

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA**

---

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**

INGEGNERIA CIVILE

LAUREA MAGISTRALE

**TESI DI LAUREA**

in

Advanced Design of Structures

**LA RISPOSTA TORSIONALE NON LINEARE  
DI STRUTTURE ASIMMETRICHE IN PIANTA.**

CANDIDATO  
Michele Montevecchi

RELATORE:  
Chiar.mo Prof. Stefano Silvestri

CORRELATORE/CORRELATORI  
Ing. Michele Palermo

Anno Accademico 2014 -2015

Sessione III

## Indice

<b>1. Introduzione</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Dinamica dei sistemi asimmetrici ad un piano</b> .....	<b>5</b>
2.1. Descrizione modello .....	5
2.2. Equazioni del moto.....	7
2.3. Parametro $\Omega_\theta$ .....	9
2.4. Smorzamento alla Rayleigh .....	11
2.5. Il problema agli autovalori .....	13
2.6. Forme modali nel caso di eccentricità longitudinale nulla .....	15
2.7. Modal Contribution Factors .....	16
2.8. Periodi di vibrazione normalizzati .....	18
2.9. Riepilogo dei parametri fondamentali in campo lineare .....	20
2.10. Parametri aggiuntivi non lineari .....	21
<b>3. Soluzione delle equazioni del moto</b> .....	<b>24</b>
3.1. Vibrazioni libere non smorzate.....	24
3.2. Vibrazioni libere smorzate.....	29
3.3. Sistema dinamico smorzato sottoposto ad input sismico.....	31
<b>4. Il Metodo Alpha</b> .....	<b>32</b>
4.1. Il parametro $\alpha$ .....	32
4.1.1. Il parametro $\alpha$ “undamped” .....	33
4.1.2. Il parametro $\alpha$ “damped” .....	34
4.1.3. Il parametro $\alpha$ “damped, earthquake input” .....	35
4.1.4. Il parametro $\alpha$ in campo non lineare.....	36
4.2. Il parametro A.....	37
4.3. Il parametro $\delta$ ed il fundamental period shifting.....	37
4.3.1. Forma chiusa del parametro $\delta$ .....	39
4.3.2. Stima della rotazione massima .....	40
4.3.3. Stima dello spostamento longitudinale massimo .....	40
4.4. Parametro B: coefficiente di contemporaneità .....	42

4.4.1. Formulazione definitiva dello spostamento longitudinale massimo .....	43
4.5. Magnification Factors .....	43

*Parte I*

<b>5. Gli spettri degli spostamenti per strutture eccentriche .....</b>	<b>46</b>
5.1. Caso Lineare .....	49
5.1.1. Grafici tridimensionali degli spostamenti .....	49
5.1.2. Grafici bidimensionali degli spostamenti .....	54
5.2. Caso Non Lineare .....	77
5.2.1. Grafici tridimensionali degli spostamenti .....	78
5.2.2. Grafici bidimensionali degli spostamenti .....	87
<b>6. Gli spettri dei Magnification Factors .....</b>	<b>111</b>
6.1. Caso Lineare .....	112
6.1.1. Magnification Factors rispetto al Centro di Massa .....	112
6.1.2. Magnification Factors rispetto al sistema Non Eccentrico equivalente .....	126
6.2. Caso Non Lineare .....	141
6.2.1. Magnification Factors rispetto al Centro di Massa .....	141
6.2.2. Magnification Factors rispetto al sistema Non Eccentrico equivalente .....	160
6.3. Sintesi dei risultati .....	179

*Parte II*

<b>7. Validazione numerica degli spettri dei Magnification Factors ....</b>	<b>184</b>
7.1. Modello di riferimento .....	185
7.2. Accelerogrammi spettrocompatibili .....	187
7.3. Casi di studio e calcolo dei parametri fisici .....	191
7.3.1. Massa dei sistemi .....	191
7.3.2. Rigidezza traslazionale degli elementi resistenti .....	192

7.3.3. Rigidezza torsionale degli elementi resistenti .....	196
7.3.4. Pulsazione e periodo longitudinali dei sistemi .....	198
7.3.5. Parametri $e$ ed $\Omega_\theta$ .....	199
7.4. Caso Lineare .....	213
7.4.1. Risultati ottenuti .....	214
7.5. Caso Non Lineare .....	220
7.5.1. Dimensionamento cerniere plastiche .....	221
7.5.2. Risultati ottenuti .....	223
<b>8. Conclusioni .....</b>	<b>229</b>
<b>9. Bibliografia .....</b>	<b>230</b>



## 1. INTRODUZIONE

Strutture caratterizzate da una non coincidenza in pianta tra centro delle masse e centro delle rigidità (detta *eccentricità*), sollecitate da un input sismico, sviluppano una risposta data da una combinazione di movimenti traslazionali e movimenti torsionali. Rispetto ad una struttura equivalente per massa e rigidità ma priva di eccentricità nella quale non si sviluppano movimenti di tipo torsionale, questi ultimi possono incrementare nelle strutture eccentriche il livello di deformazione degli elementi strutturali resistenti più distanti dal centro delle rigidità, che fisicamente coincide con il centro di istantanea rotazione della struttura.

La totalità delle strutture reali presenta questa eccentricità ed anche nei casi, rari ma possibili, in cui ci sia una coincidenza tra centro delle masse e centro delle rigidità, la normativa italiana impone comunque di considerare un'eccentricità accidentale per i motivi citati qui di seguito, direttamente estrapolati dalle NTC 2008 (§7.2.6):

*“Per tenere conto della variabilità spaziale del moto sismico, nonché di eventuali incertezze nella localizzazione delle masse, al centro di massa deve essere attribuita una eccentricità accidentale rispetto alla sua posizione quale deriva dal calcolo. Per i soli edifici ed in assenza di più accurate determinazioni l'eccentricità accidentale in ogni direzione non può essere considerata inferiore a 0,05 volte la dimensione dell'edificio misurata perpendicolarmente alla direzione di applicazione dell'azione sismica. Detta eccentricità è assunta costante, per entità e direzione, su tutti gli orizzontamenti.”*

La presente trattazione si inserisce in un contesto di progettazione basata sull'approccio agli spostamenti che parte dalla conoscenza della domanda di spostamento massimo della struttura, oggi ricavata (in fase preliminare) dallo spettro linearizzato degli spostamenti fornito dalla normativa. Tale spettro, come è noto, è riferito ad un oscillatore semplice smorzato (ad 1

grado di libertà): gli spostamenti spettrali sono quindi direttamente correlabili a strutture elementari ad un grado di libertà o, più indirettamente, allo spostamento (in direzione longitudinale ad un input sismico) del centro di massa di strutture più complesse.

Ad oggi la normativa italiana non fornisce spettri in grado di dare una stima preliminare degli spostamenti di strutture eccentriche, cioè di strutture che combinino comportamenti traslatori a comportamenti torsionali.

Il lavoro principale di questa tesi è stato quello di fornire gli spettri di particolari coefficienti, detti *Magnification Factors*, da utilizzare in associazione con gli spettri degli spostamenti già forniti dalla normativa quando si ha a che fare con strutture eccentriche a 3 gradi di libertà per ricavare una prima stima di alcuni punti notevoli di tali strutture (spostamenti longitudinali del centro di massa, del lato flessibile e del lato rigido).

In particolare tali *Magnification Factors*, che dipendono esclusivamente da parametri fisici della struttura (i.e.  $\Omega_0$ ,  $\xi$ ,  $e$ ,  $T_L$ ,  $R$ ), vanno moltiplicati per il valore di spostamento spettrale ricavato dalla normativa entrando nello spettro degli spostamenti con il periodo longitudinale disaccoppiato ( $T_L$ ) della struttura. Il risultato di questo prodotto è lo spostamento longitudinale del punto notevole della struttura eccentrica cui ogni *Magnification Factors* si riferisce.

Gli spettri dei *Magnification Factors* sono stati ricavati attraverso l'integrazione diretta dell'equazione del moto del sistema dinamico ad 1 piano descritto nel Secondo capitolo, utilizzando una grande variabilità di parametri fisici per ricoprire un'ampia casistica di strutture ed un elevato numero di sismi, per ottenere dei risultati il più possibile generalizzabili.

Tutte le analisi sono state condotte sia in campo lineare che in campo non lineare.

La teoria che c'è dietro a questa trattazione, sviluppata negli ultimi anni dal gruppo di ricerca dei proff. Trombetti e Silvestri dell'Università di Bologna, prende il nome di *Metodo Alpha*[1-8].

Il *metodo Alpha* è stato pensato per stimare in modo semplice e diretto gli spostamenti della struttura in seguito allo sviluppo delle sue inevitabili deformazioni torsionali. Tale stima è possibile grazie alla determinazione di alcuni parametri (tra cui il parametro  $\alpha$ , indice dell'entità della rotazione delle strutture eccentriche, che dà il nome al metodo) in grado di descrivere l'essenza del comportamento torsionale della struttura in campo elastico lineare e non lineare.

I primi studi sul metodo Alpha hanno trovato conferma ed applicazione su strutture ad un piano sismicamente isolate alla base [1].

La maggior parte degli isolatori sismici ha una rigidezza nota e costante per ogni direzione di sollecitazione. Si è dimostrato come il comportamento dinamico di tali dispositivi, nonostante agiscano in campo non lineare, possa essere letto con ottima approssimazione attraverso una semplice analisi lineare. Sotto eccitazione sismica, i movimenti di una struttura isolata si concentrano principalmente negli elementi isolanti stessi e risentono solo in modo lieve degli effetti dovuti alla sovrastruttura.

Per questo tipo di strutture ci si può quindi limitare a studiare un semplice sistema dinamico tridimensionale ad un piano rigido, poggiante su molle a comportamento elastico lineare.

In seguito il metodo è stato testato anche su sistemi dinamici lineari ad un piano non isolati alla base, mantenendo tuttavia la proprietà caratteristica degli isolatori di aver ugual rigidezza in ogni direzione, la quale si è tradotta nell'ipotesi che la struttura possieda una rigidezza traslazionale totale, data dai suoi stessi elementi resistenti, uguale in direzione x ed in direzione y.

Gli studi più recenti riguardano strutture a pianta sia quadrata che rettangolare, a comportamento sia elastico sia elastico-non lineare, sia ad un piano sia multipiano.



Il Quarto capitolo è riservato alla trattazione di tale metodo, alla descrizione delle approssimazioni e semplificazioni eseguite per ottenere le espressioni in forma chiusa che esso propone ed alla definizione dei veri strumenti progettuali: i *Magnification Factors*.

La seconda fase di questa tesi ha riguardato una prima verifica di affidabilità, o meglio, una prima validazione numerica, degli spettri ottenuti attraverso la modellazione ad elementi finiti (con *Sap2000*) di strutture eccentriche ad un piano a comportamento sia lineare che non lineare.

Le strutture modellate hanno ricoperto una casistica ampia (strutture torsiorigide e torsioflessibili ad elevata e ridotta eccentricità) e sono state caratterizzate dallo stesso periodo longitudinale disaccoppiato ( $T_L$ ).

## 2. DINAMICA DEI SISTEMI ASIMMETRICI AD UN PIANO

### 2.1 Descrizione modello

In questa trattazione sono modellate strutture a pianta quadrata ad un piano (one-storey).

Si assume che il diaframma di tale struttura sia infinitamente rigido nel suo piano e che i suoi elementi resistenti siano assialmente indeformabili e privi di massa.

Una conseguenza delle ipotesi appena fatte è che i gradi di libertà del modello si riducono a 3 (due traslazioni ed una rotazione) descritti rispetto ad un sistema di riferimento centrato nel centro di massa. I relativi spostamenti vengono indicati nel seguente modo:

$u_x = \text{spostamento trasversale}$

$u_y = \text{spostamento longitudinale (nella direzione del sisma)}$

$u_\theta = \text{rotazione}$

La massa della struttura è tenuta in conto grazie all'applicazione di un carico uniformemente distribuito sul solaio. Tale carico, costituito perciò per rappresentare il peso proprio (dead load) ed i carichi permanenti della struttura, non dipende quindi dalla disposizione degli elementi resistenti permettendo di mantenere invariata la posizione del centro di massa (CM) del modello, che coincide con il centro geometrico.

Inoltre, come già specificato nel capitolo precedente, si impone che la rigidezza traslazionale totale, data da tutti gli elementi resistenti della struttura, sia la stessa sia in direzione x che in direzione y.

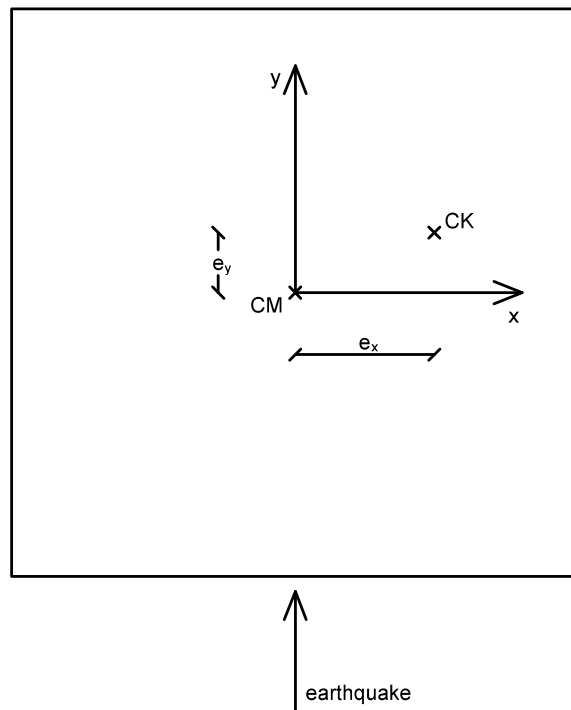
$$K_{tot} = K_x = K_y \quad (2.1)$$

All'interno dei modelli viene fatta variare la disposizione degli elementi resistenti in modo tale da spostare il centro delle rigidezze (CK) della struttura. Lo scopo è quello di far variare l'eccentricità della struttura, cioè la

distanza tra centro di massa e centro delle rigidità, per trovarne un legame con il comportamento torsionale globale. L'eccentricità ( $e$ ) è scomposta in due contributi, eccentricità trasversale ( $e_x$ ) ed eccentricità longitudinale ( $e_y$ ), legati dal teorema di Pitagora:

$$e^2 = e_x^2 + e_y^2 \quad (2.2)$$

Infine è necessario specificare che lo studio del comportamento torsionale delle strutture che saranno prese in esame in questa trattazione avviene valutando le loro risposte in seguito all'applicazione di una forzante dinamica (eccitazione sismica) uniassiale applicata in direzione longitudinale (direzione  $y$ ).



**Figura 2.1** Modello generico utilizzato nella trattazione.

## 2.2 Equazioni del moto

Come precedentemente affermato, i modelli in esame sono caratterizzati da 3 gradi di libertà ( $u_x, u_y, u_\theta$ ) ed hanno la stessa rigidità alla traslazione nelle direzioni x ed y.

Per sviluppare un'analisi in ambito elastico-lineare deve essere valida l'ipotesi dei piccoli spostamenti, grazie alla quale è possibile eseguire l'approssimazione del primo ordine:  $u_\theta \approx \sin(u_\theta) \approx \tan(u_\theta)$ .

L'equazione del moto che governa la risposta dinamica dei modelli in esame, scritta in forma compatta, è la seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2.3)$$

In forma estesa si parla di un sistema di tre equazioni differenziali accoppiate che descrivono il moto di un sistema dinamico con eccentricità nelle due direzioni e piano infinitamente rigido in un sistema di riferimento centrato nel baricentro:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m\rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + [\mathbf{C}] \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} K_x & 0 & -K_x E_y \\ 0 & K_y & K_y E_x \\ -K_x E_y & K_y E_x & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_\theta(t) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Il precedente sistema può essere riscritto, attraverso opportuni passaggi algebrici che non vengono qui riproposti, nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \rho_m \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + [\mathbf{C}] \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \rho_m \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_\theta(t)/\rho_m \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

con:

$m$  = massa totale del sistema (data dai carichi distribuiti sul solaio)

$p_x(t)$  = forza (o momento) dinamica lungo x

$p_y(t)$  = forza (o momento) dinamica lungo y

$p_\theta(t)$  = forza (o momento) dinamica lungo z

$\rho_m = \rho_{m,CM} = \sqrt{\frac{I_{\rho,m}}{m}}$  = raggio di inerzia delle masse valutato rispetto all'asse

z passante per il baricentro delle masse (proprietà fisica del sistema).

$I_{\rho,m} = \int_m (x^2 + y^2) dm = m \cdot \rho_m^2 = I_x + I_y =$  momento di inerzia polare delle masse valutato rispetto all'asse z passante per il baricentro delle masse (proprietà fisica del sistema)

$[C]$  = matrice di smorzamento

$\omega_L = \sqrt{\frac{k}{m}}$  = pulsazione propria del modo traslazionale di una struttura fittizia non eccentrica con rigidezza laterale pari a  $k$  e massa pari ad  $m$

$e_x = \frac{E_x}{D_e}$  ed  $e_y = \frac{E_y}{D_e}$  = eccentricità relative in direzione x e y

$D_e = \rho_m \cdot \sqrt{12}$  = diagonale equivalente del sistema (per sez. rettangolari)

$E_x = \frac{\sum_{i=1}^N k_{yi} \cdot x_i}{k}$  ed  $E_y = \frac{\sum_{i=1}^N k_{xi} \cdot y_i}{k}$  = distanze lungo x e lungo y tra centro di massa (CM) e centro di rigidezza (CK) del sistema

$x_i, y_i$  = coordinate dell'elemento resistente i-esimo (rispetto al baricentro)

$k_{xi}, k_{yi}$  = rigidezza dell'elemento resistente i-esimo in direzione x e y

$k = \sum_i k_{xi} = \sum_i k_{yi}$  = rigidezze complessive alla traslazione in direzione x e y

$\gamma = \gamma_{CM} = \frac{\omega_{\vartheta,CM}}{\omega_L} = \sqrt{\frac{I_{\rho,k,CM} m}{I_{\rho,m} k}} = \frac{\rho_{k,CM}}{\rho_m}$  = rapporto tra le pulsazioni dei modi

rotazionali e traslazionali disaccoppiati. Fisicamente fornisce una misura della distribuzione della rigidezza in pianta. Equivale inoltre al rapporto tra il raggio di inerzia delle rigidezze rispetto al baricentro delle masse (non è una proprietà fisica del sistema) ed il raggio di inerzia delle masse rispetto al baricentro delle masse (proprietà fisica del sistema).

$\omega_{\vartheta,CM} = \sqrt{\frac{I_{\rho,k,CM}}{I_{\rho,m}}}$  = pulsazione propria del modo rotazionale di una struttura

fittizia non eccentrica che ha la stessa rigidezza rotazionale e momento d'inerzia delle masse (rispetto all'asse z) dei modelli eccentrici.

$I_{\rho,k,CM} = \sum_{i=1}^N (k_{yi} \cdot x_i^2 + k_{xi} \cdot y_i^2)$  = momento d'inerzia polare delle rigidezze valutato rispetto all'asse z passante per il baricentro delle masse. Corrisponde alla rigidezza alla rotazione (intorno all'asse z centrato sul baricentro) dell'insieme degli elementi resistenti della struttura.

### 2.3 Parametro $\Omega_\theta$

Il parametro  $\gamma$  fornisce una misura della distribuzione in pianta della rigidità della struttura. Tuttavia, come precedentemente accennato, non costituisce una proprietà fisica del sistema poiché dipende dal raggio d'inerzia delle rigidità rispetto al baricentro delle masse ( $\rho_{k,CM}$ ) che non è una proprietà fisica del sistema dato che dipende dalle eccentricità.

È necessario quindi introdurre un indicatore della rigidità torsionale del modello che non dipenda dalla distanza tra baricentro delle masse e baricentro delle rigidità. Tale parametro, che prende il nome di  $\Omega_\theta$ , rappresenta una proprietà fisica della struttura ed è definito come il rapporto tra il raggio d'inerzia delle rigidità valutato rispetto al centro delle rigidità ed il raggio d'inerzia delle masse valutato rispetto al centro di massa. In formula:

$$\Omega_\theta = \sqrt{\frac{I_{\rho,k,CK} m}{I_{\rho,m,CM} k}} = \frac{\rho_k}{\rho_m} \quad (2.6)$$

con

$$I_{\rho,k,CK} = \sum_{i=1}^N (k_{yi} \cdot x_{i,CK}^2 + k_{xi} \cdot y_{i,CK}^2)$$

$x_{i,CK}, y_{i,CK}$  = distanze dell'elemento resistente i-esimo dal centro di rigidità.

Generalmente strutture caratterizzate da valori di  $\Omega_\theta > 1$  sono definite torsio-rigide, quelle con  $\Omega_\theta < 1$  sono dette torsio-flessibili.

Si può inoltre trovare una relazione che legghi i parametri  $\gamma$  e  $\Omega_\theta$ .

Ricordando la definizione di  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\frac{I_{\rho,k,CM}}{k}}{\frac{I_{\rho,m,CM}}{m}}} = \frac{\rho_{k,CM}}{\rho_m} \quad (2.7)$$

e che:

$$I_{\rho,k,CM} = \sum_{i=1}^N (k_{yi} \cdot x_i^2 + k_{xi} \cdot y_i^2) \quad (2.8)$$

con  $x_i, y_i$  = distanze dell'elemento resistente i-esimo dal centro di massa, si può esprimere tale momento d'inerzia polare delle rigidezze valutato rispetto all'asse z passante per il baricentro delle masse ( $I_{\rho,k,CM}$ ) in funzione del momento d'inerzia polare delle rigidezze valutato rispetto all'asse z passante per il baricentro delle rigidezze ( $I_{\rho,k,CK}$ ) applicando il *teorema di Huygens-Steiner*:

$$I_{\rho,k,CM} = I_{\rho,k,CK} + \sum_{i=1}^N (k_{yi} \cdot E_x^2 + k_{xi} \cdot E_y^2) \quad (2.10)$$

Sostituendo le relazioni note:

$$\begin{cases} E_x = e_x \cdot D_e = e_x \cdot \rho_m \sqrt{12} \\ E_y = e_y \cdot D_e = e_y \cdot \rho_m \sqrt{12} \end{cases} \quad (2.11)$$

e considerando l'ipotesi iniziale di uguali rigidezze totali alla traslazione in direzione x e y, cioè:

$$k = \sum_i k_{xi} = \sum_i k_{yi} \quad (2.12)$$

si ottiene:

$$I_{\rho,k,CM} = I_{\rho,k,CK} + 12\rho_m^2 k (e_x^2 + e_y^2) \quad (2.13)$$

Sostituendo tale relazione nella formula (2.7) si perviene al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{I_{\rho,k,CM}}{\frac{k}{I_{\rho,m,CM}}}} = \sqrt{\frac{I_{\rho,k,CK} + 12\rho_m^2 k (e_x^2 + e_y^2)}{\frac{k}{I_{\rho,m,CM}}}} = \\ &= \sqrt{\frac{I_{\rho,k,CK}}{I_{\rho,m,CM}} \frac{m}{k} + \frac{12\rho_m^2 k (e_x^2 + e_y^2)}{k \cdot \frac{I_{\rho,m,CM}}{m}}} = \sqrt{\Omega_\theta^2 + 12(e_x^2 + e_y^2)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si nota che nel caso di eccentricità nulle i parametri  $\gamma$  ed  $\Omega_\theta$  coincidono.

Si può infine riscrivere le equazioni del moto in termini di  $\Omega_\theta$ :

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m \ddot{u}_\theta \end{pmatrix} + [C] \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \rho_m \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \Omega_0^2 + 12(e_x^2 + e_y^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_\theta(t)/\rho_m \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

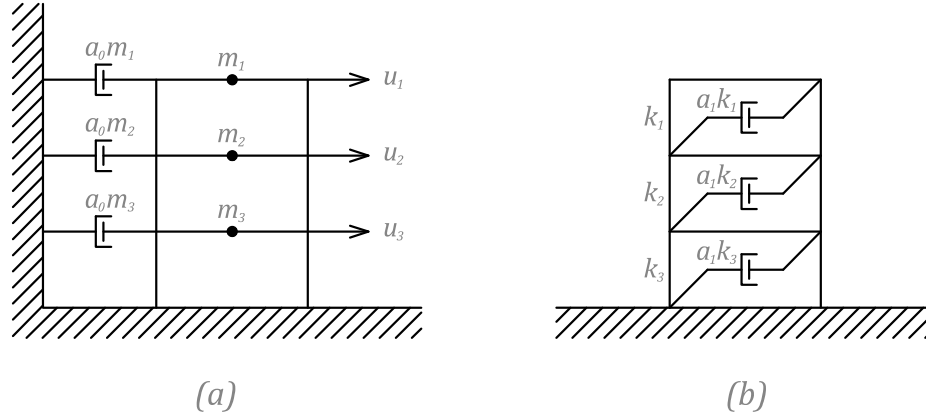
## 2.4 Smorzamento alla Rayleigh

La matrice di smorzamento che compare nelle equazioni del moto è definita attraverso la matrice delle masse e quella delle rigidezze, cui è legata proporzionalmente nel seguente modo:

$$[C] = \mathbf{a}_0[M] + \mathbf{a}_1[K] \quad (2.16)$$

con i coefficienti  $\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{a}_1$  dimensionalmente pari rispettivamente all'inverso del secondo e al secondo.

Una rappresentazione fisica dei due contributi può essere la seguente:



**Figura 2.2** Smorzamento proporzionale: a) alle masse, b) alle rigidezze.

L'indice (o rapporto) di smorzamento per l'n-esimo modo è pari a:

$$\xi_n = \frac{\mathbf{a}_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{\mathbf{a}_1}{2} \omega_n \quad (2.17)$$

Se si considerano gli indici di smorzamento relativi a due generici modi  $i$  e  $j$ , si possono determinare i coefficienti  $\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{a}_1$  attraverso le equazioni seguenti:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

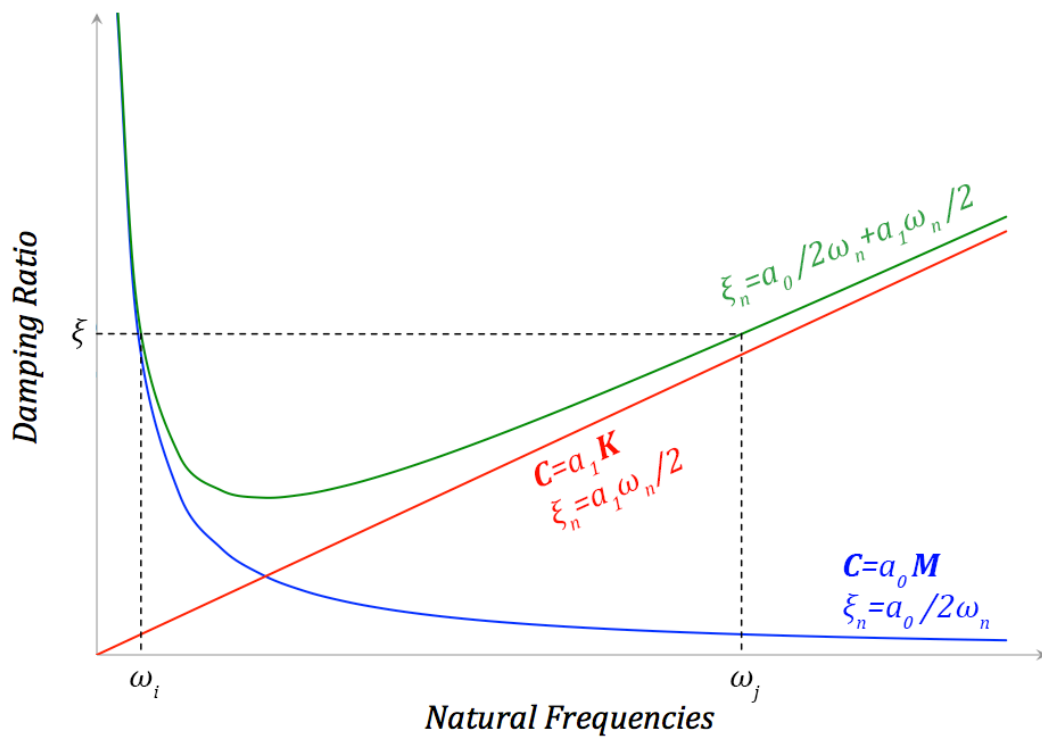


Le pulsazioni  $i$  e  $j$  sono scelte tra le  $n$  pulsazioni della struttura in base al fatto che abbiano i rispettivi indici di smorzamento coincidenti il più possibile ed in modo che assicurino indici di smorzamento ragionevoli per tutti i modi che contribuiscono in modo significativo alla risposta della struttura. Spesso i modi che rispettano queste due condizioni sono il primo ed il terzo.

I coefficienti  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  sono quindi dati dalle formule:

$$\alpha_0 = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad \alpha_1 = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.19)$$

Infine la matrice di smorzamento si calcola sostituendo le formule (2.19) all'interno della (2.16).



**Figura 2.3** Variazione del rapporto di smorzamento modale con le frequenze naturali.

## 2.5 Il problema agli autovalori

Ogni struttura ha delle caratteristiche dinamiche proprie che dipendono, tra le altre cose, da massa, geometria e rigidezza.

Lo studio delle vibrazioni libere in assenza di smorzamento ha lo scopo di calcolare queste caratteristiche dinamiche, in termini di pulsazioni naturali e modi di vibrare e prevede che si risolva l'equazione omogenea associata all'equazione del moto (2.5).

Si cerca una soluzione del tipo:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_n(t) \cdot \boldsymbol{\phi}_n \quad (2.20)$$

per l'equazione omogenea:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

Sostituendo la (2.20) nella (2.21) si ottiene:

$$[-\omega_n^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_n + \mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_n] \cdot \mathbf{q}_n(t) = \mathbf{0}$$

Escludendo la soluzione banale, si ha perciò:

$$[-\omega_n^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \cdot \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$$

che è verificata se il determinante della matrice è nullo:

$$\det[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (2.22)$$

Si parla di *problema agli autovalori*.

Il risultato di questa imposizione è rappresentato dai valori delle pulsazioni naturali  $\omega_n$  che annullano il determinante. Nel caso di sistemi a 3 gradi di libertà, cioè nei casi della presente trattazione, si ottengono 3 *autovalori* ( $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ ). Una rappresentazione analitica possibile di queste 3 pulsazioni naturali prevede la loro normalizzazione rispetto alla pulsazione longitudinale  $\omega_L$ , il tutto elevato al quadrato.

In questo caso si parla di *frequenze normalizzate*:

$$\Omega_1 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_L}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \gamma^2 - \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2} \right] \quad (2.23)$$

$$\Omega_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_L}\right)^2 = 1 \quad (2.24)$$

$$\Omega_3 = \left(\frac{\omega_3}{\omega_L}\right)^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \gamma^2 + \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2} \right] \quad (2.25)$$

con  $e^2 = e_x^2 + e_y^2$

Per ogni valore di eccentricità relativa  $e$  la frequenza normalizzata  $\Omega_1$  è minore di 1, mentre la frequenza normalizzata  $\Omega_3$  è maggiore di 1.

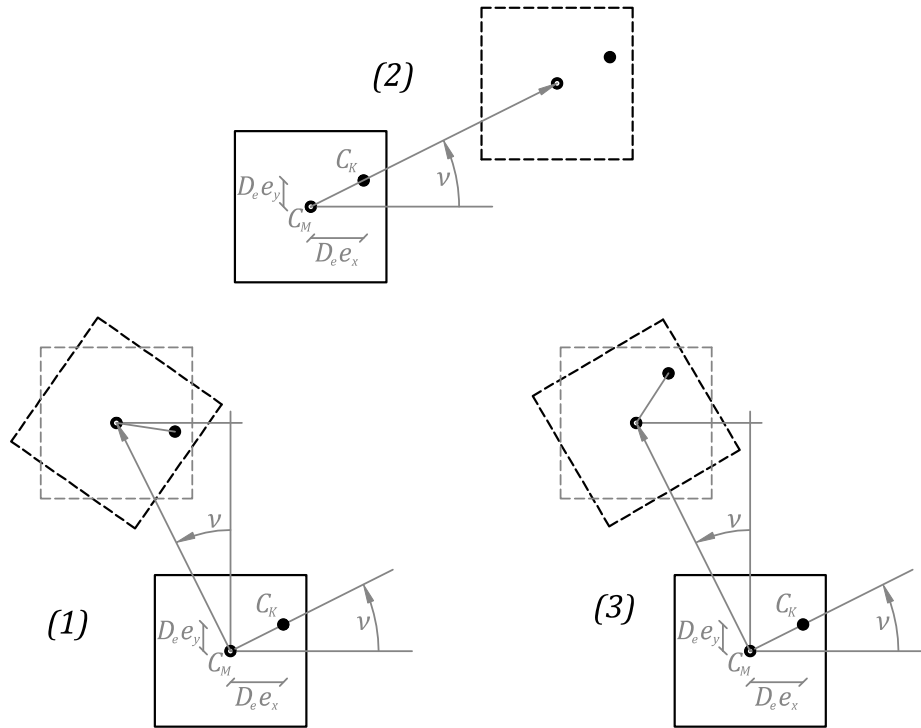
Inoltre per valori usuali dei parametri " $\gamma$ " ( $1, 1 \leq \gamma \leq 1, 4$ ) ed " $e$ " ( $0, 02 \leq e \leq 0, 22$ )  $\Omega_1$  è di poco inferiore a 1, mentre  $\Omega_3$  assume valori molto maggiori.

A ciascuno dei 3 autovalori ottenuti si associano i seguenti 3 *autovettori*, i quali descrivono le deformate modali:

$$\{\phi_1\} = \begin{bmatrix} \frac{e_y \sqrt{12}}{1 - \Omega_1} \\ \frac{e_x \sqrt{12}}{\Omega_1 - 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{\phi_2\} = \begin{bmatrix} e_x/e_y \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{\phi_3\} = \begin{bmatrix} \frac{e_y \sqrt{12}}{1 - \Omega_3} \\ \frac{e_x \sqrt{12}}{\Omega_3 - 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Si osserva che il primo ed il terzo modo di vibrare attivano tutte e tre le componenti di spostamento (traslazioni e rotazione sono accoppiate); al contrario il secondo modo di vibrare è puramente traslazionale.

La rappresentazione grafica qualitativa delle deformate modali è la seguente:



**Figura 2.4** Rappresentazione grafica delle deformate modali di un sistema tridimensionale ad un piano con diaframma infinitamente rigido nel suo piano e centro di massa e centro delle rigidezze non coincidenti. a)  $\{\Phi_1\}$ , b)  $\{\Phi_2\}$ , c)  $\{\Phi_1\}$ , con  $\nu = \arctan(e_y/e_x)$ .

## 2.6 Forme modali nel caso di eccentricità longitudinale nulla ( $e_y = 0$ )

Si dimostra [12] che nel caso di eccentricità longitudinale nulla il problema agli autovalori restituisce le seguenti deformate modali (autovettori):

$$\{\phi_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\Omega_1 - 1}{e_x \sqrt{12}} \end{bmatrix} \quad \{\phi_2\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{\phi_3\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\Omega_3 - 1}{e_x \sqrt{12}} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Essi sono ottenuti dalle (2.26) dividendo ogni autovettore per il secondo elemento del vettore stesso e ponendo  $e_y = 0$ .

Si nota come nel primo ed nel terzo modo di vibrare la traslazione lungo y e la rotazione siano accoppiate, mentre il secondo modo attiva solo una traslazione lungo x.

## 2.7 Modal contribution factors

I *modal contribution factors* (MCF) sono coefficienti indicatori di quanto un modo naturale contribuisca alla risposta complessiva della struttura. Se tale contributo è riferito alla massa del sistema, il *modal contribution factor* diventa indice della quotaparte di massa totale attivata dal rispettivo modo di vibrare.

In generale, per il modo i-esimo, il *modal contribution factor* vale:

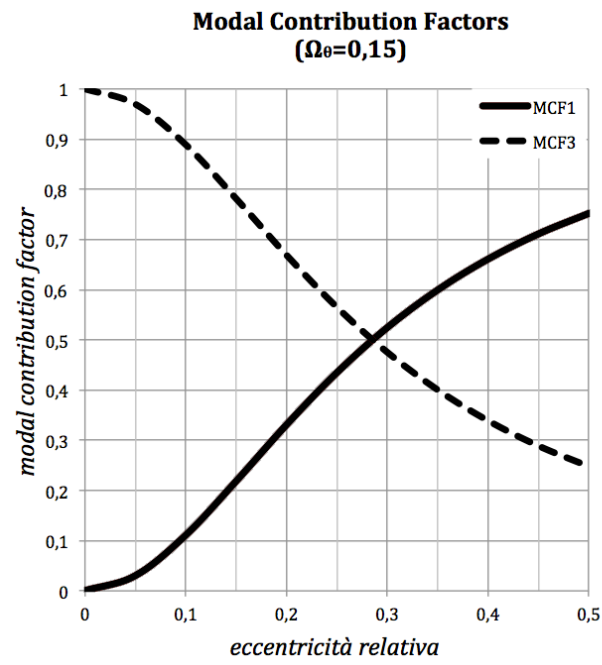
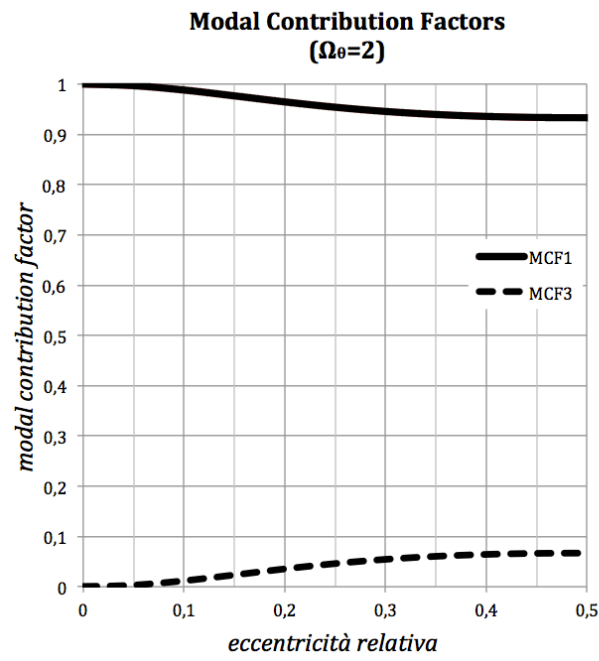
$$\mathbf{MCF}_i = \frac{\frac{(\{\phi_i\}^T [M] \{1\})^2}{\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}}}{\sum_{j=1}^n \frac{(\{\phi_j\}^T [M] \{1\})^2}{\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\}}} \quad (2.28)$$

Sostituendo le (2.27) (studiando quindi il caso ad eccentricità longitudinale nulla) e considerando un input sismico solo in direzione y, attraverso opportuni passaggi che non vengono trascritti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{MCF}_1 &= \frac{1}{1 + \frac{\Omega_1 - 1}{e\sqrt{12}}} \\ \mathbf{MCF}_2 &= 0 \\ \mathbf{MCF}_3 &= \frac{1}{1 + \frac{\Omega_3 - 1}{e\sqrt{12}}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'andamento dei *modal contribution factors* in funzione dell'eccentricità relativa ( $e$ ) varia in base alla rigidezza torsionale del sistema eccentrico.

Qui di seguito vengono presentati graficamente due casi estremi: il primo riguardante una struttura molto torsiorrigida ( $\Omega_\theta = 2$ ), il secondo una struttura molto torsioflessibile ( $\Omega_\theta = 0,15$ ).



**Figura 2.5** Modal Contribution Factors in funzione dell'eccentricità relativa.

## 2.8 Periodi di vibrazione normalizzati

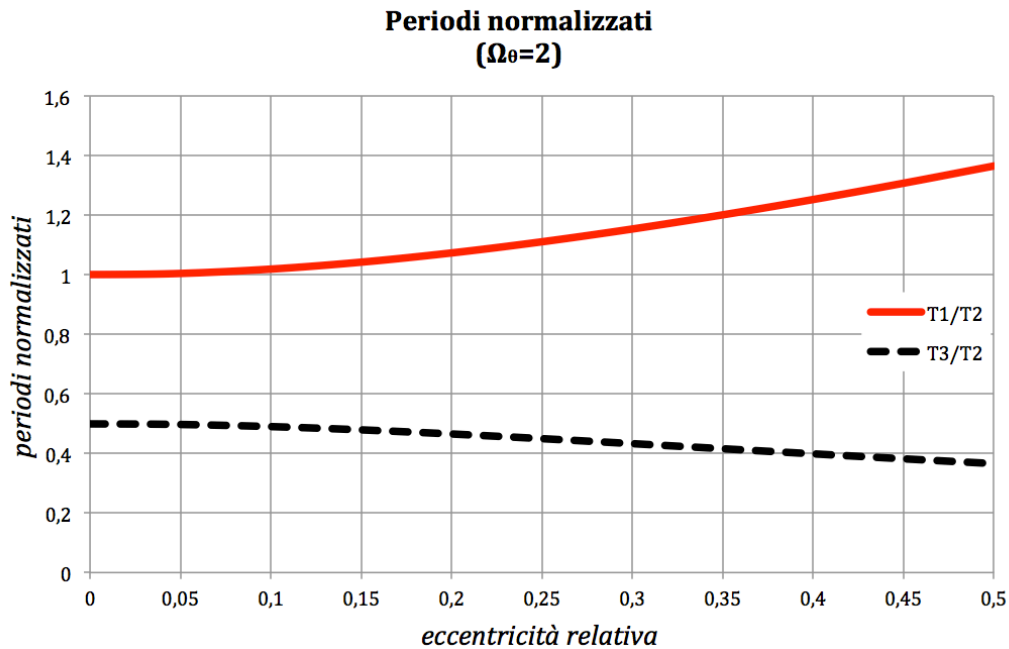
Ad ogni frequenza normalizzata ( $\Omega_i$ ) corrisponde un periodo di vibrazione normalizzato rispetto al periodo longitudinale ( $T_L$ ) secondo la relazione

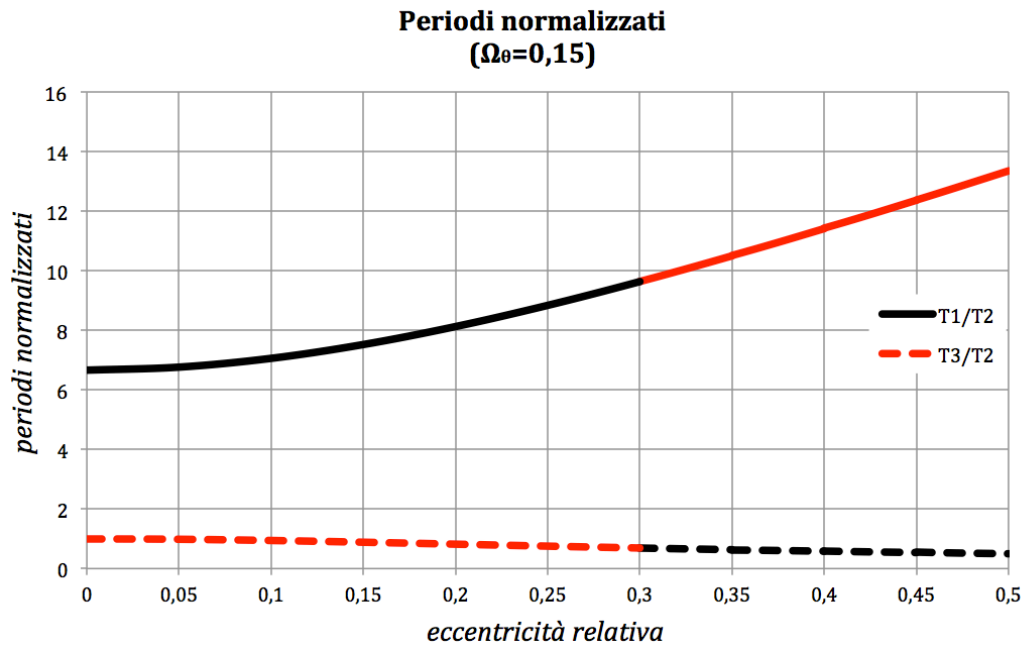
$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

La formulazione analitica generale in forma chiusa dei tre periodi di vibrazione normalizzati è la seguente:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_L} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \gamma^2 - \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2} \right]}} \\ T_2 &= T_L \\ \frac{T_3}{T_L} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \gamma^2 + \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2} \right]}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Con lo scopo di studiare quanto si discostano i periodi  $T_1$  e  $T_2$  da quello longitudinale al variare dell'eccentricità relativa, si riportano due grafici rappresentativi di due casistiche opposte: il primo grafico è caratteristico di una struttura molto torsiorrigida ( $\Omega_\theta = 2$ ), il secondo di una struttura molto torsioflessibile ( $\Omega_\theta = 0,15$ ).





**Figura 2.6** Periodi di vibrazione normalizzati in funzione dell'eccentricità relativa.

Quando l'andamento di un periodo normalizzato assume il colore rosso significa che quel periodo di vibrazione è preponderante rispetto all'altro, cioè ha un Modal Contribution Factor maggiore (cfr. Figura 2.5).



## 2.9 Riepilogo dei parametri fondamentali

Per descrivere il comportamento di una struttura rettangolare qualsiasi di dimensioni in pianta  $L \times B$  attraverso l'equazione del moto (2.15) sono necessari i seguenti parametri strutturali indipendenti:

- eccentricità relativa  $e$
- coefficiente  $\Omega_\theta = \frac{\rho_k}{\rho_m}$
- periodo di vibrazione longitudinale  $T_L$
- indice di smorzamento  $\xi$
- diagonale equivalente  $D_e$

La massa totale  $m$  si trova all'interno della pulsazione  $\omega_L$  e viene automaticamente fissata insieme alla rigidezza traslazionale totale  $K$  quando si fissa il periodo di vibrazione longitudinale  $T_L$ .

La diagonale equivalente  $D_e$  è funzione della dimensione longitudinale  $B$  e del *fattore di forma*  $\phi$  definito dalla seguente formula:

$$\phi = \frac{L}{2\rho_m} \quad (2.31)$$

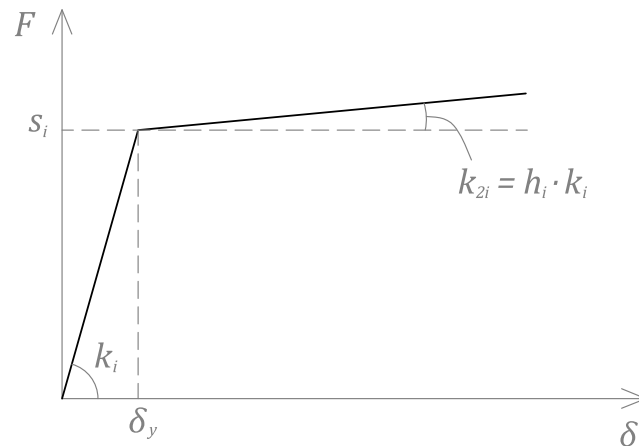
L'eccentricità relativa  $e$  è legata alla diagonale equivalente dalla relazione:

$$e = \frac{E}{D_e}$$

## 2.10 Parametri aggiuntivi non lineari

Il comportamento dei modelli trattati finora è stato analizzato anche in campo non lineare.

Per fare ciò è stato necessario introdurre una legge costitutiva *elastico-incrudente* e conseguenti parametri aggiuntivi.



**Figura 2.7** Legge costitutiva elastico-incrudente.

I parametri addizionali caratteristici dell'analisi non lineare sono dovuti appunto all'introduzione di una nuova legge costitutiva, caratterizzata da un diagramma forza-spostamento bilineare.

Per caratterizzare un materiale dal comportamento lineare è sufficiente un parametro: la rigidezza  $k$ , cioè la pendenza della retta del diagramma forza-spostamento.

In campo non lineare invece sono necessari tre parametri: la rigidezza iniziale  $k$ , la rigidezza dopo lo snervamento  $k_2$ , e lo spostamento al limite elastico  $\delta_y$ .

Risulta utile introdurre un nuovo parametro, detto *Indice Plastico*, con lo scopo di indicare il livello di plasticizzazione raggiunto da una certa struttura in modo tale da rendere possibile il confronto tra diversi modelli in base all'entità della loro escursione plastica compensando le caratteristiche differenti di elementi resistenti e/o isolatori.

Tale *Indice Plastico*, che ha l'ulteriore proprietà di inglobare il parametro  $\delta_y$ , è così definito:

$$IP = \frac{\delta_{max} - \delta_y}{\delta_y} \quad (2.32)$$

Inoltre, per indicare l'entità dell'eventuale tratto incrudente, si adotta il parametro *SHR* (= *Strain Hardening Ratio*), pari a:

$$SHR = \frac{k_2}{k} \quad (2.33)$$

In definitiva, per caratterizzare un sistema elastico-incrudente ed in particolare per descrivere al meglio la sua escursione plastica sono necessari due parametri aggiuntivi: l'*Indice Plastico* (*IP*) e lo *Strain Hardening Ratio* (*SHR*).

Nella presente tesi è stata data scarsa importanza all'analisi di *SHR*, parametro fissato a  $SHR=0,1$  in tutte le simulazioni per ragioni di continuità con studi precedenti [10, 13]. Tale valore è comune ad isolatori del tipo HDRB (High Damping Rubber Bearing).

