniz e Russell, evidenziando dove opportuno le critiche ad esse apportate. Nella seconda sezione ho ripercorso le tappe della prova ontologica di Gödel e ho riportato e analizzato alcuni dei passaggi logici tratti da uno dei suoi taccuini. Gödel ha utilizzato insieme molti tipi di logica così nel secondo capitolo ne ho analizzato alcune porzioni: in particolare la logica del secondo ordine. Inoltre ho dedicato la prima sezione a un breve richiamo di logica modale e del suo sistema S5 in quanto la dimostrazione gödeliana si basa anche su principi di logica modale inseriti però in quella del secondo ordine (e del terzo). Nelle sezioni sucessive dunque ho studiato la logica del secondo ordine evidenziandone la sintassi e la semantica e mettendola in relazione con la logica del primo ordine, mostrandone analogie e differenze. Ho infine brevemente trattato un caso particolare della logica del secondo ordine, vale a dire la logica del secondo ordine debole. Queste logiche sono legate strettamente all'aritmetica di Peano che può essere utilizzata per provarne i limiti come ad esempio la mancanza di semidecidibilità.

Indice

Capitolo 1

1.1 La prova ontologica nella storia

Tra le svariate dimostrazioni dell'esistenza di Dio quella più dibattuta è la prova nota con il nome di "argomento ontologico" o di "prova a priori": la nozione di Dio come "Primo principio" è posta all'inizio della prova e si vuole dimostrare come l'essenza divina implica logicamente la sua reale esistenza. Negli argomenti ontologici, risultano di maggior rilievo i tre principi fondamentali noti come "leggi della logica": *identità*, *non contraddizione* e *terzo escluso* e proprio questo ruolo centrale fa delle prove a priori delle dimostrazioni strettamente legate alla storia della logica e non solo a quella della teologia e della filosofia [3].
Anselmo d'Aosta (1033-1109), monaco benedettino del monastero di Le Bec, è l'uomo che ha dato inizio alla speculazione filosofica sulla possibilità di dimostrare a priori l'esistenza di Dio. È il primo grande filosofo medioevale che riesce a coniugare fede cristiana e ragionamento logico. Anselmo sostiene la possibilità della dimostrazione dell'esistenza di Dio e della Sua natura desunta da argomenti o inferenze logiche in cui alcune proposizioni vere implicano necessariamente la verità di una conclusione. Dopo aver seguito nel *Monologion* un procedimento di dimostrazione a posteriori, si delinea per Anselmo l'idea di una argomentazione tutta a priori, l'idea dell'*unum argumentum*. Presupponendo l'assoluta certezza della fede, vuole formulare una dimostrazione per confutazione, così, nel terzo capitolo del *Proslogion* (1077), Anselmo torna sulla sua dimostrazione che possiamo schematizzare sinteticamente in due argomentazioni concatenate tra loro. La prima argomentazione presenta la forma di un sillogismo ed è la seguente:

a. premessa maggiore: ciò di cui si intende il significato esiste nell'intelletto
b. premessa minore: ogni insipiente [=ateo] intende quando ascolta il significato del concetto di Dio come "ciò di cui non si può pensare il maggiore".
c. conclusione: ogni insipiente deve ammettere che il concetto di Dio esiste nel suo intelletto.
La seconda argomentazione ha la forma di un sillogismo ipotetico (modus ponens):
a. se ciò di cui non si può pensare il maggiore esiste nel pensiero, allora deve necessariamente esistere anche nella realtà, altrimenti non sarebbe ciò di cui non si può pensare il maggiore.
b. ma ciò di cui non si può pensare il maggiore esiste nell'intelletto.
c. dunque, ciò di cui non si può pensare il maggiore esiste necessariamente anche nella realtà.
Il ricorso a tale argomentazione per confutare l'"insipiente" è valsa ad Anselmo la critica di aver compiuto un ragionamento circolare, una *petitio principii*, che consiste nel riaffermare nella conclusione quanto si è già affermato in premessa.
A contestare Anselmo sarà il benedettino Gaunilone (1010-1083) dell'abbazia di Marmoutier. Egli è l'autore del *Liber pro insipiente* che Anselmo volle allegare al *Proslogion*. Gaunilone contesta la validità dell'argomento anselmiano con l'obbiettivo di dimostrare che Dio può benissimo essere pensato non esistente dando così di fatto ragione all'"insipiente". L'obiezione principale mossa dal monaco è l'inammissibilità di un salto dall'ordine meramente logico all'ordine delle realtà di fatto. La dimostrazione per confutazione anselmiana quindi, pur essendo un'argomentazione logica formalmente ineccepibile non per questo assicura che la conclusione è vera se non si accetta la verità delle premesse, come per ogni ragionamento corretto.

Interessante per gli aspetti logici e per gli sviluppi in epoca moderna della dimostrazione anselmiana è la figura del francescano Giovanni Duns Scoto (1266-1308). Egli riprende l'argomentazione di Anselmo, alla quale tuttavia apporta una modifica nella struttura logica: se Anselmo riteneva ovvia la possibilità razionale di Dio, il filosofo scozzese ritiene indispensabile affermare chiaramente in premessa questa verità. Scoto si preoccupa inoltre di dimostrare a posteriori che l'idea di Dio è possibile, poiché soltanto dopo questo

passaggio risulta legittimo concludere che ciò di cui non si può pensare il maggiore non può essere concepito non esistente senza cadere in contraddizione. La struttura del suo ragionamento secondo una forma di *Modus ponens* che potremmo schematizzare in un sistema modale moderno è:
a. se Dio è possibile, allora esiste.
b. ma Dio è possibile.
c. dunque Dio esiste.

La prova ontologica dopo Duns Scoto non conobbe interventi significativi fino all'epoca moderna. Bisogna così attendere il Seicento con il francese René Descartes (1596-1650). Le prove cartesiane di Dio sono tre e vengono presentate nella terza e nella quinta delle sue *Meditazioni metafisiche sulla filosofia prima* (1641). Poiché si è basato sul concetto di "idea chiara e distinta dell'esistenza di Dio" non scendiamo nei particolari della sua formulazione logica.

Più rilevante è invece il contributo del pensatore cartesiano Baruch Spinoza (1632-1677) che ripropose la prova a priori: nel *Breve trattato su Dio, l'uomo e il suo bene* (1660), il ragionamento di Spinoza secondo la regola del *modus ponens* presenta la seguente struttura riprendendo idee cartesiane:
a. se qualcosa è inteso chiaramente e distintamente dell'esistenza di una cosa, allora appartiene veramente a quella cosa.
b. ma l'esistenza è intesa in modo chiaro e distinto come appartenente all'essenza di Dio.
c. dunque, l'esistenza appartiene veramente a Dio.
Subito dopo questa prima dimostrazione a priori ne troviamo un'altra. La forma logica del ragionamento ricalca la struttura di un sillogismo aristotelico ed è il seguente:
a. le essenze degli enti sono eterne e immutabili
b. l'essenza di Dio è la sua esistenza.
c. dunque, l'esistenza di Dio è eterna e immutabile
Spinoza dopo aver stabilito le definizioni e gli assiomi del suo sistema, presenta il seguente teorema "modale" (b): "l'esistenza necessaria di Dio si conosce dalla sola considerazione della sua natura".