Inoltre nelle analisi sismiche condotte non si è ragionato in termini di uguale escursione in campo plastico. Tale criterio prevede che tutte le strutture siano sottoposte a diversi sismi, la cui intensità sia fattorizzata con quel moltiplicatore che ogni volta faccia raggiungere alla struttura un determinato valore di *IP* (=0, =1, =3, =5, =7, =10), ovvero uno spostamento prefissato. Questo per poter sviluppare un confronto coerente fra più strutture soggette a diversi terremoti: tale confronto avviene appunto a parità di impegno plastico.

Al contrario le analisi qui trattate chiamano in causa un nuovo coefficiente, detto *fattore di riduzione delle forze* (*R*).

Tale parametro ha la funzione di ridurre la *forza di plasticizzazione*  $F_y$ , cioè la forza corrispondente allo spostamento al limite elastico  $\delta_y$ .

Il *fattore di riduzione delle forze*  $R$  non è nient'altro che il *fattore di struttura*  $q$  di cui le Norme Tecniche parlano nel capitolo 7 (Progettazione per azioni sismiche).

Sotto l'ipotesi che tutti gli elementi resistenti della struttura siano caratterizzati dalla stessa legge costitutiva, in quanto composti dello stesso materiale, il fattore  $R$  è in grado di determinare la forza che causerà la formazione di cerniere plastiche negli elementi stessi.

Quando  $R=1$  la struttura si trova in campo elastico. Se invece  $R$  assume per esempio valore 2, la resistenza allo snervamento del sistema è uguale alla resistenza minima richiesta dal sistema per rimanere elastico diviso 2.

### 3. SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

#### 3.1 Vibrazioni libere non smorzate

Le equazioni del moto che rappresentano il comportamento della struttura mancano della matrice di smorzamento ( $[C] = \mathbf{0}$ ) e non presentano alcuna forza o coppia applicata ( $\{p\} = \mathbf{0}$ ). L'unica perturbazione che rompe lo stato di quiete è una deformazione iniziale impressa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_x(0) \\ \mathbf{u}_y(0) \\ \rho_m \mathbf{u}_\theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

dove  $\mathbf{a}$  rappresenta lo spostamento iniziale in direzione  $y$ .

Le equazioni del moto nel caso di vibrazioni libere non smorzate diventano quindi:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m \ddot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \Omega_\theta^2 + 12(e_x^2 + e_y^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

La risposta del sistema in termini di spostamento si ottiene applicando un cambiamento di coordinate che prende il nome di *teorema di espansione*:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r \cdot q_r(t) \quad (3.3)$$

con

$\phi_r$  = autovettore relativo al modo  $r$ -esimo.

$q_r(t)$  = costante che esprime il grado di partecipazione del modo  $r$ -esimo al moto complessivo del sistema.

Il teorema di espansione viene utilizzato per disaccoppiare le equazioni del moto di un sistema a più gradi di libertà nel procedimento che prende il nome di analisi modale. Tale disaccoppiamento sfrutta la proprietà di ortogonalità dei modi normali di vibrare (che vale sia rispetto alle masse sia rispetto alle rigidità). L'interpretazione meccanica che si può dare a questa

relazione di ortogonalità è che il lavoro virtuale prodotto dalle forze (d'inerzia o elastiche) proporzionali ad un modo di vibrare per lo spostamento virtuale descritto da un modo di vibrare diverso è nullo. In altre parole, ciascuna forma modale è indipendente dalle altre: nessun modo proprio può essere ottenuto dalla combinazione di altri modo propri.

Ciò si traduce analiticamente nelle seguenti formule:

$$\phi_s^T m \phi_r = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r \neq s \end{cases} \quad \phi_s^T k \phi_r = \begin{cases} 1 & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r \neq s \end{cases} \quad (3.4)$$

Si sostituisce la (3.3) nell'equazione del moto per le vibrazioni libere non smorzate (3.1) non esplicitata:

$$\sum_{r=1}^N m \cdot \phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N k \cdot \phi_r q_r(t) = 0$$

Per sfruttare la relazione di ortogonalità (3.4) si premoltiplica per  $\phi_s^T$ :

$$\sum_{r=1}^N \phi_s^T m \phi_r \cdot \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_s^T k \phi_r \cdot q_r(t) = 0$$

Si ottiene quindi:

$$\phi_s^T m \phi_s \cdot \ddot{q}_s(t) + \phi_s^T k \phi_s \cdot q_s(t) = 0$$

Si definiscono:

$\phi_s^T m \phi_s = M_s$  = massa modale (o generalizzata) per il modo s-esimo

$\phi_s^T k \phi_s = K_s$  = rigidezza modale (o generalizzata) per il modo s-esimo

Per cui:

$$M_s \ddot{q}_s(t) + K_s q_s(t) = 0$$

Ragionando non più in termini di componente s-esima ma matriciali, si può scrivere:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = 0 \quad (3.5)$$

con

$\mathbf{M}$  =matrice delle masse modali

$\mathbf{K}$  =matrice delle rigidzze modali

Tali matrici, per l'ortogonalità dei modi, sono *diagonali*: l'espressione (3.5) rappresenta perciò un sistema di N equazioni differenziali disaccoppiate. Studiare il sistema ad N gradi di libertà equivale a studiare la combinazione di N oscillatori semplici.

Per l'oscillatore s-esimo, di massa  $M_s$  e rigidità  $K_s$ , vale l'equazione:

$$\ddot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) = 0 \quad (3.6)$$

in cui  $\omega_s^2 = \frac{K_s}{M_s}$  è il quadrato della sua pulsazione naturale.

Riferendo quanto detto finora sull'analisi modale alle equazioni del moto per la struttura in esame (3.2) è possibile ottenere la sua risposta ad una perturbazione iniziale in termini di spostamenti (traslazioni lungo x ed y e rotazione attorno a z):

$$\begin{aligned} u_x(t) &= a \frac{e_x e_y}{e^2} \{-A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) - A_3 \cos(\omega_3 t)\} \\ u_y(t) &= a \frac{e_x^2}{e^2} \left\{ A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \frac{e_y^2}{e_x^2} \cos(\omega_2 t) + A_3 \cos(\omega_3 t) \right\} \\ u_\vartheta(t) &= \frac{a e_x}{\rho e} A_4 \{\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_3 t)\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

In cui le costanti di integrazione  $A_1, A_2, A_3, A_4$  sono definite attraverso i coefficienti:

$$F = \frac{e}{\gamma^2 - 1} \quad (3.8)$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{F} \left( 1 - \sqrt{1 + 48F^2} \right) = \frac{2}{e} (\Omega_1 - 1) \quad (3.9)$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{F} \left( 1 + \sqrt{1 + 48F^2} \right) = \frac{2}{e} (\Omega_3 - 1) \quad (3.10)$$

e valgono:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1 - \Omega_3}{\Omega_1 - \Omega_3} = \frac{\Theta_3}{\Theta_3 - \Theta_1} = \frac{\sqrt{1 + 48F^2} + 1}{2\sqrt{1 + 48F^2}} \\
A_2 &= 1 \\
A_3 &= \frac{\Omega_1 - 1}{\Omega_1 - \Omega_3} = \frac{\Theta_1}{\Theta_1 - \Theta_3} = \frac{\sqrt{1 + 48F^2} - 1}{2\sqrt{1 + 48F^2}} \\
A_4 &= \frac{1}{e\sqrt{12}} \frac{(\Omega_1 - 1)(\Omega_3 - 1)}{\Omega_3 - \Omega_1} = \frac{1}{\sqrt{48}} \frac{\Theta_3\Theta_1}{\Theta_3 - \Theta_1} = \sqrt{\frac{12F^2}{1 + 48F^2}}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Si può osservare che:

- tutti gli spostamenti dipendono linearmente dalla deformazione iniziale impressa  $a$ .
- lo spostamento lungo  $x$  (direzione ortogonale a quella della deformazione iniziale) è non nullo solo nel caso di presenza di eccentricità in entrambe le direzioni.
- a parità di eccentricità trasversale  $e_x$  la massima risposta rotazionale si sviluppa quando l'eccentricità longitudinale è nulla ( $e_y = 0$ ).

Infatti fissato  $e_x$ , il rapporto  $\frac{e_x}{e} = \frac{e_x}{e_x^2 + e_y^2}$  è massimo proprio per  $e_y = 0$ .

- gli spostamenti traslazionali e le rotazioni sono composti dalla somma di più funzioni trigonometriche di diversa ampiezza e pulsazione, la cui composizione crea delle armoniche a modulazione di ampiezza. La modulazione si dice completa quando le ampiezze delle due armoniche sono uguali, incompleta in caso contrario.

In merito all'ultima osservazione, per la comprensione della quale si fa riferimento alla formula di Prostaferesi, si può far notare che la risposta rotazionale della struttura è costituita dalla somma di due armoniche di uguale ampiezza, e quindi da un'armonica ad ampiezza modulata in modo completo.

Si è osservato che, nel caso di oscillazioni libere di un sistema non smorzato, mentre le traslazioni nelle due direzioni subiscono una lenta evoluzione nella



modulazione dell'ampiezza con caratteristiche diverse da ciclo a ciclo, le rotazioni  $u_\theta$  sono caratterizzate da un valore massimo della modulazione dell'ampiezza (direttamente legato alla deformazione iniziale ed alle caratteristiche della struttura) che viene raggiunto ad ogni ciclo degli spostamenti longitudinale e/o trasversali [1].

La massima risposta rotazionale si ha, riprendendo la penultima osservazione, quando, a parità di eccentricità trasversale  $e_x$ , l'eccentricità longitudinale è nulla ( $e_y = 0$ ). In questo caso le equazioni (3.7) diventano perciò:

$$\begin{aligned} u_x(t) &= 0 \\ u_y(t) &= a\{A_1 \cos(\omega_1 t) + A_3 \cos(\omega_3 t)\} \\ u_\theta(t) &= \frac{a}{\rho} A_4 \{\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_3 t)\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dall'esame delle precedenti equazioni, che può essere fatto anche graficamente attraverso il *diagramma di Argand* [5], si possono ricavare ulteriori osservazioni:

- lo spostamento longitudinale massimo si sviluppa per  $\omega_1(t) = n\pi$  e  $\omega_3(t) = m\pi$  (con  $n$  ed  $m$  entrambi pari o dispari) ed è pari ad  $a$ .
- la rotazione massima si sviluppa per  $\omega_1(t) = n\pi$  e  $\omega_3(t) = (m + 1)\pi$  (con  $n$  ed  $m$  entrambi pari o dispari) ed è uguale a  $\frac{a}{\rho} \cdot \alpha_u$ . Lo spostamento longitudinale corrispondente è pari ad  $a(A_1 - A_3)$ , che per strutture torsionalmente rigide (che hanno  $A_3$  molto piccolo) è circa uguale ad  $a$  (poiché  $A_1 + A_3 = 1$ ).

### 3.2 Vibrazioni libere smorzate

Le equazioni del moto che rappresentano il comportamento della struttura presentano una matrice di smorzamento non nulla, mentre le forze e le coppie esterne sono pari a zero ( $\{\mathbf{p}\} = \mathbf{0}$ ). L'unica perturbazione che rompe lo stato di quiete è, come nel caso precedente, una deformazione iniziale  $\mathbf{a}$  impressa in direzione  $y$ .

Le equazioni del moto nel caso di vibrazioni libere smorzate diventano quindi:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m \ddot{u}_\theta \end{pmatrix} + [C] \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \rho_m \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \Omega_\theta^2 + 12(e_x^2 + e_y^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Si tratta di un sistema di equazioni accoppiate che possono essere disaccoppiate solo se la matrice di smorzamento è *simmetrica*. Normalmente tale matrice è non simmetrica a meno che non si consideri uno smorzamento alla Rayleigh.

Tale ipotesi, come esposto nel paragrafo 2.4, considera la matrice di smorzamento come una combinazione lineare della matrice delle masse e della matrice delle rigidezze: la matrice combinazione di due matrici simmetriche è simmetrica.

Detto questo, e sotto l'ulteriore ipotesi che gli indici di smorzamento dei tre modi di vibrare della struttura a tre gradi di libertà siano uguali ( $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi$ ), si può esprimere la risposta della struttura in termini di spostamenti con le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} u_x(t) &= a \frac{e_x e_y}{e^2} \Lambda \cdot e^{-\xi \omega_1 t} \{ -A_1 \cos(\omega_{D1} t + \vartheta) + A_2 \cdot e^{-\xi t(\omega_2 - \omega_1)} \cos(\omega_{D2} t \\ &\quad + \vartheta) - A_3 \cdot e^{-\xi t(\omega_3 - \omega_1)} \cos(\omega_{D3} t + \vartheta) \} \\ u_y(t) &= a \frac{e_x^2}{e^2} \Lambda \cdot e^{-\xi \omega_1 t} \left\{ A_1 \cos(\omega_{D1} t + \vartheta) + A_2 \frac{e_y^2}{e_x^2} \cdot e^{-\xi t(\omega_2 - \omega_1)} \cos(\omega_{D2} t \right. \\ &\quad \left. + \vartheta) + A_3 \cdot e^{-\xi t(\omega_3 - \omega_1)} \cos(\omega_{D3} t + \vartheta) \right\} \quad (3.14) \\ u_\vartheta(t) &= \frac{a e_x}{\rho e} A_4 \Lambda \cdot e^{-\xi \omega_1 t} \{ \cos(\omega_{D1} t + \vartheta) - e^{-\xi t(\omega_3 - \omega_1)} \cos(\omega_{D3} t + \vartheta) \} \end{aligned}$$

in cui:

$$\Lambda = \sqrt{1 + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \vartheta = -\operatorname{artan}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \omega_{Di} = \omega_i \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.15)$$

Studi specifici [1] hanno mostrato che, analogamente al caso di oscillazioni libere non smorzate, i valori massimi delle rotazioni si sviluppano quasi ad ogni ciclo longitudinale in corrispondenza dei massimi longitudinali, con l'unica differenza che lo smorzamento in questo caso diminuisce progressivamente le rotazioni. Tale riduzione inoltre è tanto più evidente quanto più le strutture hanno un valore di  $\gamma$  basso.

Poiché la massima risposta rotazionale si ha, come osservato in precedenza, quando l'eccentricità longitudinale  $e_y$  è nulla (a parità di eccentricità trasversale  $e_x$ ) le equazioni (3.14) diventano:

$$u_x(t) = 0 \quad (3.16)$$

$$u_y(t) = a \frac{e_x^2}{e^2} \Lambda \cdot e^{-\xi \omega_1 t} \{A_1 \cos(\omega_{D1} t + \vartheta) + A_3 \cdot e^{-\xi t(\omega_3 - \omega_1)} \cos(\omega_{D3} t + \vartheta)\}$$

$$u_\vartheta(t) = \frac{a e_x}{\rho e} A_4 \Lambda \cdot e^{-\xi \omega_1 t} \{\cos(\omega_{D1} t + \vartheta) - e^{-\xi t(\omega_3 - \omega_1)} \cos(\omega_{D3} t + \vartheta)\}$$

### 3.3 Sistema dinamico smorzato sottoposto ad input sismico

Per analizzare il comportamento sismico di una struttura smorzata si considera come forzante il prodotto tra la massa del sistema, considerata efficace in ugual misura per ognuno dei tre gradi di libert , e l'accelerazione fornita da un determinato record sismico (*accelerogramma*).

L'equazione del moto (2.15) diventa:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m \ddot{u}_\theta \end{pmatrix} + [C] \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \rho_m \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \Omega_\theta^2 + 12(e_x^2 + e_y^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\theta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_\theta(t)/\rho_m \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Se si considera un input sismico unidirezionale (uniaxialexcitation) lungo y, si ha:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m \ddot{u}_\theta \end{pmatrix} + [C] \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \rho_m \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_y\sqrt{12} \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ -e_y\sqrt{12} & e_x\sqrt{12} & \Omega_\theta^2 + 12(e_x^2 + e_y^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\theta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ a_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Infine, come in precedenza, si fa riferimento al caso di eccentricit  longitudinale nulla ( $e_y = 0$ ) poich , a parit  di eccentricit  trasversale,   la situazione in cui si sviluppa la massima risposta rotazionale ( $u_\theta$ ):

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \rho_m \ddot{u}_\theta \end{pmatrix} + [C] \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \rho_m \dot{u}_\theta \end{pmatrix} + m\omega_L^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e_x\sqrt{12} \\ 0 & e_x\sqrt{12} & \Omega_\theta^2 + 12e_x^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ \rho_m u_\theta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ a_y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

La risposta della struttura in termini di spostamenti   ottenuta mediante modellazioni numeriche che integrano nel tempo le equazioni del moto.

## 4. IL METODO ALPHA

Il *metodo Alpha* è stato pensato per stimare in modo semplice e diretto gli spostamenti della struttura in seguito allo sviluppo delle sue inevitabili deformazioni torsionali. Tale stima è possibile grazie alla determinazione di alcuni parametri (tra cui il parametro  $\alpha$ , indice dell'entità della rotazione delle strutture eccentriche, che dà il nome al metodo) in grado di descrivere l'essenza del comportamento torsionale della struttura in campo elastico lineare e non lineare.

Il *metodo Alpha* consente in particolare di valutare in modo semplificato le rotazioni che nascono in una struttura dotata di eccentricità.

Le rotazioni vengono valutate a partire dallo spostamento massimo di una struttura avente caratteristiche dinamiche identiche alla struttura in analisi, ma priva di eccentricità (struttura non eccentrica equivalente o oscillatore equivalente) e a partire dalle caratteristiche fisiche della struttura (contenute nel parametro  $\alpha$ ).

Il vantaggio di questa formulazione è di permettere di conoscere e controllare il comportamento torsionale delle strutture (in fase di progettazione preliminare) senza dover ricorrere ad un'analisi dinamica tridimensionale completa.

### 4.1 Il parametro $\alpha$

Le rotazioni massime che una struttura sviluppa in oscillazioni libere vengono raggiunte, come si è precedente affermato, ad ogni oscillazione longitudinale. Ciò avviene sempre per le strutture non smorzate ed è quasi sempre vero per le strutture dotate di smorzamento. Tale rotazione massima è quindi una caratteristica saliente e costante del comportamento dinamico delle strutture eccentriche.

Si costituisce perciò un coefficiente in grado di correlare rotazione massima e traslazione longitudinale massima di una struttura in modo tale da fornire

una misura del comportamento torsionale della stessa. Tale parametro è definito come:

$$\alpha = \rho_m \cdot \frac{|u_\theta|_{max}}{|u_y|_{max}} \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Il parametro $\alpha$ "undamped"

Nel caso di oscillazioni libere di strutture non smorzate il parametro  $\alpha$  è esprimibile in forma chiusa, sostituendo nella (4.1) le seguenti equazioni derivanti dalle (3.12):

$$\begin{aligned} |u_y|_{max} &= a\{|A_1| + |A_3|\} \\ |u_\theta|_{max} &= 2 \frac{a}{\rho} |A_4| \end{aligned} \quad (4.2)$$

ed utilizzando anche le formule (3.11), (2.23) e (2.25), si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho \cdot \frac{2 \frac{a}{\rho} |A_4|}{a\{|A_1| + |A_3|\}} = 2 \cdot |A_4| = 2 \cdot \left| \frac{1}{e\sqrt{12}} \frac{(\Omega_1 - 1)(\Omega_3 - 1)}{\Omega_3 - \Omega_1} \right| = \\ &= \frac{2}{e\sqrt{12}} \cdot \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\left[1 + \gamma^2 - \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2}\right] - 1\right) \left(\frac{1}{2}\left[1 + \gamma^2 + \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2}\right] - 1\right)}{\frac{1}{2}\left[1 + \gamma^2 + \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2}\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \gamma^2 - \sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2}\right]} \right| = \\ &= \frac{1}{2 \cdot e\sqrt{12}} \cdot \frac{48e^2}{\sqrt{(\gamma^2 - 1)^2 + 48e^2}} \end{aligned}$$

La forma chiusa del parametro  $\alpha$  nel caso di oscillazioni libere di un sistema non smorzato (undamped) è:

$$\alpha_u = \frac{4\sqrt{3} \cdot e}{\sqrt{(\Omega_\theta^2 + 12e^2 - 1)^2 + 48e^2}} \quad (4.3)$$

Tale coefficiente è funzione solo di parametri fisici del sistema ( $\Omega_\theta, e$ ) diventando un indice del comportamento torsionale delle strutture: edifici caratterizzati da un parametro  $\alpha$  elevato hanno una propensione elevata alle rotazioni e viceversa.

Dall'osservazione della formula e da studi grafici si può dire che  $\alpha$ :

- diminuisce, in modo dolce, al crescere dell'eccentricità longitudinale;
- cresce al tendere all'unità del parametro  $\gamma = \Omega_\theta^2 + 12e^2$  che corrisponde al rapporto tra le pulsazioni dei modi di vibrare rotazionali e longitudinali disaccoppiati  $\left(\frac{\omega_\theta}{\omega_L}\right)$ .

Il valore di  $\alpha_u$  è compreso tra 0 e 1, per cui la massima rotazione che può subire una qualsiasi struttura asimmetrica non smorzata in oscillazioni libere è:

$$|\mathbf{u}_\theta|_{max} = \frac{|\mathbf{u}_{y,CM}|_{max}}{\rho_m} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Il parametro $\alpha$ "damped"

Il parametro  $\alpha$  richiede che si determini il valore del massimo spostamento longitudinale e della massima rotazione: ciò avviene uguagliando a zero la derivata rispettivamente della seconda e della terza equazione delle (3.14), che rappresentano la risposta della struttura nel caso di oscillazioni libere smorzate.

Tuttavia non è possibile risolvere queste nuove equazioni in forma chiusa, ma è necessario ricorrere a simulazioni numeriche per determinare, fissato il parametro  $\xi$  del modello, i valori di spostamento longitudinale massimo e di rotazione massima in funzione di  $\Omega_\theta$  ed  $e$  in modo da ricavare il valore di  $\alpha$ .

Il parametro  $\alpha$  "damped" dipende infatti da:

$$\alpha_d = f(\xi, \Omega_\theta, e) = f(\xi, \gamma, e) \quad (4.5)$$

Nel caso di oscillazioni libere smorzate il parametro  $\alpha_d$  risulta perciò tabulato e presentato in tabelle simili a quella di seguito inserita:

$\xi=0,05$												
	e=0,0288	e=0,0577	e=0,0866	e=0,1154	e=0,1443	e=0,1732	e=0,2020	e=0,2309	e=0,2598	e=0,2886	e=0,3175	e=0,3464
$\Omega_0=0,1$	0,1848	0,3587	0,5145	0,6456	0,7491	0,8278	0,8825	0,9163	0,9365	0,9393	0,9391	0,9246
$\Omega_0=0,2$	0,1766	0,3442	0,4943	0,6201	0,7248	0,8006	0,8591	0,8920	0,9165	0,9207	0,9232	0,9087
$\Omega_0=0,3$	0,1653	0,3220	0,4643	0,5874	0,6860	0,7653	0,8215	0,8610	0,8840	0,8953	0,8972	0,8892
$\Omega_0=0,4$	0,1713	0,3167	0,4303	0,5449	0,6432	0,7192	0,7769	0,8192	0,8424	0,8607	0,8619	0,8625
$\Omega_0=0,5$	0,2115	0,3951	0,5327	0,6108	0,6324	0,6700	0,7289	0,7677	0,8012	0,8179	0,8253	0,8292
$\Omega_0=0,6$	0,2295	0,4344	0,5932	0,6939	0,7344	0,7266	0,6784	0,7220	0,7530	0,7710	0,7868	0,7899
$\Omega_0=0,7$	0,2556	0,4473	0,6082	0,7255	0,7817	0,7911	0,7578	0,6940	0,7020	0,7288	0,7432	0,7458
$\Omega_0=0,8$	0,2867	0,5083	0,6314	0,7178	0,7868	0,8098	0,7916	0,7396	0,6660	0,6825	0,6951	0,7100
$\Omega_0=0,9$	0,3199	0,5321	0,6567	0,6870	0,7616	0,7951	0,7903	0,7494	0,6943	0,6333	0,6567	0,6711
$\Omega_0=1$	0,3079	0,5215	0,6286	0,6787	0,7172	0,7585	0,7637	0,7399	0,6955	0,6311	0,6166	0,6297
$\Omega_0=1,1$	0,2683	0,4613	0,5685	0,6275	0,6621	0,7088	0,7202	0,7112	0,6743	0,6263	0,5746	0,5870
$\Omega_0=1,2$	0,2159	0,3745	0,4969	0,5516	0,6024	0,6523	0,6698	0,6691	0,6435	0,6064	0,5533	0,5553
$\Omega_0=1,3$	0,1677	0,3125	0,4163	0,4718	0,5414	0,5929	0,6175	0,6177	0,6066	0,5718	0,5368	0,5224
$\Omega_0=1,4$	0,1359	0,2553	0,3433	0,4204	0,4859	0,5327	0,5624	0,5693	0,5605	0,5412	0,5047	0,4886
$\Omega_0=1,5$	0,1086	0,2038	0,2946	0,3727	0,4346	0,4778	0,5057	0,5202	0,5157	0,5004	0,4779	0,4542
$\Omega_0=1,6$	0,0913	0,1782	0,2574	0,3278	0,3856	0,4286	0,4551	0,4676	0,4725	0,4618	0,4411	0,4272
$\Omega_0=1,7$	0,0803	0,1572	0,2277	0,2887	0,3383	0,3802	0,4091	0,4240	0,4245	0,4230	0,4101	0,4035
$\Omega_0=1,8$	0,0700	0,1376	0,2002	0,2556	0,3019	0,3372	0,3614	0,3806	0,3882	0,3842	0,3734	0,3796
$\Omega_0=1,9$	0,0610	0,1195	0,1738	0,2233	0,2660	0,3005	0,3254	0,3402	0,3459	0,3498	0,3442	0,3555
$\Omega_0=2$	0,0538	0,1057	0,1542	0,1975	0,2343	0,2632	0,2876	0,3054	0,3148	0,3155	0,3156	0,3315

Figura 4.1 Esempio di tabulazione del parametro Alpha “damped”.

#### 4.1.3 Il parametro $\alpha$ “damped, earthquake input”

Nel caso di strutture smorzate sottoposte ad input sismico il parametro  $\alpha$  non è esprimibile in forma chiusa, ma è ricavabile solo mediante simulazioni numeriche. Se ne ricorda la definizione:

$$\alpha_{d,eq} = \rho_m \cdot \frac{|u_g|_{max}}{|u_{y,CM}|_{max}} \quad (4.6)$$

La risposta sismica di una struttura è strettamente legata ai suoi modi di vibrare (e quindi ai periodi di vibrazione): il parametro  $\alpha_{d,eq}$  dipende perciò anche dal periodo longitudinale  $T_L$ . Riepilogando, si ha:

$$\alpha_{d,eq} = f(\xi, \Omega_\theta, e, T_L) = f(\xi, \gamma, e, T_L) \quad (4.7)$$



#### 4.1.3 Il parametro $\alpha$ in campo non lineare

Nel paragrafo 4.1.2 si è visto che, nel caso di oscillazioni libere smorzate, il parametro  $\alpha$  in campo lineare dipende esclusivamente dai tre parametri  $\gamma$ ,  $e$ ,  $\xi$ .

In campo non lineare invece si rendono necessari altri due parametri: il fattore di forma  $\Phi$  ed il periodo longitudinale  $T_L$ .

Questo perché, mentre nell'analisi lineare delle equazioni del moto la matrice di rigidezza rimane costante nel tempo, durante l'analisi non lineare le plasticizzazioni che avvengono nella struttura (o negli isolatori) secondo modalità e tempi diversi comportano un cambiamento temporale di tale matrice di rigidezza e quindi la necessità di aggiornarla con una certa frequenza durante il calcolo.

Nell'analisi lineare si è visto che *“il comportamento della struttura caratterizzata da pulsazione  $\omega^* = c \cdot \omega_L$  è identico, in termini di spostamenti massimi, a quello che si rileva per la struttura con pulsazione  $\omega_L$ , ma contratto nel tempo di un fattore pari a  $c$ ;*” [10].

Questo significa che, come già affermato, la risposta in termini di spostamenti della struttura sottoposta a vibrazioni libere in campo lineare sia indipendente dal periodo longitudinale  $T_L$ . Nell'analisi non lineare non vale più il discorso della contrazione dei tempi: il continuo cambiamento della matrice di rigidezza porta ad una sequenza diversa dei rapporti temporali *“che non garantisce affatto il mantenersi degli stessi aggiornamenti della matrice, conducendo a time histories degli spostamenti e delle rotazioni leggermente diverse.”*[10].

Inoltre, dato che la sequenza delle plasticizzazioni degli elementi resistenti di una struttura (o dei suoi isolatori) non può essere la stessa per strutture di forma diversa, la successione di matrici di rigidezza dipende anche dal fattore di forma  $\phi$ .

Quindi, i parametri elastici da cui dipende  $\alpha$  in campo non lineare sono:

$$\alpha_{d,eq} = f(\xi, \Omega_\theta, e, T_L, \phi) = f(\xi, \gamma, e, T_L, \phi) \quad (4.8)$$

## 4.2 Il parametro A

Come affermato nel paragrafo precedente, il parametro  $\alpha_{d,eq}$  non è esprimibile in forma chiusa. Si definisce un ulteriore parametro volto a definire  $\alpha_{d,eq}$  attraverso  $\alpha_u$ :

$$A = \frac{\alpha_{d,eq}}{\alpha_u} \quad (4.9)$$

Tale parametro dipende anch'esso da  $\xi, \Omega_\theta, e, T_L$ .

Studi specifici [8] hanno mostrato come in realtà dipenda molto poco da  $T_L$ .

Il parametro  $A$  viene calibrato attraverso simulazioni numeriche sismiche (cioè attraverso analisi *time-history*).

## 4.3 Parametro $\delta$ ed il *fundamental period shifting*

Per la valutazione della massima risposta longitudinale di una *struttura non eccentrica* si fa riferimento al suo spostamento spettrale, cioè allo spostamento che lo spettro linearizzato degli spostamenti restituisce avendo ricevuto in input il periodo longitudinale della struttura ( $T_L$ ).

Per trovare lo spostamento longitudinale massimo della *struttura eccentrica* senza aggiungere ulteriori semplificazioni a quelle che hanno permesso di ricavare le equazioni del moto (3.19), bisognerebbe eseguire l'integrazione diretta di dette equazioni del moto con il *metodo di Newmark* e la *regola del trapezio*. Per evitare questa procedura computazionalmente dispendiosa si è dimostrato [11] che lo spostamento longitudinale massimo può essere approssimato attraverso una combinazione degli spostamenti spettrali  $\mathbf{S}_d(\mathbf{T})$  di tre oscillatori semplici equivalenti (quindi di uguale massa e rigidità del sistema eccentrico), valutati in prossimità di ciascun periodo di vibrazione

della struttura. Ogni spostamento contribuisce in maniera diversa alla risposta della struttura, per cui tale risposta complessiva deve essere definita mediante una combinazione delle tre risposte che vengono moltiplicate per il rispettivo *modal contribution factor* secondo il criterio SRSS (Square Root Square Sum), come si vedrà in seguito in questo paragrafo.

Dall'osservazione delle equazioni (2.29) si nota che nei modelli eccentrici solamente in direzione trasversale ( $e_x \neq 0$ ) il periodo longitudinale, coincidente con  $T_2$ , non influisce sul comportamento della struttura poiché il modo 2 ha un *modal contribution factor* nullo ( $MCF_2 = 0$ ).

Per le strutture eccentriche *torsiorigide* si è notato che il comportamento della struttura è regolato quasi esclusivamente dal primo modo e che  $T_1$  non differisce più di tanto da  $T_2=T_L$  (vedi **Figura 2.5 a**).

Le strutture eccentriche *torsioflessibili* invece hanno un comportamento regolato contemporaneamente dai modi 1 e 3. Inoltre il periodo fondamentale  $T_1$  si discosta molto dal periodo longitudinale ( $T_L=T_2$ ). Questa differenza diventa tanto maggiore quanto più grande è l'eccentricità della struttura. Inoltre per grandi eccentricità il modo 1 diventa preponderante (vedi **Figura 2.5 b**).

Questo comporta il fatto che, dato che lo spettro di risposta degli spostamenti  $S_d(T)$  è una funzione lineare del periodo (T), entrando con periodi rappresentativi della struttura molto diversi dal periodo longitudinale, si ottengono risposte in termini di spostamento molto differenti.

Questa caratteristica, che si verifica nel passaggio da sistema non eccentrico a sistema eccentrico, si chiama *fundamental period shifting* ed è misurata dal parametro  $\delta$ , definito come:

$$\delta = \frac{|u_{y,CM}|_{max}}{|u_{y,CM}|_{max,N-E}} \quad (4.10)$$

con

$|u_{y,CM}|_{max}$  = spostamento longitudinale massimo del Centro di Massa del sistema eccentrico;

$|u_{y,CM}|_{max,N-E} = |u_{y,N-E}|_{max} = S_d(T_L) =$  spostamento longitudinale massimo del Centro di Massa del sistema non eccentrico equivalente.

#### 4.3.1 Forma chiusa del parametro $\delta$

La definizione del parametro  $\delta$  in forma chiusa si basa su due ipotesi:

- Lo spostamento dato dallo spettro di risposta  $S_d(\mathbf{T})$  è una funzione lineare del periodo  $\mathbf{T}$ .

$$S_d(\mathbf{T}) = \varphi \cdot \mathbf{T} \quad (4.11)$$

- Lo spostamento massimo del Centro di Massa del sistema eccentrico è ricavato con il criterio di approssimazione SRSS (Square Root Square Sum):

$$\begin{aligned} |u_{y,CM}|_{max} &\cong |u_{y,CM}|_{max,SRSS} = \\ &= \sqrt{(S_d(T_1) \cdot MCF_1)^2 + (S_d(T_2) \cdot MCF_2)^2 + (S_d(T_3) \cdot MCF_3)^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Come precedentemente affermato, i modelli eccentrici in direzione trasversale hanno il fattore  $MCF_2 = 0$ .

Inoltre per strutture *torsiorigide*  $MCF_1 \gg MCF_3$  per cui si ha:

$$|u_{y,CM}|_{max} \cong S_d(T_1) \quad (4.13)$$

Per strutture *torsioflessibili* invece  $MCF_1$  e  $MCF_3$  sono paragonabili per ordine di grandezza, da cui:

$$|u_{y,CM}|_{max} \cong \sqrt{(S_d(T_1) \cdot MCF_1)^2 + (S_d(T_3) \cdot MCF_3)^2} \quad (4.14)$$

Quindi l'espressione generica in forma chiusa del parametro  $\delta$ , ottenuta sostituendo nella (4.9) le (4.10), (4.13) e (2.30) è la seguente:

$$\delta = 12e^2 \sqrt{\frac{1}{\Omega_1[12e^2 + (\Omega_1 - 1)^2]^2} + \frac{1}{\Omega_3[12e^2 + (\Omega_3 - 1)^2]^2}} \quad (4.15)$$

#### 4.3.2 Stima della rotazione massima

In base ai parametri introdotti, la rotazione massima di una struttura eccentrica smorzata sottoposta ad input sismico vale:

$$|\mathbf{u}_\theta|_{max} = \frac{\alpha_{d,eq}}{\rho_m} \cdot |\mathbf{u}_{y,CM}|_{max} = A \cdot \frac{\alpha_u}{\rho_m} \cdot \delta \cdot |\mathbf{u}_{y,N-E}|_{max} \quad (4.16)$$

Si osserva come il parametro  $\delta$  elimini la dipendenza dalle quantità eccentriche del sistema.

#### 4.3.3 Stima dello spostamento longitudinale massimo

Dal punto di vista progettuale, è utile conoscere la domanda di spostamento massima della struttura, che, nei modelli trattati in questa tesi, coincide con lo spostamento massimo longitudinale (lungo y, cioè lungo la direzione del sisma). È logico valutare tale spostamento massimo in corrispondenza dei lati in direzione y della struttura. Si distinguono perciò due spostamenti: spostamento del lato flessibile (*flexible side/corner displacement*), cioè del lato lungo y a maggior distanza dal centro delle rigidezze, e spostamento del lato rigido (*stiff side/corner displacement*), cioè del lato lungo y a minor distanza dal centro delle rigidezze.

Il metodo Alpha è in grado di correlare lo spostamento massimo longitudinale del lato flessibile (e/o rigido) della struttura con lo spostamento longitudinale della struttura non eccentrica equivalente attraverso l'utilizzo dei parametri di eccentricità relativa ( $e$ ) e di rigidezza torsionale ( $\Omega_\theta$ ).

Lo spostamento longitudinale massimo del lato *flessibile* della struttura è dato da due contributi: il contributo traslazionale lungo y della struttura e quello rotazionale.

Sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti, la rotazione attorno al centro delle rigidità non fornisce componenti lungo x.

Lo spostamento longitudinale massimo del lato *flessibile* della struttura è perciò fornito dalla seguente relazione:

$$u_{y,flex,max} = \max \left( \left| u_{y,CM}(t) + u_{\theta}(t) \cdot \frac{L}{2} \right| \right) \quad (4.17)$$

Tale formulazione, dipendente dal tempo, richiede l'esecuzione della cosiddetta *Time History Analysis* della struttura. Per evitare di eseguire dispendiose analisi numeriche il metodo Alpha applica le osservazioni fatte nel paragrafo (3.2).

In base a tali osservazioni si possono evidenziare due valori limite di spostamento longitudinale del lato *flessibile*:

- Spostamento calcolato supponendo una correlazione completa tra le risposte che danno rotazione massima e spostamento massimo del centro di massa (*limite superiore*):

$$|u_{y,flex}|_{max,1} = |u_{y,CM}|_{max} + |u_{\theta}|_{max} \cdot \frac{L}{2} \quad (4.18)$$

- Spostamento calcolato combinando la risposta rotazionale massima con la risposta longitudinale corrispondente (in tempo) del centro di massa (*limite inferiore*):

$$|u_{y,flex}|_{max,2} = u_{y,CM}(t(u_{\theta,max})) + |u_{\theta}|_{max} \cdot \frac{L}{2} \quad (4.19)$$

Lo spostamento dell'angolo flessibile è perciò compreso tra:

$$|u_{y,flex}|_{max,1} \leq |u_{y,flex}|_{max} \leq |u_{y,flex}|_{max,2}$$

Il valore di limite inferiore non è chiaramente utilizzabile per fini progettuali, inoltre il suo contributo traslazionale è ancora dipendente dal tempo; il limite superiore d'altro canto in alcuni casi può portare a sovrastime eccessive dello spostamento longitudinale massimo.

#### 4.4. Parametro **B**: coefficiente di contemporaneità

Il metodo Alpha introduce un coefficiente detto di *contemporaneità* **B**, in grado di correlare spostamento longitudinale massimo del centro di massa e rotazione massima. Il fine è quello di eliminare la dipendenza dal tempo nel calcolo dello spostamento massimo del lato flessibile.

Il parametro **B** è ottenuto da una semplificazione del più completo ma anche complesso parametro  $\zeta$ , utilizzato per combinare spostamento longitudinale massimo del centro di massa e rotazione massima nel seguente modo:

$$|u_{y,flex}|_{max} = \sqrt{a^2 + 2\zeta ab + b^2} \quad (4.20)$$

con

$$a = |u_{y,CM}|_{max} \quad b = |u_{\theta}|_{max} \cdot \frac{L}{2}$$

Tale espressione è nota come *percentage combination rule* ed è utilizzata di solito per la combinazione delle azioni sismiche.

Attraverso lo *sviluppo in serie di McLaurin* applicato al fine di ridurre il termine relativo alla massima rotazione (piuttosto che il termine relativo al massimo spostamento longitudinale del centro di massa, che dà il maggior contributo allo spostamento longitudinale massimo del lato flessibile), si ha:

$$|u_{y,flex}|_{max} = a + \zeta b + o[b]^2 = a + \mathbf{B}b \quad (4.21)$$

Il parametro **B** vale perciò:

$$\mathbf{B} = \frac{|u_{y,flex}|_{max} - |u_{y,CM}|_{max}}{|u_{\theta}|_{max} \cdot \frac{L}{2}} \quad \text{con } \mathbf{B} = f(\xi, e, \Omega_{\theta}, T_L) \quad (4.22)$$

Quindi lo spostamento massimo longitudinale del lato flessibile vale:

$$|u_{y,flex}|_{max} = |u_{y,CM}|_{max} + \mathbf{B} \cdot |u_{\theta}|_{max} \cdot \frac{L}{2} \quad (4.23)$$

Simulazioni numeriche [8] hanno mostrato che il parametro  $B$  ha valori compresi tra -0.3 e 0.9. Valori negativi del parametro  $B$  corrispondono al caso in cui lo spostamento longitudinale massimo del lato flessibile è minore di quello del centro di massa. In questi casi lo spostamento longitudinale maggiore è quello del lato rigido.

#### 4.4.1 Formulazione definitiva dello spostamento longitudinale massimo

Sostituendo le (4.15) e le (4.16) nella (4.23) si ottiene:

$$\begin{aligned} |u_{y,flex}|_{max} &= |u_{y,CM}|_{max} + B \cdot |u_{\theta}|_{max} \cdot \frac{L}{2} = \\ &= \delta \cdot |u_{y,N-E}|_{max} + B \cdot A \cdot \frac{\alpha_u}{\rho_m} \cdot \delta \cdot |u_{y,N-E}|_{max} \cdot \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Introducendo il *fattore di forma*  $\phi = \frac{L}{2\rho_m}$  si possono ricavare le espressioni semplificate proposte dal metodo Alpha per il calcolo degli spostamenti longitudinali massimi del lato flessibile e del lato rigido del modello smorzato eccentrico sottoposto ad input sismico:

$$\begin{aligned} |u_{y,flex}|_{max} &= |u_{y,N-E}|_{max} \cdot [\delta \cdot (1 + A \cdot B \cdot \alpha_u \cdot \phi)] \\ |u_{y,stiff}|_{max} &= |u_{y,N-E}|_{max} \cdot [\delta \cdot (1 - A \cdot B \cdot \alpha_u \cdot \phi)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

#### 4.5 Magnification Factors

Per confrontare gli spostamenti dei lati (*flexible* e *stiff*) del sistema eccentrico rispetto allo spostamento del suo centro di massa e allo spostamento del centro di massa del sistema non eccentrico equivalente, vengono introdotti i *magnification factors*:

$$M_{CM,s} = \frac{u_{y,stiff,max}}{u_{y,CM,max}}$$



$$\begin{aligned}
M_{CM,f} &= \frac{u_{y,flex,max}}{u_{y,CM,max}} \\
M_{N-E,s} &= \frac{u_{y,stiff,max}}{u_{y,N-E,max}} \\
M_{N-E,f} &= \frac{u_{y,flex,max}}{u_{y,N-E,max}}
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

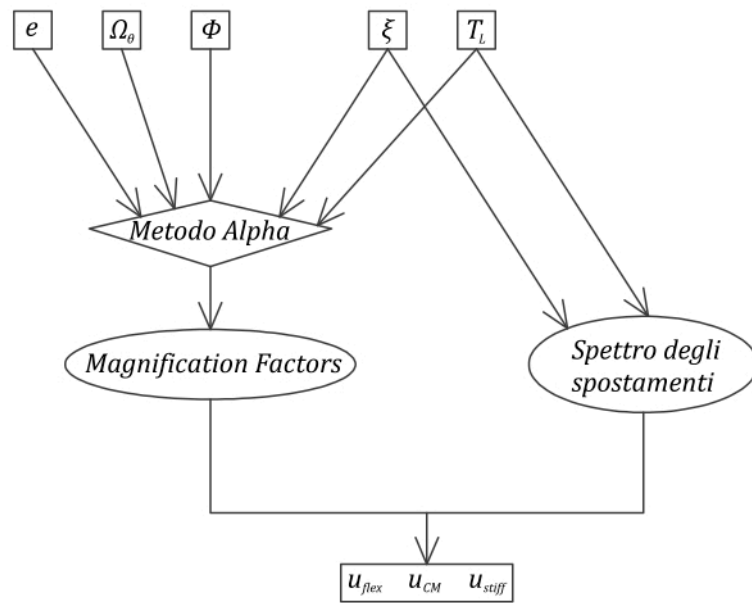
Si fa presente che con “massimo” si intende il modulo massimo (il valore assoluto non è stato inserito per alleggerire la notazione).

Si ricorda inoltre che il sistema non eccentrico non presenta movimenti torsionali: in questo caso il centro delle rigidezze coincide con il centro di massa per cui non c'è un lato *stiff* e un lato *flex*, ma tutti gli spostamenti longitudinali sono uguali.

Sostituendo nelle (4.23) le (4.22) e la (4.9) si ottiene:

$$\begin{aligned}
M_{CM,s} &= 1 - A \cdot B \cdot \alpha_u \cdot \phi \\
M_{CM,f} &= 1 + A \cdot B \cdot \alpha_u \cdot \phi \\
M_{N-E,s} &= \delta \cdot (1 - A \cdot B \cdot \alpha_u \cdot \phi) \\
M_{N-E,f} &= \delta \cdot (1 + A \cdot B \cdot \alpha_u \cdot \phi)
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

I *magnification factors* costituiscono il vero strumento progettuale dell'ingegnere, poiché permettono di ragionare in termini di rapporto tra spostamenti, dando un'indicazione di quanto gli spostamenti massimi longitudinali dei lati di una struttura siano amplificati o meno rispetto allo spostamento longitudinale del suo centro di massa o della struttura non eccentrica equivalente, direttamente ricavabile, secondo la normativa, dallo spettro elastico degli spostamenti entrando con il periodo longitudinale della struttura.



**Figura 4.2** Mappa concettuale del Metodo Alpha.

## 5. GLI SPETTRI DEGLI SPOSTAMENTI PER STRUTTURE ECCENTRICHE

Con il software Matlab si è modellata una struttura tipo a pianta quadrata di lato 10 m (diametro equivalente  $D_e = 14,14$  m) in cui, fissata la massa, si è fatta variare la rigidezza traslazione totale in una direzione per ottenere 7 diversi valori di periodo longitudinale ( $T_L$ ).

Sono stati considerati 20 diversi valori di  $\Omega_\theta$ , cioè strutture con diverso grado di rigidezza torsionale, e 13 diversi valori di eccentricità relativa nella sola direzione trasversale.

I modelli sono inoltre stati sottoposti alla componente orizzontale di 50 sismi applicati in direzione longitudinale e ne è stata valutata la risposta, attraverso l'integrazione delle equazioni del moto con il metodo di Newmark e l'iterazione di Newton-Raphson, in termini di spostamenti longitudinali del lato flessibile ( $u_{flex}$ ), del lato rigido ( $u_{stiff}$ ) e del centro di massa ( $u_{CM}$ ), coincidente con il centro geometrico.

Per le analisi in campo lineare sono stati adottati 4 diversi valori di indice di smorzamento ( $\xi$ ), in campo non lineare invece si sono utilizzati, fissando l'indice di smorzamento al 5%, 4 diversi valori del fattore di riduzione delle forze ( $R$ ).

Riepilogando, le simulazioni sono state ottenute dalla combinazione dei seguenti parametri:

$$T_L = \{0,1 \ 0,3 \ 0,5 \ 1 \ 1,5 \ 2 \ 3\}$$

$$e = E/\rho_m = \{0 \ 0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,5 \ 0,6 \\ 0,7 \ 0,8 \ 0,9 \ 1 \ 1,1 \ 1,2\}$$

$$\Omega_\theta = \{0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,5 \ 0,6 \ 0,7 \ 0,8 \ 0,9 \ 1 \\ 1,1 \ 1,2 \ 1,3 \ 1,4 \ 1,5 \ 1,6 \ 1,7 \ 1,8 \ 1,9 \ 2\}$$

$$\xi = \{0,05 \ 0,1 \ 0,2 \ 0,3\}$$

$$R = \{2 \ 3 \ 4 \ 5\}$$

Per ognuna delle 7280 possibili combinazioni (sia per il caso lineare sia per quello non lineare) è stata valutata la risposta a ciascun sisma, ed infine è stata ricavata la media delle 50 risposte.

In questa trattazione si è scelto di graficare i risultati solo di certe strutture, in particolare è stato ridotto il numero di alcuni parametri, considerando solo i seguenti:

$$T_L = \{0, 1, 0, 3, 0, 5, 1, 1, 5, 2, 3\}$$

$$e = E/\rho_m = \{0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 1, 1, 2\}$$

$$\Omega_g = \{0, 2, 1, 1, 5, 2\}$$

$$\xi = \{0, 05, 0, 1, 0, 3\}$$

$$R = \{2, 3, 4, 5\}$$

Si fa presente che, per una miglior comprensione dei dati, i grafici presentano l'eccentricità relativa adimensionalizzata non più rispetto al raggio di inerzia delle masse ( $\rho_m$ ) ma rispetto al diametro equivalente ( $D_e$ ). La tabella seguente permette un pratico confronto tra i valori delle due diverse eccentricità relative e l'eccentricità percentuale, definita come il rapporto percentuale tra l'eccentricità e la metà della dimensione del lato della struttura. Una struttura con eccentricità pari allo 0% presenta il centro delle rigidezze coincidente con il centro delle masse, una struttura con eccentricità pari al 50% invece ha il centro delle rigidezze sul lato.