Cinquanta anni dopo la nascita di Cartesio, nel 1646 , nasce in Germania Gottfried Wilhelm Leibniz. Nella sua dottrina filosofica Dio occupa un posto fondamentale già dal primo scritto del 1666, *Dissertatio de arte combinatoria*, in cui manifesta la sua intenzione di trovare uno strumento logico onnicomprensivo: la *characteristica universalis*. La principale formulazione leibniziana della prova a priori viene fondata sulle nozioni logiche di "possibile", "impossibile" e "necessario" della logica modale applicate al concetto di Dio: se la nozione di Essere perfettissimo e necessario non è contraddittoria (quindi è possibile), allora ciò implica la sua reale esistenza. Leibniz, partendo dal presupposto per cui l'essenza di Dio implica l'esistenza necessaria, prima ne dimostra la possibilità e poi ne afferma per deduzione logica l'esistenza reale. Una formulazione modale del suo ragionamento può essere:
a. se l'Essere necessario è possibile allora esiste
b. ma l'Essere necessario è possibile
c. dunque l'Essere necessario esiste.
Secondo Leibniz con questo sillogismo l'esistenza di Dio è stata definitivamente dimostrata.

Per la logica moderna però il termine "esistenza" si formalizza con un quantificatore e non con un predicato. Per Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) non è consentito attribuire l'esistenza a un oggetto poiché ne deriverebbe un "predicato di predicati", con un primo accenno a logiche di ordine superiore. Come dirà in seguito Willard Van Orman Quine (1908-2000), l'esistenza non è altro che una "valenza" assegnata a qualcosa e quindi non un predicato.
Nel corso del XX secolo l'argomento ontologico ha conosciuto una ripresa negli studi logico-teologici. Negli ambienti culturali più interessati agli aspetti logico-linguistici si sviluppa un dibattito incentrato sul problema della validità metafisica dell'argomento di Sant'Anselmo: è un fatto già ricordato, che pur essendo un'argomentazione logica formalmente ineccepibile non per questo assicura che la conclusione è vera se non si accetta la verità delle premesse. Il filosofo anglosassone Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) è stato probabilmente il primo ad esprimersi in termini contemporanei sulla

prova in un articolo del 1905 [3]. Formalizzando il linguaggio logico, riteneva di poter finalmente superare tutte le questioni metafisiche connesse alla nozione di "esistenza" ed è per questo che nel suo articolo inserisce un esempio che appare come una confutazione dell'argomento ontologico. Innanzitutto procede alla riduzione degli enunciati della dimostrazione a priori dell'esistenza di Dio alle proposizioni:
a. c'è una e una sola x che è perfettissima
b. essa ha tutte le perfezioni
c. dunque questa entità esiste
Fin qui, la dimostrazione ontologica non è stata ancora invalidata. Russell aggiunge che non è possibile reputare l'argomento ontologico un'autentica prova dell'esistenza di Dio anzitutto perché la (a) non è provata e quindi la (c) può non essere vera, e poi perché l'esistenza non è formalizzabile come un predicato (una "perfezione").

1.2 La prova ontologica di Kurt Gödel

Nel séguito, riportiamo una formalizzazione di una prova ontologica dovuta a K. Gödel, che si è occupato a più riprese di questo argomento. Essa è stata pubblicata in Italia con commenti di G. Lolli e P. Odifreddi nel 2006 [5]. Gödel, pur non essendo ateo, ha dichiarato di non avere altri fini se non quello logico nell'argomentare la sua prova ontologica. Lui stesso ha dichiarato: sono << Battista Luterano, ma senza appartenere ad alcuna congregazione. Il mio credo è *teista* non panteista >> [1]. Da subito tende a classificare i pensieri filosofici << secondo il grado e il modo della loro affinità con la metafisica (o religione) o, al contrario, della loro distanza da essa>> [2]. Al proposito della sua religiosità, è noto che Gödel non parlava quasi mai direttamente di Dio; al contrario, parlava invece spesso di mente umana intesa come mente individuale e non collettiva. Non riduceva la mente al cervello, bensì per lui il cervello è un calcolatore connesso a uno spirito che non può sussistere senza il corpo. Nel 1961 scrisse quattro lettere alla madre [3] in cui rese note le sue ragoni per credere in un'altra vita, una delle quali fu la non refutazione di tale idea.

[1] H. Wang, *Reflections on Kurt Gödel* citato in [5]
[2] K.Gödel, *Opere*, vol. 3, Bollato Boringhieri, Torino 2006 citato in [5]
[3] K.Gödel, *Collected Works*, vol.4,Clarendon Press, Oxford 2003 citato in [5]

Tornando allo scritto pubblicato in [5], *Prova ontologica*, Gödel lo fece esaminare al logico e matematico Dana Scott nel 1970: preoccupato per la sua salute, Gödel voleva essere sicuro che la sua prova non andasse perduta. Oltre a quella del 1970 aveva elaborato altre versioni qualche tempo prima. Alcune delle idee della dimostrazione sono contenute in un foglio datato 1941 intitolato anch'esso *Prova ontologica* e altro materiale è reperibile nel suo taccuino filosofico <<Phil XIV>> scritto probabilmente tra il 1954 e il 1955.
Soltanto nel 1987 la sua prova è stata pubblicata negli Stati Uniti in un volume che raccoglie diversi suoi scritti [3]. La *Prova ontologica* è un teorema costituito da ventotto passaggi e strutturato con logiche simboliche di tipo modale e del secondo ordine. La prima idea di Gödel è di rimpiazzare le perfezioni della tradizione con proprietà positive enunciando alcune loro caratteristiche e limitando il suo ragionamento all'utilizzo di queste. Decise che le proprietà positive dovevano soddisfare le seguenti condizioni:[5]

1. l'intersezione di due proprietà positive è positiva
2. la proprietà vuota non è positiva
3. data una proprietà non vuota, o la proprietà stessa o la sua complementare, è positiva
4. una proprietà più grande in senso estensionale di una proprietà positiva è ancora una proprietà positiva

Date queste condizioni possiamo definire Dio come un essere che ha tutte le proprietà positive, anche se le quattro condizioni non danno la definizione di proprietà positiva, ma una assiomatizzazione [5]. Una prima versione dell'argomento di Gödel può essere: "in un mondo finito Dio esiste ed è unico". Infatti la prima condizione assicura che dopo un numero finito di passi si arriva all'intersezione di tutte le proprietà positive, che risulta essere ancora una proprietà positiva; la seconda assicura che tale intersezione è non vuota ed esiste un oggetto (che abbiamo chiamato Dio) che ha tutte queste proprietà; la terza condizione assicura che la proprietà di essere Dio è positiva e la quarta permette di dimostrare che le proprietà positive sono esattamente quelle possedute da Dio. Ma l'obiettiivo di Gödel è di eliminare l'ipotesi di finitezza: la sua idea fu di sostituire questa ipotesi con quella che “essere Dio” sia una proprietà positiva. Così per definizione “essere Dio” significa avere tutte le proprietà positive e da qui si dimostra che se “essere Dio” è possibile, allora Dio esiste ed è unico. Questo è il contenuto dei passaggi logici della prova di G$\ddot{o}$del, datata 10 febbraio 1970 [5], che riporto di seguito testualmente:

$P(\varphi)$ φ è positivo (o $\varphi \in P$)
Assioma 1. $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi)$
Assioma 2. $P(\varphi) \vee P(\neg\varphi)$ (disgiunzione esclusiva)
Definizione 1. $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$. (Dio)
Definizione 2. $\varphi Ess.x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$. ($\varphi$ è l'essenza di x)

$$p \supset_N q = N(p \supset q)(necessit\acute{a})$$

Assioma 3. $P(\varphi) \supset NP(\varphi) \quad \neg P(\varphi) \supset N\neg P(\varphi)$
Teorema 1. $G(x) \supset G$ Ess.x.
Definizione 3. $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi Ess.x \supset N(\exists x)\varphi(x)]$ (esistenza necessaria)
Assioma 4. $P(E)$.
Teorema 2. $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$, quindi $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ quindi $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$ (M= possibilità) $M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$
$M(\exists x)G(x)$ significa che il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile. Ciò è vero grazie a:
Assioma 5. $P(\varphi).\varphi \supset_N \psi : \quad \supset P(\psi)$

Proviamo a spiegare meglio cosa ci vogliono dire questi passaggi logici e perchè possiamo farli. Il linguaggio in cui viene presentata la prova è un linguaggio del secondo ordine, con un operatore modale di necessità $\Box$ che G$\ddot{o}$del indica con N (e il suo duale di possibilità $\Diamond$, indicato con M) e un predicato 1-ario costante P, applicabile alle proprietà. Gli operatori modali hanno le proprietà di S5, uno dei sistemi della logica modale (vedi sez. 2.1), hanno cioè le proprietà di un quantificatore. Gli oggetti cui si riferiscono possono essere detti “mondi” o “mondi possibili”. Le proprietà di individui usate sono soltanto 1-arie; indichiamo le variabili individuali con x, y, z ... le variabili di proprietà con lettere greche minuscole, le costanti sono introdotte con definizioni: si tratta di una

proprietà unaria G, di una relazione binaria Ess fra proprietà e individui e di un altro predicato unario di individui E. Possiamo quindi dare i seguenti significati:
$P(\varphi)$ significa: la proprietà φ è positiva.
$G(x)$ significa: x è divino (x è Dio).
$\varphi Essx$ significa: φ è l'essenza di x.
Ex significa: x esiste necessariamente.
$M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ significa quindi: se l'esistenza divina risulta anche solo possibile, allora è necessaria.
Detto questo si ha che:[5]

Assioma 1. ci dice che la congiunzione di due proprietà positive è una proprietà o, più in generale, che la somma di tutte le proprietà positive sia essa stessa una proprietà positiva.
Assioma 2. ci dice che data una proprietà o lei o la sua negazione è positiva. (disgiunzione esclusiva)
Definizione 1. ci dice che x è divino se e solo se per ogni proprietà, se questa è positiva implica che x ha quella popriertà: x è divino se e solo se ha tutte le proprietà positive.
Definizione 2. φ è l'essenza di x se e solo se ogni proprietà di x ne segue necessariamente (quindi due qualunque essenze di x sono necessariamente equivalenti)
Assioma 3. ci dice che ogni proprietà positiva lo è necessariamente.
Teorema 1. ci dice che se x è divino, allora la divinità è l'essenza di x.
Definizione 3. ci dice che x esiste necessariamente se e solo se per ogni proprietà essenziale per x, si ha che essa è soddisfatta necessariamente per qualche individuo, ossia se l'essenza di x ne implica l'esistenza.
Assioma 4. ci dice che l'esistenza necessaria è una proprietà positiva.
Teorema 2. ci dice che se x è divino, allora necessariamente esiste un ente dalla natura divina: da $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ a $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ si passa grazie all'*Assioma 3.* poichè G è una proprietà positiva, quindi se esiste un x divino, questo esiste necessariamente. Per passare invece da $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ a $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$ si usa il teorema di logica modale S5 per cui $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (M\alpha \Rightarrow M\beta)$. Infine per il teorema modale $MN\alpha \Rightarrow N\alpha$ si ha $M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$

Assioma 5. ci dice che proprietà positive implicano necessariamente solo proprietà positive.

La prova di Gödel è di sicuro formalmente corretta, tuttavia non è ovvio che il concetto di un essere che possegga la somma di tutte le proprietà puramente positive sia un concetto di Dio. Le critiche [3] riferiscono che in base agli assiomi di Gödel si può sostenere l'esistenza necessaria di tutto quanto esiste o è logicamente possibile. Altri hanno osservato che gli assiomi non sarebbero verità di per se evidenti. Inoltre anche a lui è applicabile la critica del passaggio diretto dal contesto di un'esistenza ipotetica al contesto di un'esistenza reale e quindi la critica che pur essendo un'argomentazione logica formalmente corretta non per questo la conclusione è vera se non si accetta la verità delle premesse. La prova di Gödel così da un lato non ammette la minima confutazione ma, dall'altro, non risulta risolutiva; dimostra però l'interesse per una per una prova puramente logica dell'esistenza di Dio formalizzata nel linguaggio moderno.

Capitolo 2

2.1 Cenni di logica modale S5

Nel paragrafo precedente abbiamo menzionato la logica modale, il sistema modale S5 e i concetti di "possibile" e "necessario". In questo paragrafo vogliamo parlare brevemente della logica modale e in particolare del sistema modale S5. Con riferimento a [1] e [6] ci limitiamo alla parte enunciativa, l'unica usata da Gödel 1.2. Iniziamo introducendo il concetto di mondi possibili: sono un insieme di interpretazioni classiche collegate da una relazione riflessiva e transitiva che rappresenta la possibile evoluzione del mondo. Le proposizioni vere in tutti i mondi possibili si diranno *necessarie*, e come già detto l'operatore di necessità è indicato dal simbolo $\Box$: quindi affermare che una proposizione p è *necessariamente vera* significa scrivere $\Box p$. L'operatore di *possibilità* è usualmente definito da $\neg\Box\neg$, e indicato con $\Diamond$; viceversa $\Box$ è $\neg\Diamond\neg$. Dire che una proposizione è possibile significa affermare che esiste almeno un mondo in cui quella proposizione è vera. Il linguaggio della logica modale è il linguaggio della logica proposizionale arricchito con l'operatore $\Box$ come primitivo. Le regole di formazione delle fbf sono:

- **FR1** Qualsiasi lettera enunciativa (p,q,...) è una fbf
- **FR2** Se α è una fbf, lo è anche $\neg\alpha$
- **FR3** Se α e β sono fbf, lo è anche $(\alpha \vee \beta)$
- **FR4** Se α è una fbf, lo è anche $\Box\alpha$

Gli assiomi di base (calcolo K)sono:

- gli assiomi del calcolo proposizionale classico (Hilbert Ackermann)
  - **A1** $(\alpha \vee \alpha) \Rightarrow \alpha$
  - **A2** $\beta \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$
  - **A3** $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow (\beta \vee \alpha)$
  - **A4** $(\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow (\alpha \vee \gamma))$
- **M1** $\quad \Box(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\Box\alpha \Rightarrow \Box\beta)$

Le regole di trasformazione sono:

- Modus ponens
- regola di necessitazione: se α è derivato allora si può derivare $\Box\alpha$

Una prima estensione è il calcolo **T** che si ottiene aggiungendo l'assioma
M2 $\quad \Box\alpha \Rightarrow \alpha$
Sulla base di **T** si ottengono altri calcoli aggiungendo assiomi. Il calcolo **S4** si ottiene aggiungendo l'assioma
M3 $\quad \Box\alpha \Rightarrow \Box\Box\alpha$
aggiungendo a **T** l'assioma
M4 $\quad \Diamond\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\alpha$
si ottiene il calcolo **S5**.

Osservazione 1. **S5** contiene **S4** (e quindi anche **T**) in quanto **M3** è derivabile in **S5** infatti:
$\Box\alpha \Rightarrow \Diamond\Box\alpha$ da **M2** nella forma $\Box\Diamond\alpha \Rightarrow \Diamond\alpha$per contrapposizione
$\Diamond\Box\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\Box\alpha$
$\Box\alpha \Rightarrow \Box\Diamond\Box\alpha$ da cui per **M4** contrapposto e **M1**
$\Box\alpha \Rightarrow \Box\Box\alpha$

In **S5** ogni coppia di operatori modali adiacenti è equivalente a un solo operatore modale, così con una scrittura del tipo $\Box\Diamond\Box$ si possono ottenere solo : necessità, possibilità, negazione della necessità e negazione della possibilità. Elenco ora, omettendo le dimostrazioni, le regole di trasformazione derivate di **S5** e i teoremi usati da Gödel:
DR1 Se $\alpha \Rightarrow \beta$ è una tesi, lo è anche $\Diamond\alpha \Rightarrow \Diamond\beta$
Una forma equivalente è:
DR2 Se $(\alpha \rightarrow \beta)$ è una tesi, lo è anche $(\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$

Teorema 2.1.1. $\Diamond\Box A \Rightarrow \Box A$

2.2 Da logica del primo a logica del secondo ordine

Passando ora a un'analisi più mirata alla logica del secondo ordine, introduciamo alcune nozioni preliminari. I linguaggi formali che riguardano soltanto la connessione logica fra enunciati tramite connettivi si chiamano linguaggi enunciativi e la logica che li tratta è detta logica degli enunciati (o proposizionale). In questa logica un ragionamento è una sequenza di passaggi detti premesse tramite cui si arriva ad una conclusione. In una logica modale se le premesse sono possibili, vogliamo vedere se le conclusioni sono almeno possibili; in questa se le premesse sono vere, le conclusioni devono essere vere (ragionamenti corretti). I ragionamenti possono essere corretti in base alla loro forma. Si hanno solo affermazioni vere o false. Un ragionamento è dato da due insiemi finiti di fbf, diciamo Φ e Ψ, non vuoti, dove Ψ è l'insieme delle premesse del ragionamento $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$. Φ è l'insieme delle conclusioni del ragionamento $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$. Un ragionamento scritto nel seguente modo: $\frac{\psi_1,...,\psi_n}{\phi_1,...,\phi_n}$ è corretto se e solo se lo è $\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n \models \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$. Fra i ragionamenti corretti ammettiamo anche i ragionamenti con zero premesse, ma con la conclusione che è una tautologia: $\models \phi$ è corretto quando ϕ è una tautologia. Quando entrano in gioco "parole logiche" che introducono espressioni di generalità come "tutti", "ogni" facciamo riferimento a linguaggi del primo ordine (logica dei predicati). La logica del primo ordine ingloba la logica degli enunciati ma porta l'analisi logica ad un livello più profondo. Per attribuire un valore di verità alle fbf chiuse del calcolo dei predicati occorre introdurre un insieme non vuoto D, detto dominio, e interpretare in D le costanti individuali e predicative. Detta I la funzione interpretazione, essa associa:

(1) a ciascuna costante individuale a un elemento del dominio: $I(a) \in D$
(2) a ciascuna F simbolo funzionale n-ario, $I(\mathrm{F})$: $D^n \to D$
(3) a ciascuna costante predicativa (A_i^n) un predicato a n argomenti in D, ossia I le associa una relazione *n-aria* in D (un sottoinsieme del prodotto cartesiano D^n):
$I(\ A_i^n\ ) \subset\ D^n$.
Fissata un'interpretazione I dobbiamo assegnare dei valori alle variabili in D. Una assegnazione σ in $\mathcal{I} = (D, I)$ è una applicazione dall'insieme delle variabili del linguaggio nell'universo D, cioè $\sigma : \{v_0, v_1, ...\} \longrightarrow D$. Ogni assegnazione si può estendere a una applicazione che a ogni termine t associa un elemento t^σ secondo la seguente definizione:
- se t è una variabile $t^\sigma = \sigma(t)$
- se t è una costante $t^\sigma = I(t)$
- se t è $\mathrm{F}t_1...t_n$, $t^\sigma = I(F)(t_1^\sigma...t_n^\sigma)$.
Fissati interpretazione e assegnazione, tutti i termini diventano nomi di individui. Inoltre, data una assegnazione σ in $\mathcal{I}$, risultano individuate le formule soddisfatte da σ in $\mathcal{I}$, per cui se ϕ è $A_i^n t_1...t_n$ si scriverà $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi$ per intendere che ϕ è soddisfatta, cioè che $(t_1^\sigma...t_n^\sigma) \in I(A_i^n)$. Procedendo per induzione sulla costruzione di ϕ otteniamo:
- se $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$, $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi$ se e solo se $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi_1$ oppure $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi_2$
- se $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi$ se e solo se $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi_1$ e $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi_2$
- se $\phi = \neg\phi_1$, $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi$ se e solo se $\mathcal{I}$, $\sigma \not\models \neg\phi_1$
- se $\phi = \forall x \phi_1$, $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi$ se e solo se per ogni x-variante $\tilde{\sigma}$ di σ, $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi_1$.