$e$ (%)	$e = E/\rho_m$	$e = E/D_e$
0%	0	0
8%	0,2	0,0577
16%	0,4	0,1155
24%	0,6	0,1732
33%	0,8	0,2309
41%	1	0,2887
49%	1.2	0,3464
	<i>in input</i>	<i>nei grafici</i>

**Tabella 5.1** Confronto tra le diverse adimensionalizzazioni delle eccentricità studiate.

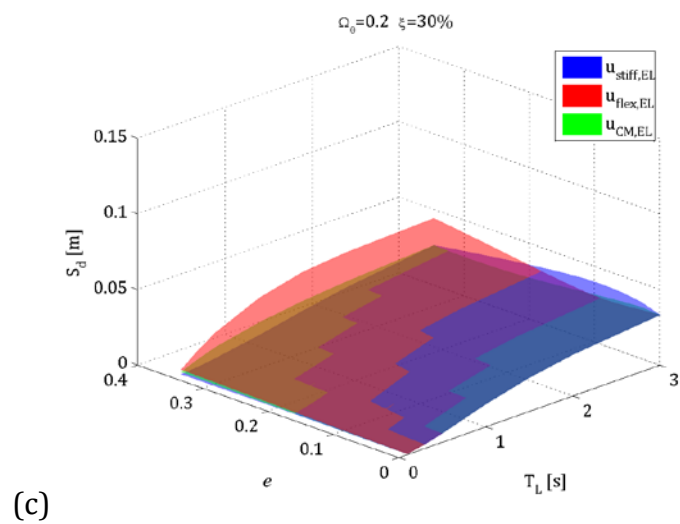
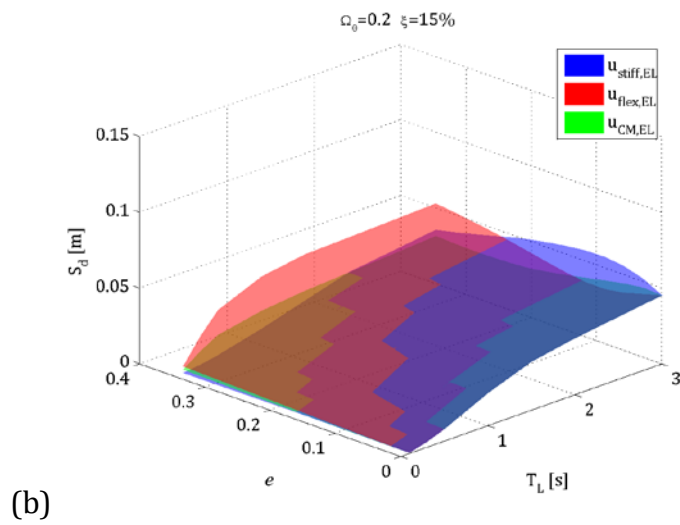
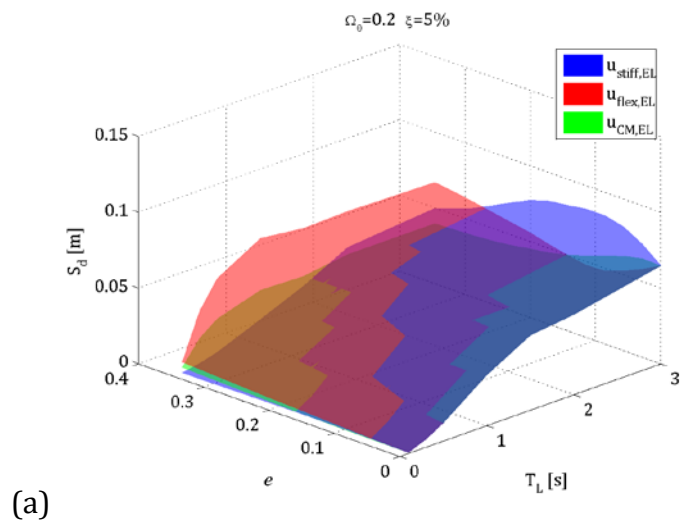
## 5.1 Caso Lineare

### 5.1.1 Grafici tridimensionali degli spostamenti

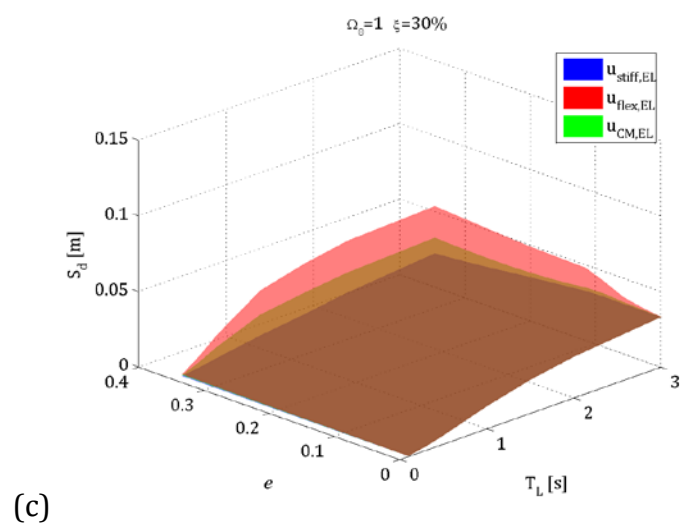
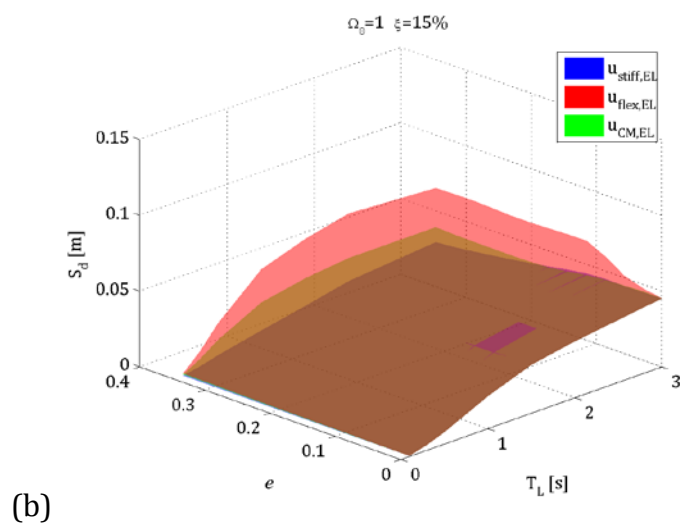
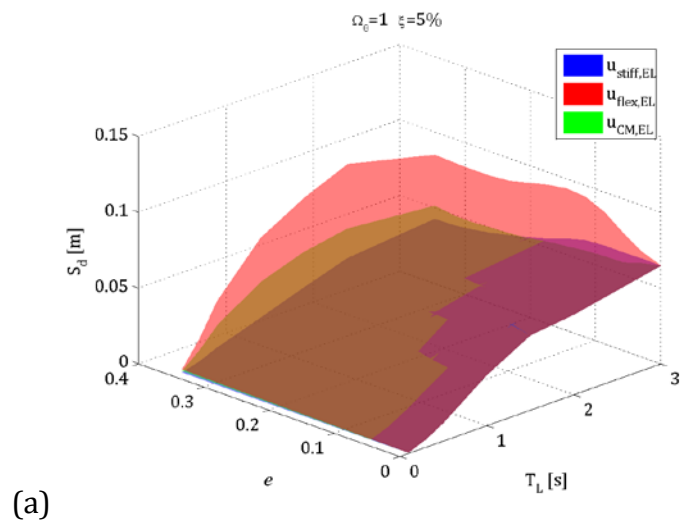
Un primo approccio alla valutazione della risposta delle strutture è rappresentata dall'osservazione dei grafici tridimensionali, in cui, fissato l'indice di smorzamento ( $\xi$ ) ed il parametro ( $\Omega_\theta$ ) indicatore della rigidezza torsionale della struttura, lo spostamento (asse z) è graficato in funzione del periodo longitudinale ( $T_L$ ) della struttura e della sua eccentricità relativa ( $e = E/D_e$ ).

Ogni grafico presenta 3 superfici:

- la *superficie blu* rappresenta l'andamento dello spostamento del lato rigido della struttura ( $u_{\text{stiff,EL}}$ );
- la *superficie rossa* rappresenta l'andamento dello spostamento del lato flessibile della struttura ( $u_{\text{flex,EL}}$ ).
- la *superficie verde* rappresenta l'andamento dello spostamento del centro di massa della struttura ( $u_{\text{CM,EL}}$ ).

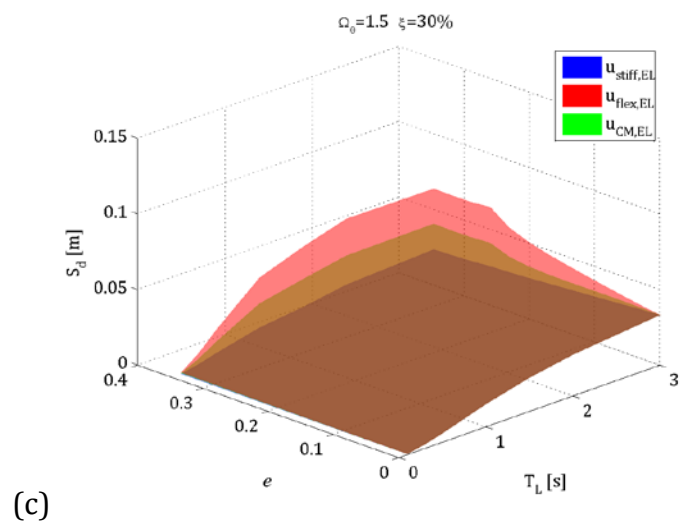
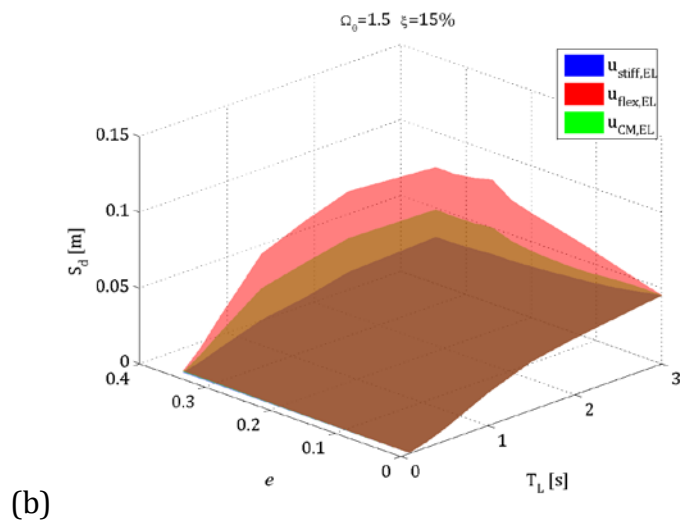
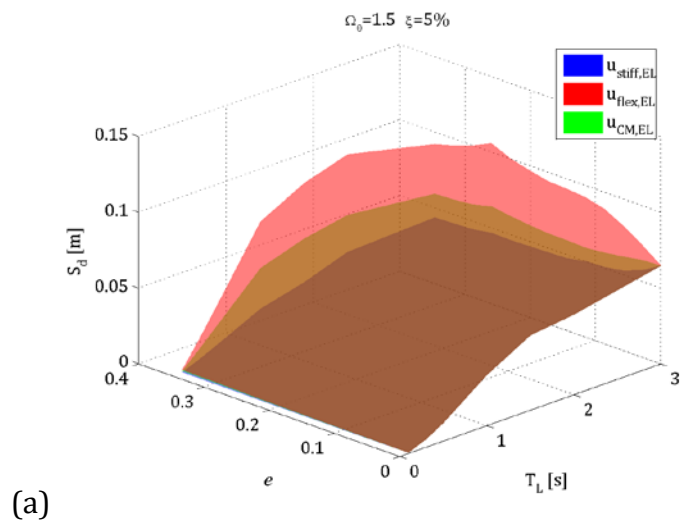


**Figura 5.1** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e: (a)  $\xi=5\%$ , (b)  $\xi=15\%$ , (c)  $\xi=30\%$ .

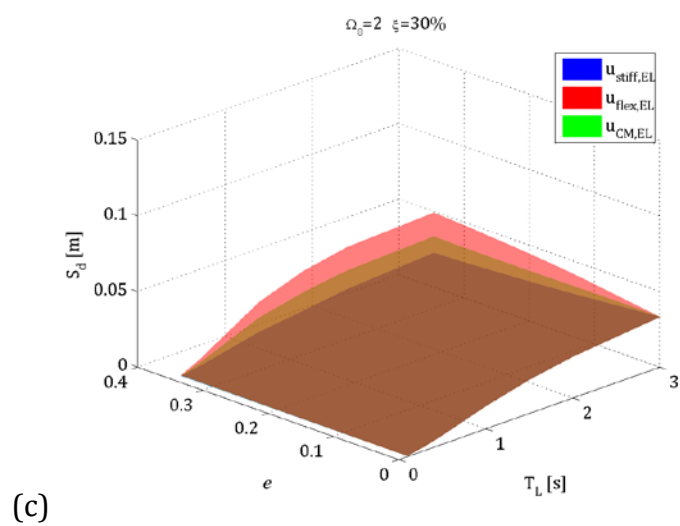
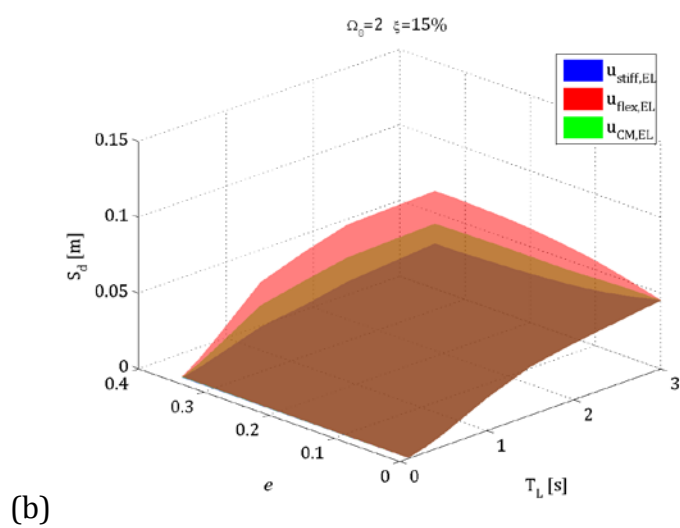
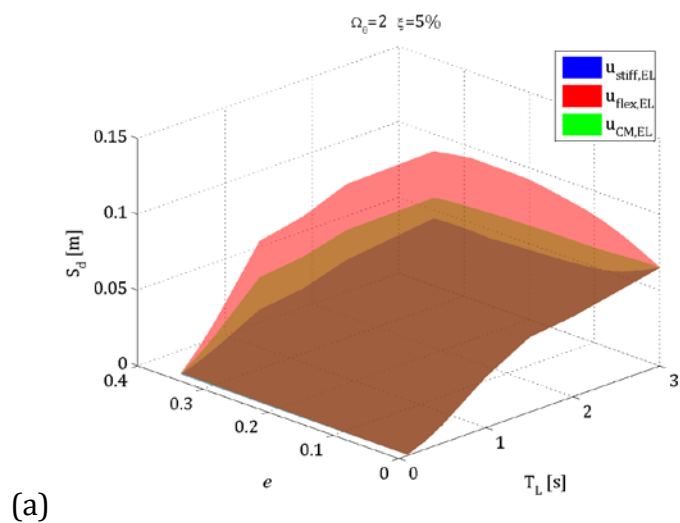


**Figura 5.2** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_\theta=1$  e: (a)  $\xi=5\%$ , (b)  $\xi=15\%$ , (c)  $\xi=30\%$ .





**Figura 5.3** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_0=1,5$ : (a)  $\xi=5\%$ , (b)  $\xi=15\%$ , (c)  $\xi=30\%$ .



**Figura 5.4** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_\theta=2$  e: (a)  $\xi=5\%$ , (b)  $\xi=15\%$ , (c)  $\xi=30\%$ .

Si può notare che, come è logico aspettarsi, in quasi tutti i casi lo spostamento longitudinale del centro di massa è inferiore allo spostamento longitudinale del lato flessibile della struttura, cioè del lato più distante dal centro delle rigidità, e maggiore dello spostamento longitudinale del lato rigido.

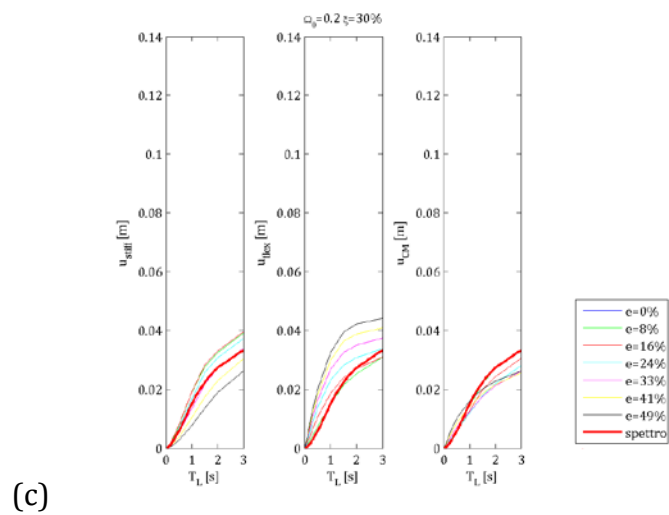
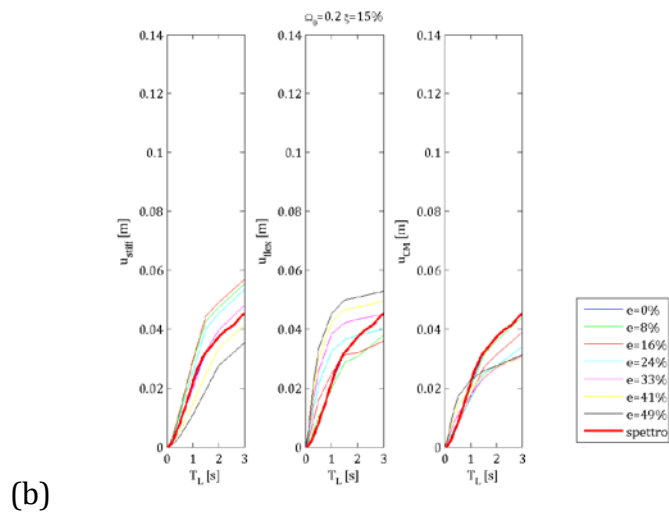
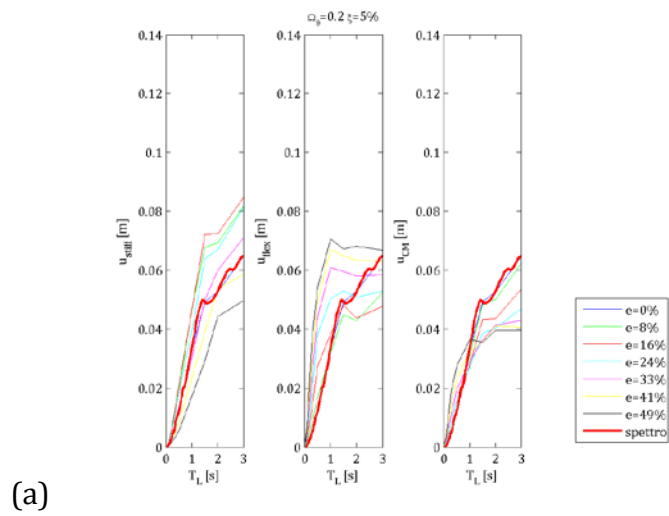
Tuttavia nelle strutture molto torsioflessibili, cioè nei modelli con  $\Omega_\theta = 0,2$ , per valori di eccentricità relativa che vanno da 0 a circa 0,2 soprattutto per periodi maggiori di 1s lo spostamento longitudinale prevalente è quello del lato rigido, maggiore non solo dello spostamento del centro di massa ma anche di quello del lato flessibile. Questa tendenza va via via scomparendo all'aumentare dell'indice di smorzamento. In strutture con  $\Omega_\theta = 1$  ed indice di smorzamento pari al 5% rimane solo una piccola area, corrispondente ad eccentricità relative inferiori a 0,15, in cui lo spostamento del lato rigido è maggiore dello spostamento del centro di massa, ma è stato comunque superato dallo spostamento del lato flessibile.

### *5.1.2 Grafici bidimensionali degli spostamenti*

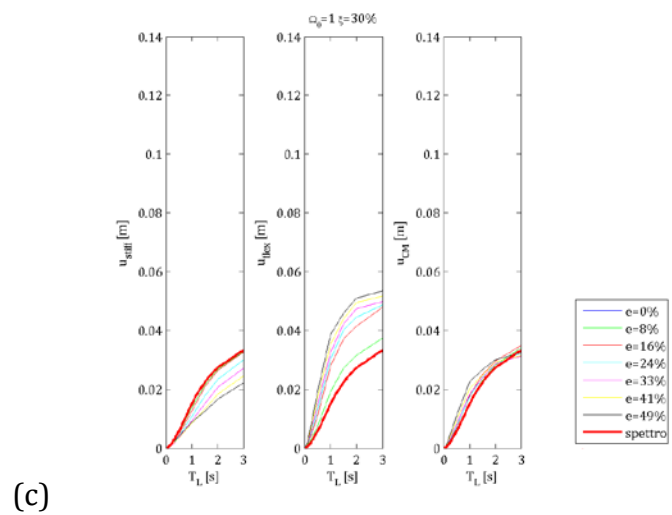
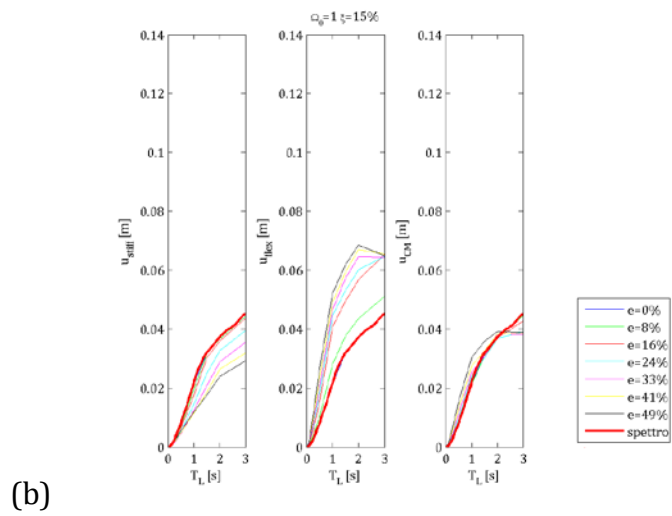
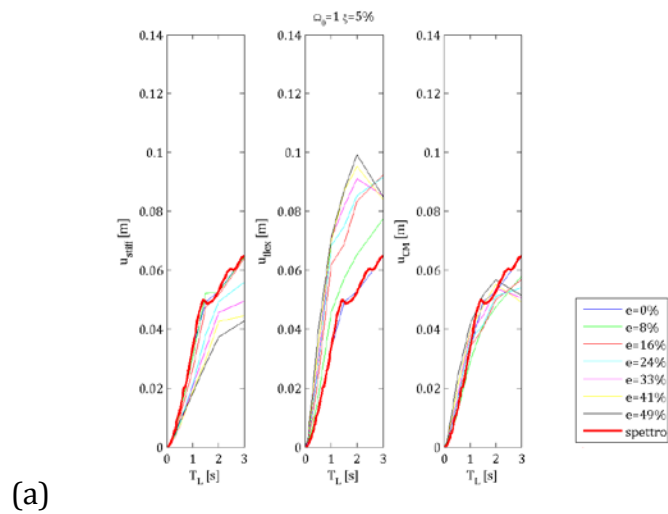
Per un'analisi più precisa e più chiara dei risultati si è sezionato ogni grafico tridimensionale con piani verticali corrispondenti a precisi valori di eccentricità relativa (indicati nella Tabella 5.1) ottenendo dei grafici bidimensionali *spostamento / periodo longitudinali*.

Ad ogni linea del grafico è stato dato un diverso colore cui è stata associata una legenda per distinguere i diversi valori di eccentricità. Si fa notare come la linea blu corrispondente alla struttura equivalente non eccentrica e la linea rossa spessa, proveniente dallo spettro degli spostamenti, siano in realtà la stessa linea. La loro non perfetta sovrapposizione è dovuta al fatto che per la costruzione della linea rossa spessa il vettore dei periodi longitudinali è stato discretizzato con un passo molto più piccolo.

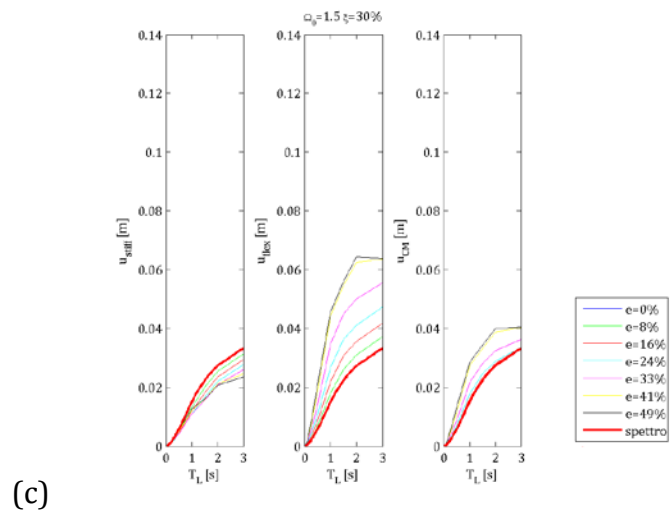
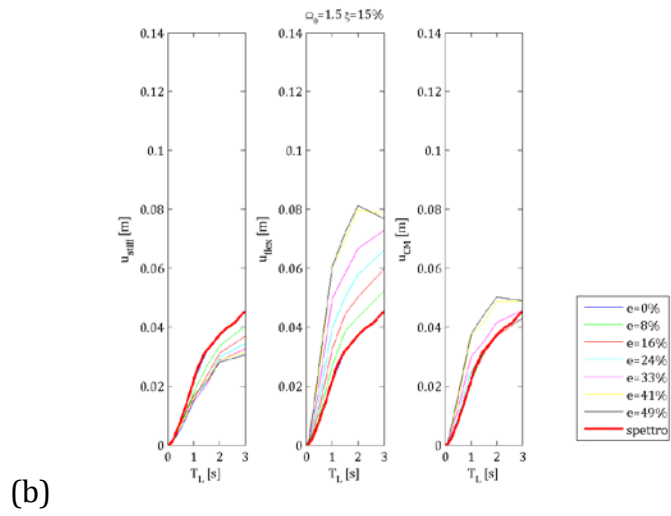
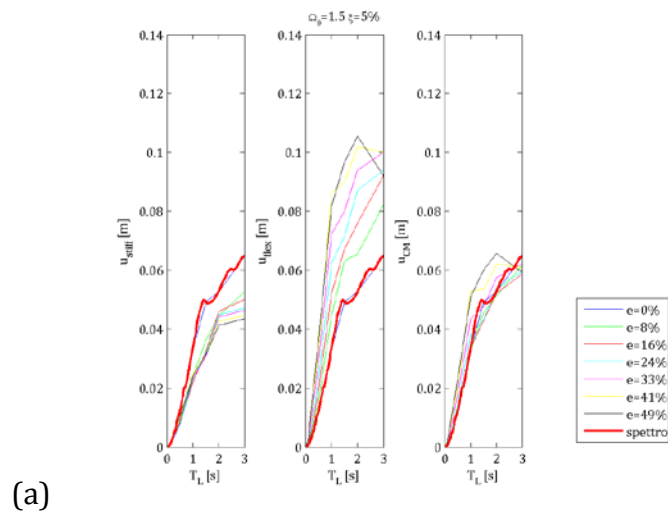
Per una comparazione degli spostamenti longitudinali di lato rigido, centro di massa e lato flessibile si è scelto di affiancare i grafici corrispondenti, che vengono presentati nelle pagine seguenti.



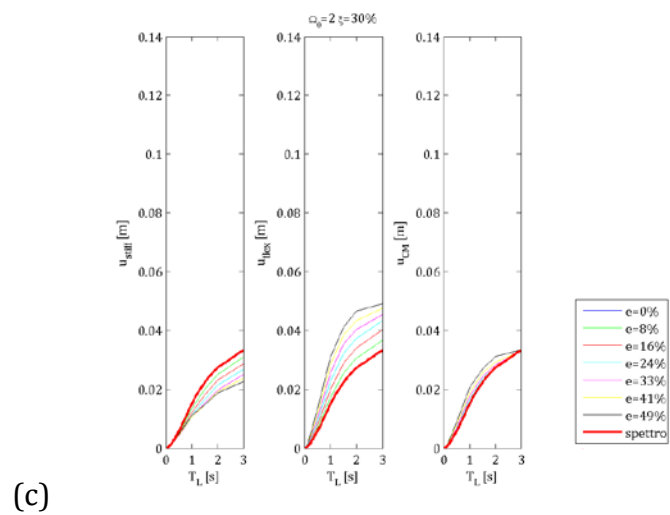
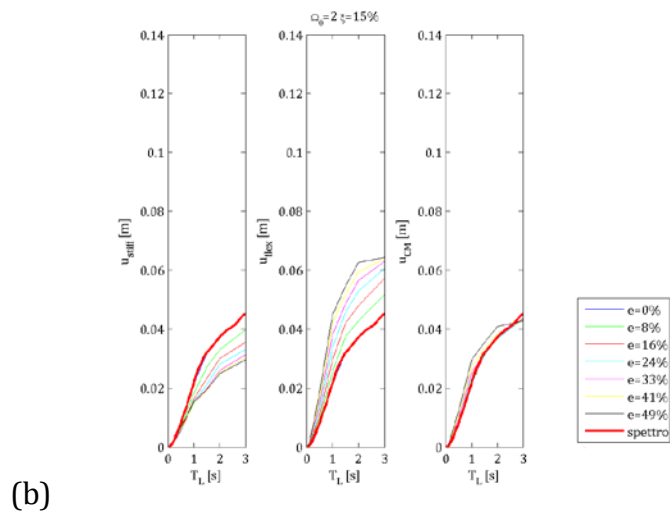
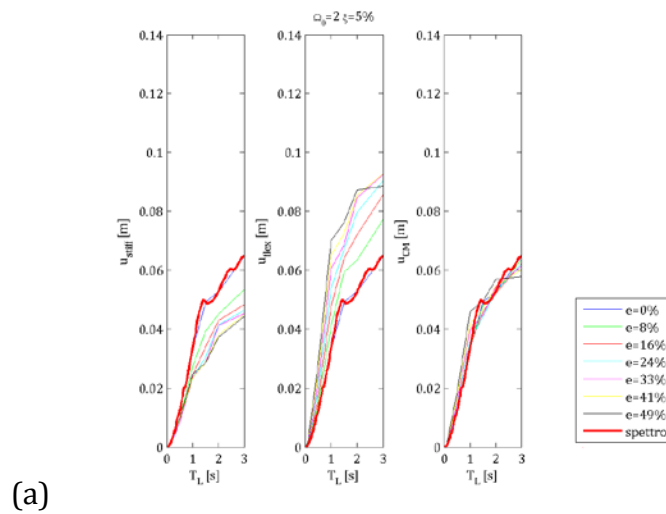
**Figura 5.5** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e: (a)  $\xi=5\%$ , (b)  $\xi=15\%$ , (c)  $\xi=30\%$ .



**Figura 5.6** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_0=1$  e: (a)  $\xi=5\%$ , (b)  $\xi=15\%$ , (c)  $\xi=30\%$ .



**Figura 5.7** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_\theta = 1,5$  e: (a)  $\xi = 5\%$ , (b)  $\xi = 15\%$ , (c)  $\xi = 30\%$ .

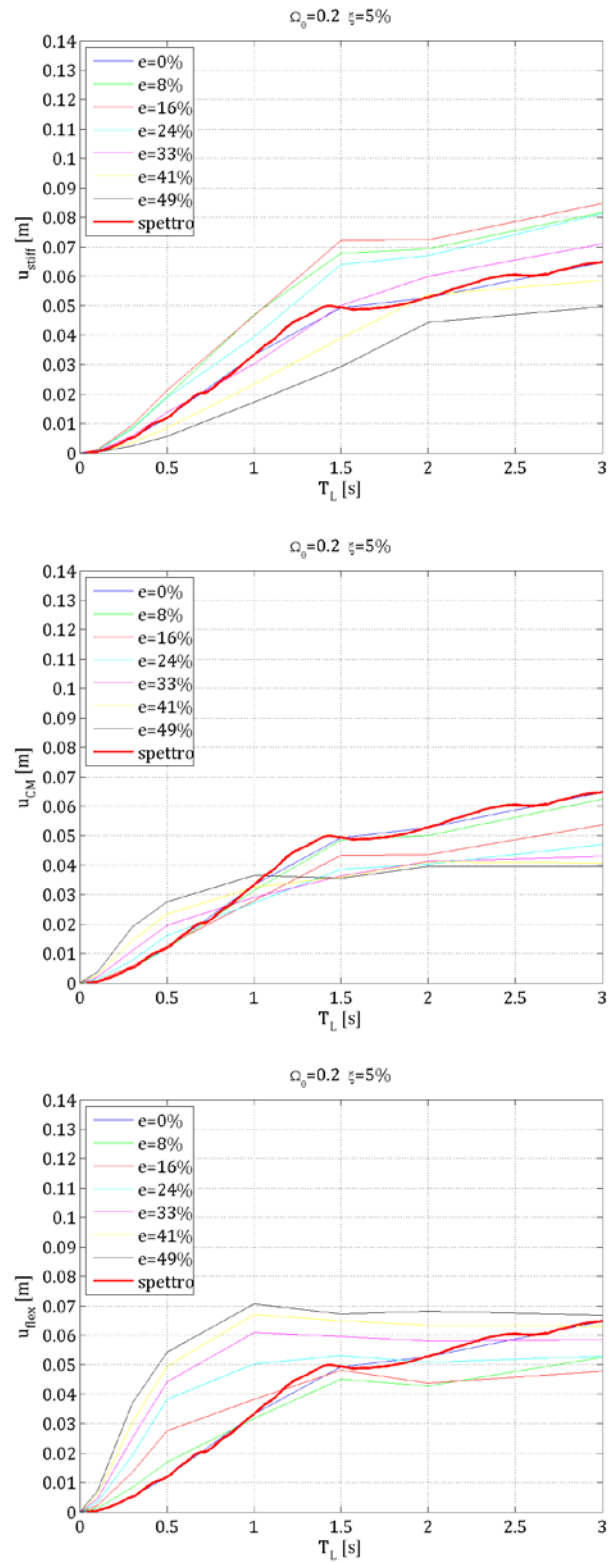


**Figura 5.8** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture elastiche con  $\Omega_0=2$  e: (a)  $\xi=5\%$ , (b)  $\xi=15\%$ , (c)  $\xi=30\%$ .

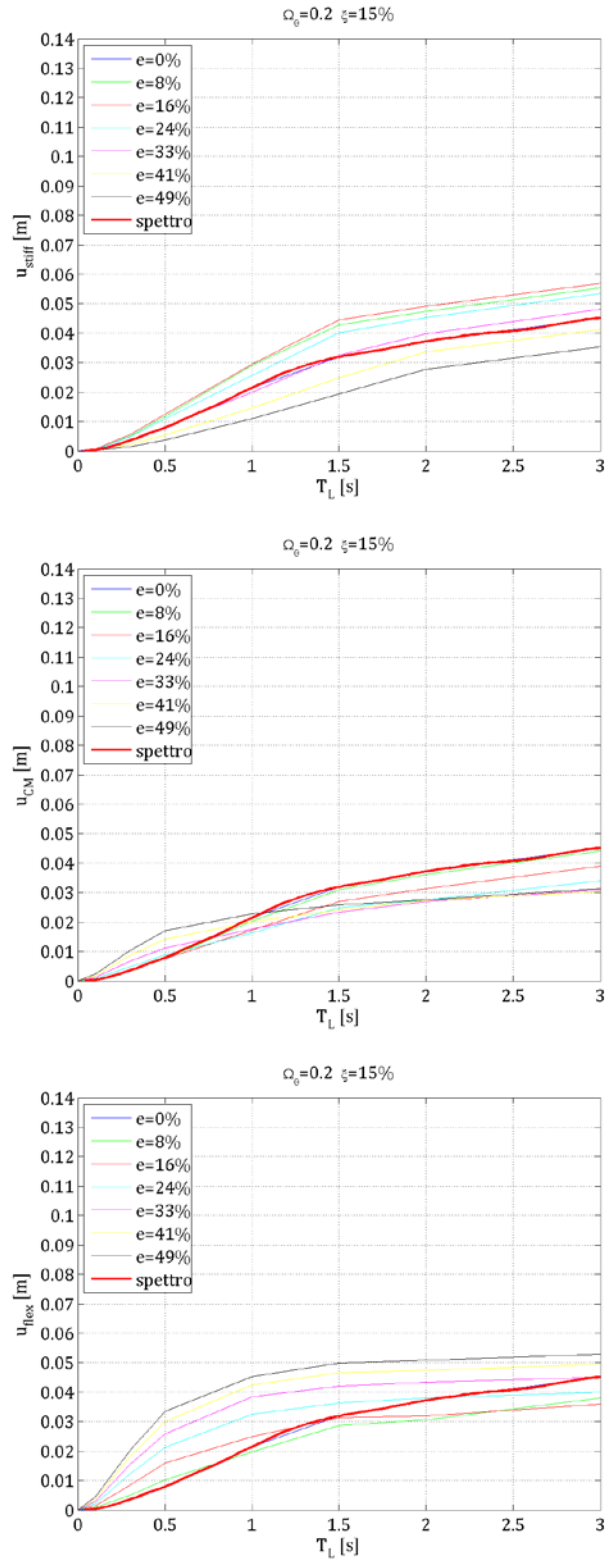
Gli stessi grafici sono presentati ora non più affiancati ma uno sotto l'altro, per avere una più facile caratterizzazione quantitativa dei risultati.

Come precedentemente affermato, si fa notare nuovamente che la linea blu corrispondente alla struttura equivalente non eccentrica e la linea rossa spessa, proveniente dallo spettro degli spostamenti, sono in realtà la stessa linea. La loro non perfetta sovrapposizione è dovuta al fatto che per la costruzione della linea rossa spessa il vettore dei periodi longitudinali è stato discretizzato con un passo molto più piccolo.

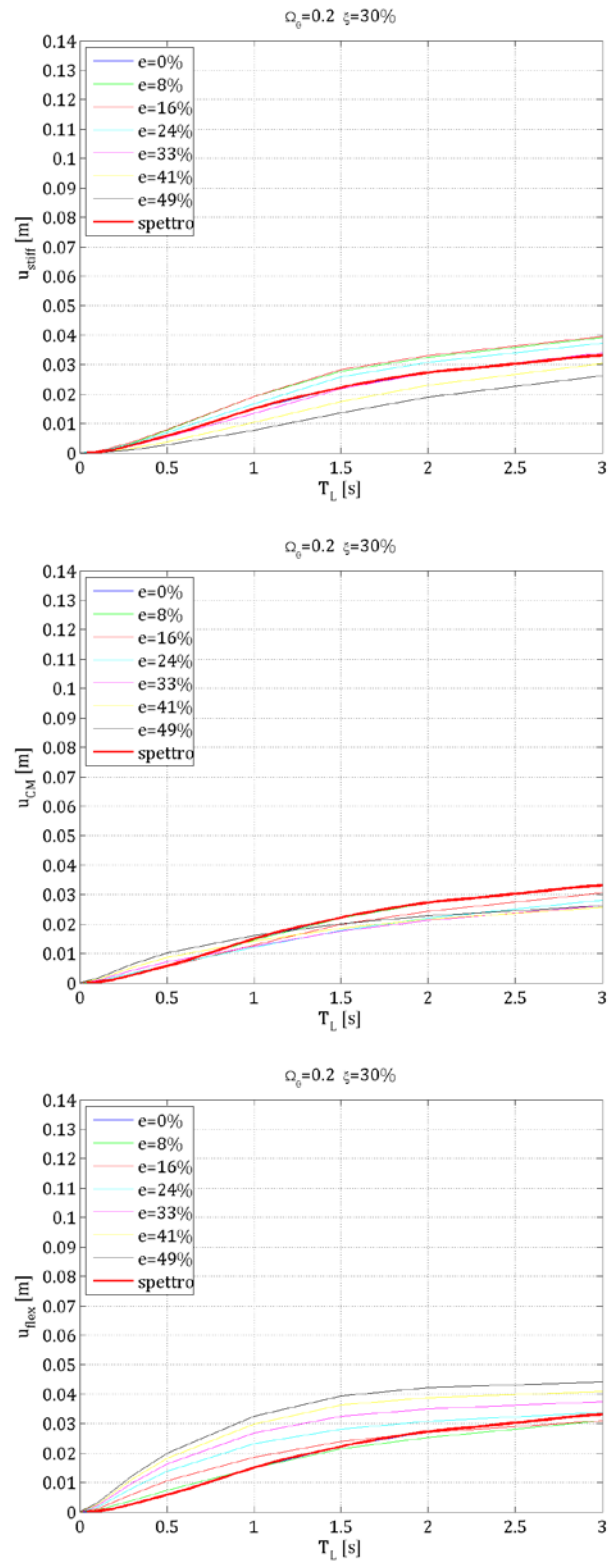




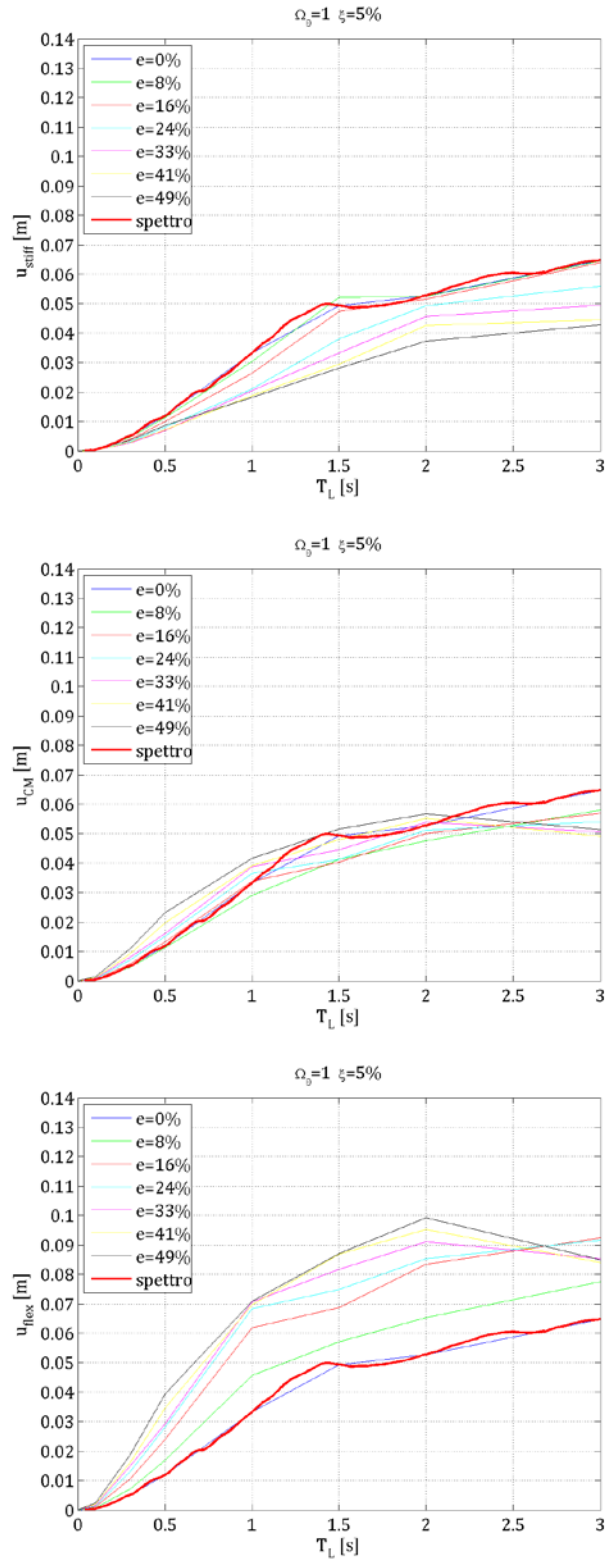
**Figura 5.9** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



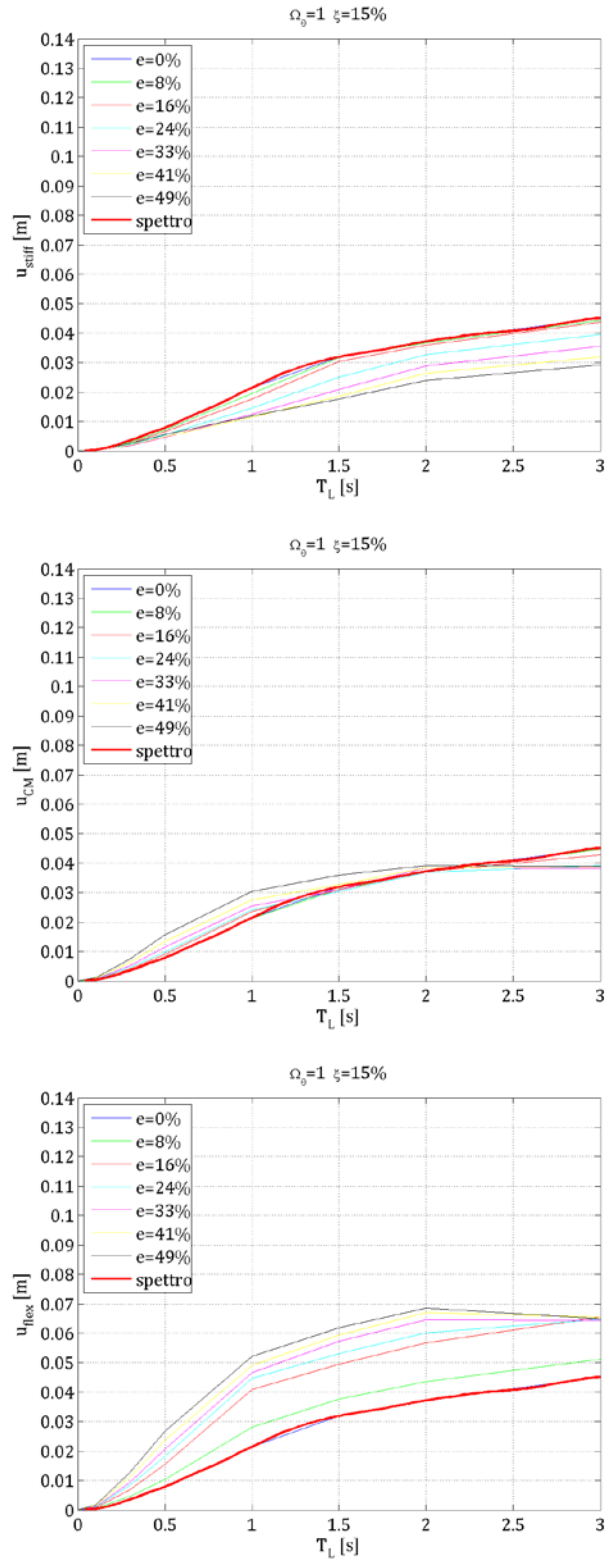
**Figura 5.10** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



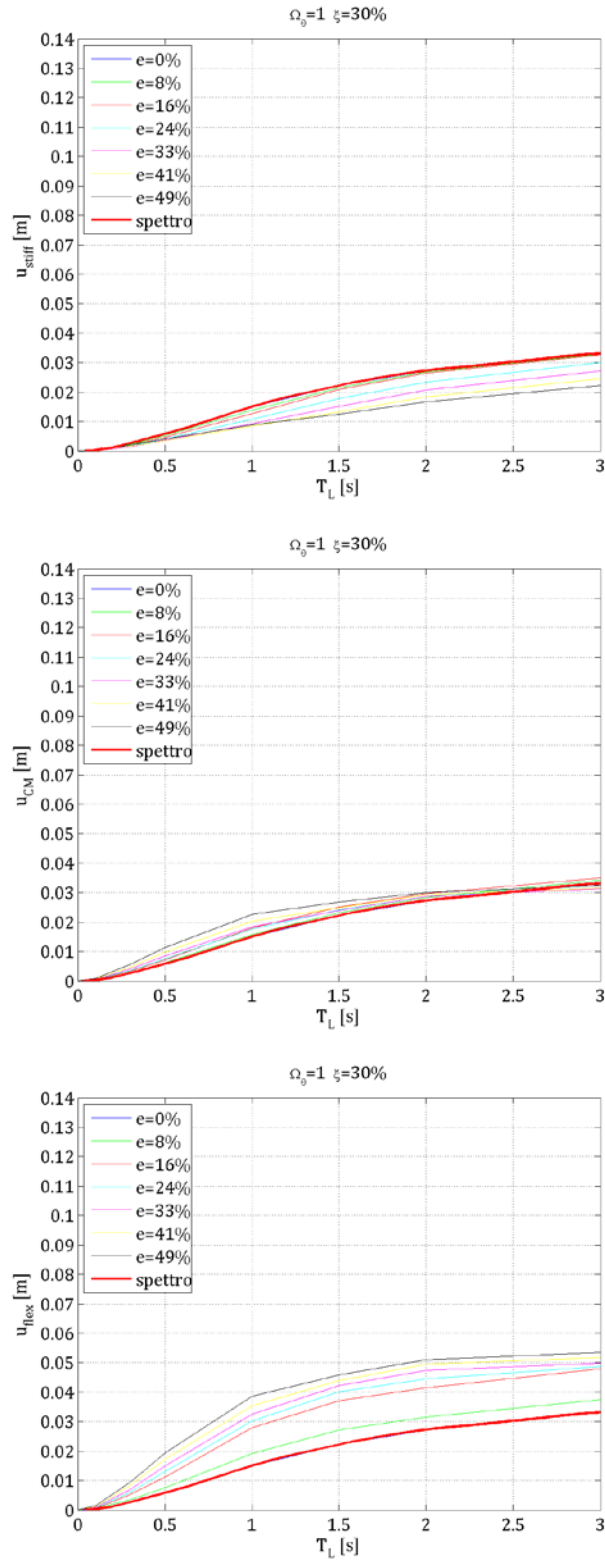
**Figura 5.11** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



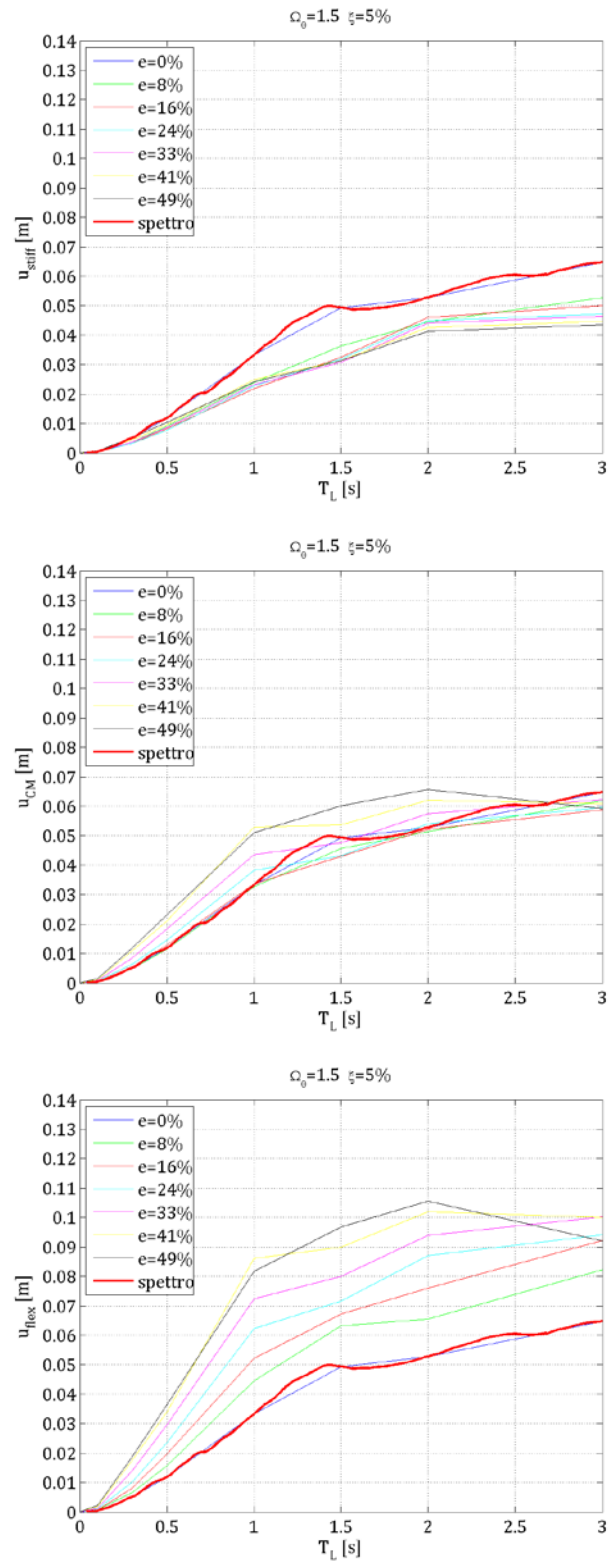
**Figura 5.12** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=1$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



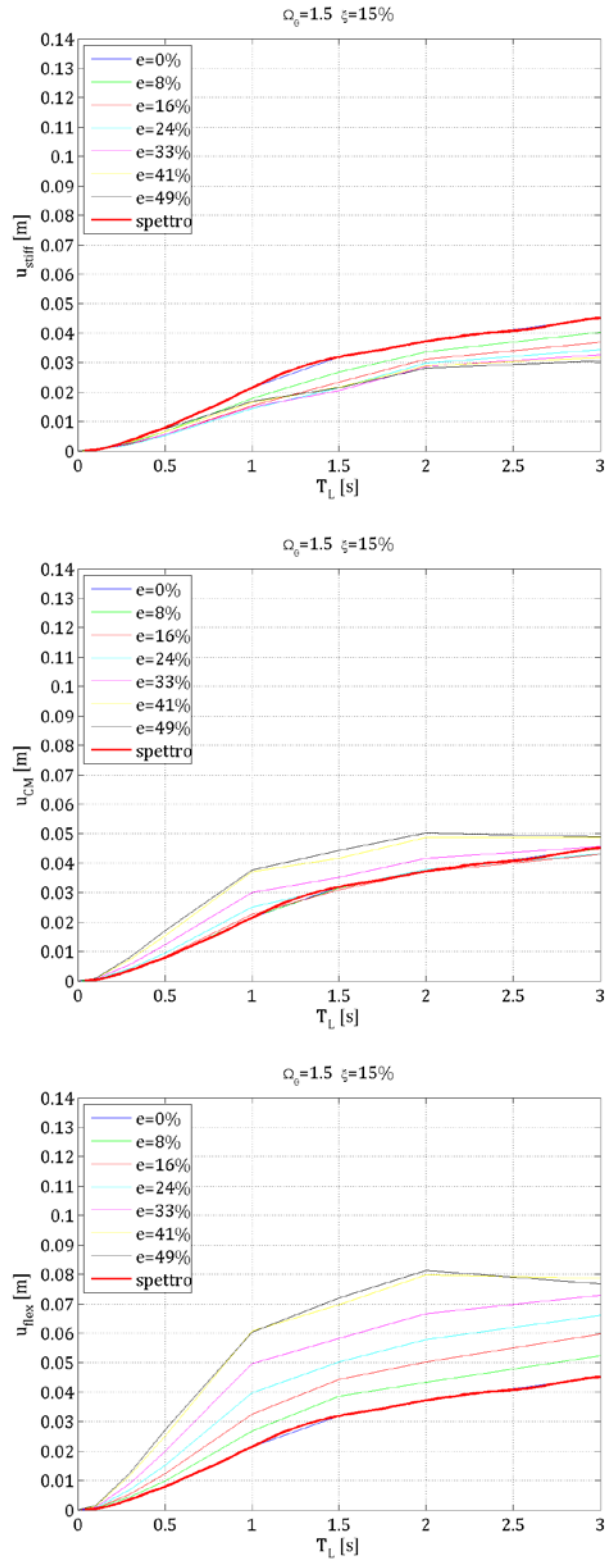
**Figura 5.13** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_\theta=1$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 5.14** *Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=1$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .*

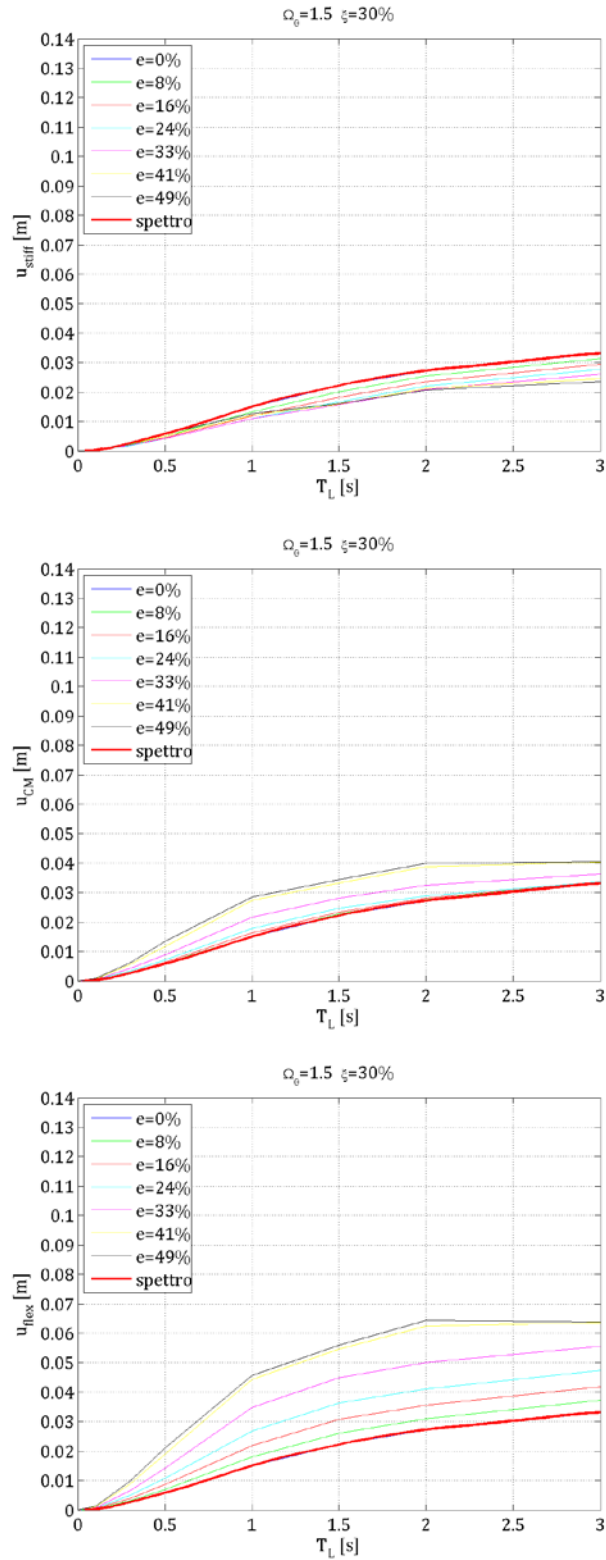


**Figura 5.15** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=1,5$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

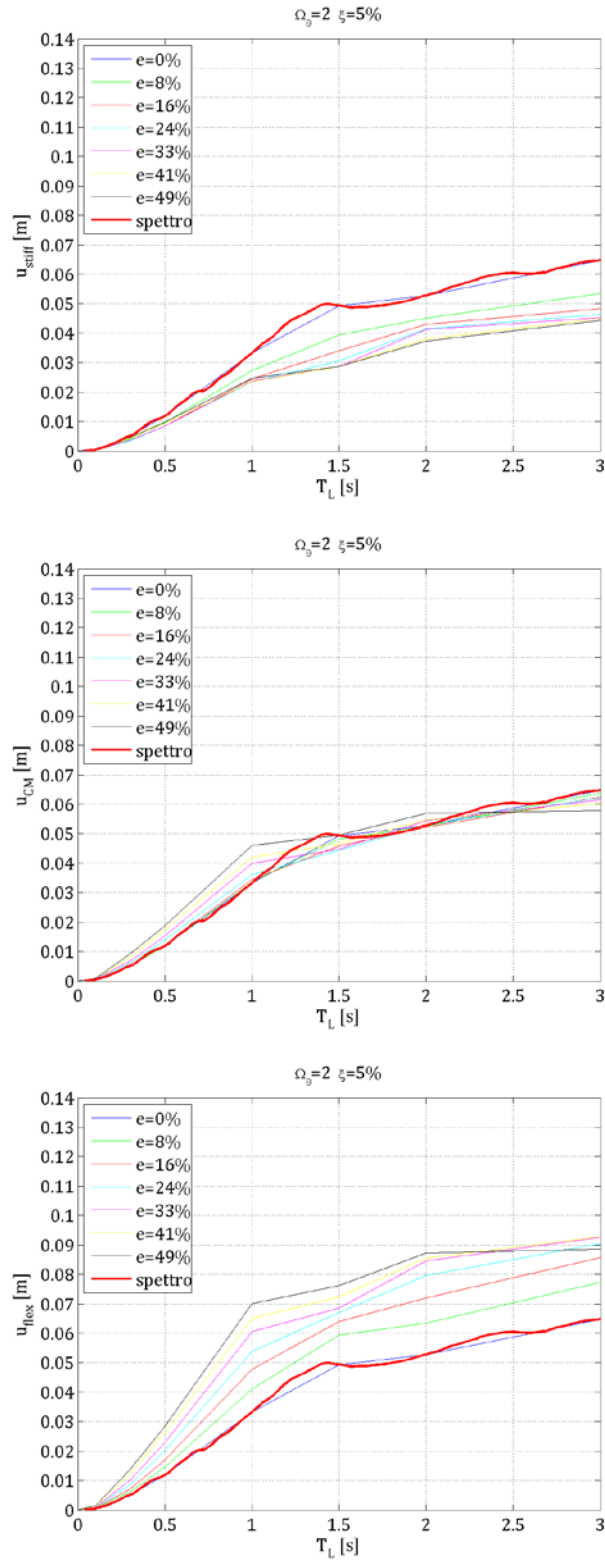


**Figura 5.16** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=1,5$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

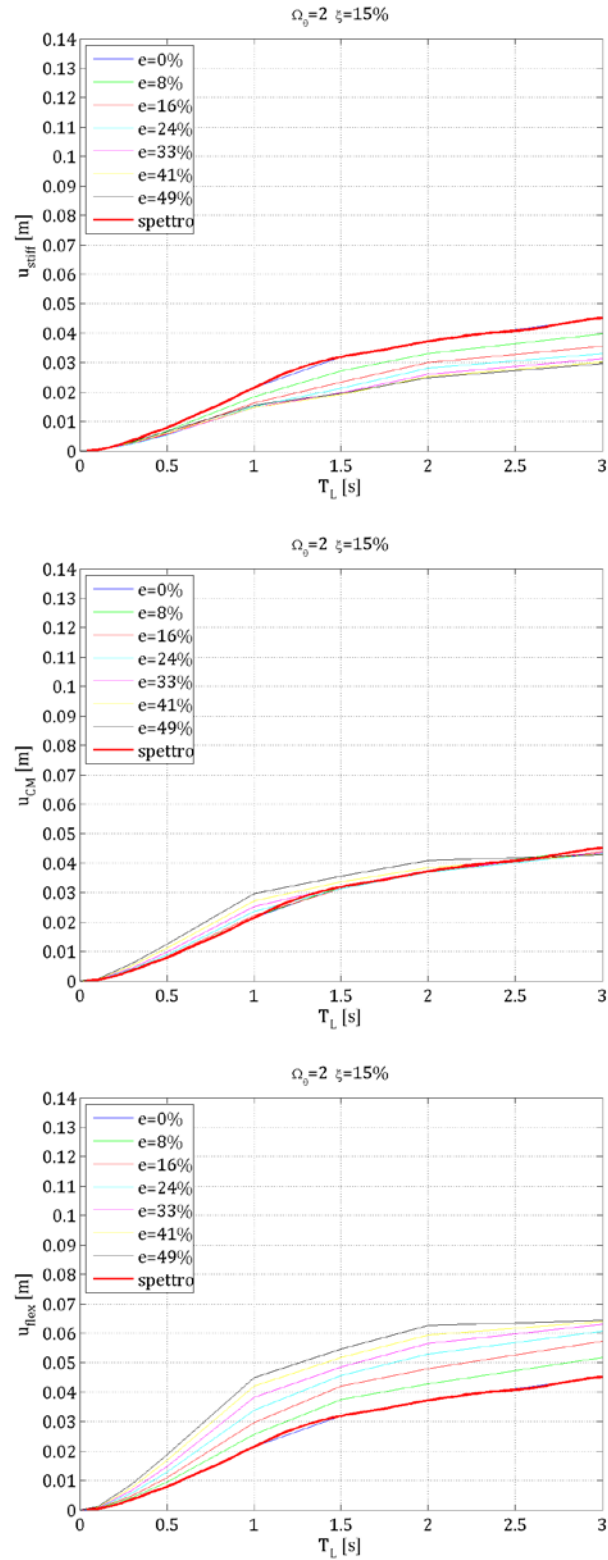




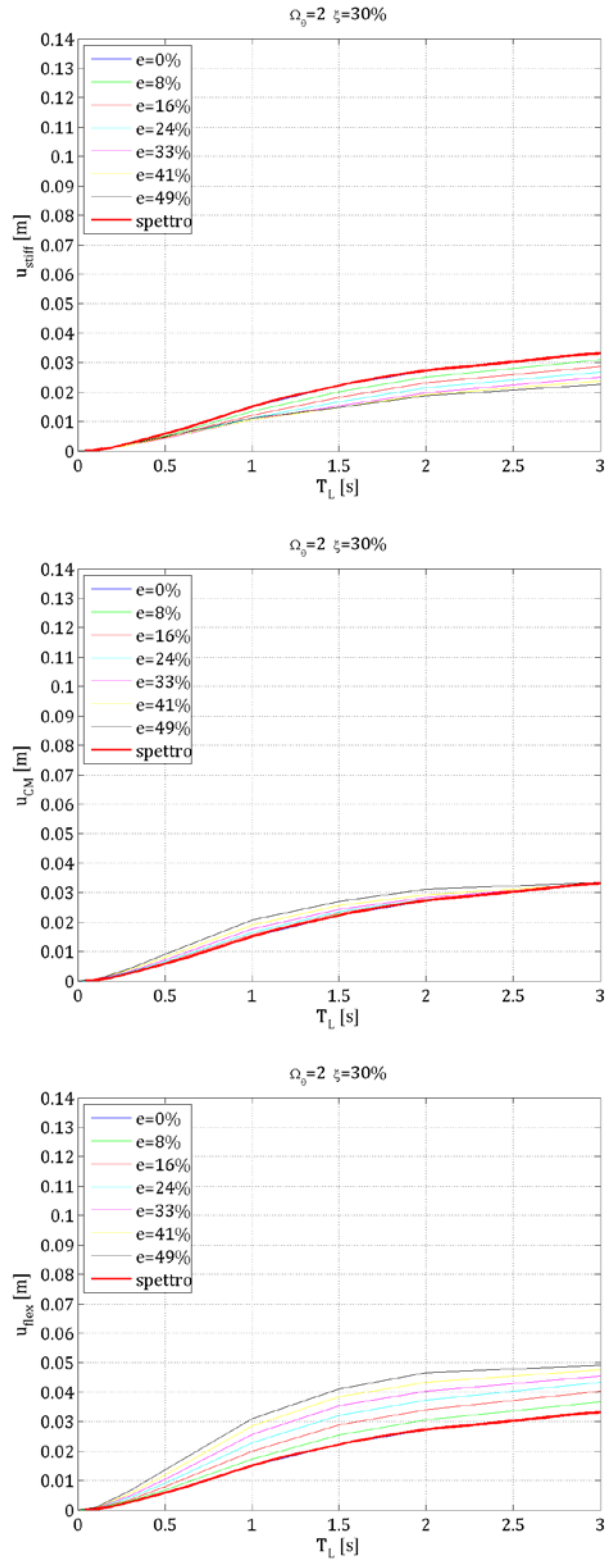
**Figura 5.17** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=1,5$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 5.18** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=2$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 5.19** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_\theta=2$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 5.20** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture elastiche con  $\Omega_0=2$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

Si può notare che in generale maggiore è l'eccentricità minore è lo spostamento del lato stiff e del centro di massa, e maggiore è lo spostamento lato flexible.

**Strutture torsioflessibili ( $\Omega_\theta = 0, 2$ ) - Figure 5.9, 5.10, 5.11**

$u_{stiff}$  ha un diagramma quasi bilineare, con un calo di pendenza che si verifica a  $T_L=1,5s$ .

Il modello con l'eccentricità del 33% ha un comportamento molto simile a quello del modello ad eccentricità nulla e fa un po' da spartiacque tra i modelli ad eccentricità inferiore, che hanno spostamenti maggiori, e modelli ad eccentricità superiore, i quali hanno spostamenti inferiori.

Aumentando lo smorzamento  $u_{stiff}$  conserva la bilinearità con un cambio di pendenza sempre in corrispondenza di  $T_L=1,5s$ .

$u_{flex}$  ha un diagramma quasi parabolico nella parte iniziale per poi trasformarsi in tratto costante.

Solo il modello ad eccentricità nulla ha un andamento sempre crescente.

Per periodi piccoli (che però aumentando lo smorzamento diventano via via maggiori) tutti i modelli eccentrici hanno spostamenti maggiori rispetto al modello non eccentrico. Aumentando il periodo il modello non eccentrico ha uno spostamento maggiore rispetto agli altri. Lo *shifting period effect* si verifica sempre più tardi (cioè per periodi maggiori) all'aumentare dell'eccentricità e dello smorzamento.

$u_{flex}$  mantiene l'andamento parabolico, ma il tratto costante inizia per periodi via via maggiori (aumentando lo smorzamento).

Anche nei grafici dello spostamento del centro di massa  $u_{CM}$  si presenta lo *shifting period effect*, i modelli eccentrici presentano infatti spostamenti maggiori per periodi piccoli, spostamenti minori per periodi maggiori di 1

circa. L'incrocio si verifica sempre più tardi all'aumentare dello smorzamento e dell'eccentricità.

In questo caso è evidente come ci possa essere una proporzionalità tra spostamenti ed eccentricità (i modelli con eccentricità piccola sono quelli che si discostano meno dal modello non eccentrico).

Ciò non si può affermare osservando gli spostamenti lato stiff e lato flexible.

### **Strutture con $\Omega_\theta = 1$ - Figure 5.12, 5.13, 5.14**

$u_{stiff}$  ha un diagramma quasi bilineare, con un calo di pendenza che si verifica a  $T_L=1,5s$  nei modelli con eccentricità 0%, 8% e 16%; a  $T_L=2s$  nei modelli con eccentricità 24%, 33%, 41% e 49%.

Man mano che aumenta lo smorzamento l'andamento bilineare si perde in favore di una tendenza monotona crescente più uniforme.

In generale maggiore è l'eccentricità, minore è lo spostamento lato stiff: si può trovare una proporzionalità tra queste due grandezze.

Per quanto riguarda il *lato flexible*, in generale si può affermare che maggiore è l'eccentricità, maggiore è lo spostamento  $u_{flex}$ .

Tale spostamento è sempre crescente con il periodo fino a  $T_L=2s$ ;

Per periodi superiori ai 2s, nei casi di eccentricità di 33%, 41%, 49% (con smorzamento pari al 5%) e di eccentricità pari al 41% e 49% (con smorzamento pari al 15%) l'andamento diventa decrescente.

In tutti gli altri casi l'andamento è crescente.

L'incremento maggiore di spostamento si ha per eccentricità comprese tra 8% e 16%.

Per smorzamenti pari al 5% e al 15% e periodi maggiori di 2,2s, lo spostamento del centro di massa  $u_{CM}$  del sistema non eccentrico è maggiore rispetto ai modelli eccentrici.

Per il resto gli spostamenti non variano molto in funzione dell'eccentricità e per smorzamenti pari al 15% e al 30% sono crescenti con l'eccentricità (anche se non di tanto appunto).

***Strutture torsiorigide ( $\Omega_\theta = 1, 5$ ) - Figure 5.15, 5.16, 5.17***

Per quanto riguarda il *lato stiff* lo spostamento è inversamente proporzionale all'eccentricità anche se le differenze non sono evidenti.

Per uno smorzamento pari al 5% si registra un andamento crescente fino ad un periodo di 2s che poi si stabilizza in tratti pressoché costanti per periodi maggiori; inoltre si può notare che sempre per questo valore di smorzamento il modello non eccentrico si discosta molto rispetto a quelle che sono le differenze relative tra i modelli eccentrici.

Tale caratteristica scompare considerando valori maggiori di smorzamento, come si perde quasi l'andamento bilineare in favore di un diagramma crescente a pendenza minore.

Per uno smorzamento pari al 30% si ottengono infatti diagrammi molto vicini e quasi rettilinei.

Gli spostamenti del *lato flexible* evidenziano diagrammi che fino ad un periodo pari ad 1s sono lineari per poi subire un appiattimento con legge non lineare.

In generale lo spostamento è proporzionale all'eccentricità.

Per valori di eccentricità pari a 41% e 49% e per periodi maggiori di 2s l'andamento diventa decrescente.

Lo *spostamento del centro di massa* ha un andamento lineare per periodi fino ad 1s che poi si appiattisce in modo simile a quanto si verifica per il lato flexible.

Si può notare che gli andamenti dei modelli con eccentricità pari a 0%, 8% e 16% sono quasi coincidenti.

Per eccentricità maggiori i diagrammi sono più alti in modo proporzionale all'eccentricità poi, per periodi maggiori ai 2s convergono a valori di spostamento simili a quelli dei primi tre modelli (talvolta anche assumendo caratteristiche decrescenti).

Per periodi prossimi ai 3s i valori di spostamento del centro di massa sono paragonabili, perciò indipendenti dall'eccentricità.

### ***Strutture torsiorigide ( $\Omega_\theta = 2$ ) - Figure 5.18, 5.19, 5.20***

Per quanto riguarda il *lato stiff*, il modello non eccentrico presenta valori di spostamento maggiori rispetto a tutti gli altri modelli (è la curva più alta sempre). In questo caso l'eccentricità è inversamente proporzionale allo spostamento. Le curve inoltre sono sempre molto vicine, tranne quella che rappresenta il modello non eccentrico con smorzamento pari al 5%, che è molto più alta rispetto a quanto la vicinanza delle altre curve farebbe ipotizzare.

Gli spostamenti del *lato flexible* evidenziano diagrammi che fino ad un periodo pari ad 1s sono lineari per poi subire un appiattimento con legge non lineare.

In generale lo spostamento è proporzionale all'eccentricità.

Per periodi maggiori ai 2s e smorzamento pari al 5% il modello ad eccentricità pari a 49% perde l'andamento crescente e rimane costante.

In generale, per quanto riguarda lo *spostamento del centro di massa*, il modello non eccentrico ha spostamento minore rispetto agli altri modelli (e talvolta paragonabile a quello dei modelli ad eccentricità minore, soprattutto per valori di smorzamento elevati).



Risulta invece il maggiore quando lo smorzamento è pari al 5% e i periodi sono maggiori di 2,4s.

#### ***u<sub>stiff</sub> aumentando $\Omega_\theta$***

L'incremento di  $\Omega_\theta$  fa calare la pendenza del primo tratto dei diagrammi bilineari e sposta in avanti il cambio di pendenza (per  $\Omega_\theta=0,2$  si verifica a  $T_L = 1,5s$  per tutti i valori di eccentricità tranne che per i due più elevati; per  $\Omega_\theta=1$  si verifica a  $T_L = 2s$  per tutti i valori di eccentricità tranne che per i più piccoli;  $\Omega_\theta=1,5$  e  $2$  si verifica a  $T_L = 2s$  per tutti i modelli).

Per valori di  $\Omega_\theta$  maggiori di 1 inoltre si può affermare che lo spostamento del lato rigido è inversamente proporzionale all'eccentricità del modello (per  $\Omega_\theta=0,2$  no).

#### ***u<sub>CM</sub> aumentando $\Omega_\theta$***

Lo spostamento del centro di massa non è influenzato dal parametro  $\Omega_\theta$  in modo sufficiente da poter dire che segua una tendenza particolare.

#### ***u<sub>flex</sub> aumentando $\Omega_\theta$***

In generale i grafici ottenuti per valori di  $\Omega_\theta$  pari a 1/1,5/2 sono simili, presentando un primo tratto lineare (per periodi minori di 1s) ed un secondo tratto curvilineo e molto meno pendente.

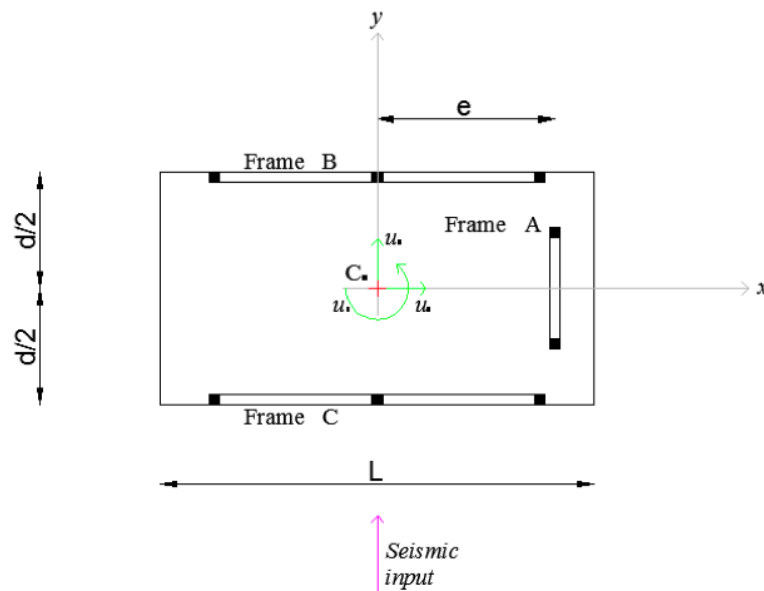
Per  $\Omega_\theta = 0,2$  invece si ha un primo tratto a pendenza elevata (per periodi fino a 0,5s), un secondo tratto a pendenza minore (fino a 1s) ed infine un tratto pressoché costante. In questo caso inoltre, a differenza dei precedenti, non si può trovare una proporzionalità tra eccentricità e spostamento.

Per periodi superiori ai 2s non si può trovare proporzionalità per nessuno dei 4 casi a causa dei tratti decrescenti di cui si è parlato sopra (tranne nel caso di  $\Omega_\theta = 2$  e smorzamento pari al 30%).

## 5.2 Caso Non Lineare

In campo non lineare è stato utilizzato un modello idealizzato proposto in passato da A.K. Chopra [9] e già testato per rappresentare il comportamento di strutture reali. Tale sistema consiste in un diaframma rigido nel proprio piano che poggia su 3 telai (A, B, C). Il telaio A, orientato in direzione  $y$ , è collocato a distanza  $e$  dall'asse  $y$  che passa per il centro di massa (CM) del piano. I telai B e C sono orientati in direzione  $x$ , collocati alla stessa distanza  $d/2$  dal centro di massa (CM), ma dai due lati opposti.

Per semplicità i telai sono disposti sul bordo del diaframma; inoltre si trascura il loro spessore. Il sistema presenta così gli stessi 3 gradi di libertà del sistema lineare, definiti rispetto al centro di massa (CM).



**Figura 5.21** Modello non-lineare idealizzato di Chopra e Goel (2007).

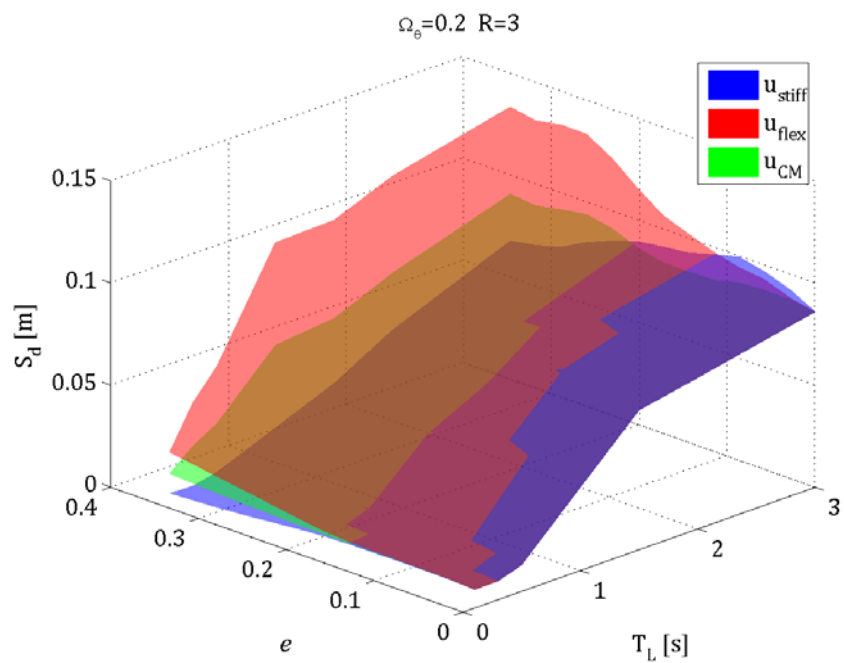
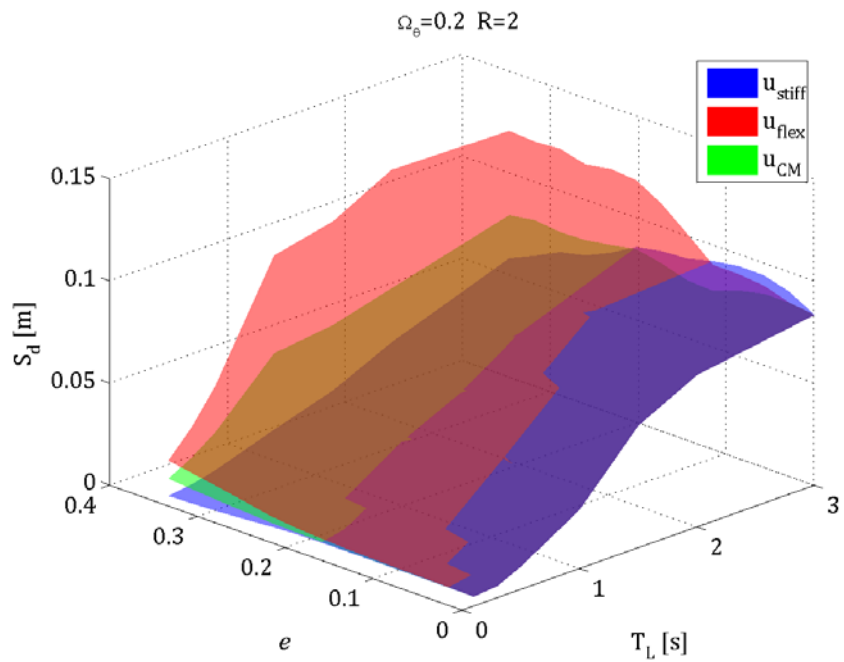
### 5.2.1 Grafici tridimensionali degli spostamenti

Come nel caso lineare, attraverso un altro script costruito ad hoc con Matlab sono stati ottenuti gli spostamenti della struttura a comportamento non lineare. Anche in questo caso sono stati creati dapprima i grafici tridimensionali in cui, fissato il fattore di riduzione delle forze  $R$  ed il parametro  $(\Omega_\theta)$  indicatore della rigidità torsionale della struttura, lo spostamento (asse  $z$ ) è graficato in funzione del periodo longitudinale  $(T_L)$  della struttura e della sua eccentricità relativa  $(e=E/D_e)$ .

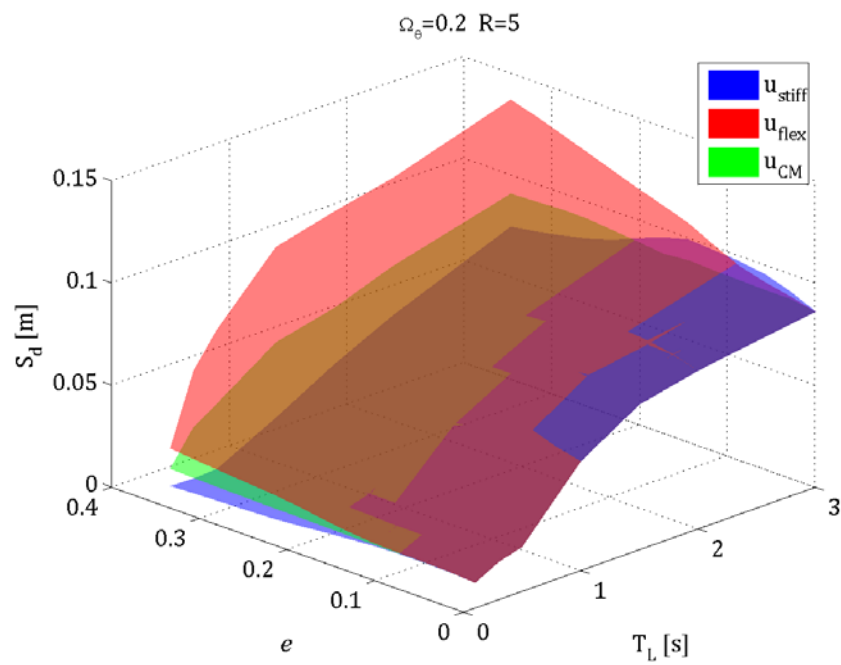
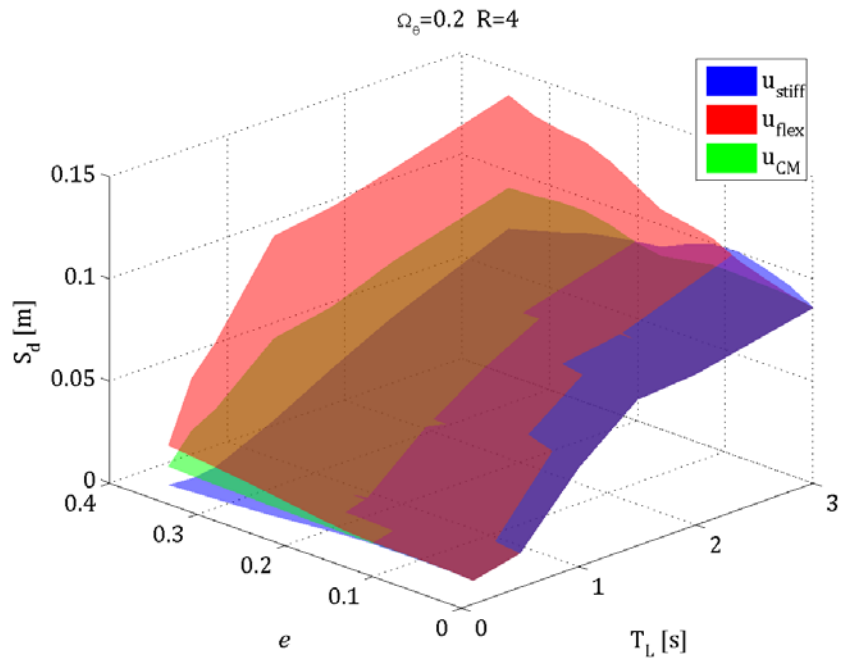
L'indice di smorzamento  $(\xi)$  utilizzato è pari a 0,05 in tutti i casi.

Ogni grafico presenta 3 superfici:

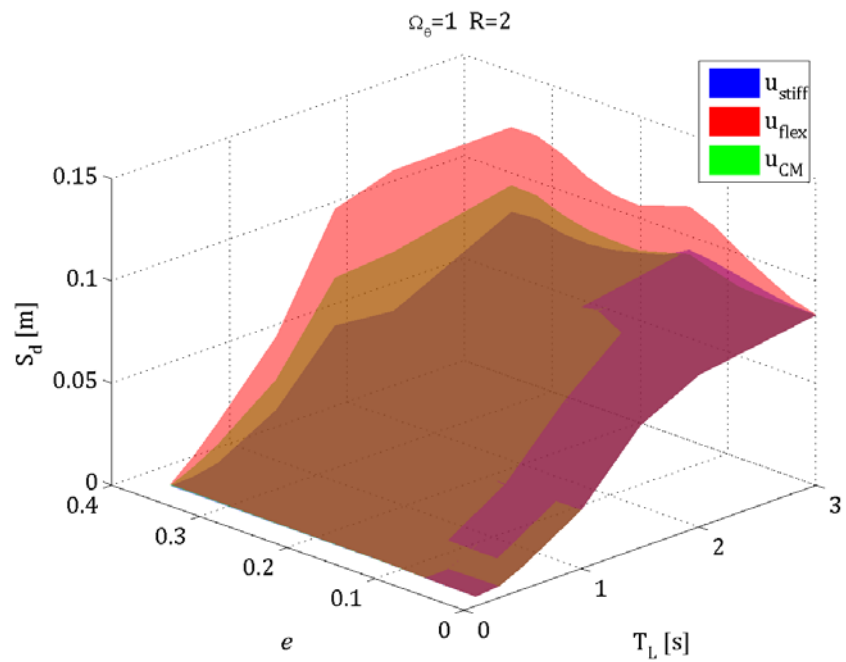
- la *superficie blu* rappresenta l'andamento dello spostamento del lato rigido della struttura ( $u_{stiff}$ );
- la *superficie rossa* rappresenta l'andamento dello spostamento del lato flessibile della struttura ( $u_{flex}$ ).
- la *superficie verde* rappresenta l'andamento dello spostamento del centro di massa della struttura ( $u_{CM}$ ).



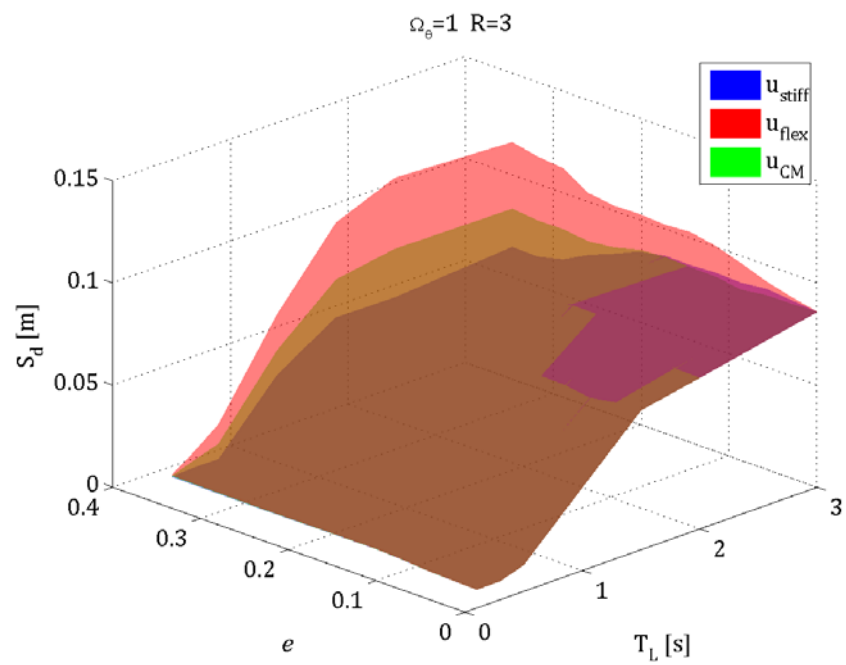
**Figura 5.22** *Spostamento longitudinale in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  per strutture non lineari con  $\Omega_\theta=0,2$  e: (a) R=2, (b) R=3.*



**Figura 5.22** *Spostamento longitudinale* in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  per strutture *non lineari* con  $\Omega_\theta=0,2$  e: (c) R=4, (d) R=5.

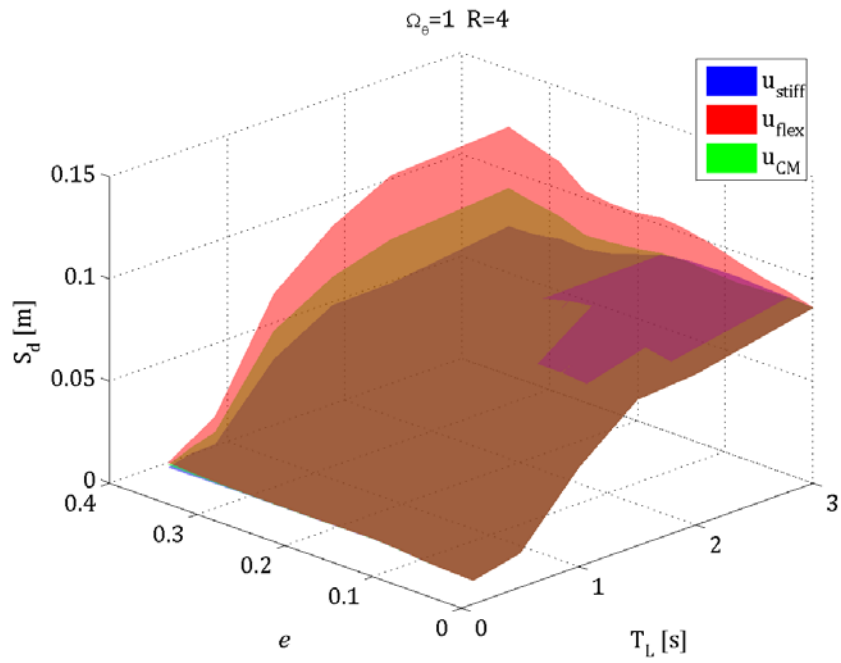


(a)

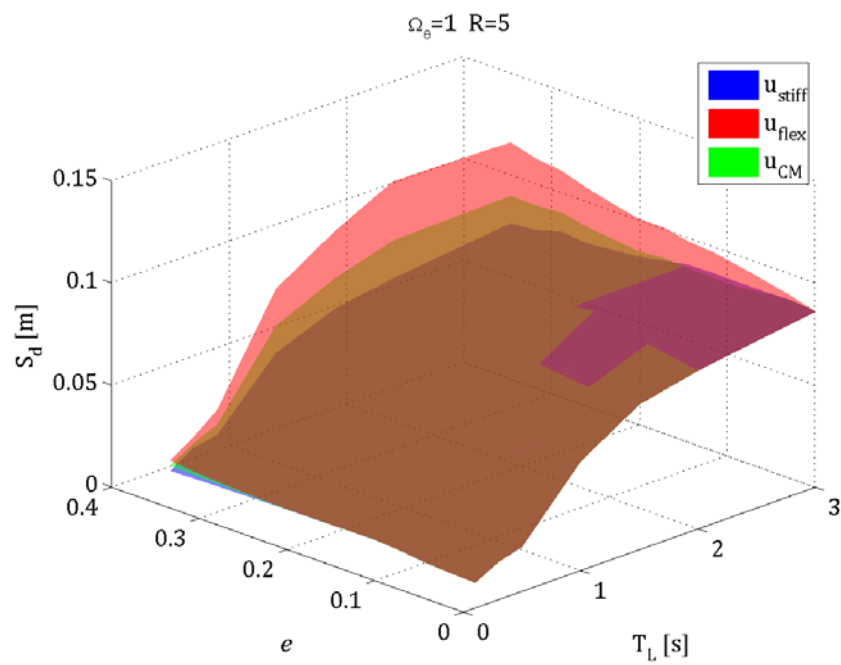


(b)

**Figura 5.23** *Spostamento longitudinale* in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  per strutture *non lineari* con  $\Omega_0=1$  e: (a) R=2, (b) R=3.