Definizione 2.1. Una fbf è *vera* nell'interpretazione I se è vera per tutte le assegnazioni, cioè ϕ è vera in $\mathcal{I}$ se $\mathcal{I}$, $\sigma \models \phi$ per qualunque σ e si scriverà $I \models \phi$

Definizione 2.2. ϕ è *logicamente valida* se $\mathcal{I} \models \phi$ per qualunque $\mathcal{I}$ e si scriverà $\models \phi$

Quanto appena visto sarà rianalizzato per il linguaggio del secondo ordine nei prossimi paragrafi. Con linguaggi "del primo ordine", intendiamo dire che essi hanno una sola specie di variabili, quelle individuali: esse variano in ogni interpretazione sugli elementi della struttura, mentre i predicati non sono variabili nella logica del primo ordine.
Un linguaggio che si presenta come un linguaggio predicativo, ma in cui abbiamo anche variabili per predicati e predicati di predicati, è un linguaggio di ordine superiore. Come

modello di logiche predicative di ordine superiore considero la logica del secondo ordine, in cui vengono introdotte variabili (accanto a costanti) per predicati del primo ordine su cui si può quantificare (esistenzialmente o universalmente). Ad esempio, il terzo escluso $\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ è al primo ordine uno schema di infinite fbf, una per ogni predicato costante 1-ario.
Al secondo ordine si può, usando una *variabile* predicativa 1-aria R (variabile d'insieme) formalizzare lo schema precedente come l'unico enunciato

$$\forall R \forall x(R(x) \vee \neg R(x)).$$

Nel secondo ordine si possono formalizzare "proprietà generiche" di individui, ma non proprietà di proprietà: la P di Gödel (sez. 1.2) è appunto una di queste: ad esempio $\exists RP(R)$ significherebbe "esiste una proprietà che è positiva". La maggior parte degli enunciati coinvolti nelle prove ontologiche è di questo tipo: "L'essenza di un ente è eterna e immutabile" (sez. 1.1) si può formalizzare come $\forall E \exists x(E(x) \Rightarrow Et(E) \wedge Imm(E))$ dove:
E= "essenza di x" [variabile predicativa]
Et(E)= "E è eterna" [Et= proprietà costante di predicati]
Imm(E)= "E è immutabile"[Imm= proprietà costante di predicati]
Poichè però la costruzione della logica del secondo ordine (a partire dal primo) e il suo studio permettono senza grossi ulteriori problemi di passare al terzo e a ordini superiori, esporremo ora la logica del secondo ordine, fermo restando che la P di Gödel, Et e Imm andrebbero considerate come costanti del terzo ordine. Per logiche di ordine superiore, si può vedere [7].

Oltre a lavorare con le strutture, lavoriamo anche con i sottoinsiemi delle strutture (nel caso di variabili predicative 1-arie). Nella logica dunque del secondo ordine, dire che le variabili variano sui sottinsiemi della struttura vuol dire che sono ammesse quantificazioni su tali variabili. Non si potrà quindi considerare nella logica del primo ordine una quantificazione del tipo: "per tutti i sottinsiemi dell'insieme X vale la proprietà P". I simboli predicativi del primo ordine, che continuano a essere presenti, si comportano rispetto alle variabili predicative come le costanti rispetto alle variabili individuali. Le variabili del secondo ordine possono essere utilizzate ad esempio per esprimere le cardi-

nalità: $|B| \leq |A|$ si formalizza con $\forall A \forall B \exists f \forall y \in B \exists x \in A(y = f(x))$. Qui A, B sono da intendere come proprietà (variabili predicative 1-arie), $x \in A$ vale $A(x)$ e lo stesso per B, f è da intendere come variabile funzionale.
Esponiamo ora la sintassi appropriata seguendo [1] e [2]. Se indichiamo con L_1 e L_2 rispettivamente il linguaggio della logica del primo ordine e del secondo ordine, come abbiamo detto in precedenza, in L_2 si introducono, oltre ai simboli già presenti in L_1, variabili predicative e funzionali, e si possono quantificare universalmente o esistenzialmente anche queste ultime variabili. L_2 possiede una maggiore ricchezza espressiva rispetto a L_1.
Ad esempio, chiamando X una variabile predicativa 1-aria e u quella funzionale:
- al secondo ordine possiamo asserire l'esistenza della funzione identica in generale
(i) $\exists u \forall x(u(x) = x)$ mentre al primo possiamo identificare una specifica funzione f come funzione identica ($\forall x(f(x) = x)$) su un certo dominio, quello dell'interpretazione.
-al primo ordine possiamo asserire che due individui hanno la stessa proprietà $Pa \wedge Pb$, al secondo che due individui qualsiasi hanno in comune almeno una proprietà
(ii) $\forall x \forall y \exists X(Xx \wedge Xy)$
- al primo ordine si può asserire che due individui identici hanno entrambi o non entrambi la stessa proprietà ($a = b \Rightarrow (Pa \Leftrightarrow Pb)$), al secondo ordine si può definire l'identità (iii) $a = b \Leftrightarrow \forall X(Xa \Leftrightarrow Xb)$ con questa precisa caratteristica.
Alla logica del secondo ordine mancano proprietà importanti che presenta invece la logica del primo ordine[7]:

1. l'insieme delle proposizioni valide al primo ordine è solo ricorsivamente enumerabile, cioè il problema della validità logica al primo ordine è solo semidecidibile mentre l'insieme delle proposizioni valide al secondo ordine non è nemmeno semidecidibile con riferimento anche alla sola aritmetica.

2. nella logica del primo ordine vale il Teorema di compattezza[1] mentre nella logica del secondo ordine no.

3. per la logica del primo ordine vale il Teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù[2], mentre per la logica del secondo ordine non vale.

[1]Data una teoria T e una formula φ, se $T \models \varphi$ allora esiste un sottoinsieme finito T_0 di T tale che $T_0 \models \varphi$ o equivalentemente se ogni sottoinsieme finito di T ha un modello, allora T ha un modello
[2]Se una teoria numerabile T ha un modello di cardinalità infinita, allora ne ha uno numerabile

4. per la logica del primo ordine vale il Teorema di Löwenheim-Skolem all'insù[3], mentre per la logica del secondo ordine non vale.

Detto ciò, secondo Quine [7], la logica del secondo ordine più che essere una logica è una teoria matematica. Dal suo punto di vista il teorema di compattezza e i due teoremi di Löwenheim-Skolem sono caratteristiche fondamentali per una logica.
Questi problemi sorgono dal fatto che le logiche del secondo ordine permettono di caratterizzare i concetti di finito e di infinito, legati ai problemi di incompletezza dell'aritmetica, come vedremo dalla sezione 2.4 in poi.