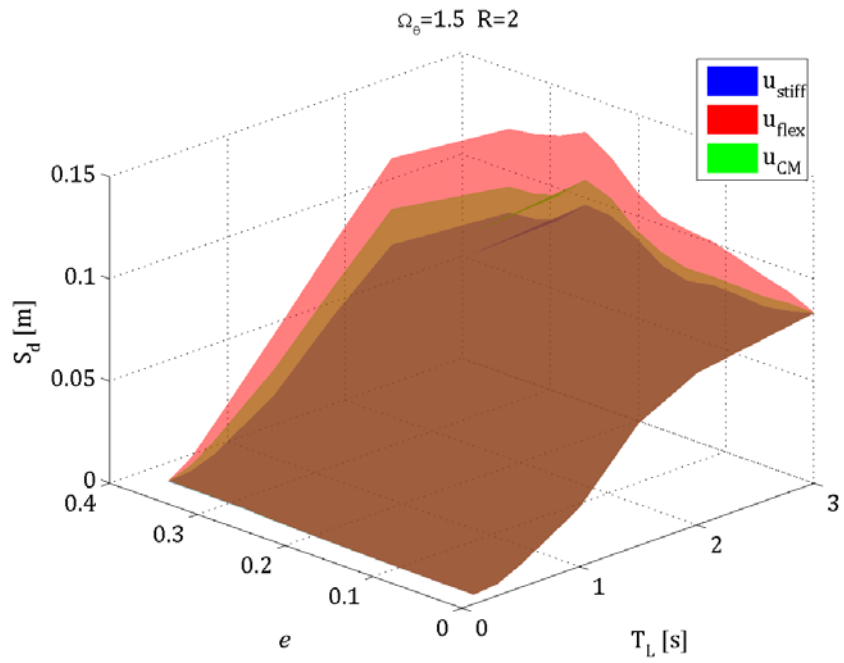


(c)

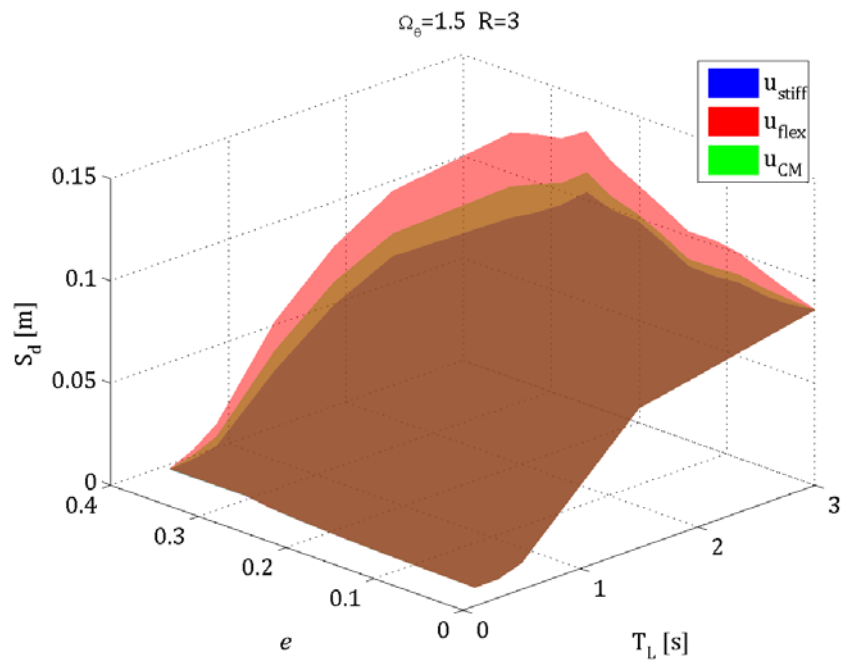


(d)

**Figura 5.23** *Spostamento longitudinale in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  per strutture non lineari con  $\Omega_\theta=1$  e: (c)  $R=4$ , (d)  $R=5$ .*



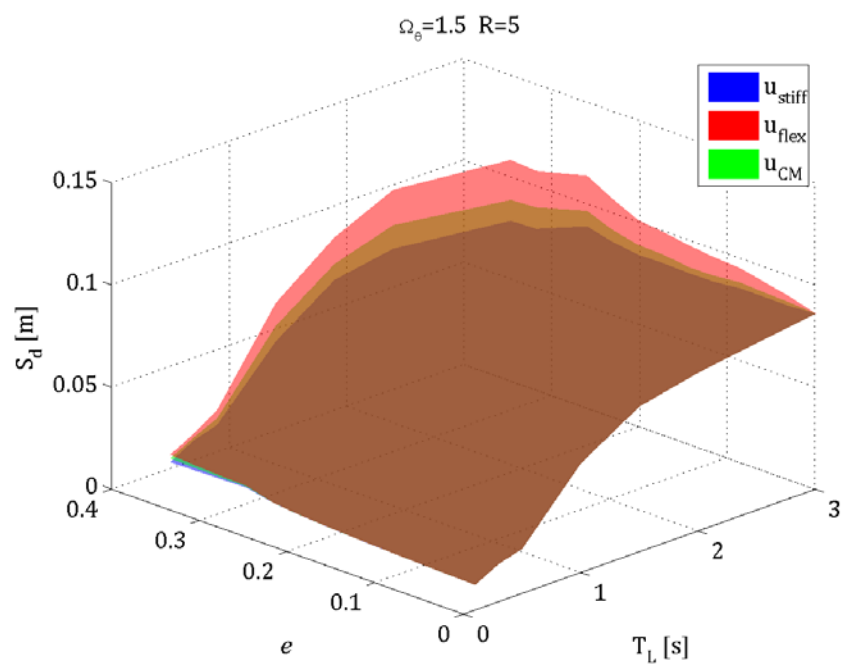
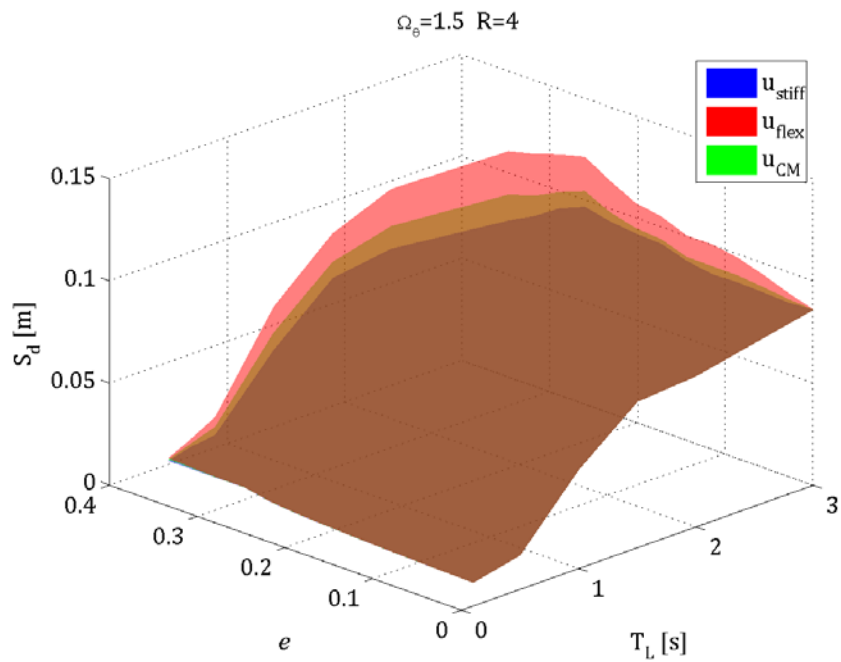
(a)



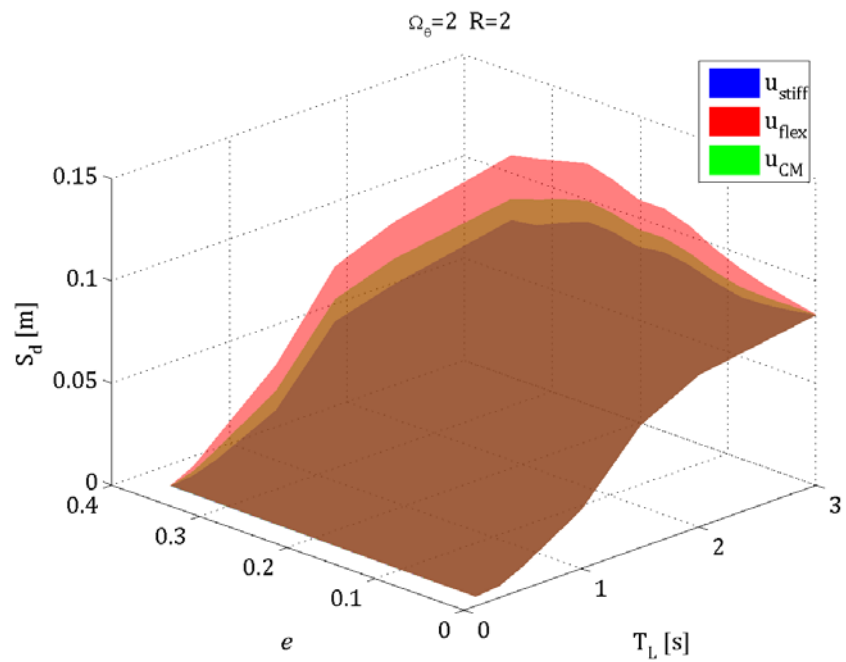
(b)

**Figura 5.24** *Spostamento longitudinale in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  e per strutture non lineari con  $\Omega_\theta=1,5$  e: (a)  $R=2$ , (b)  $R=3$ .*

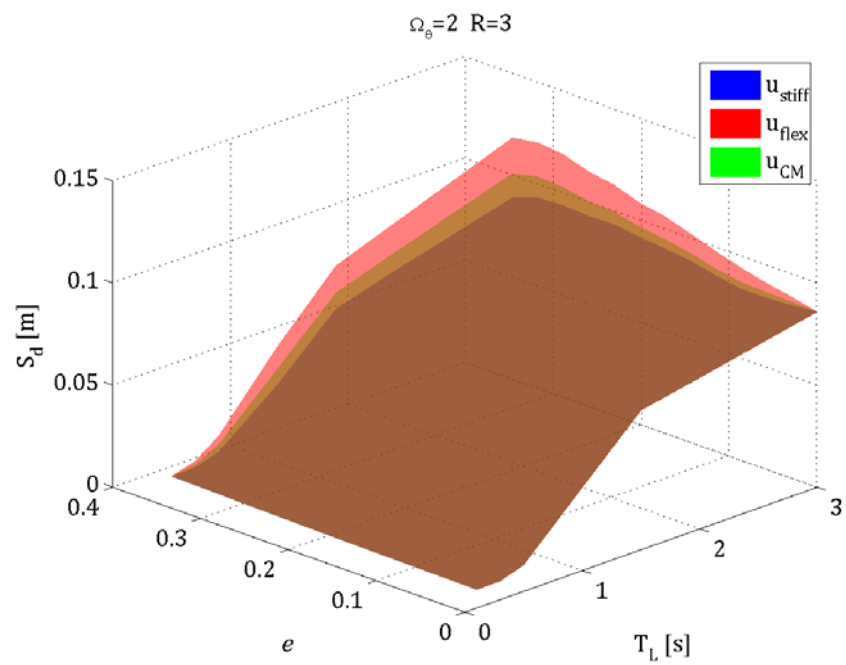




**Figura 5.24** *Spostamento longitudinale in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  per strutture non lineari con  $\Omega_\theta=1,5$  e: (c)  $R=4$ , (d)  $R=5$ .*

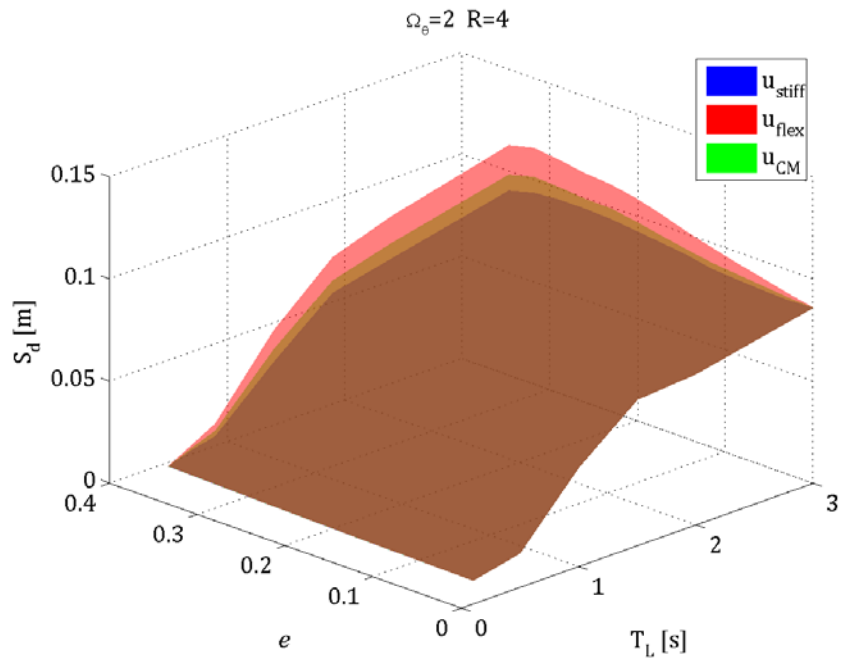


(a)

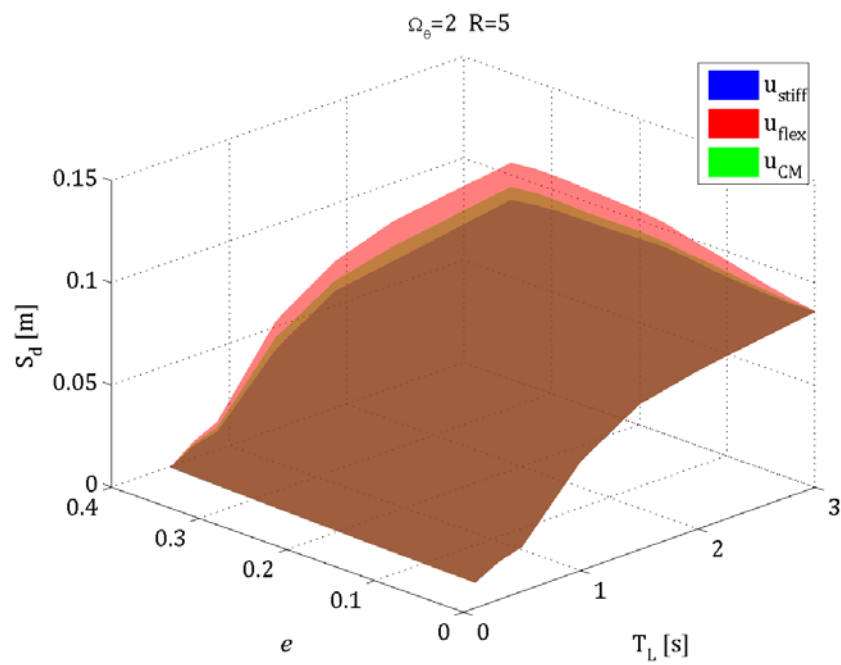


(b)

**Figura 5.25** *Spostamento longitudinale* in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  per strutture *non lineari* con  $\Omega_0=2$  e: (a) R=2, (b) R=3.



(c)



(d)

**Figura 5.25** *Spostamento longitudinale in funzione del periodo longit.  $T_L$  e dell'ecc. relativa  $e$  per strutture non lineari con  $\Omega_\theta=2$  e: (c)  $R=4$ , (d)  $R=5$ .*

Si può notare che, come nel caso lineare, in quasi tutti i casi lo spostamento longitudinale del centro di massa è inferiore allo spostamento longitudinale del lato flessibile della struttura, cioè del lato più distante dal centro delle rigidità, e maggiore dello spostamento longitudinale del lato rigido.

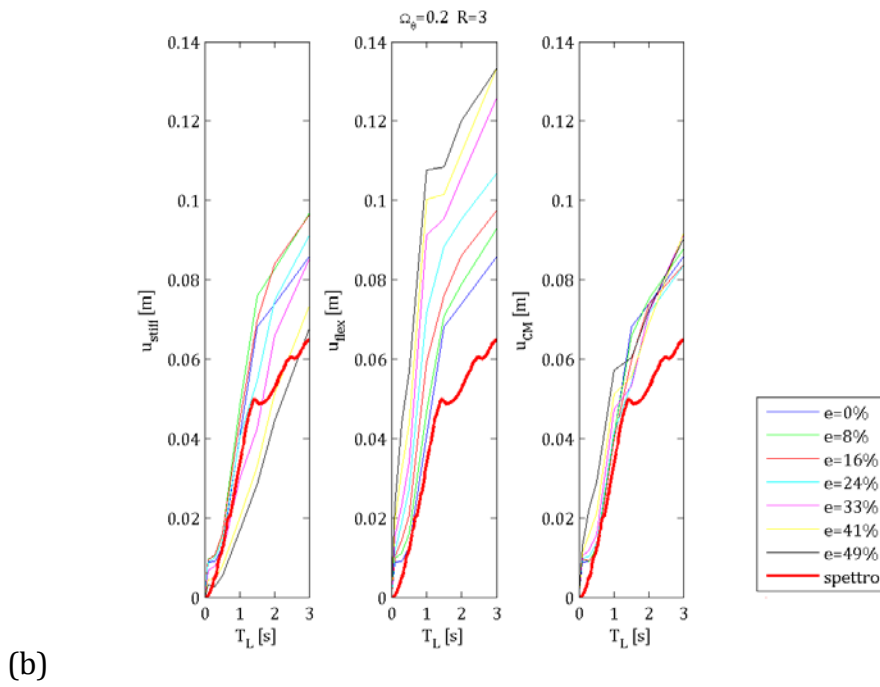
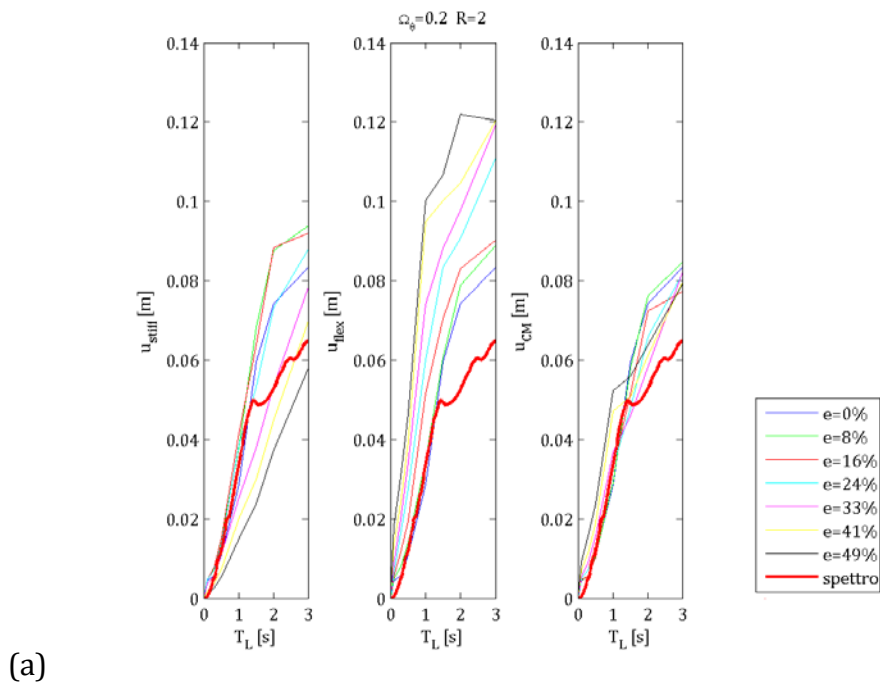
Tuttavia nelle strutture molto torsioflessibili, cioè nei modelli con  $\Omega_\theta = 0,2$ , per valori di eccentricità relativa che vanno da 0 a circa 0,1 lo spostamento longitudinale prevalente è quello del lato rigido, maggiore non solo dello spostamento del centro di massa ma anche di quello del lato flessibile. Questa tendenza va via via scomparendo all'aumentare dell'indice di smorzamento. In strutture con  $\Omega_\theta = 1$  ed indice di smorzamento pari al 5% rimane solo una piccola area, corrispondente ad eccentricità relative molto piccole, in cui lo spostamento del lato rigido è maggiore dello spostamento del centro di massa, ma è stato comunque superato dallo spostamento del lato flessibile.

### 5.2.2 Grafici bidimensionali degli spostamenti

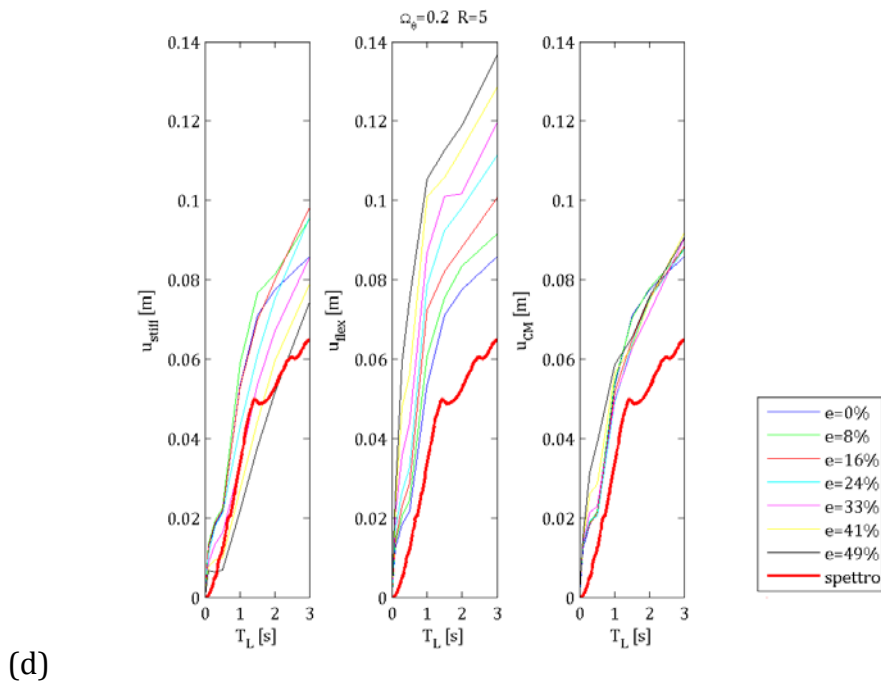
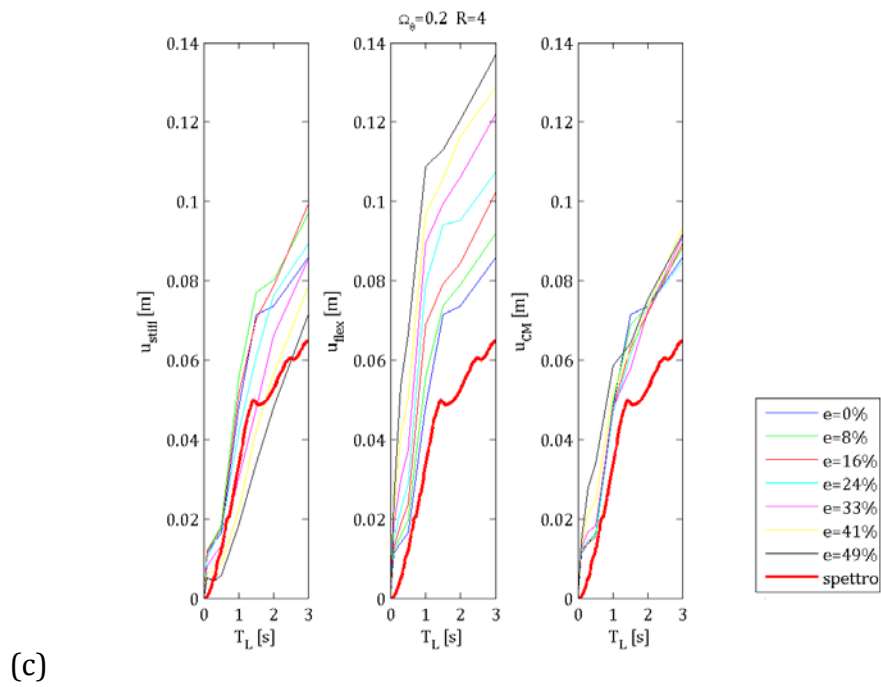
Per un'analisi più precisa e più chiara dei risultati si è sezionato ogni grafico tridimensionale con piani verticali corrispondenti a precisi valori di eccentricità relativa (indicati nella Tabella 5.1) ottenendo dei grafici bidimensionali *spostamento / periodo longitudinali*.

Ad ogni linea del grafico è stato dato un diverso colore cui è stata associata una legenda per distinguere i diversi valori di eccentricità. In questo caso la linea rossa spessa, proveniente dallo spettro degli spostamenti dei 50 sismi, è molto più bassa della linea corrispondente alla struttura non eccentrica a comportamento non lineare (linea blu).

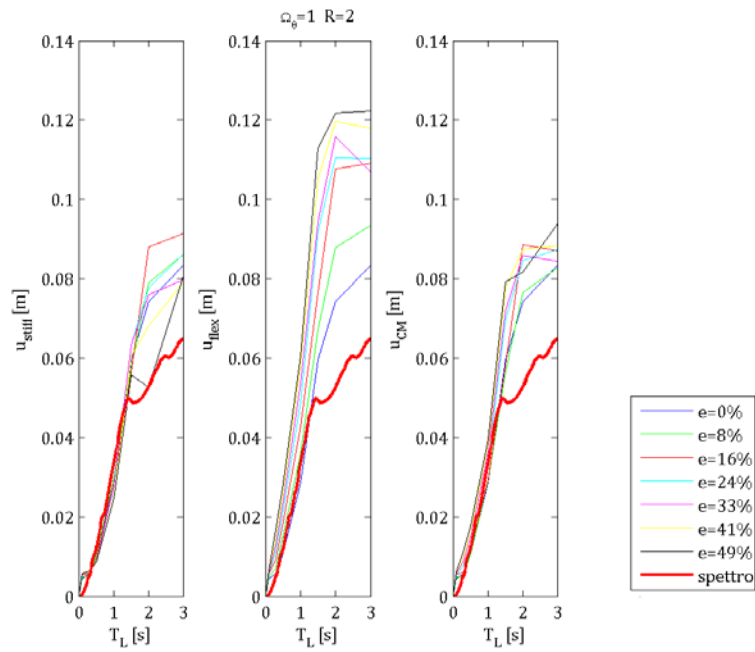
Per una comparazione degli spostamenti longitudinali di lato rigido, centro di massa e lato flessibile si è scelto di affiancare i grafici corrispondenti, che vengono presentati nelle pagine seguenti.



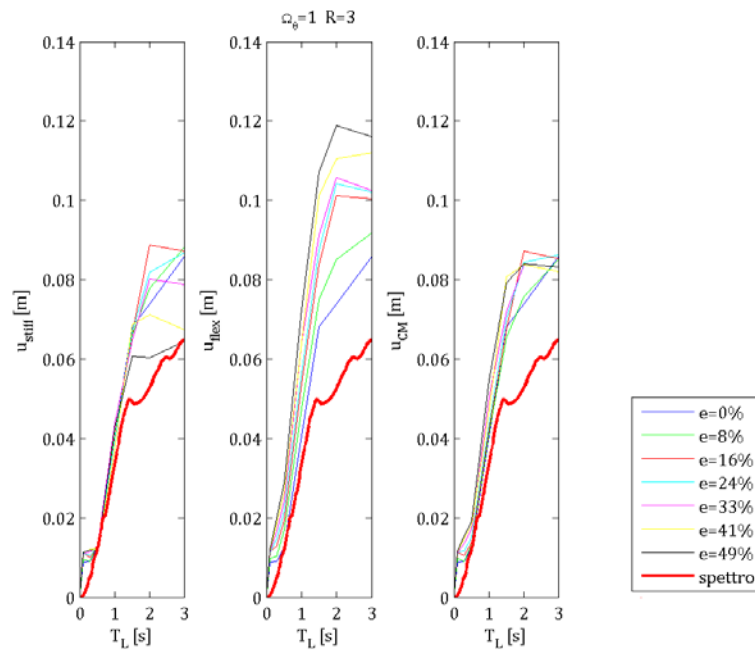
**Figura 5.26** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture *non lineari* con  $\Omega_0=0,2$  e: (a)  $R=2$ , (b)  $R=3$ .



**Figura 5.26** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture *non lineari* con  $\Omega_\theta=0,2$  e: (c)  $R=4$ , (d)  $R=5$ .

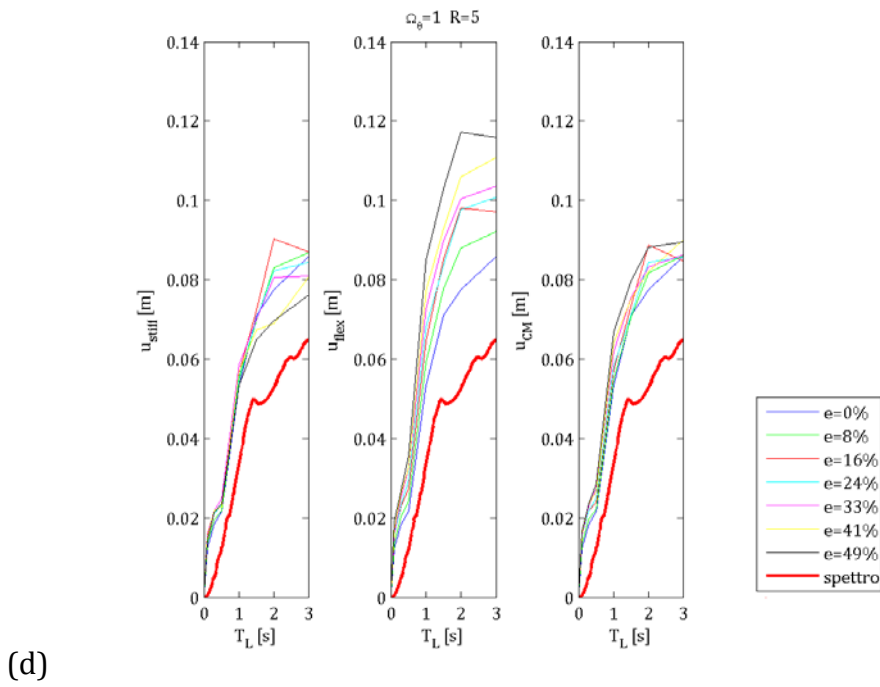
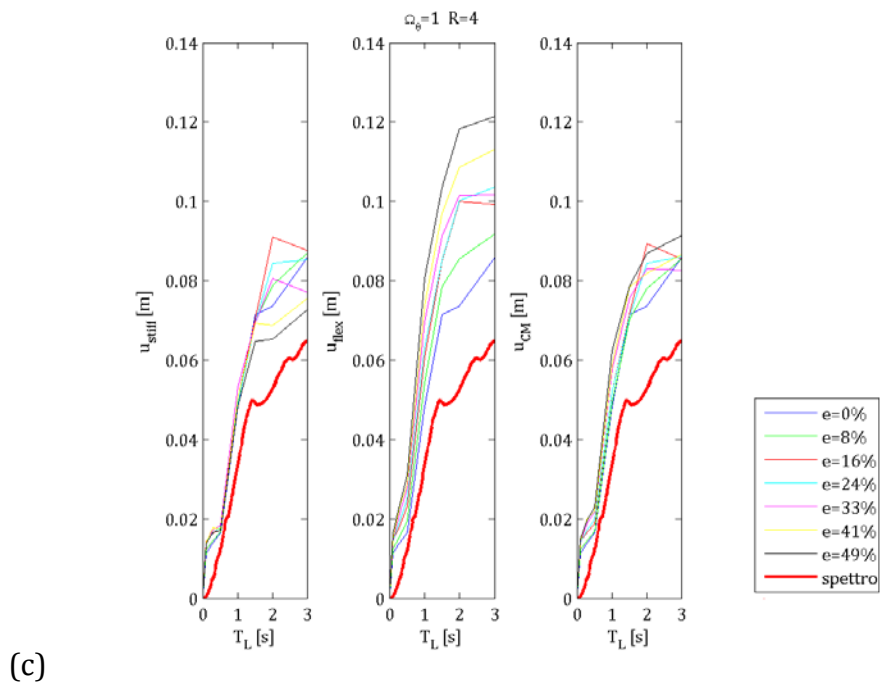


(a)



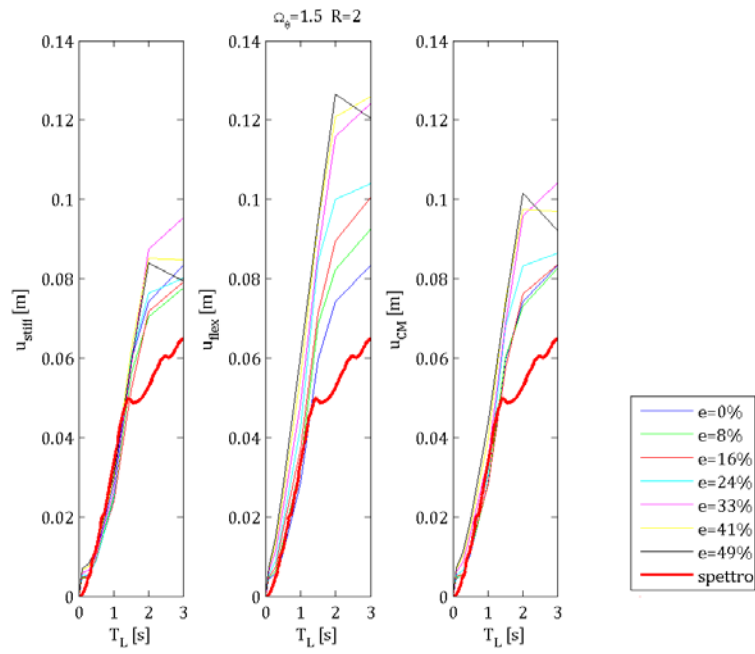
(b)

**Figura 5.27** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture non lineari con  $\Omega_0=1$  e: (a) R=2, (b) R=3.

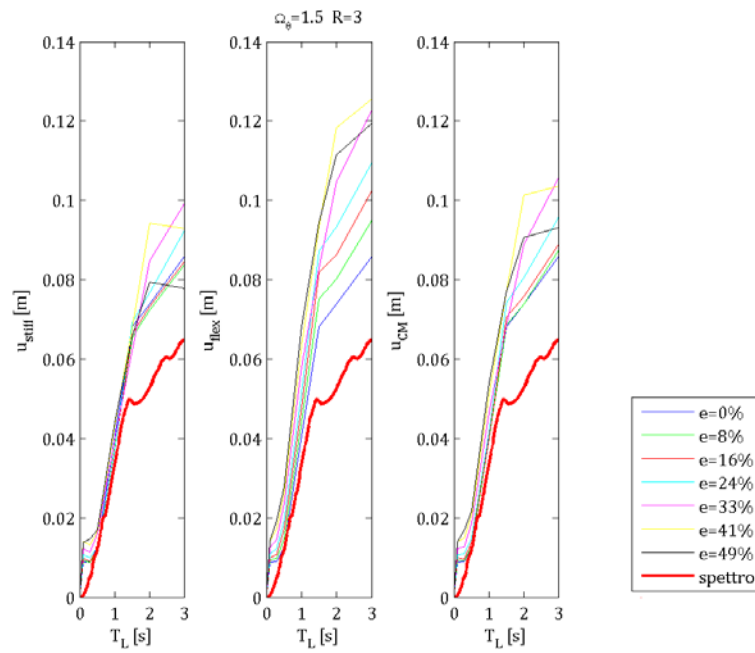


**Figura 5.27** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture *non lineari* con  $\Omega_\theta = 1$  e: (c)  $R = 4$ , (d)  $R = 5$ .



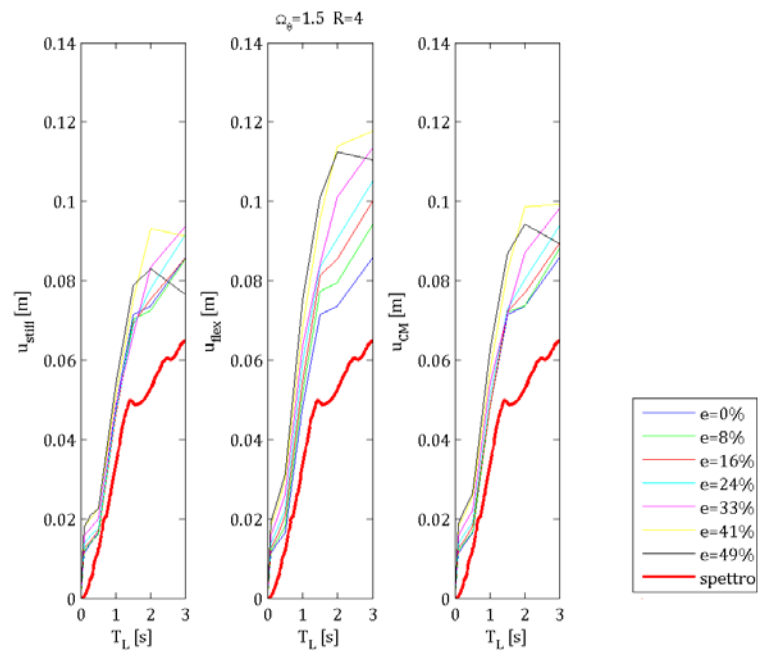


(a)

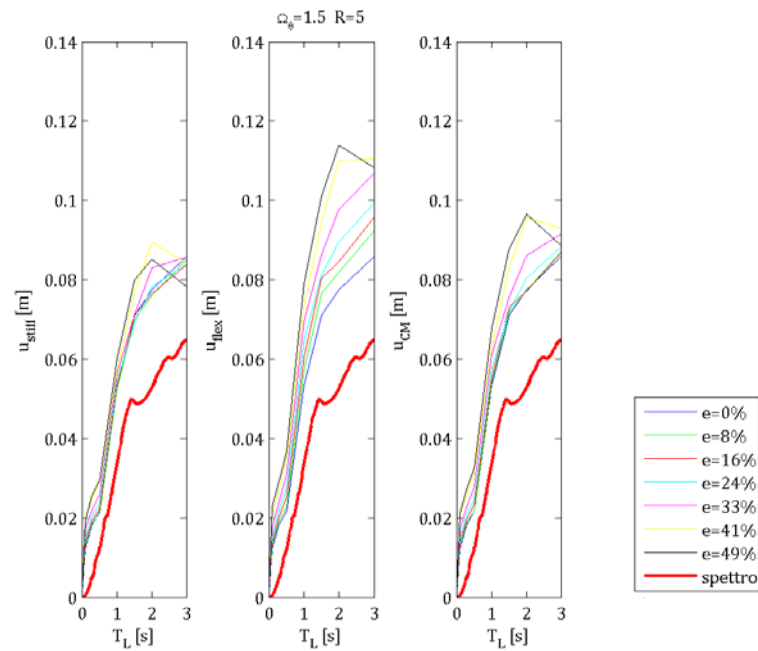


(b)

**Figura 5.28** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture *non lineari* con  $\Omega_\theta=1,5$  e: (a)  $R=2$ , (b)  $R=3$ .

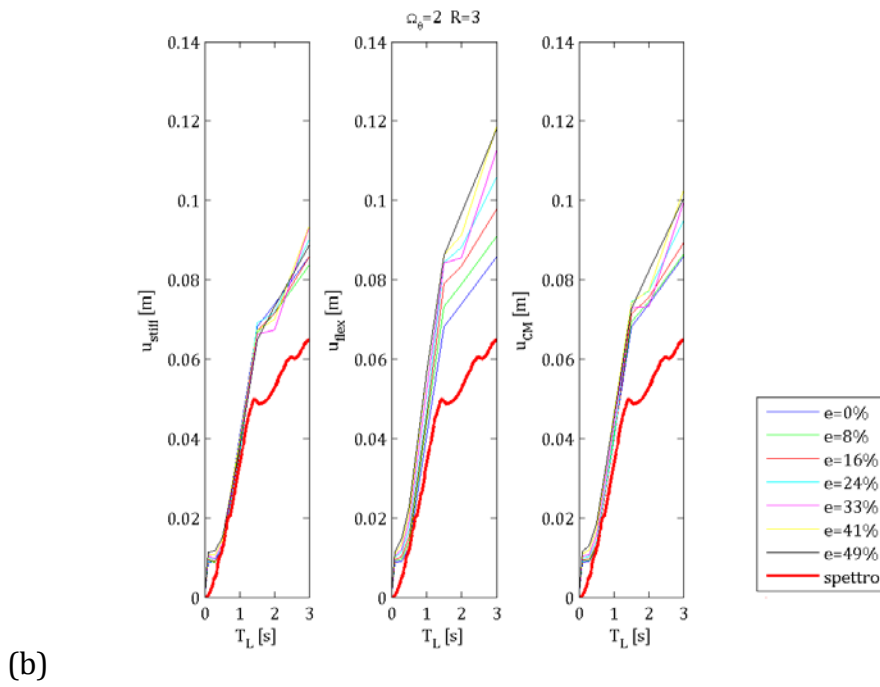
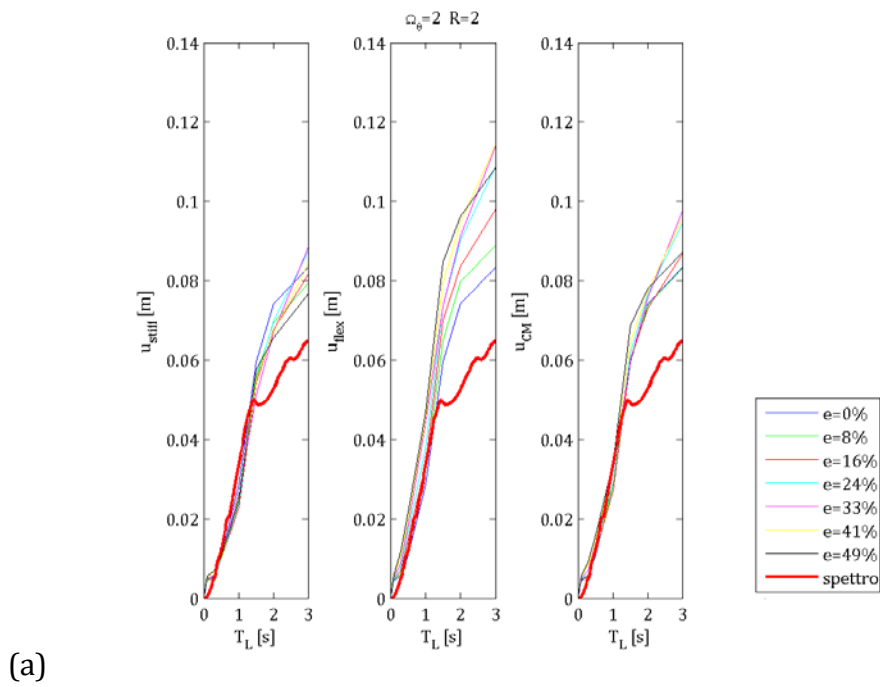


(c)

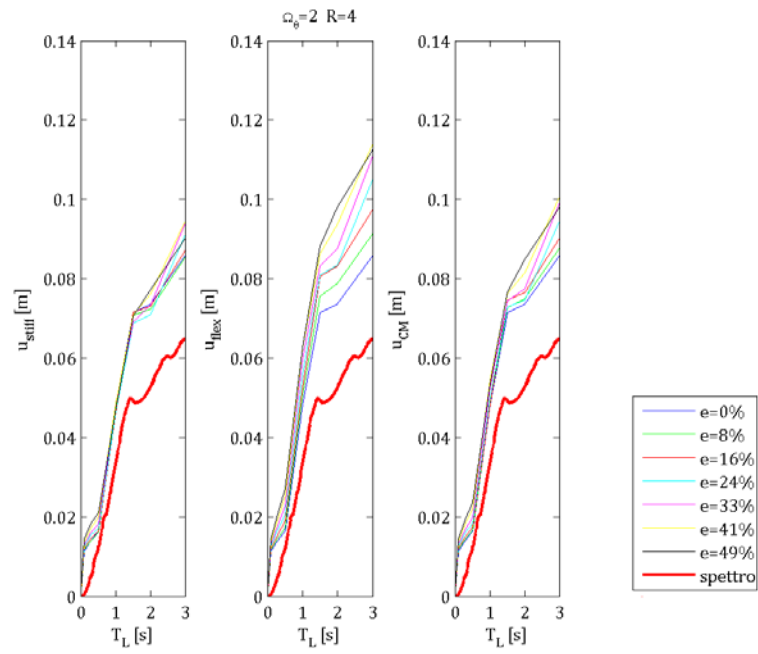


(d)

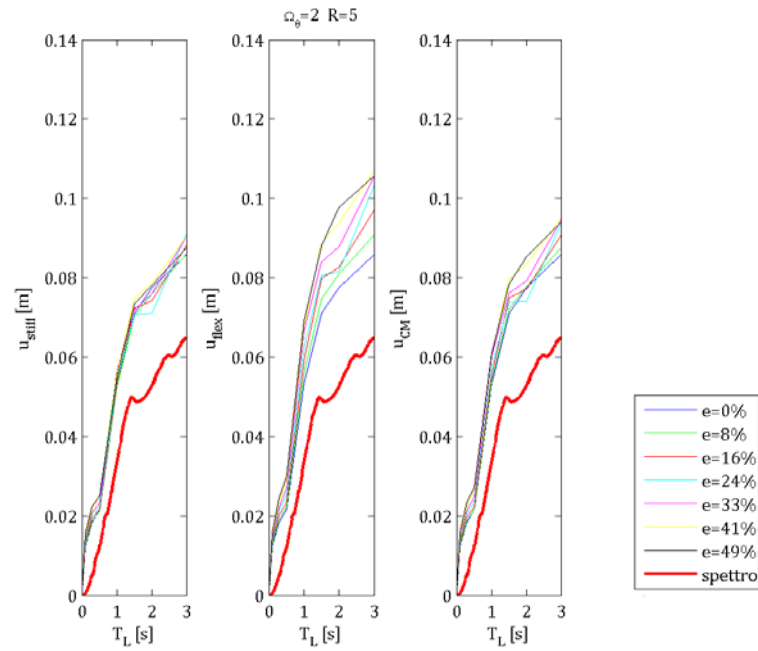
**Figura 5.28** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture *non lineari* con  $\Omega_\theta=1,5$  e: (c) R=4, (d) R=5.



**Figura 5.29** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture non lineari con  $\Omega_\theta=2$  e: (a) R=2, (b) R=3.



(c)

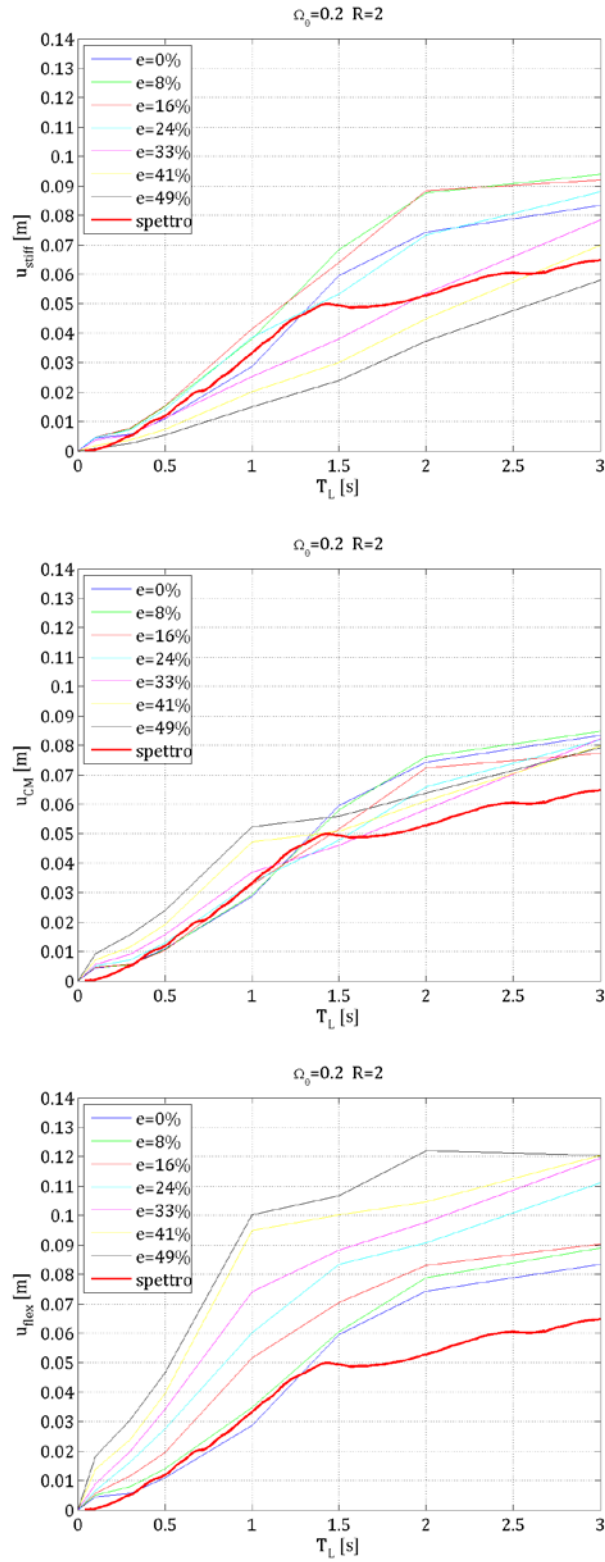


(d)

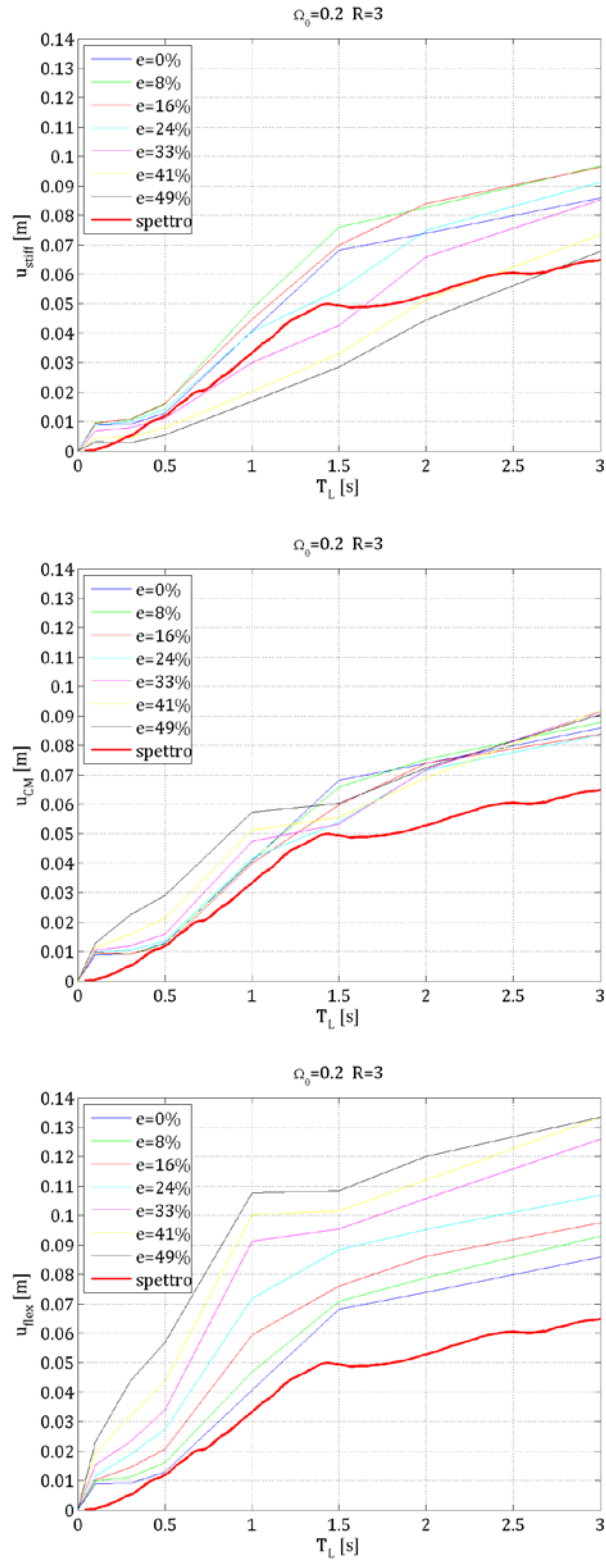
**Figura 5.29** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{flex}$  e  $u_{CM}$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  con prefissati valori di  $e$ , per strutture *non lineari* con  $\Omega_\theta = 2$  e: (c)  $R = 4$ , (d)  $R = 5$ .

Gli stessi grafici sono presentati ora non più affiancati ma uno sotto l'altro, per avere una più facile caratterizzazione quantitativa dei risultati.

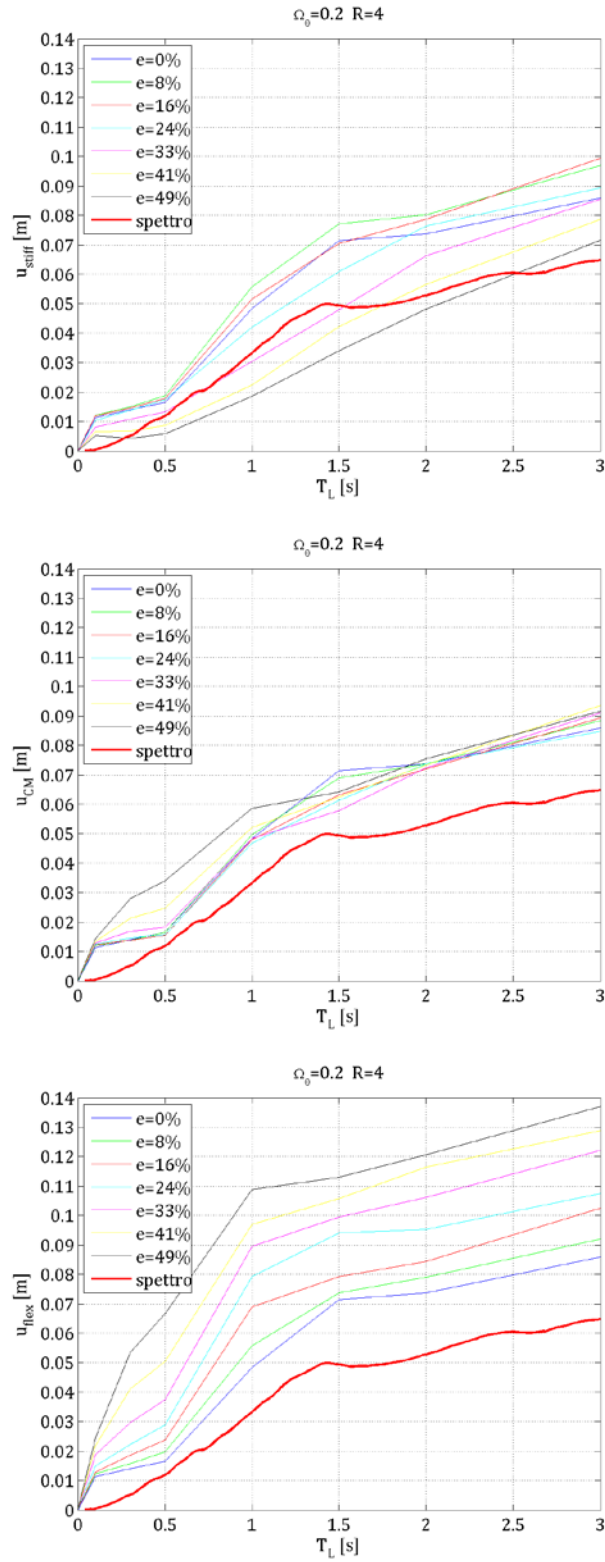
Come precedentemente affermato, si fa notare nuovamente che la linea blu corrispondente alla struttura equivalente non eccentrica a comportamento non lineare individua degli spostamenti molto maggiori rispetto alla linea rossa spessa, proveniente dallo spettro degli spostamenti.



**Figura 5.30** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=0,2$  ed  $R=2$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

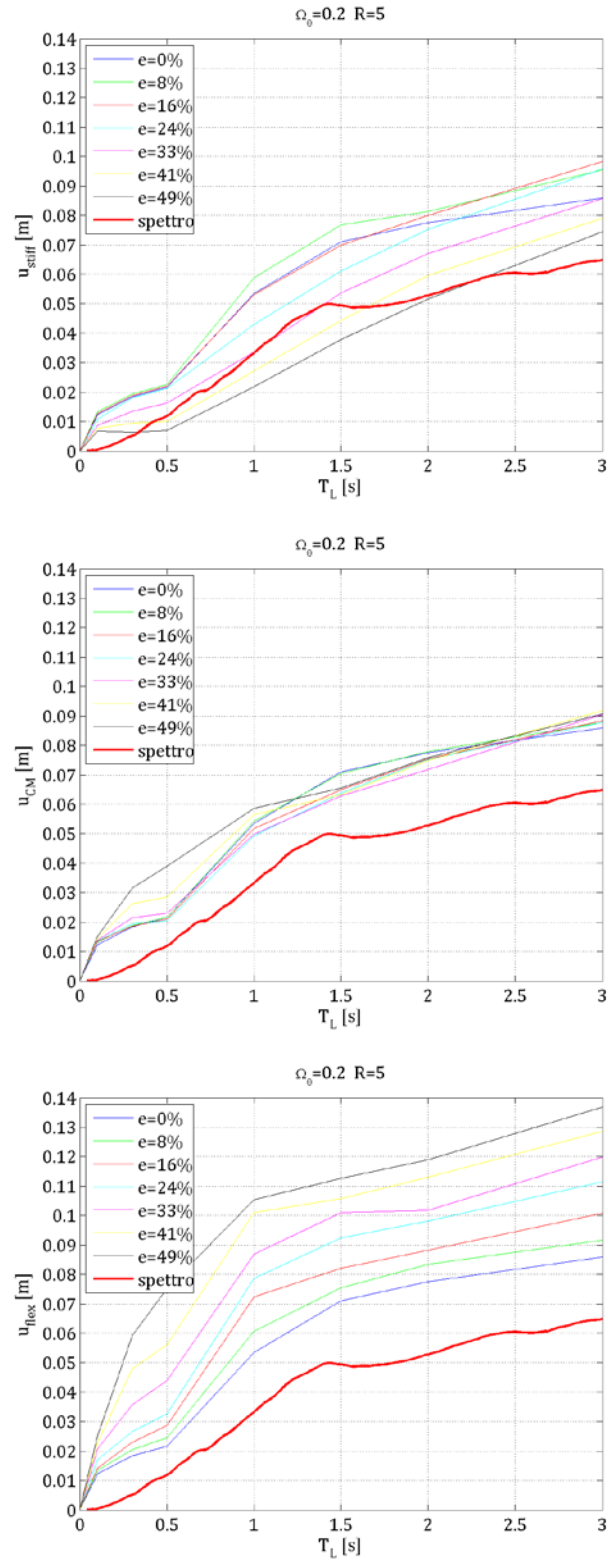


**Figura 5.31** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e  $R=3$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

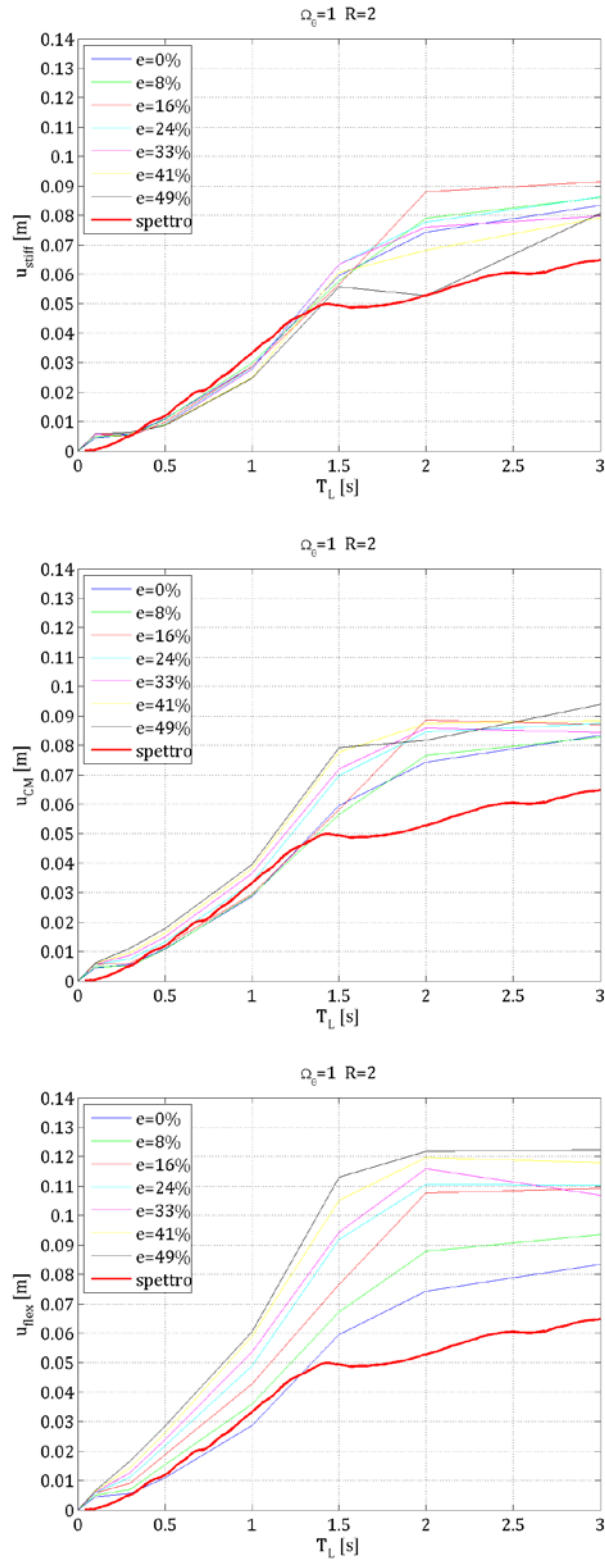


**Figura 5.32** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e  $R=4$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

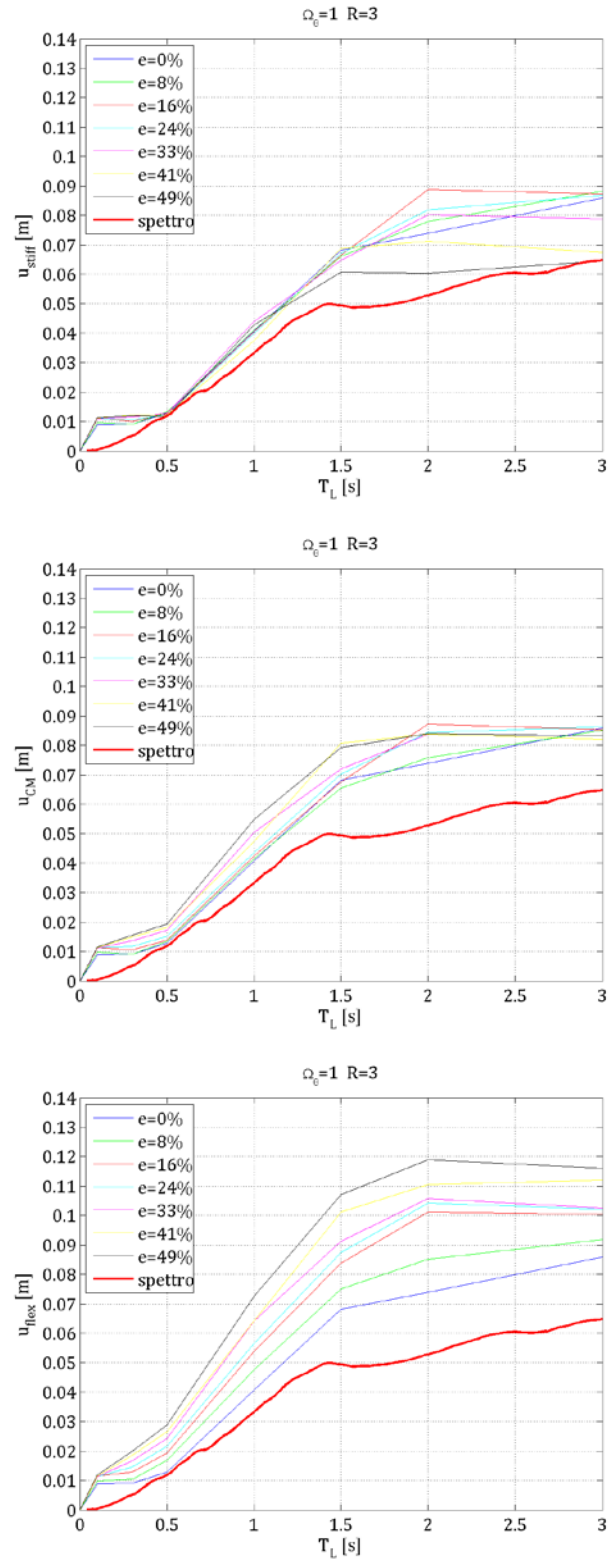




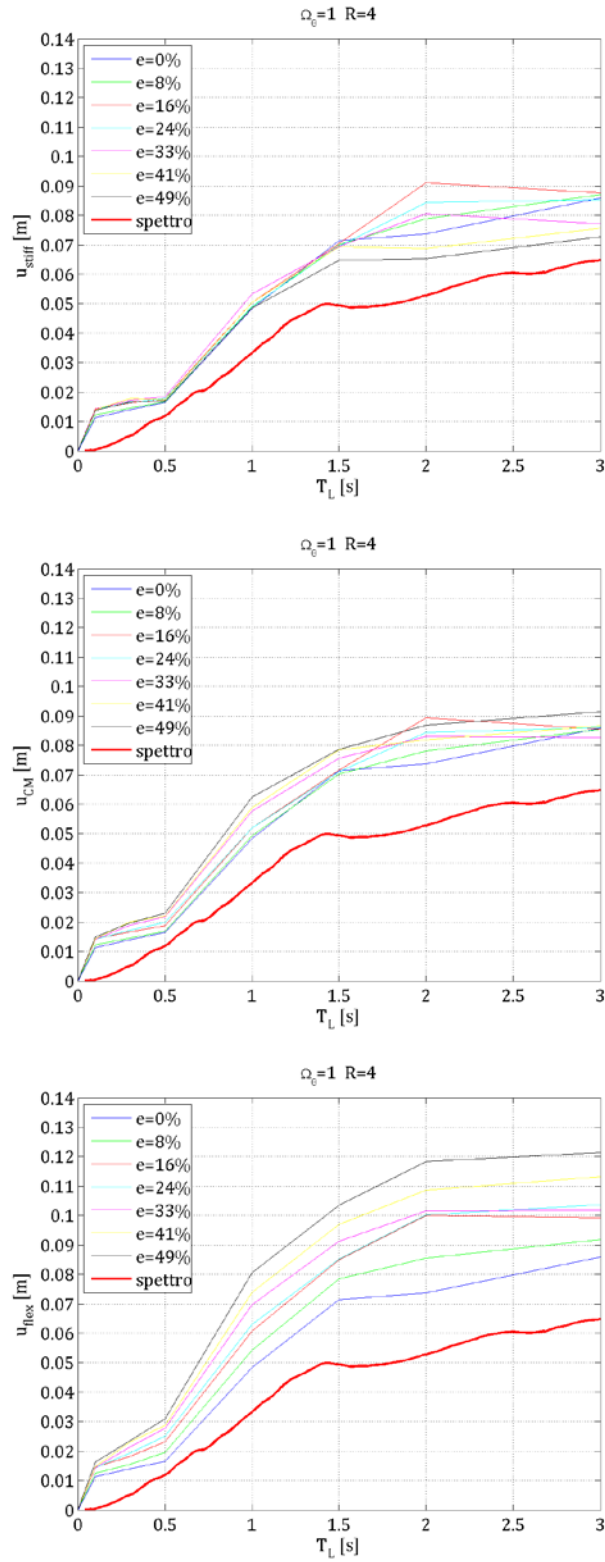
**Figura 5.33** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=0,2$  e  $R=5$  in funzione del periodo longit.  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



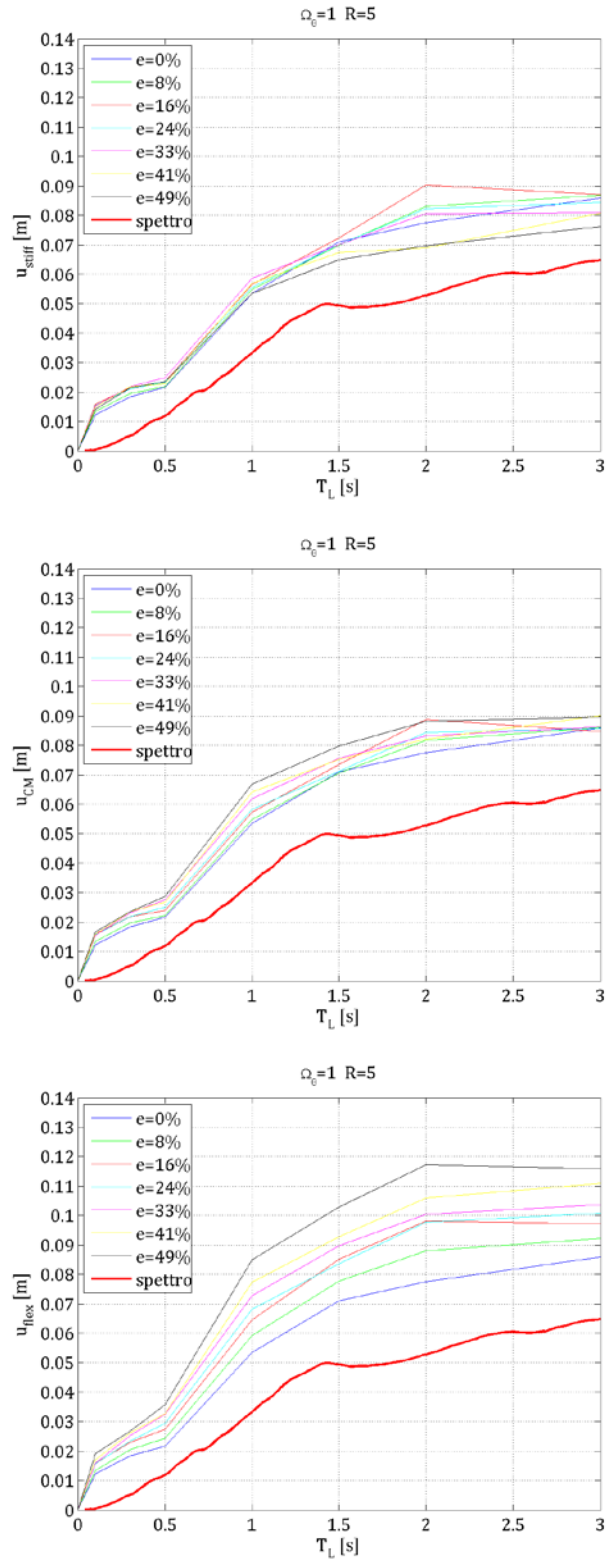
**Figura 5.34** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=1$  e  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



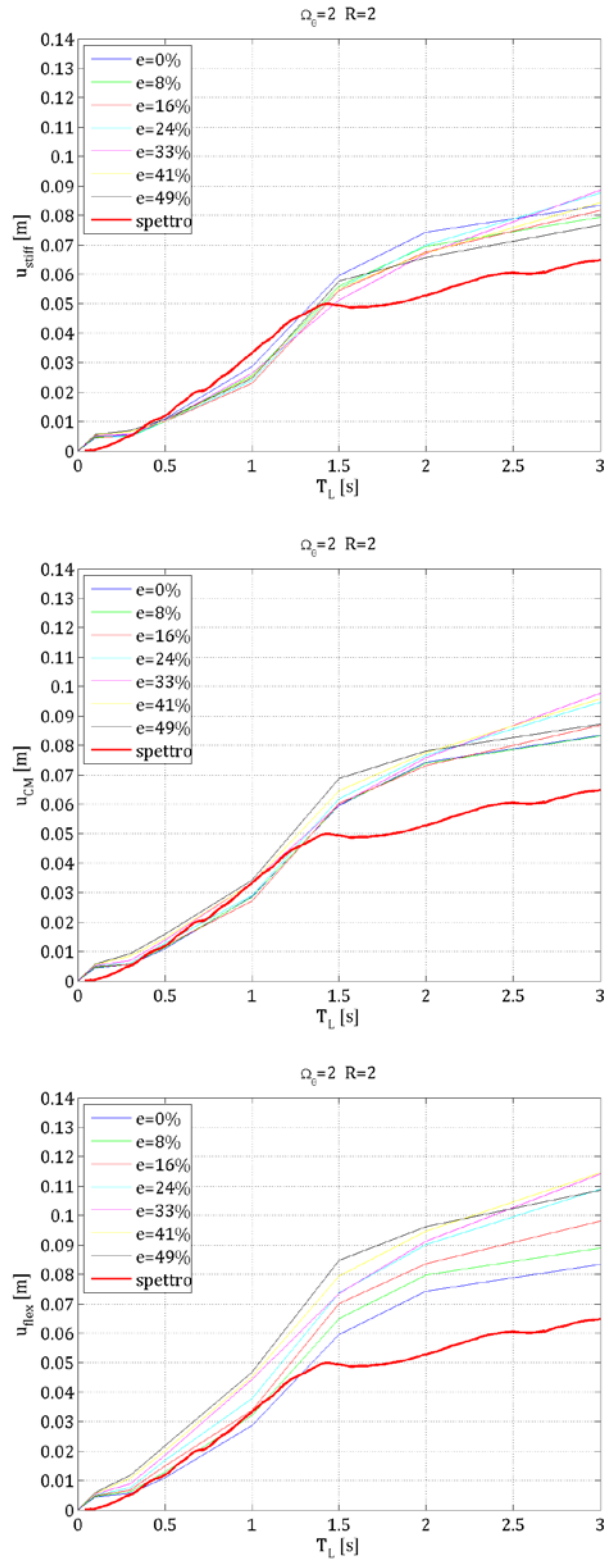
**Figura 5.35** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=1$  e  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



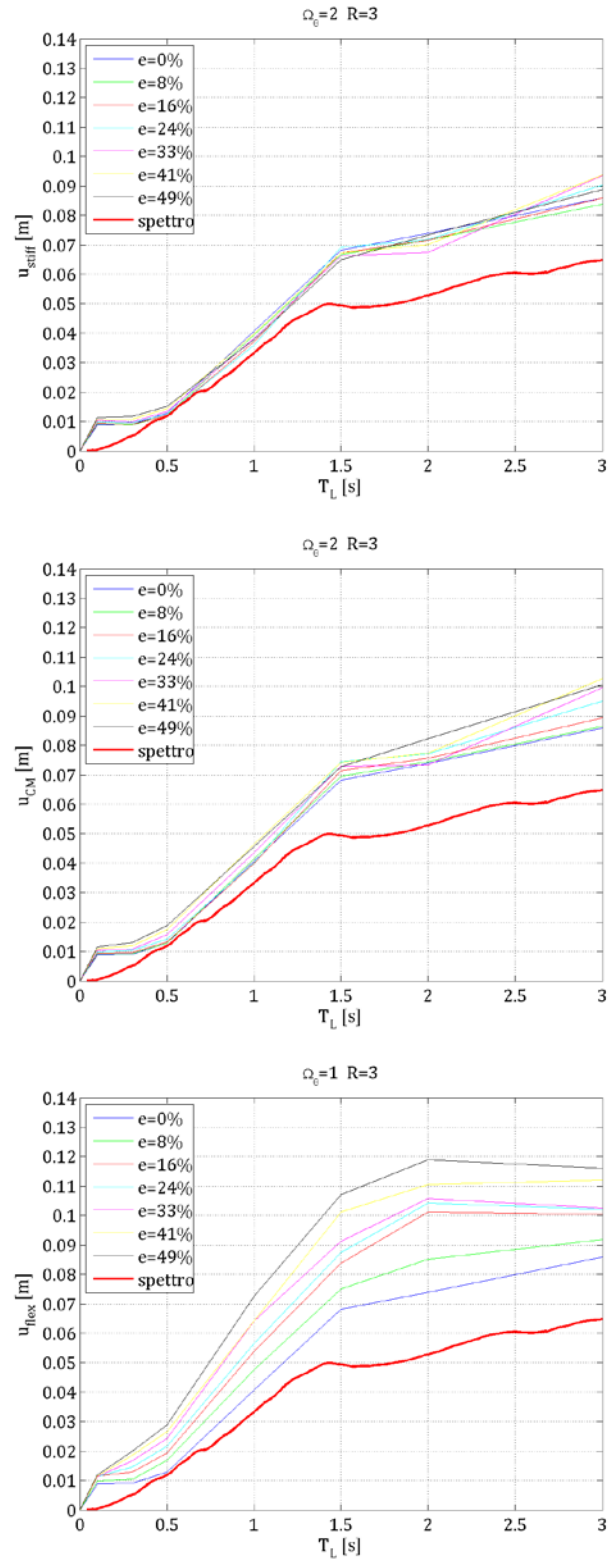
**Figura 5.36** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=1$  e  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



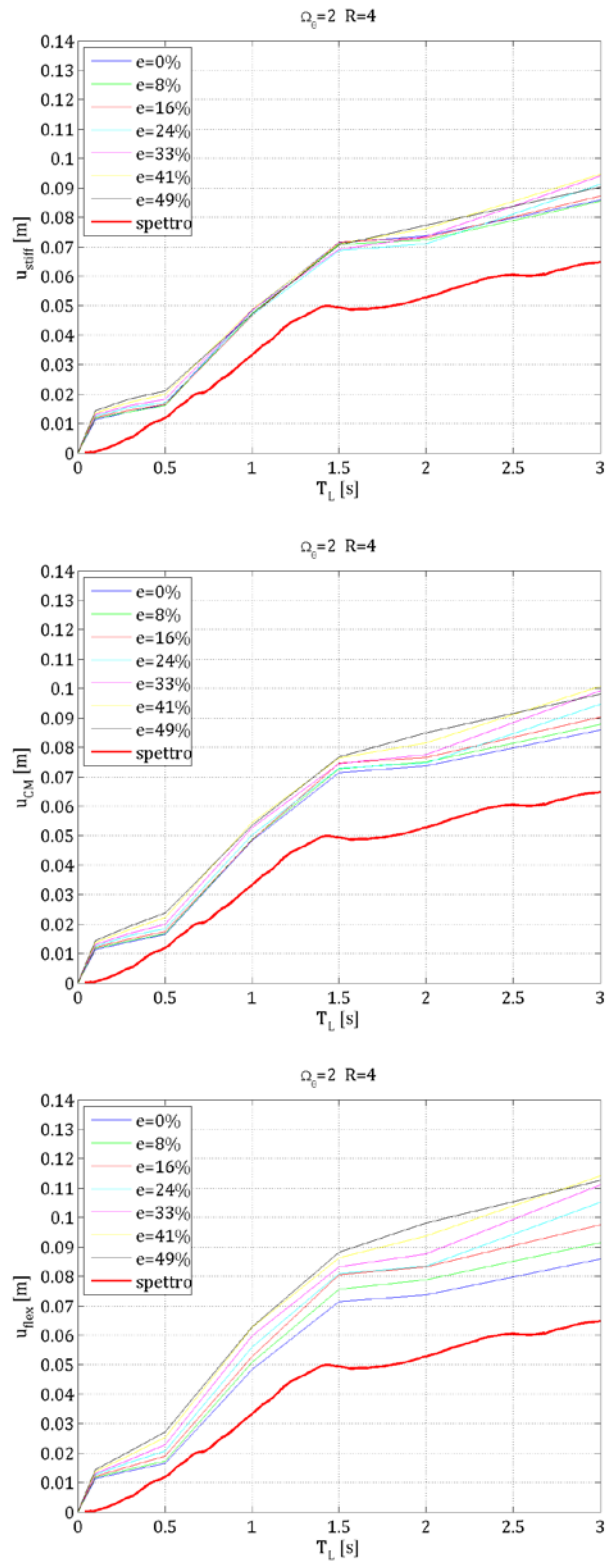
**Figura 5.37** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=1$  e  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 5.38** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=2$  e  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

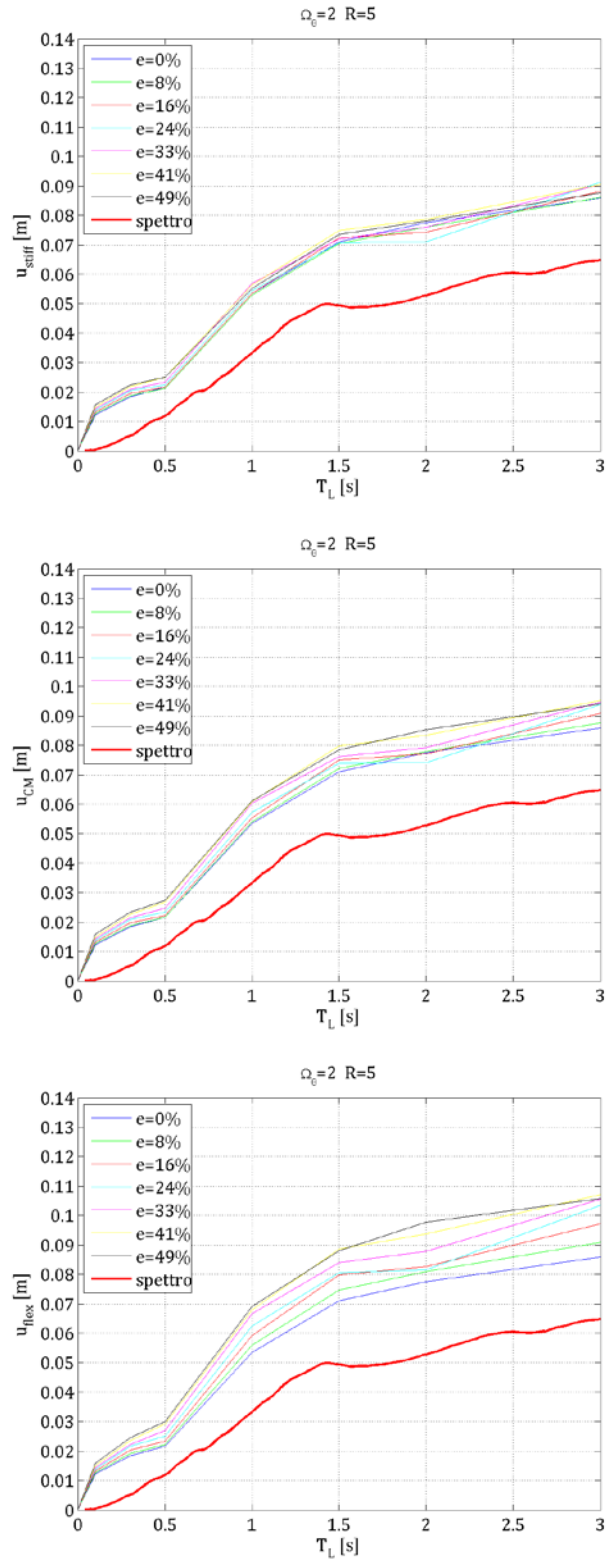


**Figura 5.39** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_\theta=2$  e  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 5.40** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=2$  e  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .





**Figura 5.41** Spostamenti  $u_{stiff}$ ,  $u_{CM}$  e  $u_{flex}$  per strutture non elastiche con  $\Omega_0=2$  e  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

**Strutture torsioflessibili ( $\Omega_\theta = 0, 2$ ) – Figure 5.30, 5.31, 5.32, 5.33**

Nel caso non lineare lo spostamento del *lato stiff* per periodi inferiori a 0,25s è sempre maggiore rispetto allo spostamento spettrale. Per periodi maggiori lo spostamento spettrale risulta quasi sempre inferiore; solamente i modelli con eccentricità relative maggiori al 40% presentano uno spostamento del lato rigido inferiore a quello spettrale.

L'aumento del fattore di riduzione delle forze R non influisce più di tanto sugli spostamenti del *lato stiff*.

$u_{flex}$  per R=2 ed eccentricità pari a 0% e 8% ha gli stessi valori dello spostamento spettrale fino a  $T_L=1,25s$ . Per periodi maggiori le strutture a comportamento non elastico presentano invece spostamenti del *lato flexible* maggiori.

Per fattori di riduzione delle forze R maggiori invece lo spostamento del *lato flexible* delle strutture non elastiche è sempre maggiore rispetto a quello spettrale.

$u_{CM}$  non dipende molto dall'eccentricità della struttura e per R=2 assume gli stessi valori dello spettro elastico fino a  $T_L=1,5s$ . Aumentando R invece  $u_{CM}$  delle strutture non elastiche è sempre maggiore rispetto a quello spettrale.

**Strutture con  $\Omega_\theta = 1$  – Figure 5.34, 5.35, 5.36, 5.37**

Nel caso non lineare lo spostamento del *lato stiff* per periodi inferiori a 0,25s è sempre maggiore rispetto allo spostamento spettrale, per periodi compresi tra 0,25s e 1,4s sono paragonabili. Per periodi superiori invece lo spostamento spettrale risulta sempre inferiore.

L'aumento del fattore di riduzione delle forze R aumenta gli spostamenti del *lato stiff*.

$u_{flex}$  per  $R=2$  ed eccentricità pari a 0% presenta gli stessi valori dello spostamento spettrale fino a  $T_L=1,25s$ . Per periodi maggiori le strutture a comportamento non elastico presentano invece spostamenti del *lato flexible* maggiori.

Per fattori di riduzione delle forze  $R$  maggiori invece lo spostamento del *lato flexible* delle strutture non elastiche è sempre maggiore rispetto a quello spettrale.

Per  $u_{CM}$  possono essere dette le stesse cose di  $u_{flex}$  con la differenza che le curve sono molto vicine tra di loro: l'eccentricità non influenza molto gli spostamenti.

***Strutture torsiorigide ( $\Omega_\theta = 2$ ) - Figure 5.38, 5.39, 5.40, 5.41***

Valgono le stesse cose dette per  $\Omega_\theta = 1$ .

## 6. GLI SPETTRI DEI MAGNIFICATION FACTORS

L'obiettivo delle analisi numeriche descritte al capitolo 5 è stato quello di ottenere, per un'estesa casistica di strutture data dalla combinazione dei parametri fondamentali (di cui al §2.9), gli spettri del parametro  $\delta$  e dei Magnification Factors le cui formule, già precedentemente definite, vengono riproposte qui di seguito:

$$\delta = \frac{u_{y,CM,max}}{u_{y,N-E,max}} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} M_{CM,s} &= \frac{u_{y,stiff,max}}{u_{y,CM,max}} \\ M_{CM,f} &= \frac{u_{y,flex,max}}{u_{y,CM,max}} \\ M_{N-E,s} &= \frac{u_{y,stiff,max}}{u_{y,N-E,max}} \\ M_{N-E,f} &= \frac{u_{y,flex,max}}{u_{y,N-E,max}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

È importante precisare che il valore  $u_{y,N-E,max}$ , cioè lo spostamento spettrale  $S_d(T_L)$  fornito dalla normativa, in questo caso è stato ottenuto dallo spettro degli spostamenti dei 50 sismi utilizzati nella fase analitica.

Il numero non esiguo di tali sismi ha l'obiettivo di assicurare che i risultati ottenuti possano essere generalizzabili e quindi utilizzabili con qualsiasi spettro degli spostamenti, tenendo sempre in conto le variabilità e le approssimazioni presenti ad ogni livello di calcolo.

## 6.1 Caso Lineare

### 6.1.1 Magnification Factors rispetto al Centro di Massa ( $M_{CM,s}$ e $M_{CM,f}$ )

Strutture torsioflessibili ( $\Omega_\theta = 0,2$ ) – Figure 6.1, 6.2, 6.3

$M_{CM,s}$  per strutture torsioflessibili ed indice di smorzamento pari a 0,05 assume valori che, per periodi inferiori a 0,4s sono compresi tra 0,05 e 1,75.

In generale strutture con periodi inferiori a 0,3s ed eccentricità relative superiori al 24% hanno un coefficiente  $M_{CM,s}$  minore di 1; per periodi compresi tra 0,3s ed 1,7s  $M_{CM,s}$  è minore di 1 in strutture con eccentricità relative superiori al 33%. In tutti gli altri casi non descritti sopra  $M_{CM,s}$  è maggiore di 1 (fino al valore massimo di 1,75).

$M_{CM,s}$  per strutture torsioflessibili è influenzato poco dall'aumento dell'indice di smorzamento che ha l'effetto di attenuare un po' le amplificazioni (per indice di smorzamento pari a 0,30 il valore massimo di  $M_{CM,s}$  passa da 0,75 a 0,5).

$M_{CM,f}$  per strutture torsioflessibili ed indice di smorzamento pari a 0,05 non scende quasi mai sotto il valore di 1 tranne che per eccentricità relative inferiori al 16% e periodi superiori ad 1s. Per periodi inferiori ad 1s invece le stesse strutture poco eccentriche sono influenzate dal *period shifting*, hanno cioè un coefficiente  $M_{CM,f}$  che assume valori molto alti: per periodi inferiori a 0,02s si supera il valore di 3. All'aumentare dell'eccentricità il *period shifting* si attenua leggermente fino a scomparire per periodi superiori a circa 0,5s: se per periodi piccoli le strutture ad avere il coefficiente  $M_{CM,f}$  maggiore sono quelle meno eccentriche, a partire dai periodi che vanno da 0,3s ad 1s la situazione si inverte e più una struttura è eccentrica più amplifica gli spostamenti del centro del lato flessibile rispetto a quello del centro di massa. Per strutture con eccentricità superiore al 16% e periodi superiori ad 1,2s il valore di  $M_{CM,f}$  è compreso tra 1 e 1,7.

L'aumento dell'indice di smorzamento ha l'effetto di ridurre i valori di limite superiore del coefficiente  $M_{CM,f}$ .

*Strutture con  $\Omega_\theta = 1$  – Figure 6.4, 6.5, 6.6*

$M_{CM,s}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  è praticamente sempre minore di 1, tranne che nel caso di strutture con eccentricità inferiori al 16% con periodi superiori ad 1s circa. In generale maggiore è l'eccentricità minore è  $M_{CM,s}$ , cioè minore è lo spostamento longitudinale del lato rigido della struttura rispetto a quello del suo centro di massa. All'aumentare del periodo i valori di  $M_{CM,s}$  tendono al valore unitario.

L'aumento dell'indice di smorzamento ha l'effetto di ridurre i valori di limite superiore del coefficiente  $M_{CM,s}$  che a partire da  $\xi = 0,15$  assume tutti valori inferiori o uguali all'unità.

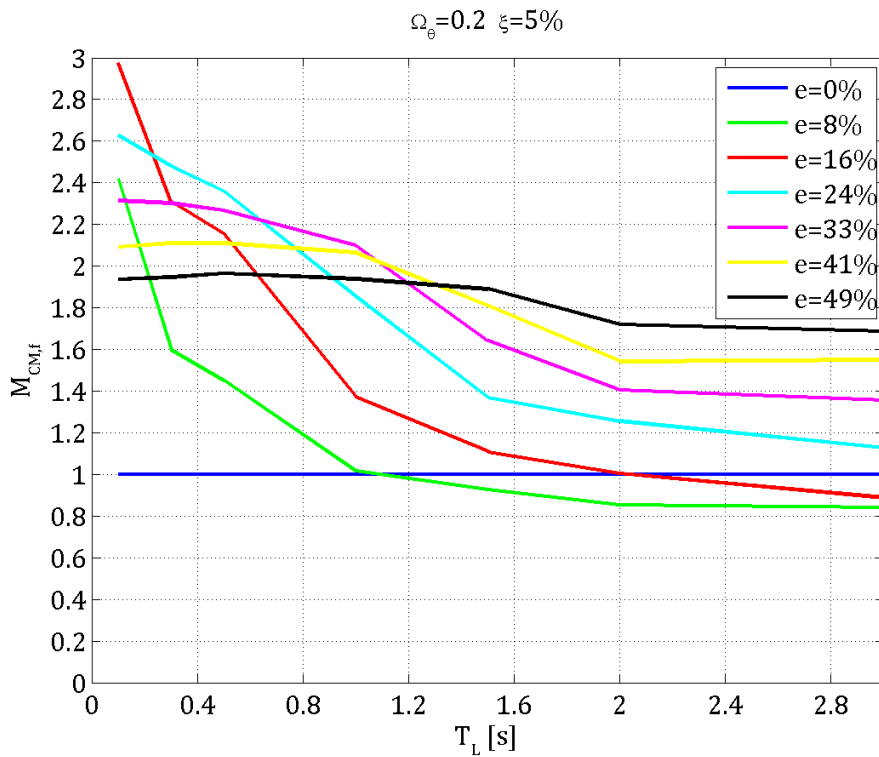
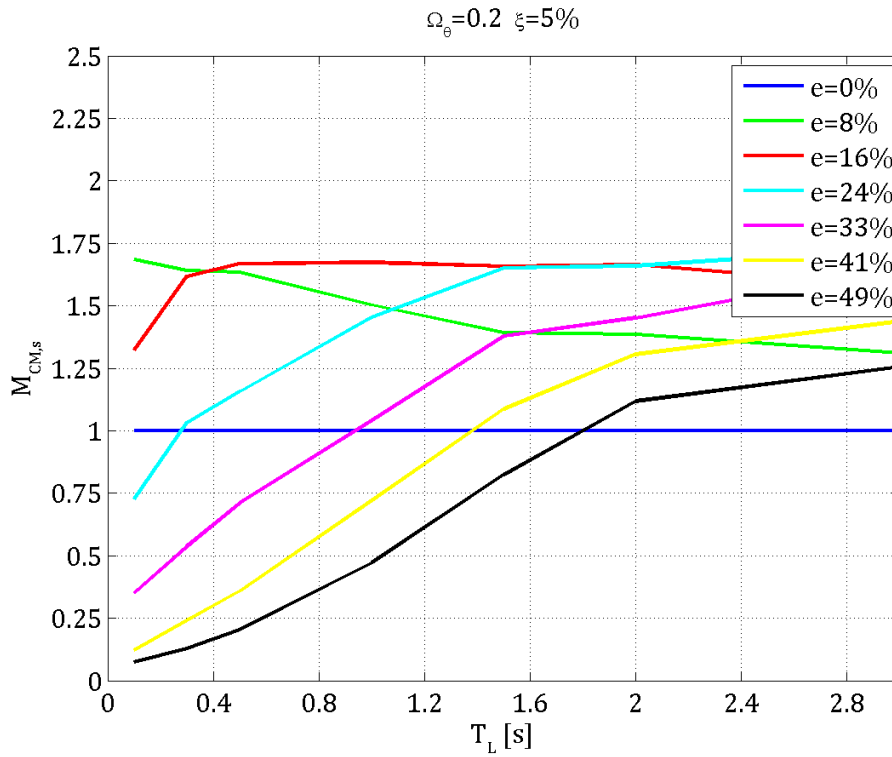
$M_{CM,f}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  ed eccentricità relative superiori al 16% si assesta intorno al valore di 1,8, indipendentemente dal periodo longitudinale della struttura, dal valore di eccentricità relativa e di indice smorzamento.

Per eccentricità relative inferiori al 16% il fattore  $M_{CM,f}$  è sempre indipendente da periodo longitudinale della struttura ma assume valori sempre più prossimi all'unità.

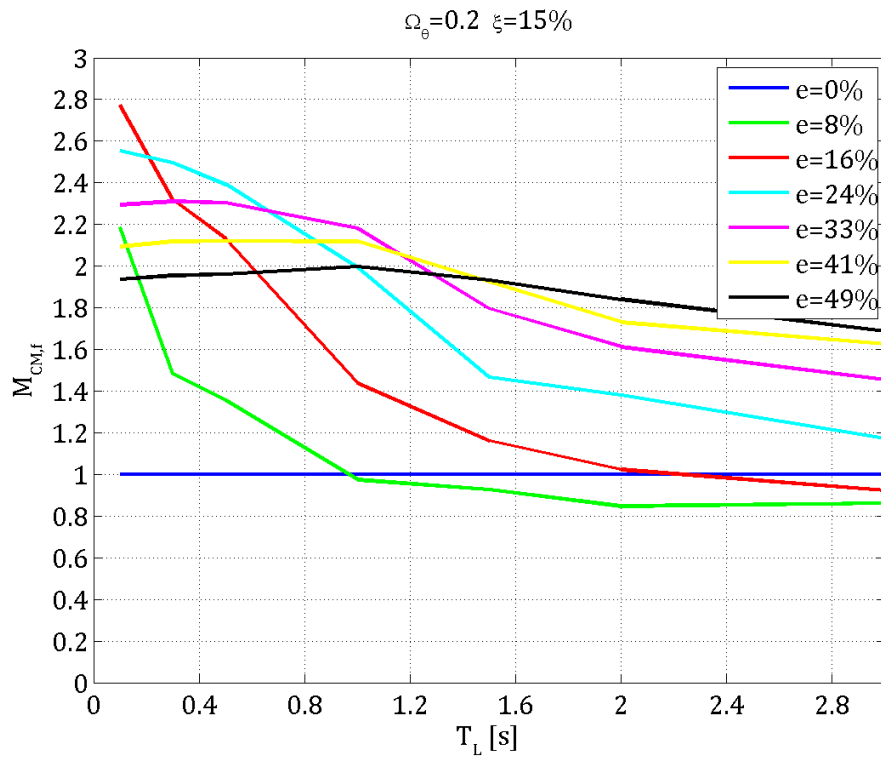
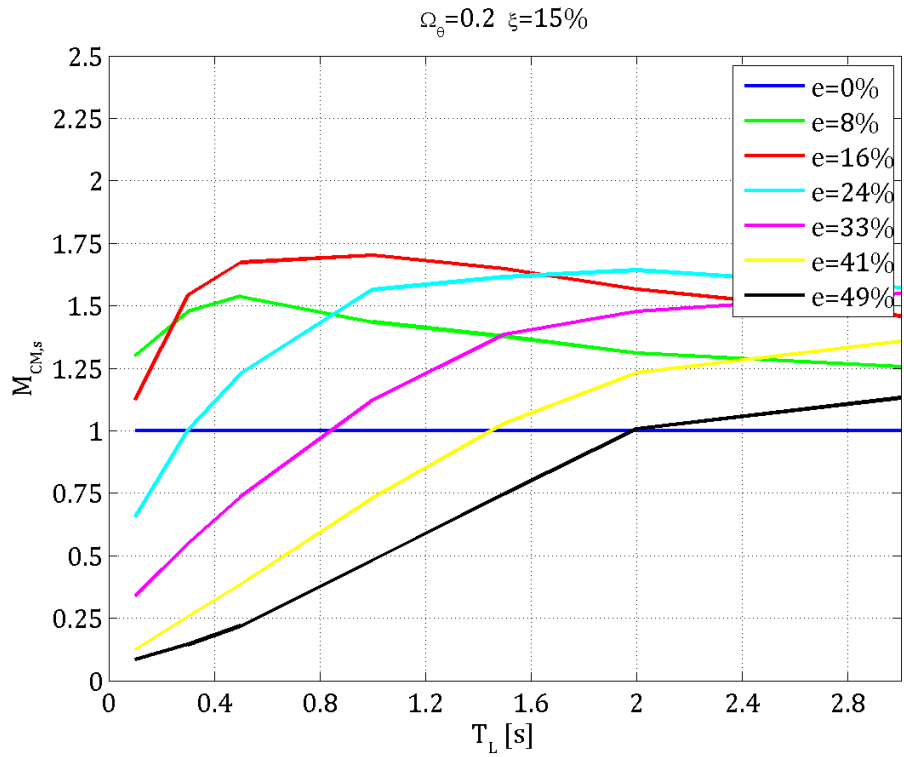
*Strutture torsiorigide ( $\Omega_\theta = 1,5$  e  $2$ ) – Figure 6.7, 6.8, 6.9 e 6.10, 6.11, 6.12*

Per quanto riguarda strutture molto torsiorigide l'andamento dei fattori  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  è pressoché indipendente dal periodo longitudinale e dall'indice di smorzamento e non cambia molto rispetto a quanto detto per strutture con  $\Omega_\theta = 1$ .

In generale  $M_{CM,s}$  è sempre minore di 1 e cala all'aumentare dell'eccentricità, assumendo valori che vanno da 1 a 0,4.