2.3 Linguaggio della logica del secondo ordine

Esponiamo ora, seguendo [1] la logica del secondo ordine, in relazione all'aritmetica. Il linguaggio della logica del secondo ordine è semplicemente quello del primo, con l'aggiunta di variabili (funzionali o predicative) del secondo ordine. Dato un alfabeto Λ, termini e formule atomiche al secondo ordine sono definite come nella logica del primo ordine usando variabili funzionali oltre a di costanti funzionali e variabili relazionali oltre a di costanti relazionali. Formule composte sono generate da formule atomiche usando i connettivi proposizionali usuali ($\neg$ e $\vee$) come anche quantificatori su tutte le variabili, incluse variabili funzionali e variabili relazionali. Parlando più nello specifico, un alfabeto Λ della logica del primo ordine (e quindi anche del secondo) è costituito da:
simboli logici

- simboli per variabili individuali $v_0, v_1, \ldots$

- simboli per connettivi: $\neg$ e $\vee$

[3]Se una teoria numerabile T ha un modello di cardinalità infinita, allora per ogni cardinale k esiste un modello di T il cui dominio ha cardinalità $\geq$ k

- un simbolo di quantificatore (quantificatore universale): $\forall$. Si potrebbe introdurre come quantificatore fondamentale $\exists$ e tradurre quello universale come $\neg\exists\neg$; viceversa $\exists$ si introduce con $\neg\forall\neg$

- simboli ausiliari : () e virgole

simboli propri

- simboli per costanti predicative: $A_j^k, j, k, \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

- simboli per costanti individuali: $c_i, i \in \mathbb{N}$ (possono anche mancare)

- simboli per costanti funzionali: $f_j^k, j, k, \in \mathbb{N}, k \geq 1$ (possono anche mancare).

Nelle notazioni precedenti l'indice a esponente indica il numero di argomenti. I simboli sono sempre una infinità numerabile ed inoltre un alfabeto deve essere dato in modo effettivo, cioè deve essere possibile stabilire a quale categoria appartengono i termini e quanti argomenti hanno. Sequenze di simboli si chiamano espressioni, tra queste, oltre alle fbf, troviamo anche i *termini*. Nella logica del primo ordine, variabili o costanti, come anche una funzione n-aria f applicata a termini $t_1, t_2, ..., t_n$, $(ft_1t_2...t_n)$ sono termini. Un predicato P n-ario a n termini $t_1, t_2, ..., t_n$ è una fbf atomica $Pt_1, t_2, ..., t_n$. Se ϕ, ψ sono *fbf* , lo sono anche $\neg\phi$, $(\phi \vee \psi)$ e $\forall x\varphi$. Se in una *fbf* compaiono soltanto variabili vincolate, la formula si dice *chiusa* (o un *enunciato*).
Indicando con $X, P, R, \ldots, F$ le variabili n-aria del secondo ordine, i simboli predicativi e funzionali si comportano rispetto alle variabili predicative e funzionali come le costanti rispetto alle variabili individuali. Per quanto concerne i termini e le formule atomiche della logica del secondo ordine, nelle notazioni precedenti, possiamo dire che:

- se F è una variabile funzionale a n argomenti, e $t_1, t_2, ..., t_n$ sono n termini, anche $Ft_1, t_2, ..., t_n$ è un termine.

- se R è una variabile predicativa a n argomenti, e $t_1, t_2, ..., t_n$ sono n termini, anche $Rt_1, t_2, ..., t_n$ è una formula atomica.

- come caso $n = 1$ si ha: se X è una variabile di insieme e t è un termine, Xt è una formula atomica.

- Se φ è una formula, sia $\forall x\varphi$ sia $\forall X\varphi$ (oppure $\forall R\varphi$) sono formule, e lo stesso vale per $\exists$

2.4 Semantica della logica del secondo ordine

Come annunciato nel paragrafo (2.2) studiamo ora l'interpretazione per il linguaggio del secondo ordine. Analogamente all'alfabeto, anche in questo caso non ci discostiamo molto da quanto visto per il linguaggio del primo ordine. Se $\mathbf{M}$ è un'interpretazione per un linguaggio del secondo ordine, abbiamo un insieme M di partenza, la solita interpretazione delle costanti e dei simboli (costanti) predicativi e funzionali. Deve esserci inoltre un dominio in cui variano le variabili del secondo ordine, che è un insieme S di sottoinsiemi di M^n, eventualmente tutto l'insieme delle parti di M, P(M) e una famiglia di funzioni $M^n \to M$. Dunque una interpretazione è una struttura del tipo (semplificato)

$$\mathbf{M} = (M, S, A^M, \dots, f^M, \dots, c^M, \dots)$$

dove S$\subseteq$ P(M). Se S=P(M) diciamo che l'interpretazione è *piena*. Se nel linguaggio ci sono variabili predicative e funzionali, un'interpretazione è piena se S contiene tutte le relazioni e tutte le funzioni. Nel paragrafo precedente avevamo definito una assegnazione in $\mathbf{M} = (M, \sigma)$, $\sigma : \{v_0, v_1, ...\} \longrightarrow M$ e avevamo visto come agiva su costanti, variabli e funzioni n-arie. [1] Nella logica del secondo ordine, nella definizione di soddisfazione, si aggiunge per le assegnazioni che
- $\sigma(x) \in M$ per le variabili individuali

- $\sigma(R)$ sia una relazione per le variabili predicative
- $\sigma(F)$ sia una funzione per le variabili funzionali

per quanto riguarda invece la valutazione t^σ dei termini, si introduce la clausola che se t è $Ft_1...t_n$ allora t^σ è $\sigma(F)(t_1^\sigma, ..., t_n^\sigma)$ (se ci sono variabili funzionali); si aggiunge inoltre che σ soddisfa $Rt_1...t_n$ se e solo se $(t_1^\sigma, ..., t_n^\sigma) \in \sigma(R)$.
Al secondo ordine funzioni e relazioni possono essere ricondotti allo stesso concetto:[7] funzioni k-arie possono essere viste come un tipo di relazioni *k+1*-arie. Ad esempio una formula $\exists f(\ldots Xf(t)\ldots)$ è interpretata da $\exists R(\forall x \exists! y Rxy \wedge (\ldots(\exists y Rty \wedge Xy)\ldots)))$.
Per dire che ϕ è una formula di un linguaggio del secondo ordine, che $\mathbf{M}$ è una interpretazione piena e che σ soddisfa ϕ in $\mathbf{M}$, scriveremo [1]

$$\mathbf{M}, \sigma \models_2 \phi$$

per dire invece che T è un insieme di enunciati e ϕ una formula di L_2 conseguenza logica di T scriviamo

$$T \models_2 \phi$$

e si ha che per ogni interpretazione piena $\mathbf{M}$

$$se \mathbf{M} \models_2 T \, allora \, \mathbf{M} \models_2 \phi$$

.

Vogliamo studiare la relazione $\models_2$ di conseguenza logica chiedendoci se sia almeno semidecidibile, se esistano calcoli completi rispetto ad essa e, in caso affermativo, se siano gli stessi della logica del primo ordine. Per stabilire se $\models_2$ sia semidecidibile partiamo dal seguente enunciato che chiamiamo I

$$\exists R(\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x, y, z(Rxy \wedge Ryz \Rightarrow Rxz) \wedge \forall x \neg Rxx)$$

dove R è una relazione irriflessiva e transitiva e ogni x è in relazione con almeno un y. Questo enunciato è tale che

Lemma 2.4.1.
Per ogni interpretazione piena $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M} \models_2 I$ *se e solo se* M *è infinito*

Dimostrazione.
$\Longrightarrow$) Se $\mathbf{M} \models_2 I$ allora $\sigma(R)$ se soddisfa $\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x, y, z(Rxy \wedge Ryz \Rightarrow Rxz) \wedge \forall x \neg Rxx$ è una relazione il cui dominio è infinito.
$\Longleftarrow$) Se M è infinito allora esiste una relazione con le proprietà indicate, e poichè la struttura del secondo ordine è piena, tale relazione è tra quelle su cui variano le variabili del secondo ordine e si può definire $\sigma(R)$ in modo da soddisfare I.