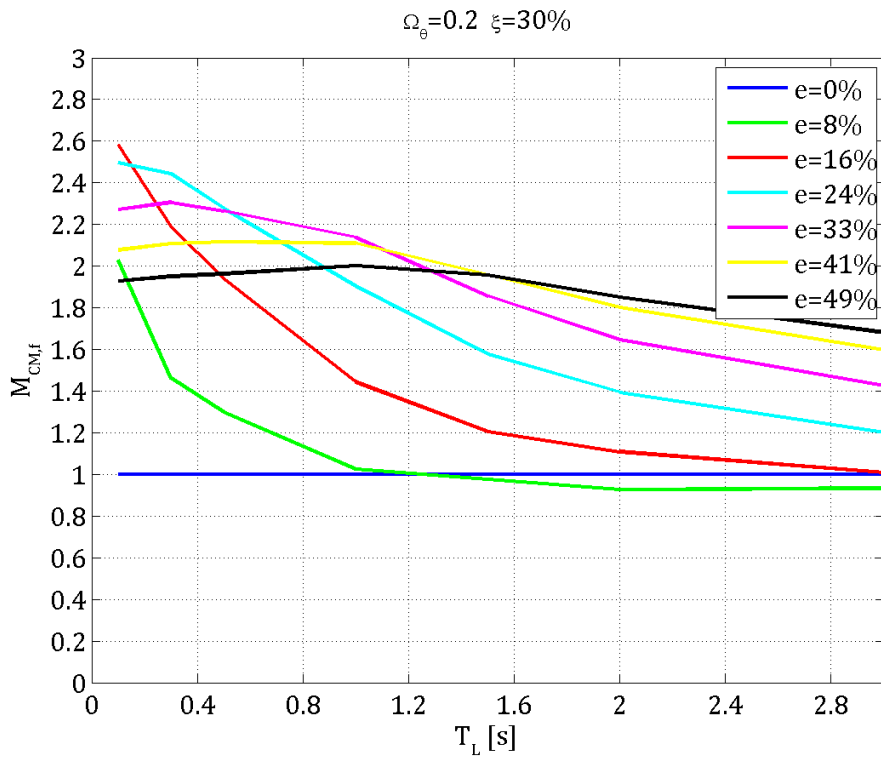
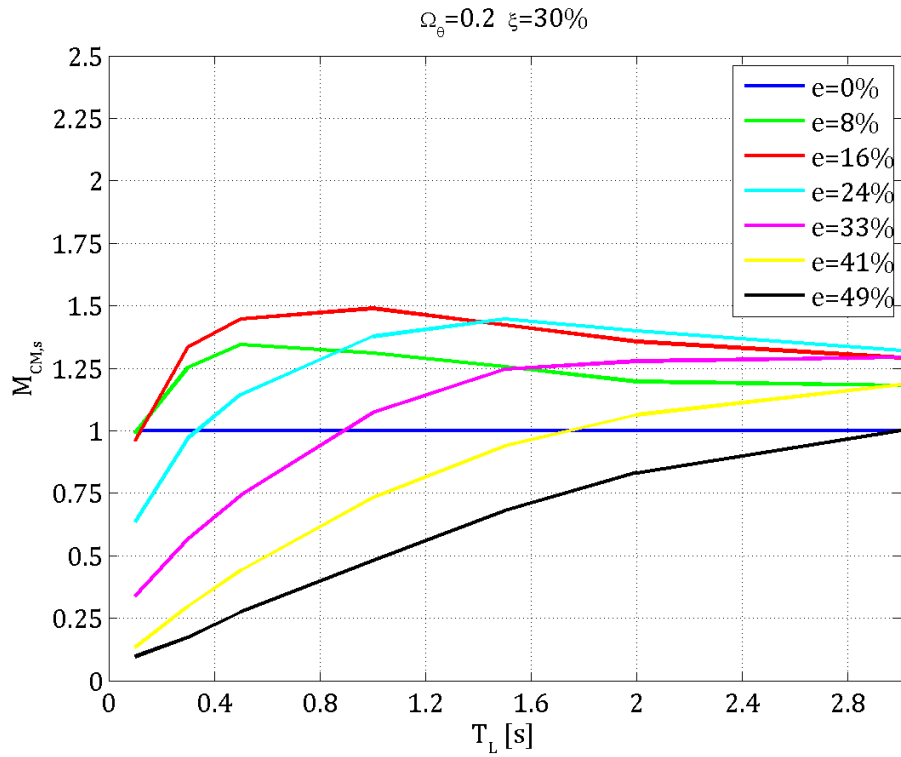


**Figura 6.1**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

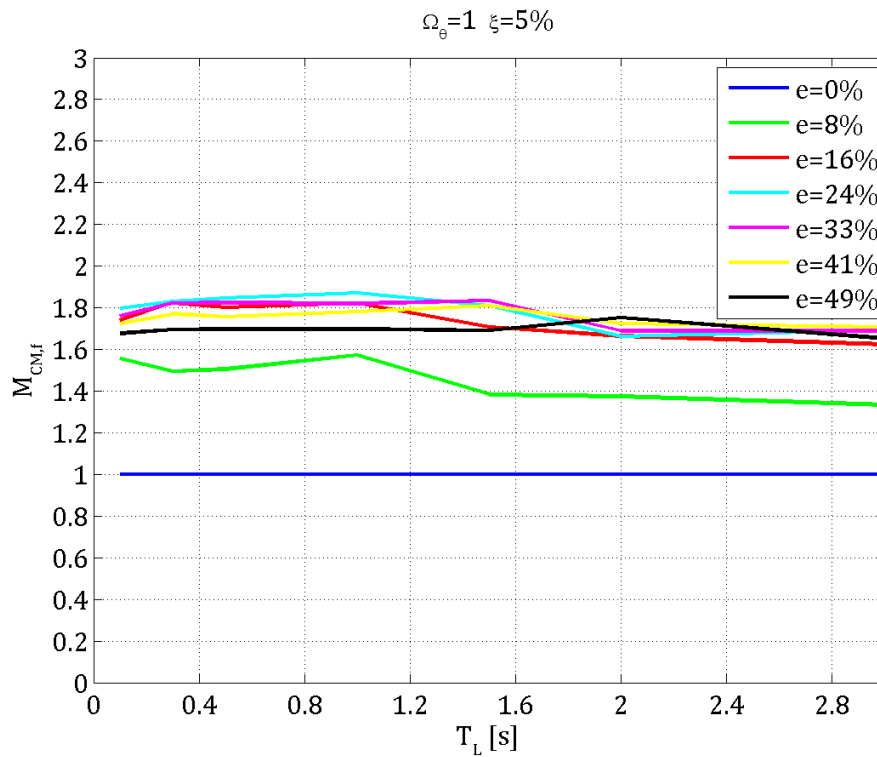
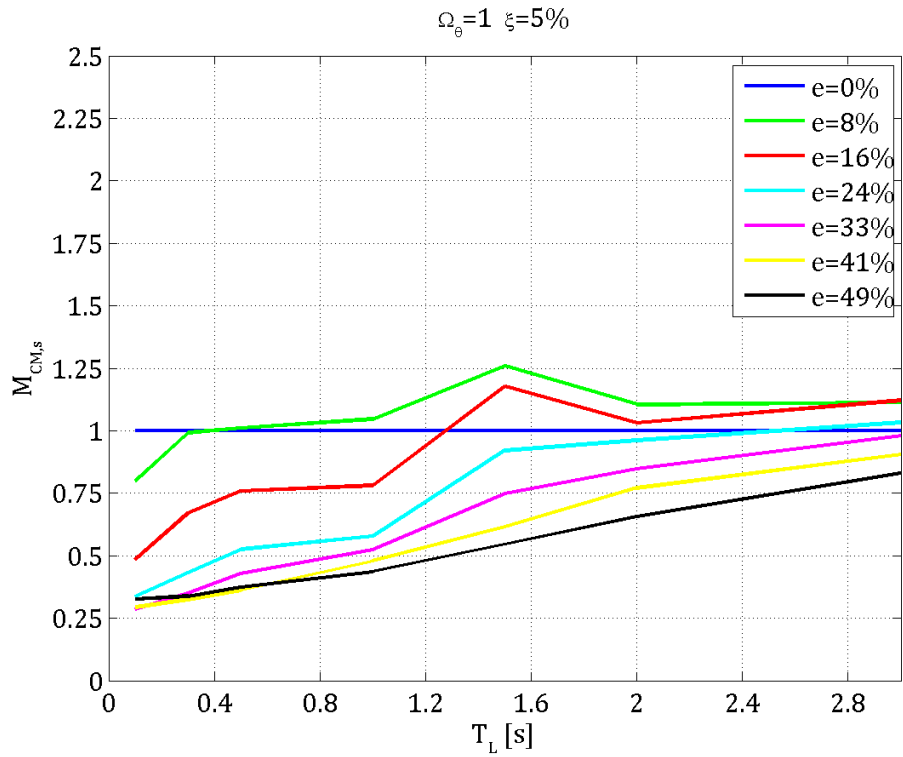


**Figura 6.2**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

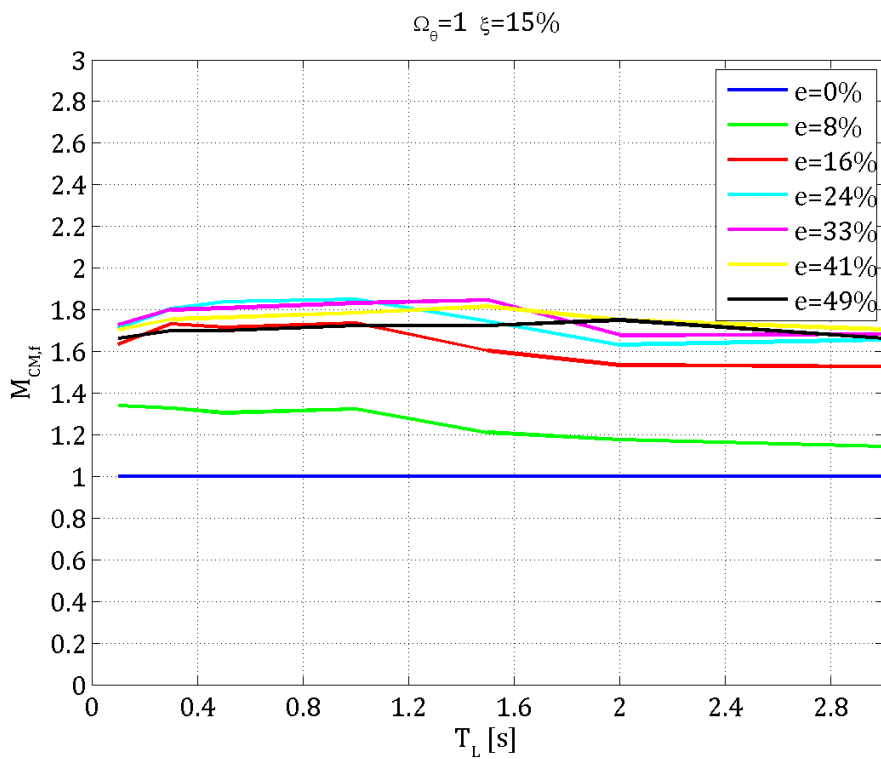
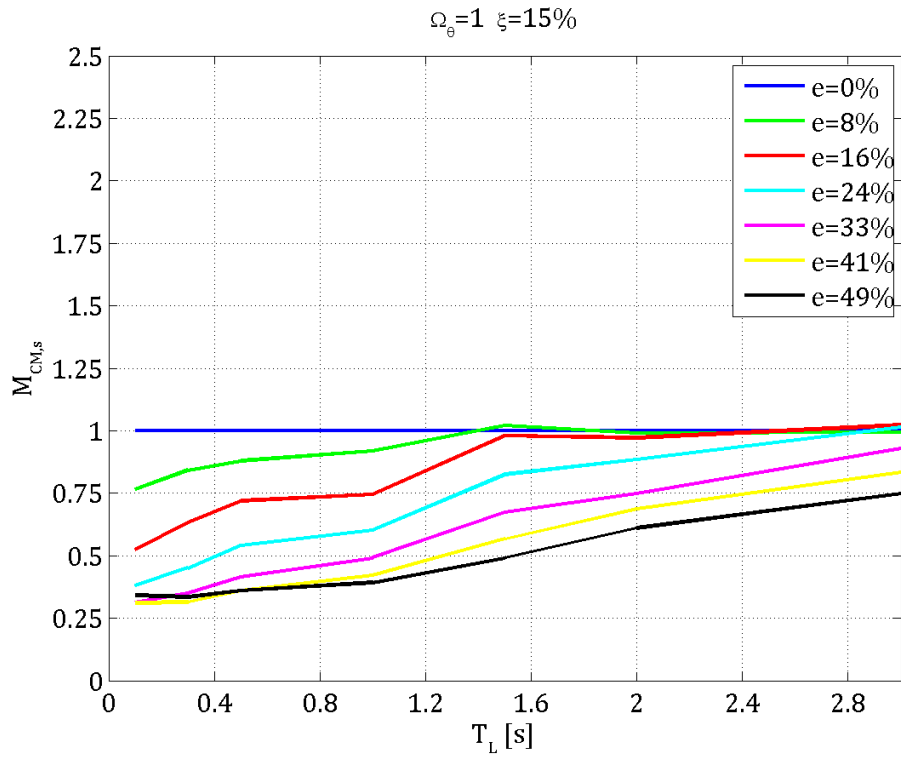




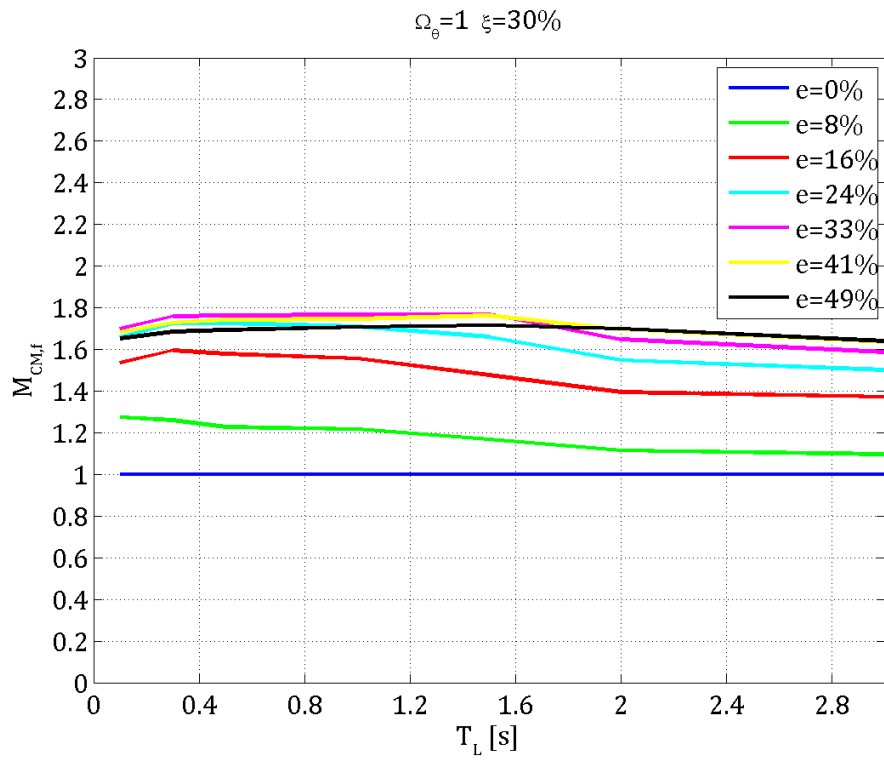
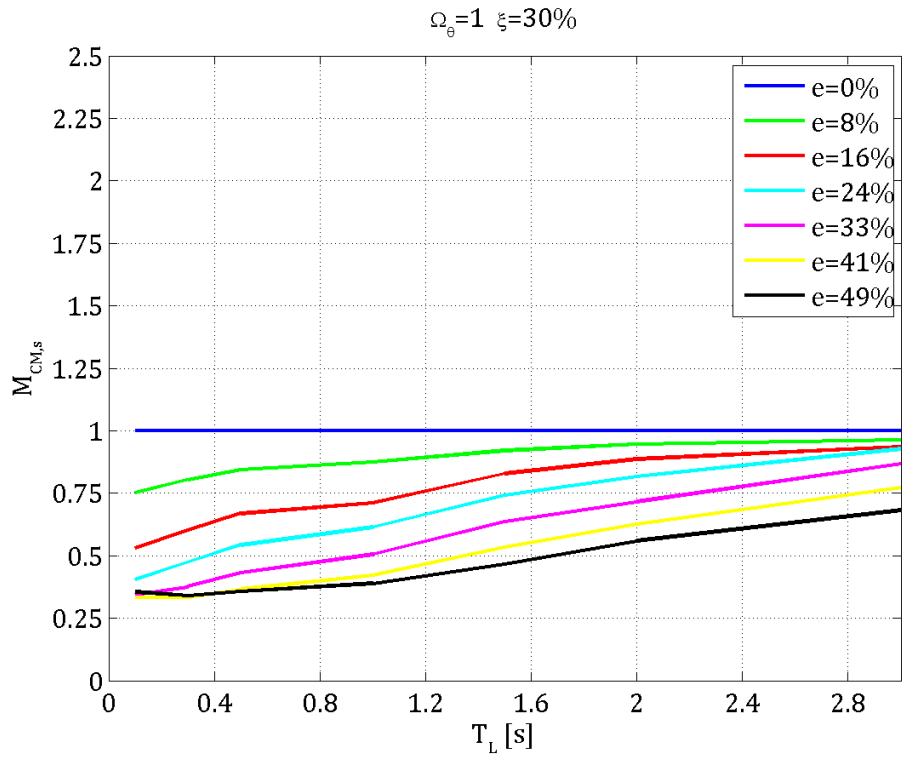
**Figura 6.3**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



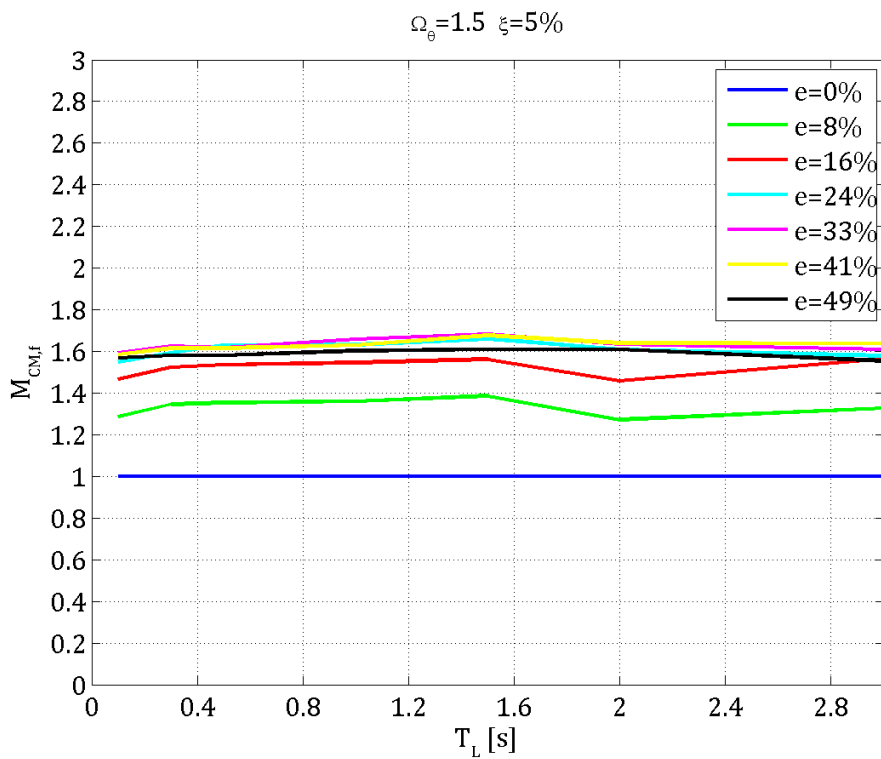
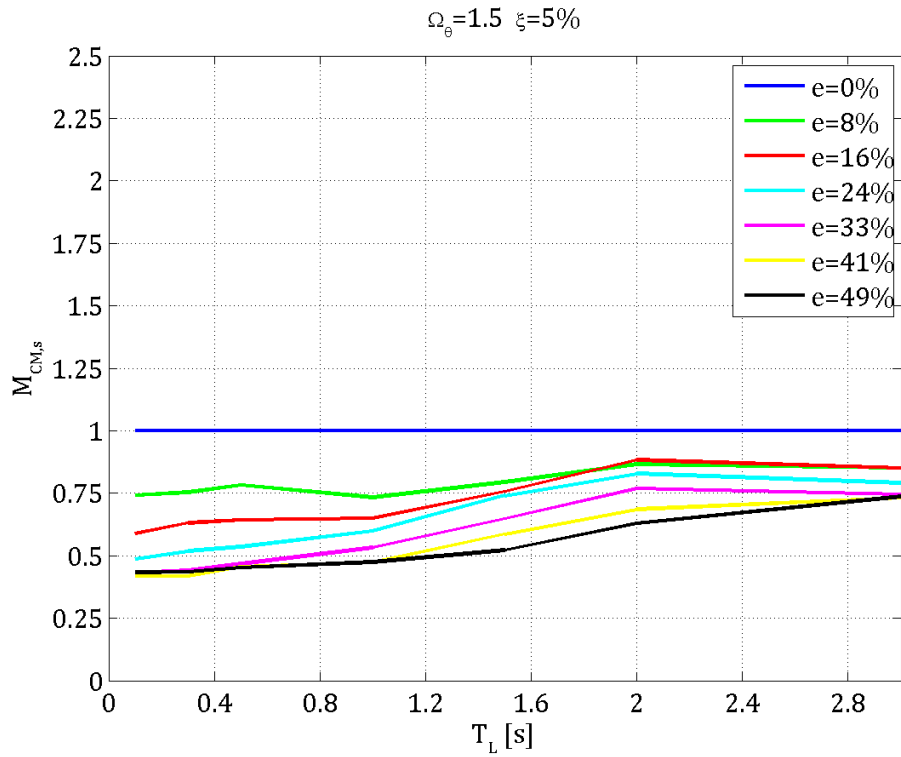
**Figura 6.4**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



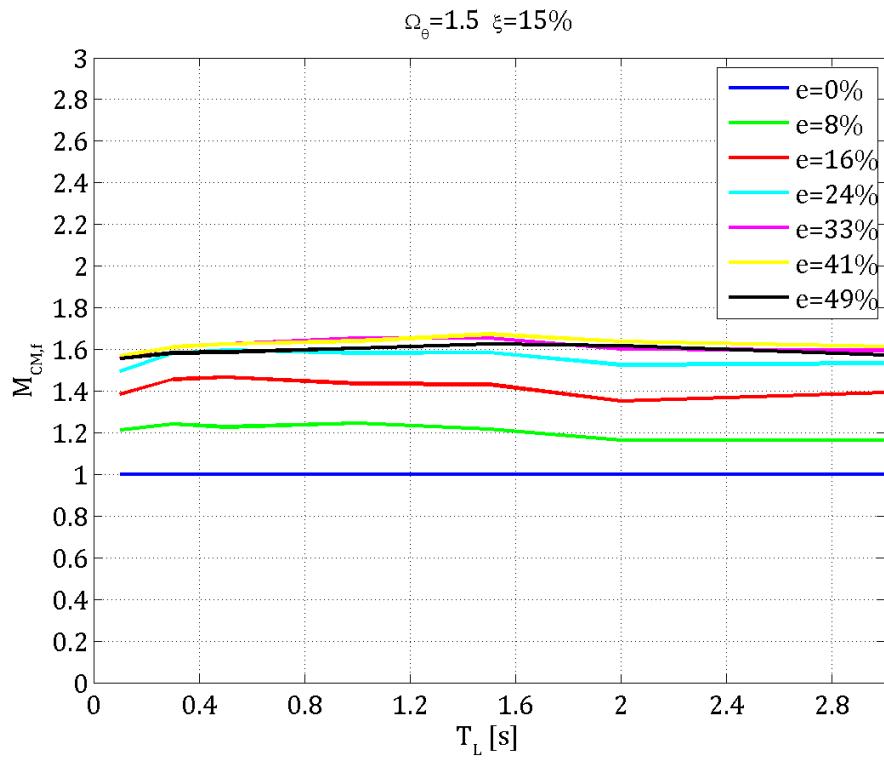
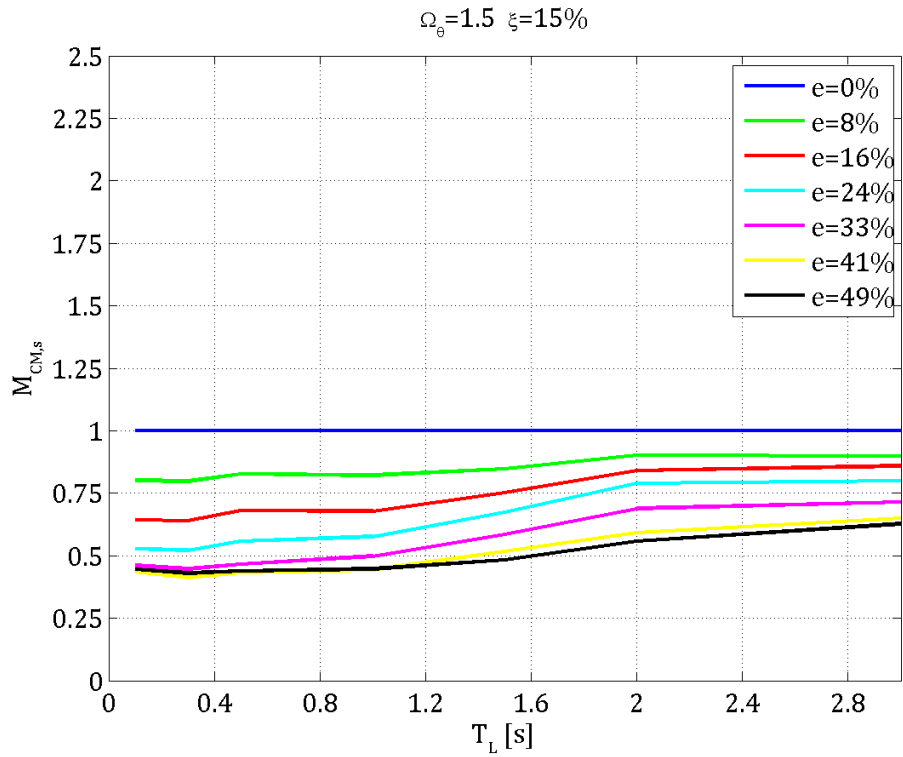
**Figura 6.5**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



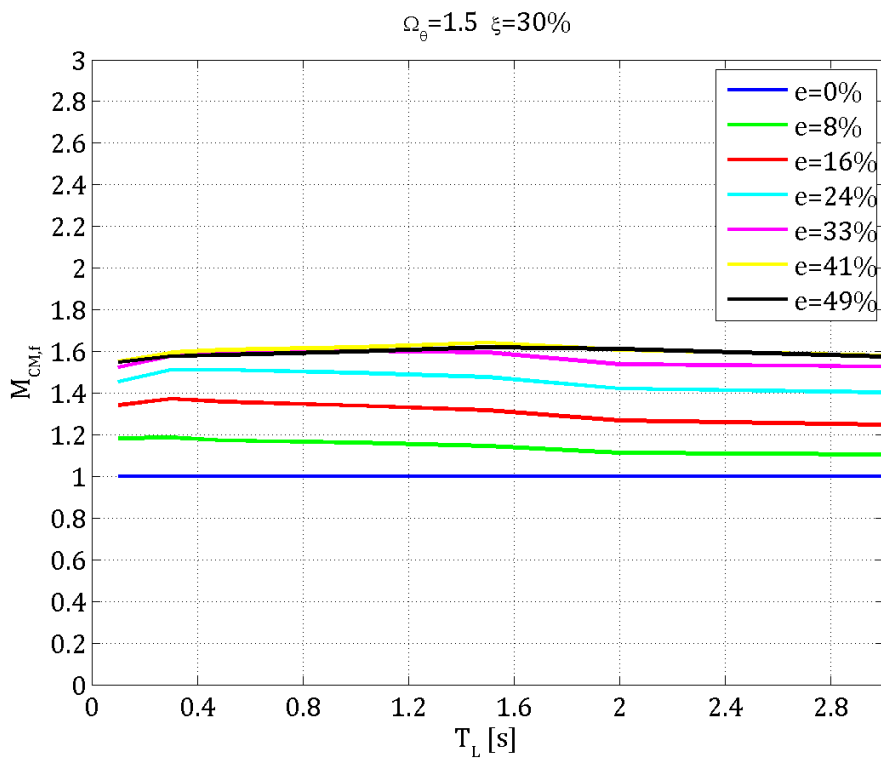
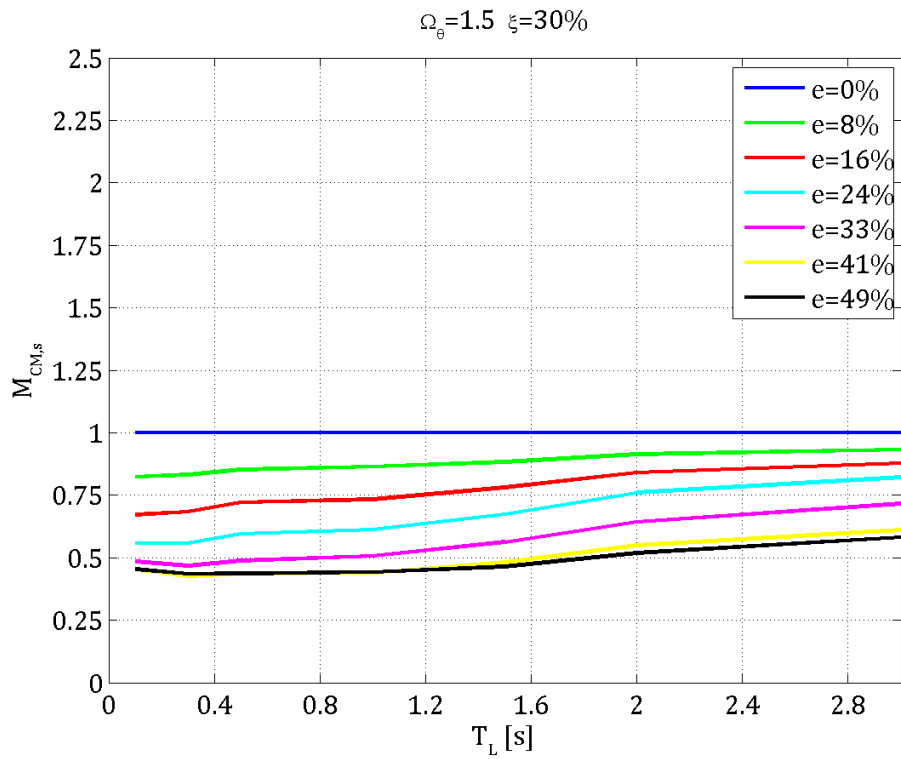
**Figura 6.6**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



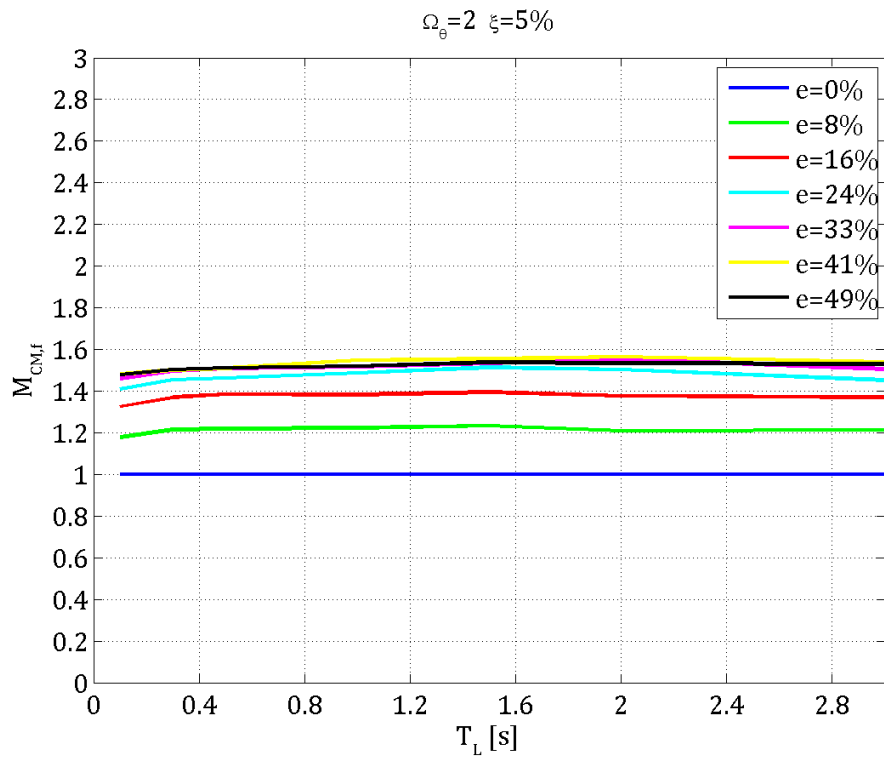
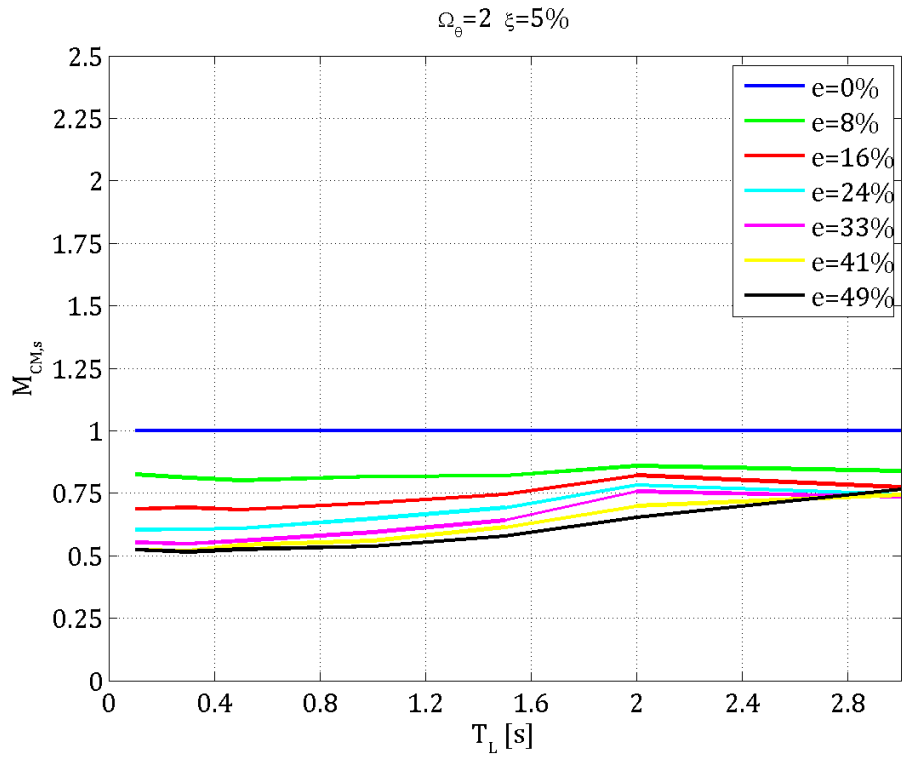
**Figura 6.7**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1,5$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.8**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1,5$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

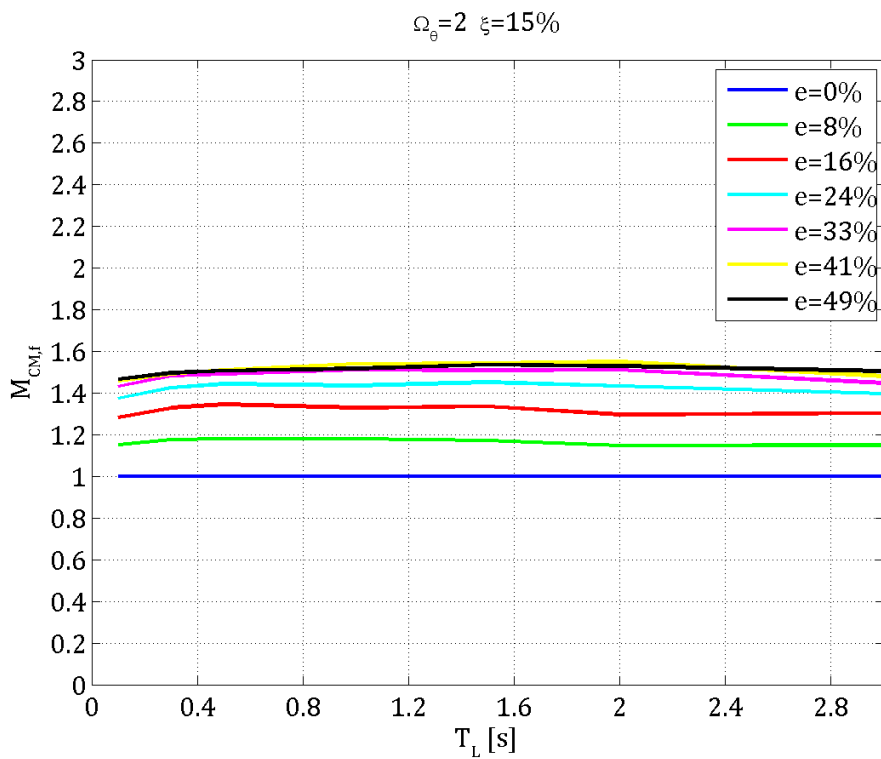
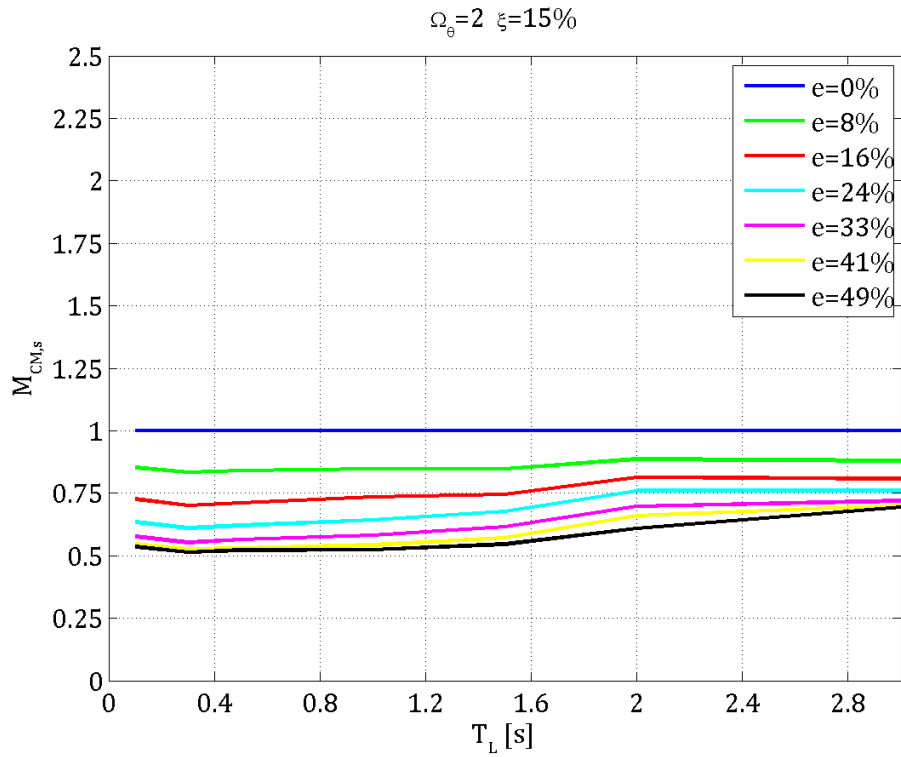


**Figura 6.9**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1,5$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

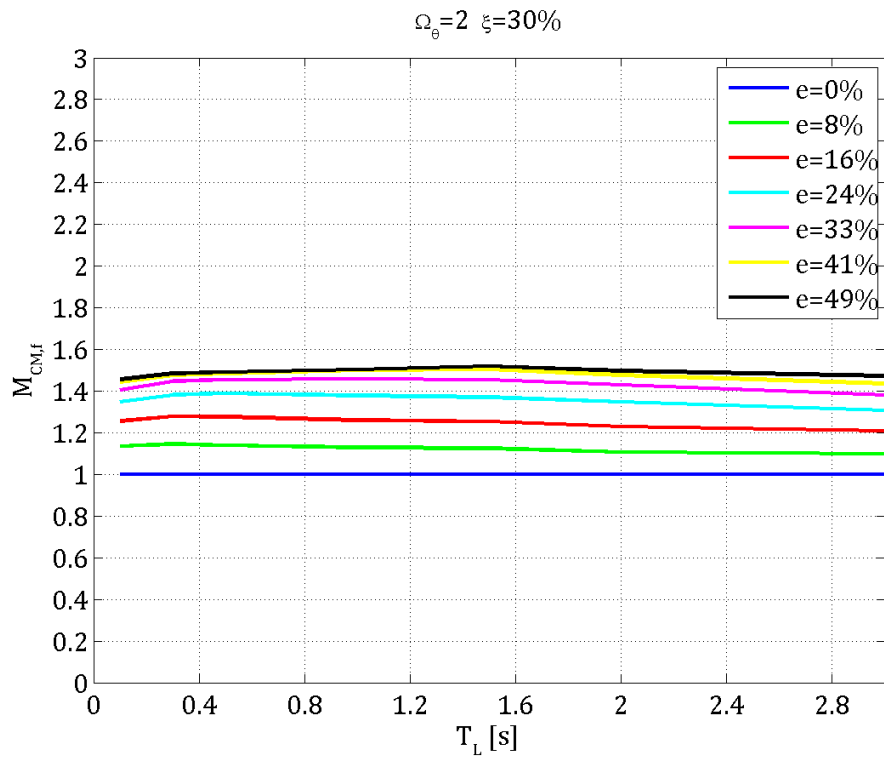
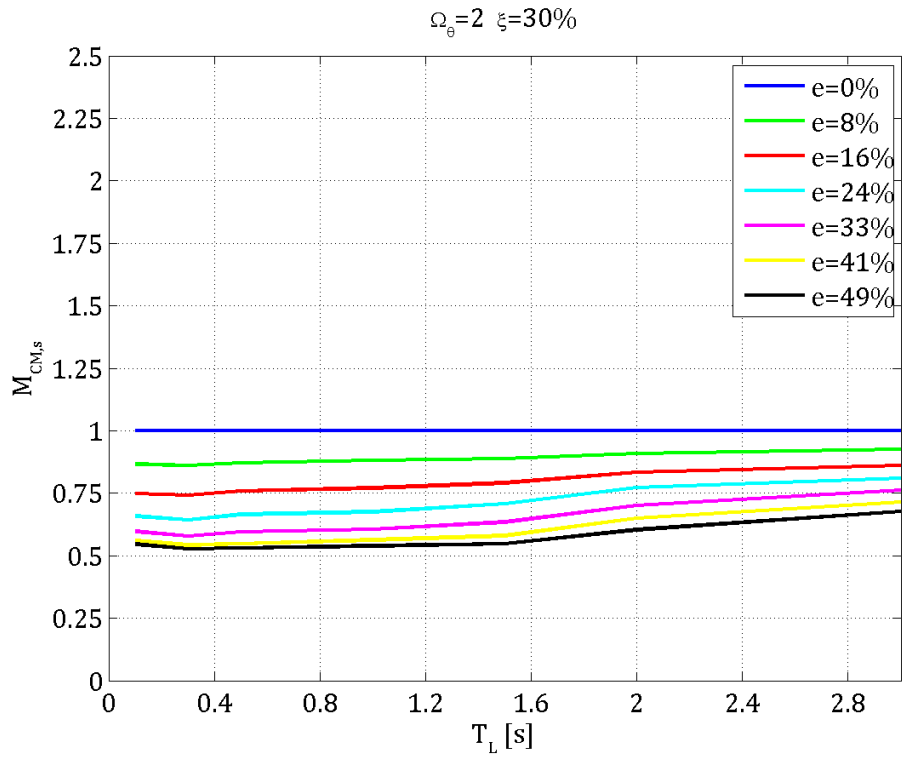


**Figura 6.10**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=2$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .





**Figura 6.11**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=2$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.12**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=2$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

6.1.2 Magnification Factors rispetto al sistema Non Eccentrico equivalente ( $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$ )

Strutture torsioflessibili ( $\Omega_\theta = 0,2$ )– Figure 6.13, 6.14, 6.15

$M_{NE,s}$  per strutture torsioflessibili ed indice di smorzamento pari a 0,05 è maggiore per eccentricità relative pari al 16% e va via via calando all'aumentare dell'eccentricità. Per valori di eccentricità relativa superiori al 41% è sempre minore di 1. Per periodi piccoli l'eccentricità influenza maggiormente il valore di tale coefficiente, che nel caso di periodi pari a 0,1s va da 2,25 per  $e = 16\%$  a 0,6 per  $e = 49\%$ . All'aumentare del periodo longitudinale la variabilità dei valori diminuisce e a partire da  $T_L = 2s$  non dipende più da periodo stesso.

L'aumento dello smorzamento ha l'effetto di appiattare gli andamenti che diventano sempre più indipendenti dal periodo longitudinale della struttura e di diminuire l'amplificazione degli spostamenti del lato rigido (con indice di smorzamento pari a 0,30 il valore massimo che con  $\xi = 0,05$  era pari a 2,25 è passato a 1,4).

$\delta$  per strutture torsioflessibili ed indice di smorzamento pari a 0,05 assume andamenti che rispecchiano in pieno il comportamento strutturale dato dal *period shifting* che si verifica per periodi longitudinali piccoli (minori di 0,4s): all'aumentare dell'eccentricità relativa il parametro  $\delta$ , che inizialmente assume valore unitario, dimostra come lo spostamento longitudinale delle strutture molto eccentriche sia amplificato anche di 8 volte rispetto allo spostamento rispettivo della struttura non eccentrica equivalente. Per periodi superiori ad 1s invece il fattore  $\delta$  assume valore unitario indipendentemente dal periodo stesso e dall'eccentricità relativa. Si fa notare come il coefficiente  $\delta$  non sia mai inferiore all'unità.

Stessa cosa si può affermare per il coefficiente  $M_{NE,f}$ : per periodi inferiori a 0,8s aumenta asintoticamente al calare del periodo assumendo valori tanto maggiori quanto maggiore è l'eccentricità. Per periodi maggiori di 1,2s l'effetto del *period shifting* svanisce e il fattore  $M_{NE,f}$  assume valore pressoché unitario indipendentemente dal periodo e dall'eccentricità relativa. Anche il coefficiente  $M_{NE,f}$  non scende mai sotto il valore di 1.

L'aumento dell'indice di smorzamento non influenza il comportamento dato dal *period shifting* ma ha l'effetto di abbassare un po' i valori di  $\delta$  ed  $M_{NE,f}$  mantenendo comunque gli andamenti.

*Strutture con  $\Omega_\theta = 1$  – Figure 6.16, 6.17, 6.18*

$M_{NE,s}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  è praticamente sempre compreso tra 0,5 ed 1, in linea di massima assume valori maggiori per eccentricità piccole ed è pressoché indipendente dal periodo longitudinale della struttura.

L'aumento dell'indice di smorzamento non influenza quasi i valori di tale coefficiente.

$\delta$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  ha andamenti influenzati dal *period shifting* ma in modo molto minore rispetto a strutture torsioflessibili. Per periodi inferiori ad 1s man mano che le strutture diventano più rigide il valore di  $\delta$  aumenta tanto più quanto la struttura eccentrica. Il valore massimo si ha per strutture con eccentricità relativa del 49% e periodo di 0,1s ed è pari a poco più di 3. Per periodi superiori ad 1s il fattore  $\delta$  assume valore pressoché unitario indipendentemente dal periodo e dall'eccentricità relativa.

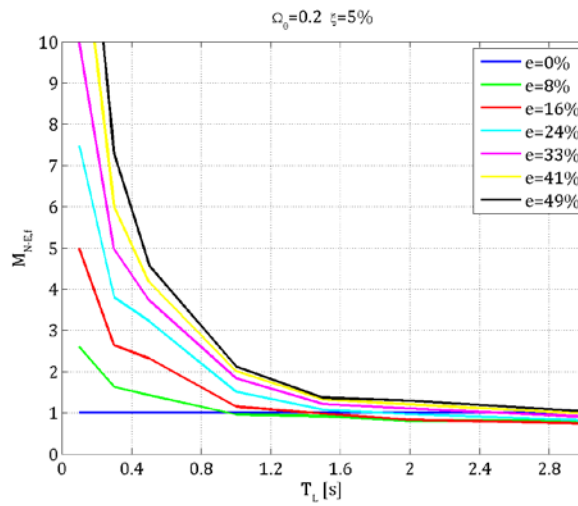
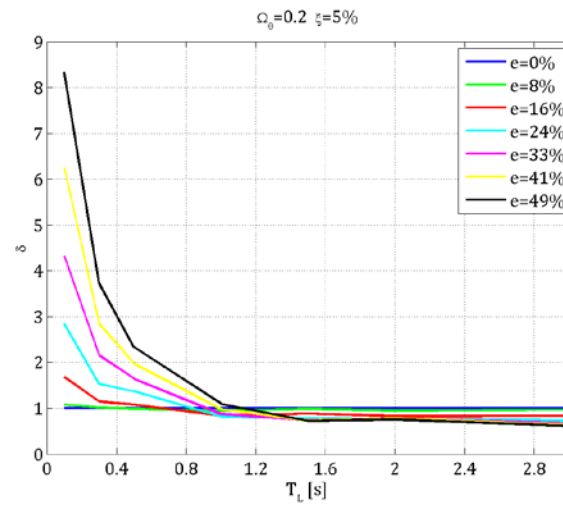
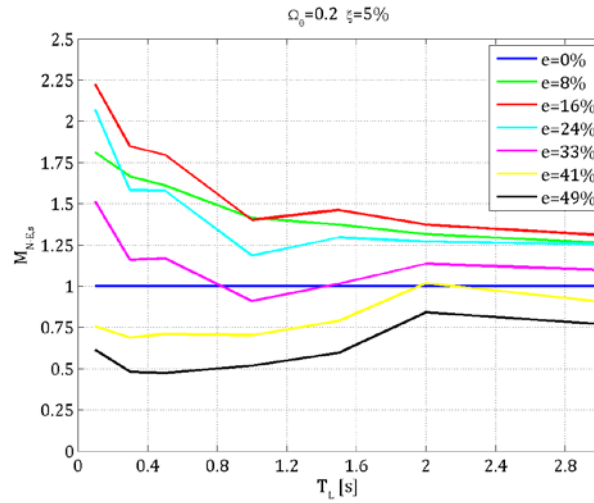
Le stesse cose possono essere dette per gli andamenti del fattore  $M_{NE,f}$  il cui valore massimo si attesta intorno a 5,5 per strutture con eccentricità relativa pari al 49% e periodo longitudinale di 0,1s.