□

Il seguente enunciato N

$$\exists R(\forall x \neg Rxx \wedge \forall x, y, z(Rxy \wedge Ryz \Rightarrow Rxz) \wedge$$

$$\wedge \forall x \exists y Rxy \wedge \forall x, y, z(Rxy \wedge Rxz \Rightarrow Ryz \vee Rzy) \wedge$$

$$\wedge \exists x(\neg \exists y Ryx \wedge \forall X(Xx \wedge \forall y, z(Xy \wedge Ryz \Rightarrow Xz) \Rightarrow \forall u Xu)))$$

esprime una relazione di $<$ e il principio di induzione completa in un insieme discreto ed è tale che $\mathbf{M} \models_2 N$ se e solo se M è numerabile. Tale enunciato può essere usato nel seguente lemma al posto dell'enunciato I definito in precedenza

Lemma 2.4.2.
Per ogni enunciato φ di un linguaggio predicativo del primo ordine

$$\not\models \varphi \, se\, e\, solo\, se \, \models_2 I \Longrightarrow \exists^2 \neg \varphi'$$

Alla dimostrazione premettiamo la seguente

Osservazione 2. Se per ogni formula φ del primo ordine si sostituiscono i simboli per costante P, R, Fcon variabili predicative, variabili relazionali e variabili funzionali opportune, diciamo P, R, F, si ottiene una formula del secondo ordine con variabili del secondo ordine, che nel lemma è chiamata φ', che possiamo quantificare esistenzialmente con $\ldots \exists P \exists R \exists F \ldots$ ottenendo la chiusura esistenziale al secondo ordine di φ', indicata con $\exists^2 \varphi'$.

Dimostrazione.
Se $\not\models \varphi$, cioè φ non è logicamente valida, esiste una interpretazione $\mathbf{M}$ del linguaggio

predicativo tale che $\mathbf{M} \models \neg\varphi$, e per i teoremi di Löwenheim-Skolem[4] si può supporre che ne esistano di ogni cardinalità infinita. Se prendiamo una interpretazione del secondo ordine piena del linguaggio senza simboli predicativi e funzionali che soddisfi I su di essa, per isomorfismo si può trasportare l' interpretazione $\mathbf{M}$ relativa ai simboli predicativi che occorrono in φ. Assegnando a questi insiemi e relazioni quanto detto nell'*Osservazione 2*, cioè interpretando variabili del secondo ordine di $\neg\varphi'$, $\neg\varphi'$ risulta soddisfatta nell'interpretazione. Viceversa, supponendo che esista un insieme infinito M, su M si ha una interpretazione $\mathbf{M}$ che soddisfa l'enunciato I e per cui $\mathbf{M} \models_2 \exists^2\neg\varphi'$. se σsoddisfa $\neg\varphi'$ in $\mathbf{M}$ e si fissano come P^M, R^M, F^M i valori $\sigma(P)$, $\sigma(R)$, $\sigma(F)$ si ottiene una struttura del primo ordine in cui $\neg\varphi$ è vero. □

Osservazione 3. Il lemma afferma ciò che avevo già anticipato nella sezione 2.2: il problema della non validità logica degli enunciati del primo ordine è equivalente al problema della validità logica degli enunciati del secondo ordine e poichè il primo non è semidecidibile non lo è nemmeno il secondo.

Possiamo quindi riassumere il tutto in:

Teorema 2.4.1.
La relazione $\models_2$ non è semidecidibile

Dimostrazione.
Se lo fosse, lo sarebbe anche $\not\models$, ma questo significherebbe che il problema della validità per linguaggi del primo ordine sarebbe decibibile □

2.5 Dagli assiomi di Peano all' aritmetica della logica del secondo ordine

In questa sezione esamineremo l'aritmetica della logica del secondo ordine seguendo [1], [2] e [8] facendo prima un breve richiamo agli assiomi e all'aritmetica di Peano.
Gli assiomi di Peano permettono, tra le altre cose, la costruzione della struttura per i numeri naturali e la prova della sua unicità a meno di isomorfismi.

[4] vedi note a p. 21

Tali assiomi indicati con **P1−P5**, sono i seguenti:[8]
P1 *Zero* è un numero naturale
P2 ogni numero naturale ha un *successore* che è un numero naturale
P3 *Zero* non è *successore* di alcun numero naturale
P4 numeri naturali differenti hanno *successori* differenti
P5 un insieme A di numeri naturali tali che A contiene *zero* e il *successore* di ogni suo elemento, coincide necessariamente con l'insieme di tutti i numeri naturali.
La struttura descritta da tali assiomi è

$$\mathfrak{N}_S = (\mathbb{N}; 0; S)$$

Dove S indica la funzione successore .
Introduciamo ora l' *aritmetica di Peano PA*, teoria del primo ordine i cui simboli propri sono i seguenti con a fianco l'interpretazione intesa [8]:
Simbolo di costante: 0 *zero*
Simbolo di funzione unaria, ad esponente: ()' *successore*
Simboli funzionali binari, infissi: $+, \cdot$ *somma, prodotto*

Indicata l'uguaglianza con il simbolo infisso $\equiv$, gli assiomi propri di PA sono:
Assiomi per il successore:
PA1 $\forall v_0 v_0' \not\equiv 0$
PA2 $\forall v_0 \forall v_1 (v_0' \equiv v_1' \Rightarrow v_0 \equiv v_1)$

Assiomi per la somma:
PA3: $\forall v_0 (v_0 + 0 \equiv v_0)$
PA4: $\forall v_0 \forall v_1 [v_0 + v_1' \equiv (v_0 + v_1)']$

Assiomi del prodotto:
PA5: $\forall v_0 (v_0 \cdot 0 \equiv 0)$
PA6: $\forall v_0 \forall v_1 [v_0 \cdot v_1' \equiv (v_0 \cdot v_1) + v_0]$

Schema di induzione per PA:

PA7: Per ogni *fbf* $\Phi(u)$ con m+1 variabili libere $(u, w_1 \dots w_m)$ $(m \geq 0)$ nel linguaggio di PA è un assioma il seguente enunciato: $\forall^m w[[\Phi(0) \wedge \forall u(\Phi(u) \Rightarrow \Phi(u'))] \Rightarrow \forall u \Phi(u)]$ ($\forall^m w$ sta per $\forall w_1 \dots \forall w_m$)

Osservazione 4. [8] **PA1** e **PA2** sono la formalizzazione di **P3** e **P4**; **P5** e **PA7** sono entrambi princìpi di induzione ma mentre **P5** riguarda tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ (infinità più che numerabile), **PA7** riguarda soltanto i sottoinsiemi descrivibili mediante *fbf* (infinità numerabile).

In tale discorso la teoria del secondo ordine entra in gioco in quanto offre la possibilità apparente di caratterizzare $\mathbb{N}$ in modo unico [1] , a meno di isomorfismi, come modello della teoria finita PA_2, aritmetica di Peano al secondo ordine. L'alfabeto di PA_2 [2] può essere limitato al simbolo di costante 0 e al simbolo di funzione 1-aria per il successore. Gli assiomi si possono ridurre a tre:

$PA1_2$ $\forall v_0 v_0' \neq 0$

$PA2_2$ $\forall v_0 \forall v_1 (v_0' \equiv v_1' \Rightarrow v_0 \equiv v_1)$

$PA3_2$ $(\forall X(X0 \wedge \forall x(Xx \Rightarrow Xx') \Rightarrow \forall x Xx))$

Osservazione 5. [2] $PA1_2$ e $PA2_2$ sono uguali a **PA1** e **PA2** mentre $PA3_2$ formalizza il quinto assioma di Peano **P5**

Non compaiono gli assiomi della somma e del prodotto in quanto possono essere definite:

Definizione 2.3. $\exists F \forall v_0 \forall v_1 F v_0 0 \equiv v_0 \wedge F v_0 v_1' \equiv (F v_0 v_1)'$

Dopo aver provato l'unicità di F, sia F_0 un simbolo di costante per l'addizione che interpreta F. Si ha:

Definizione 2.4. $\exists G \forall v_0 \forall v_1 G v_0 0 \equiv 0 \wedge G v_0 v_1' \equiv F_0 G v_0 v_1 v_0$

Queste definizioni non sono uniche: vedi ([2], p. 153).

Vale il seguente risultato [1]:

Proposizione 2.5.1. *$\boldsymbol{M} \models_2 PA_2$ se e solo se $\boldsymbol{M}$ è isomorfo a $\mathbb{N}$.*

Per la dimostrazione vedi ([1], p. 284)

2.6 Un caso particolare: la logica del secondo ordine debole

[1] Il linguaggio del secondo ordine debole è sempre a due specie di variabili, ma le variabili d'insieme variano sull'insieme $S = P_{\leq\omega}(M)$ dei sottoinsiemi finiti dell'universo M. Dal punto di vista sintattico non c'è alcuna differenza tra il linguaggio del secondo ordine e quello del secondo ordine debole, la differenza è nella nozione di interpretazione. Esaminiamo brevemente alcune caratteristiche di questa logica usando PA_{2d}, l'aritmetica di peano del secondo ordine debole. Una interpretazione per questo linguaggio del secondo ordine debole è del tipo (semplificato)

$$\mathbf{M} = (M, P_{\leq\omega}(M), A^M, \ldots, f^M, \ldots, c^M, \ldots)$$

che è un caso particolare delle interpretazioni del secondo ordine.
Cosa si può dire di soddisfazione, validità e validità logica?
scriveremo

$$M, \sigma \models_{2d} \phi$$

per dire che ϕ è una formula di un linguaggio del secondo ordine debole, M è un'interpretazione del linguaggio e che σ soddisfa ϕ in M. Scriveremo

$$T \models_{2d} \phi$$

per dire che T è un insieme di enunciati e ϕ è una formula di un linguaggio del secondo ordine debole e che per ogni interpretazione $\mathbf{M}$,

$$se\ M \models_{2d} T\ allora\ M \models_{2d} \phi$$

TS_{2d} sarà la teoria del successore, con gli assiomi **PA1**, **PA2** con l'aggiunta di

$\forall v_0(v_0 \not\equiv 0 \Rightarrow \exists v_1(v_0 \not\equiv v_1'))$ (primo ordine) e di $\forall v_0 \exists X(Xv_0 \wedge \forall v_1(Xv_1' \Rightarrow Xv_1))$ (Per ogni numero v_0 c'è un insieme X che ha v_0 per elemento e, se ha v_1' per elemento, contiene anche v_1).
Come prima (*Proposizione 2.5.1*)

Proposizione 2.6.1. *[1]*
$M \models_{2d} TS_{2d}$ se e solo se $\boldsymbol{M}$ *è isomorfo a* $\mathbb{N}$

Corollario 2.6.2. *[1]*
la relazione $\models_{2d}$ non è semidecidibile

Osservazione 6. La logica del secondo ordine debole, e quindi quella del secondo ordine, (vedi sez. 2.2)non gode della proprietà di compattezza: l'insieme infinito di enunciati

$$\exists v_0, v_1 v_0 \not\equiv v_1$$

$$\exists v_0, v_1, v_2(v_0 \not\equiv v_1 \wedge v_1 \not\equiv v_2 \wedge v_0 \not\equiv v_2)$$

$$\dots$$

in cui ogni successivo enunciato afferma che esistono almeno $n \geq 2$ individui diversi, è tale che ogni suo sottinsieme finito è soddisfacibile. Se si aggiunge

$$\exists X \forall x Xx$$

questo ulteriore enunciato (esiste un insieme universo) è compatibile con un numero finito degli enunciat precedenti, ma non con tutti, dato che X dovrebbe essere infinito.
Come è noto, la compattezza permette di creare modelli dell'aritmetica non isomorfi a $\mathbb{N}$. Invece con la logica del secondo ordine debole si può caratterizzare $\mathbb{N}$ come modello di un insieme finito di assiomi (*Proposizione 2.6.1*).

Osservazione 7. [1] Per parlare di un modello della logica del secondo ordine debole, occorre poter individuare senza ambiguità, tutti i sottinsiemi finiti di un insieme, anche infinito, e per questo occorre presupporre la nozione di numero naturale. La definizione usuale di $\mathbb{N}$ nella logica del secondo ordine, come modello di PA_2, fa ricorso al concetto dell'insieme dei sottinsiemi di un insieme infinito e non a quello di numero naturale.

Bibliografia

[1] G. Lolli, *Introduzione alla logica formale*, Bologna, Il Mulino, 1998

[2] Dario Palladino, *Logica e teorie formalizzate.Completezza, incompletezza, indecidibilità*, Roma, Carocci editore, 2010.

[3] R.G. Timossi, *Prove logiche dell'esistenza di Dio da Anselmo d'Aosta a Kurt Gödel*, Genova, Marietti 1820, 2005.

[4] C. Mangione S. Bozzi *Storia della logica. Da Boole ai giorni nostri*, Milano, Garzanti, 1993

[5] Kurt Gödel (a cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi), *La prova matematica dell'esistenza di Dio*, Torino, Bollati Boringhieri, 2006.

[6] G.E Hughes, M.J. Cresswell *Introduzione alla logica modale*, Milano, Il saggiatore, 1973.

[7] D. Leivant, *Higher order logic. Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming* vol.2, Oxford University Press, 1994 (scaricabile dal sito http://www.cs.indiana.edu/pub/techreports/TR388.pdf)

Sitografia

[8] http://campus.unibo.it/74350/1/2014−Ricorsione.pdf