I coefficienti  $\delta$  ed  $M_{NE,f}$  non sono mai minori di 1.

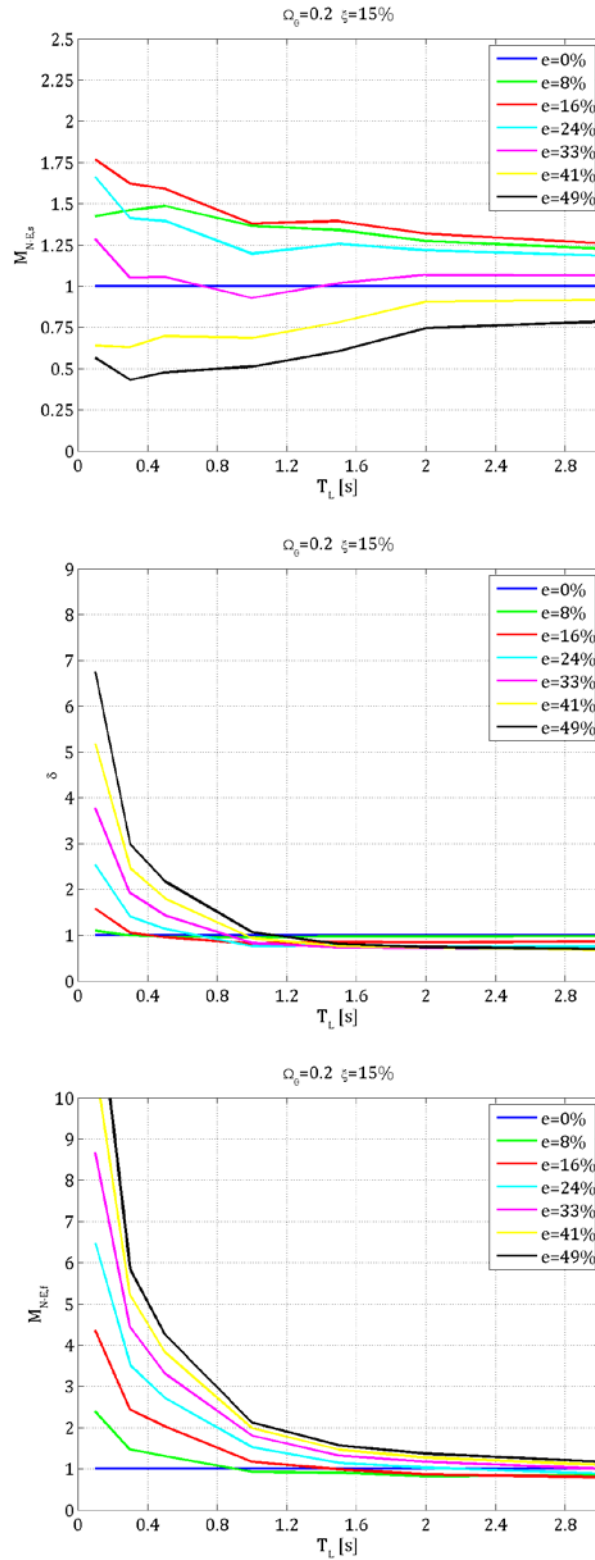
L'aumento dell'indice di smorzamento non influenza il comportamento dato dal *period shifting* ma ha l'effetto di abbassare un po' i valori di  $\delta$  ed  $M_{NE,f}$  mantenendo comunque gli andamenti.

*Strutture torsiorigide ( $\Omega_\theta = 1,5$  e  $2$ ) – Figure 6.19, 6.20, 6.21 e 6.22, 6.23, 6.24*  
 $M_{NE,s}$  per strutture molto torsiorigide è praticamente sempre compreso tra 0,6 ed 1 ed è pressoché indipendente dal periodo longitudinale della struttura. Solo per periodi inferiori a 0,4s ed eccentricità relative superiori al 40% presenta valori maggiori di 1. L'aumento della rigidezza torsionale e dell'indice di smorzamento hanno l'effetto di diminuire la variabilità e di regolarizzare gli andamenti: per strutture con  $\Omega_\theta = 2$  e  $\xi = 0,30$  il coefficiente  $M_{NE,s}$  ha valori compresi tra 0,7 ed 1, si mantiene indipendente dal periodo longitudinale e cambia poco anche in funzione dell'eccentricità.

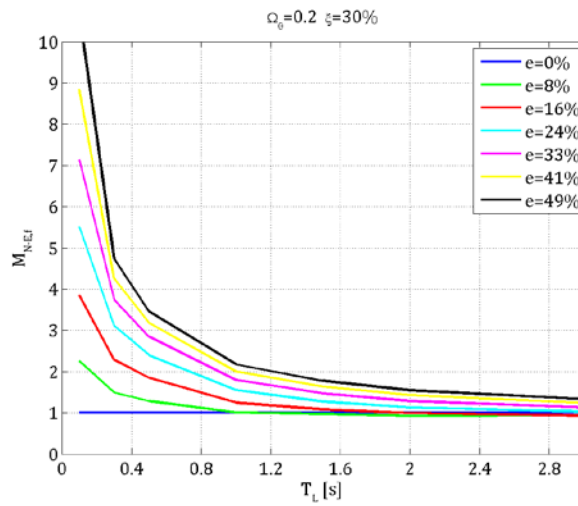
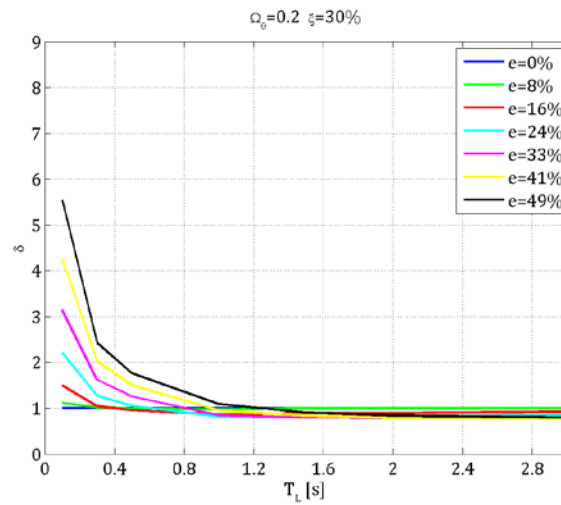
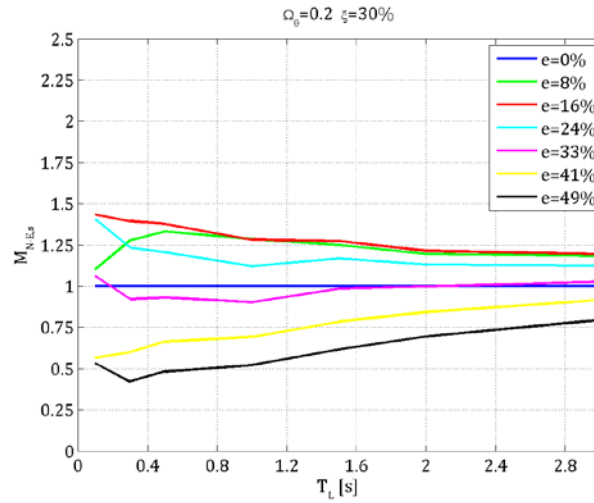
$\delta$  ed  $M_{NE,f}$  per strutture molto torsiorigide hanno gli stessi andamenti del caso con  $\Omega_\theta = 1$  con valori molto simili.



**Figura 6.13**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=0,2$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

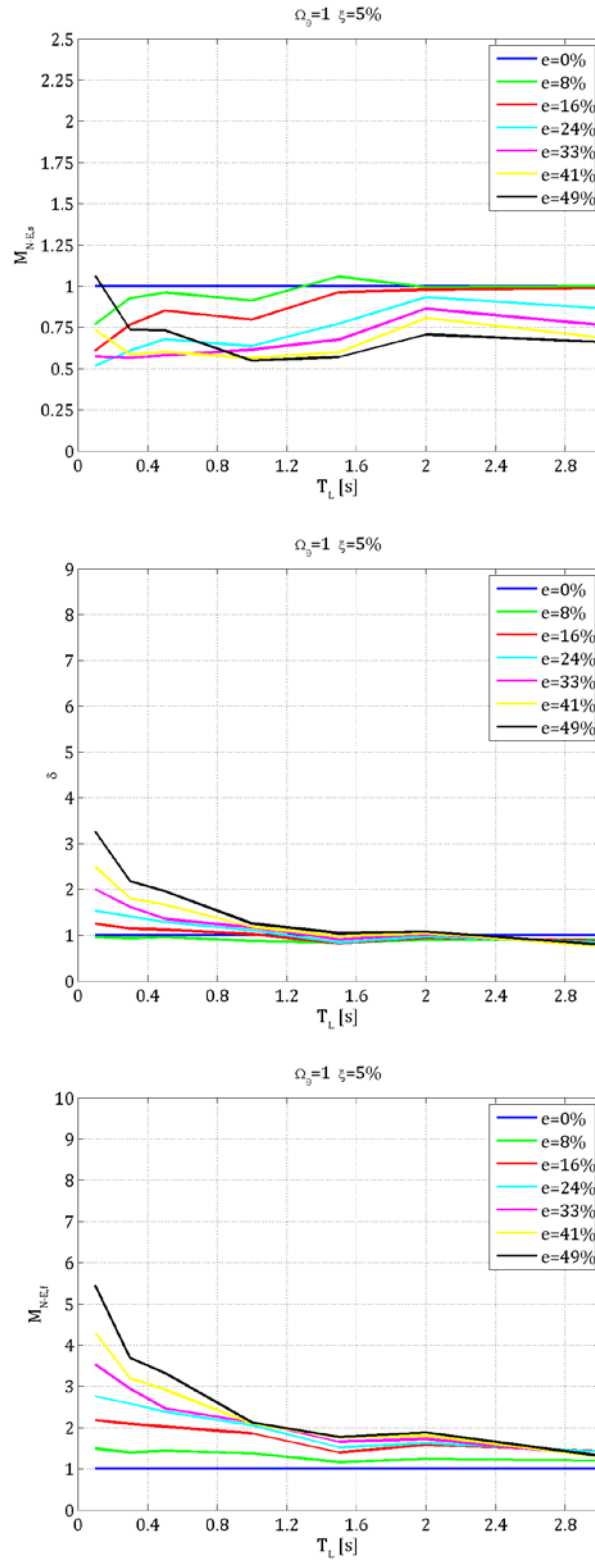


**Figura 6.14**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=0,2$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

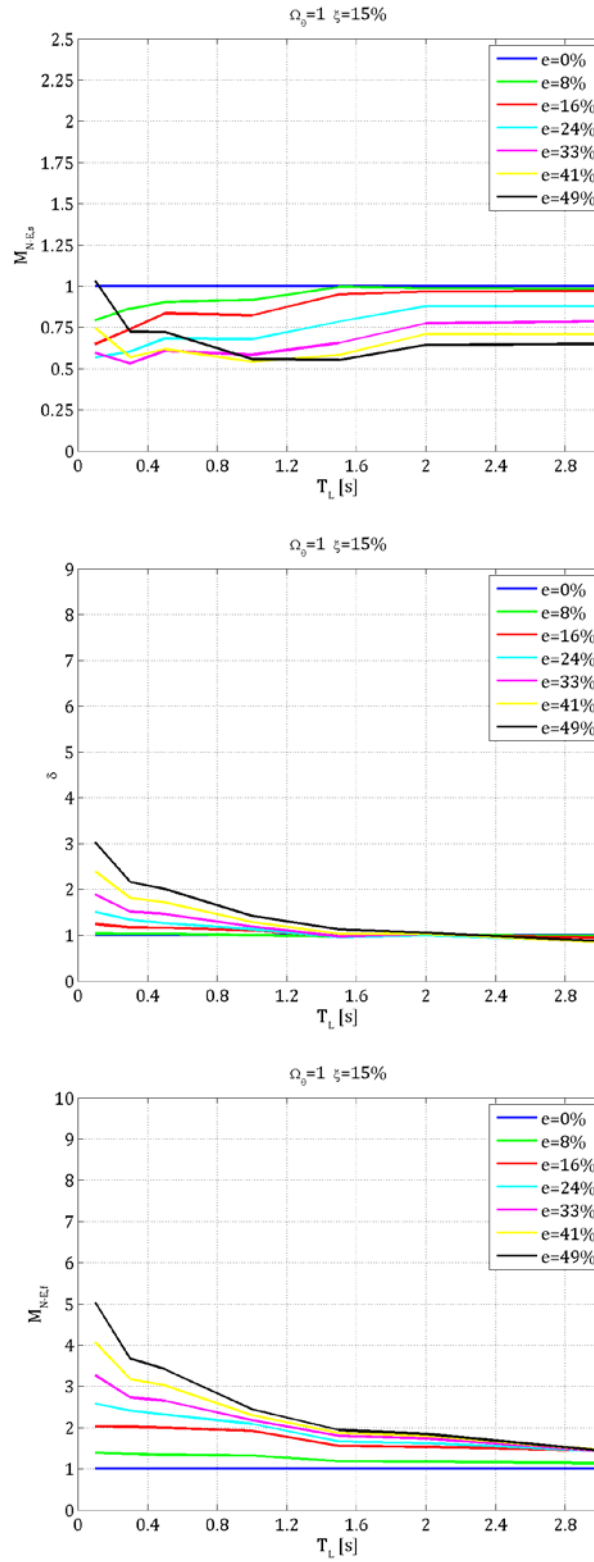


**Figura 6.15**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=0,2$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

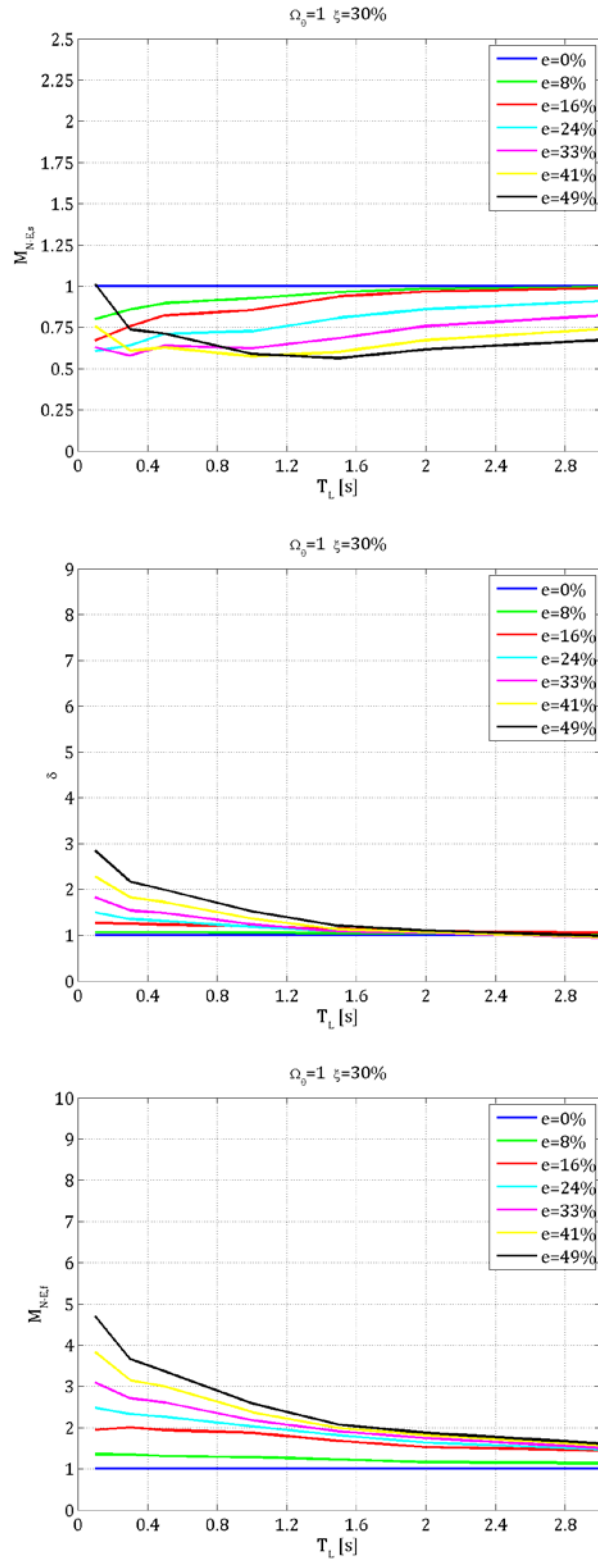




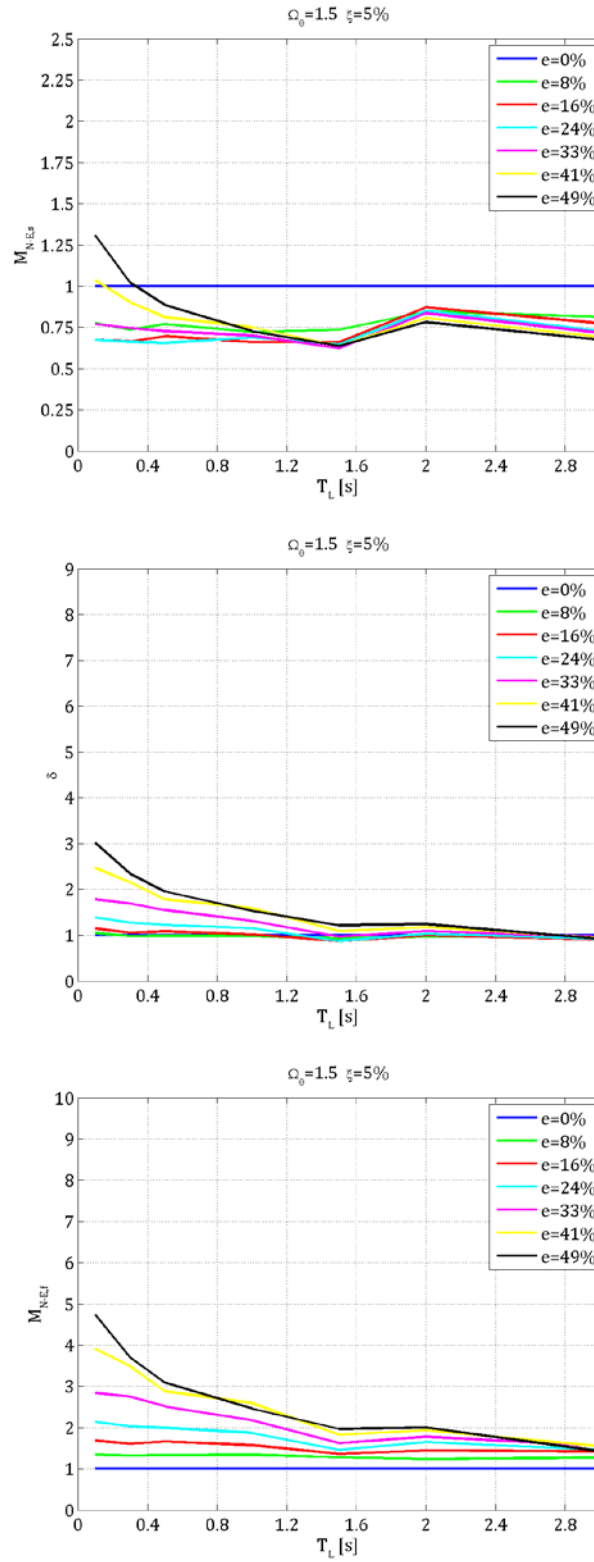
**Figura 6.16**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



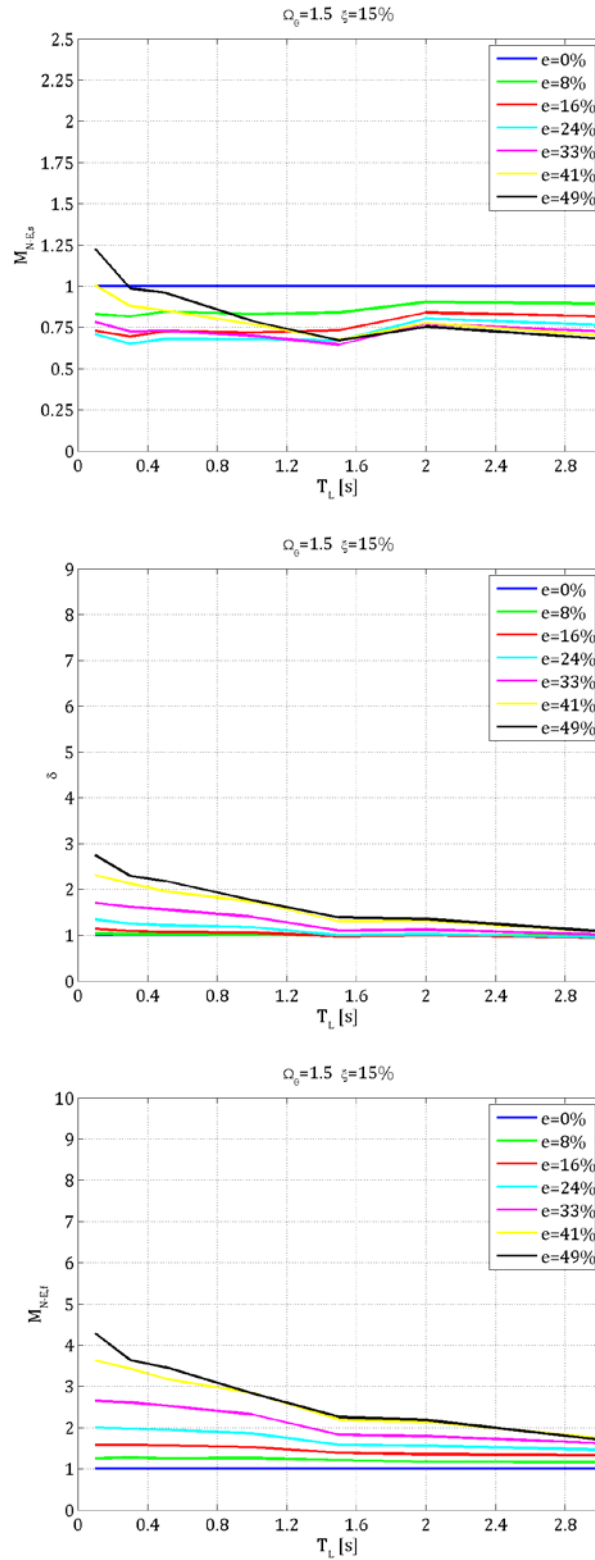
**Figura 6.17**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



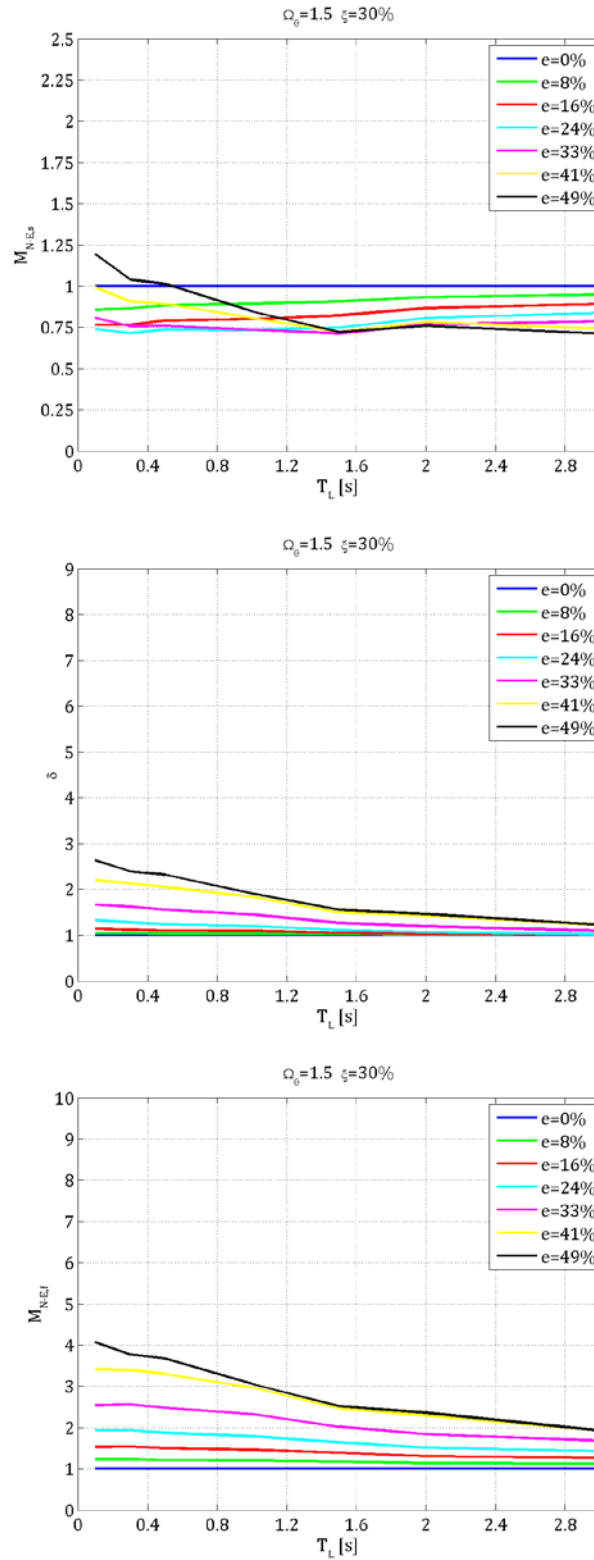
**Figura 6.18**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=1$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



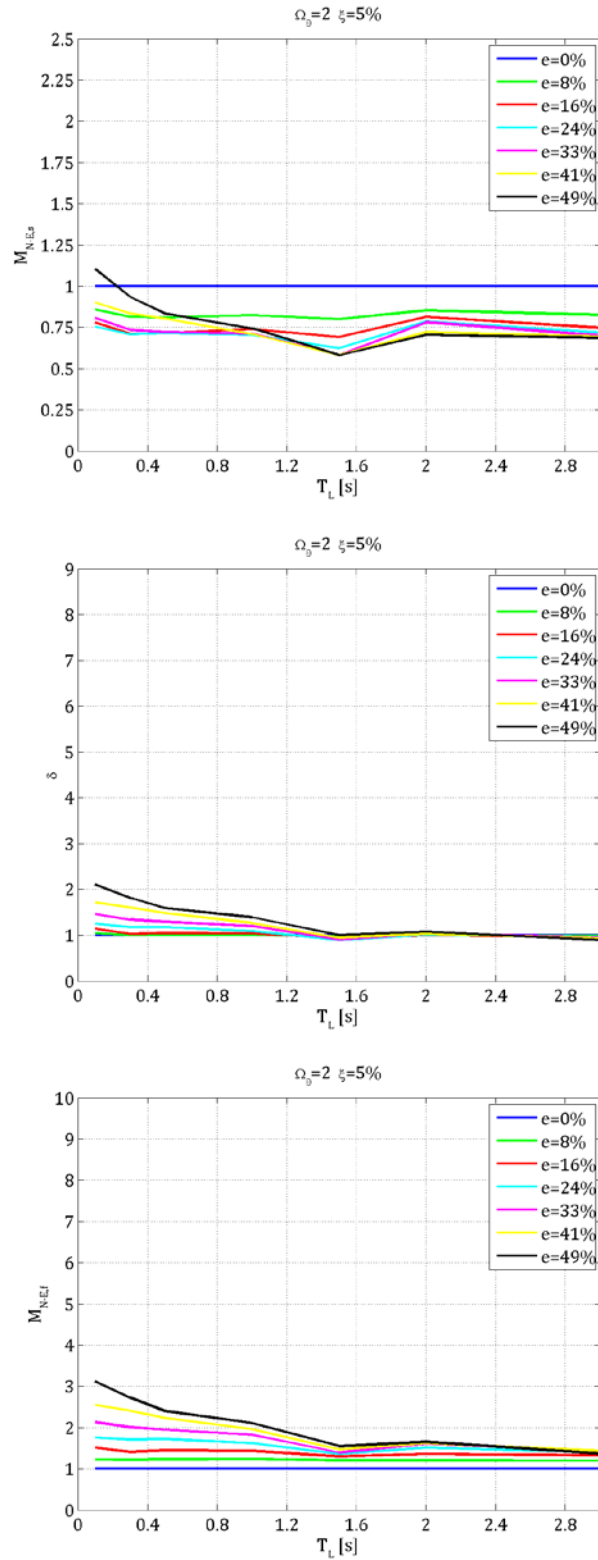
**Figura 6.19**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=1,5$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



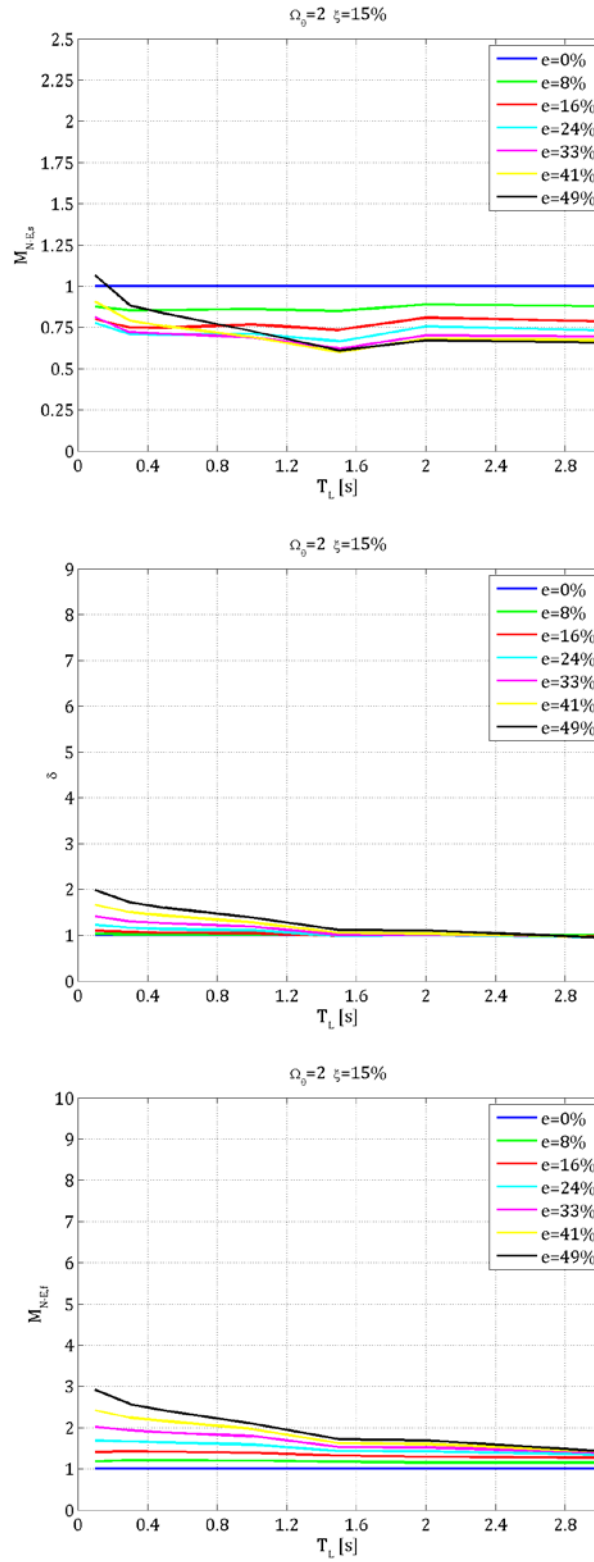
**Figura 6.20**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=1,5$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.21**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=1,5$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

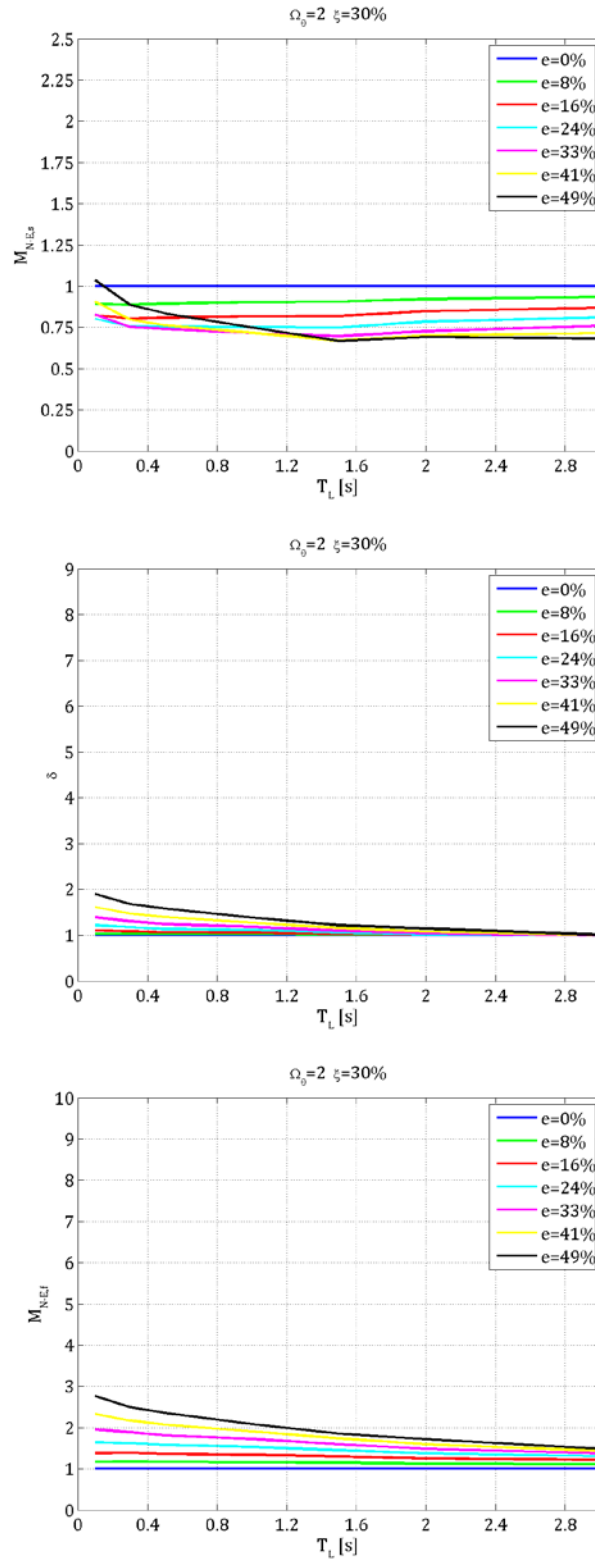


**Figura 6.22**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=2$  e  $\xi=5\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.23**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=2$  e  $\xi=15\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .





**Figura 6.24**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=2$  e  $\xi=30\%$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

## 6.2 Caso Non Lineare

### 6.2.1 Magnification Factors rispetto al Centro di Massa ( $M_{CM,s}$ e $M_{CM,f}$ )

Strutture torsioflessibili ( $\Omega_\theta = 0,2$ ) – Figure 6.25, 6.26, 6.27, 6.28

$M_{CM,s}$  per strutture torsioflessibili e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  è maggiore di 1 (fino ad un massimo di 1,5) in strutture con piccole eccentricità relative. All'aumentare dell'eccentricità tale coefficiente cala e diventa minore di 1 a partire da  $e = 33\%$ .

Il valore minimo si ha per  $T_L = 0,1s$  ed  $e = 49\%$  ed è pari a circa 0,1; il valore massimo si ha per  $T_L = 0,45s$  ed  $e = 16\%$  ed è pari a circa 1,5.

L'aumentare del fattore di riduzione delle forze  $R$  ha l'effetto di ricondurre il coefficiente  $M_{CM,s}$  a valore unitario laddove per  $R=2$  era maggiore di 1 (quindi in quelle strutture con eccentricità relative fino al 24%) e lascia quasi invariati gli andamenti delle strutture più eccentriche, che presentano i valori più bassi per periodi inferiori ad 1,3s.

$M_{CM,f}$  per strutture torsioflessibili e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  è sempre maggiore di 1 ed è tanto maggiore quanto maggiore è l'eccentricità relativa. Ogni andamento presenta un tratto strettamente crescente nell'intervallo di periodi tra 0,1s e 0,3s che poi diventa decrescente per poi assestarsi a tratto costante, cioè indipendente dal periodo, a partire da periodi di circa 2s. solo per strutture con eccentricità relativa pari al 49% il coefficiente  $M_{CM,f}$  si mantiene costante e pari a circa 1,95 per i periodi compresi tra 0,1s e 2s, per poi calare al crescere del periodo.

L'aumentare del fattore di riduzione delle forze  $R$  produce effetti quasi nulli sulla diminuzione dei valori di  $M_{CM,f}$  e ha solo l'effetto di uniformare gli andamenti: per tutte le strutture con eccentricità relativa maggiore o uguale al 16% è presente un tratto crescente fino ad un periodo di 0,5s, un tratto decrescente per periodi compresi tra 0,5s e 2s ed un tratto orizzontale per

periodi superiori ai 2s. Strutture con eccentricità relativa inferiore al 16% hanno invece andamenti più uniformi che diventano sempre più piatti all'aumentare di R. Quando  $R=5$  il coefficiente  $M_{CM,f}$  è indipendente dal periodo longitudinale (tratto orizzontale che si assesta attorno al valore di 1,1). Il fattore  $M_{CM,f}$  risulta sempre tanto maggiore quanto maggiore è l'eccentricità relativa della struttura.

*Strutture con  $\Omega_\theta = 1$  – Figure 6.29, 6.30, 6.31, 6.32*

$M_{CM,s}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  assume valore sempre unitario per strutture con eccentricità inferiori all'8% per poi diventare minore di 1 all'aumentare dell'eccentricità. Quando il periodo è piccolo (0,1s) ogni struttura ha un fattore  $M_{CM,s} = 1$  che poi diminuisce fino ad un periodo di 0,5s (il calo è tanto maggiore quanto maggiore è l'eccentricità); a partire da periodi longitudinali di 0,5s  $M_{CM,s}$  assume un andamento costante, quindi indipendente dal periodo stesso.

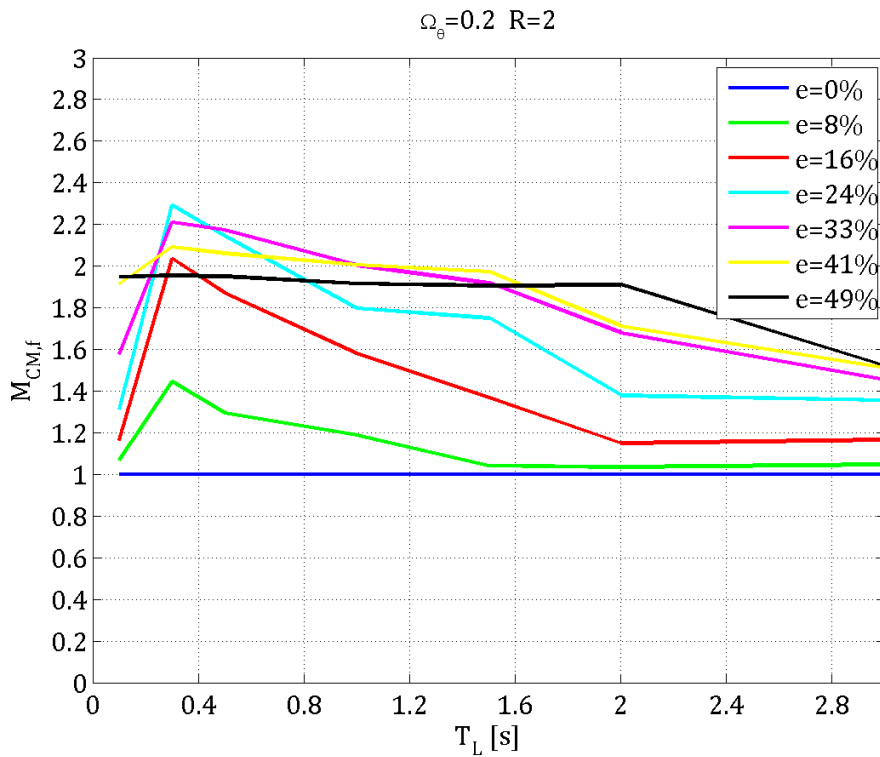
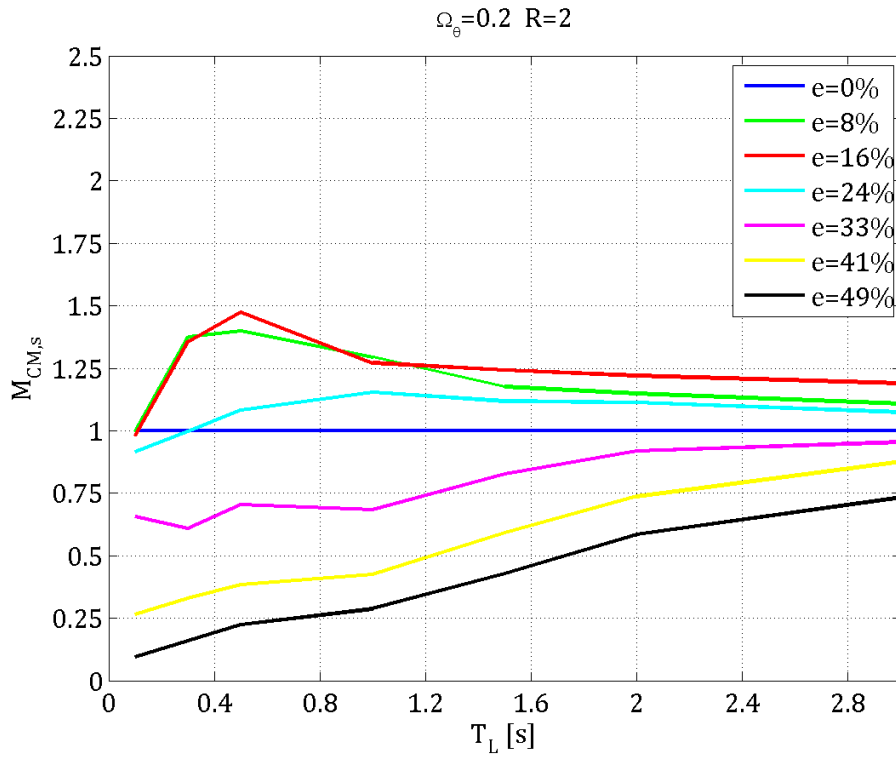
$M_{CM,f}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  è sempre maggiore di 1, presenta un tratto crescente nell'intervallo di periodi che va da 0,1s e 0,5s per poi assumere un andamento costante per periodi crescenti. Il valore di tale coefficiente in linea di massima è tanto maggiore quanto maggiore è l'eccentricità della struttura anche se in realtà non cambia più di tanto il suo valore al variare di questa grandezza.

L'aumentare del fattore di riduzione delle forze R ha lo stesso effetto su entrambi i fattori sopra descritti: avvicina le curve diminuendo la sua dipendenza dall'eccentricità della struttura senza modificarne gli andamenti.

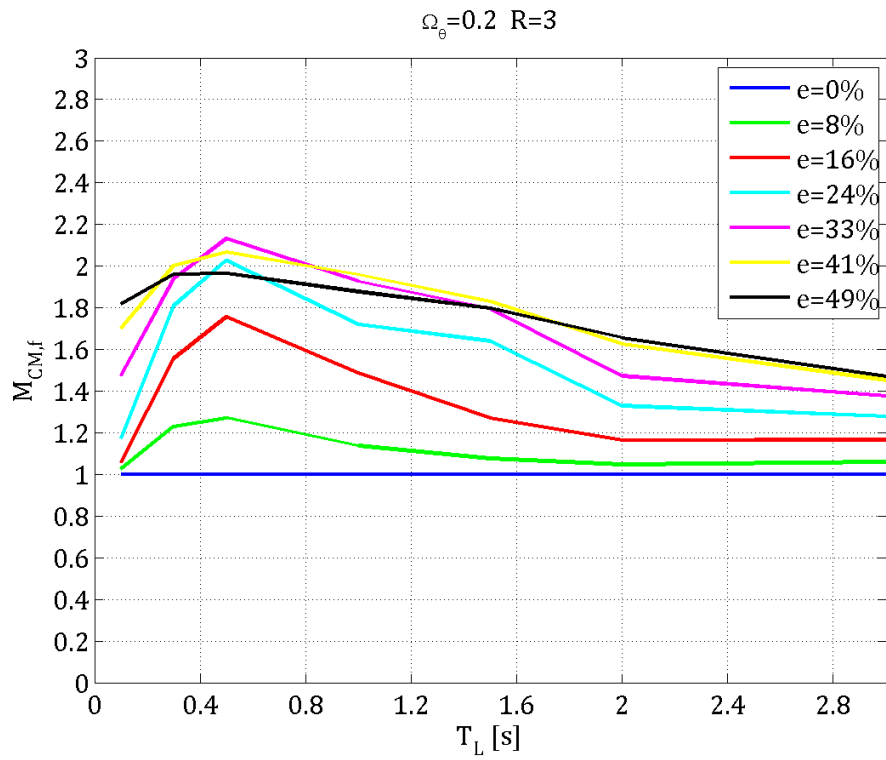
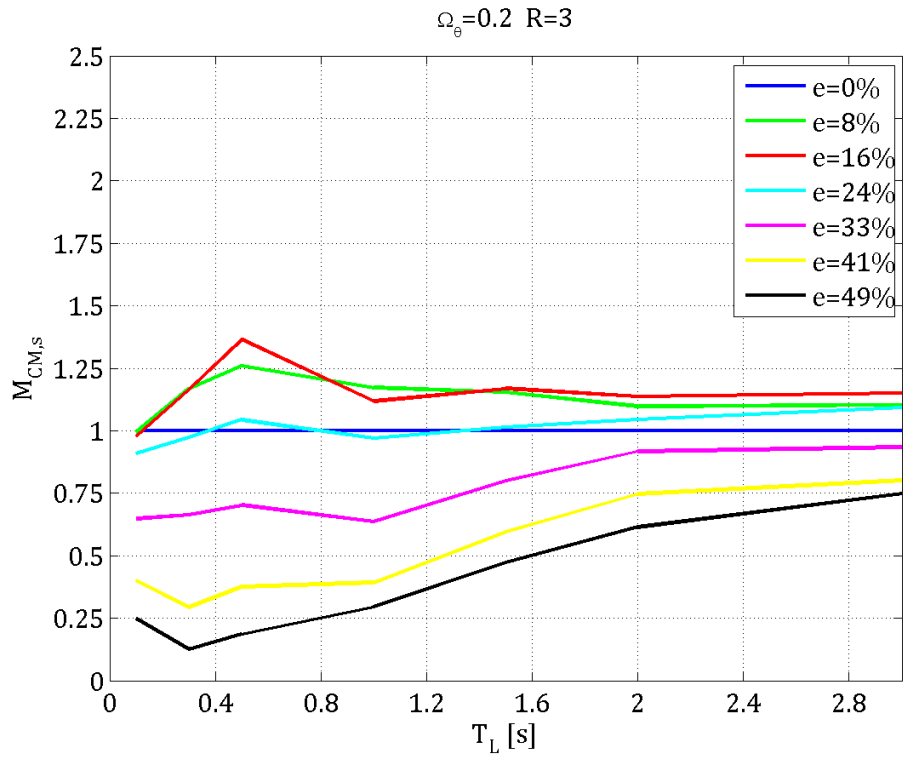
*Strutture torsiorigide ( $\Omega_\theta = 1,5$  e  $2$ ) – Figure 6.33 : 6.36 e 6.37 : 6.40*

Per quanto riguarda strutture molto torsiorigide l'andamento dei fattori  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  è pressoché indipendente dal periodo longitudinale della struttura ad assumere valori molto prossimi all'unità: leggermente inferiori nel caso di  $M_{CM,s}$ , leggermente superiori invece nel caso di  $M_{CM,f}$ .

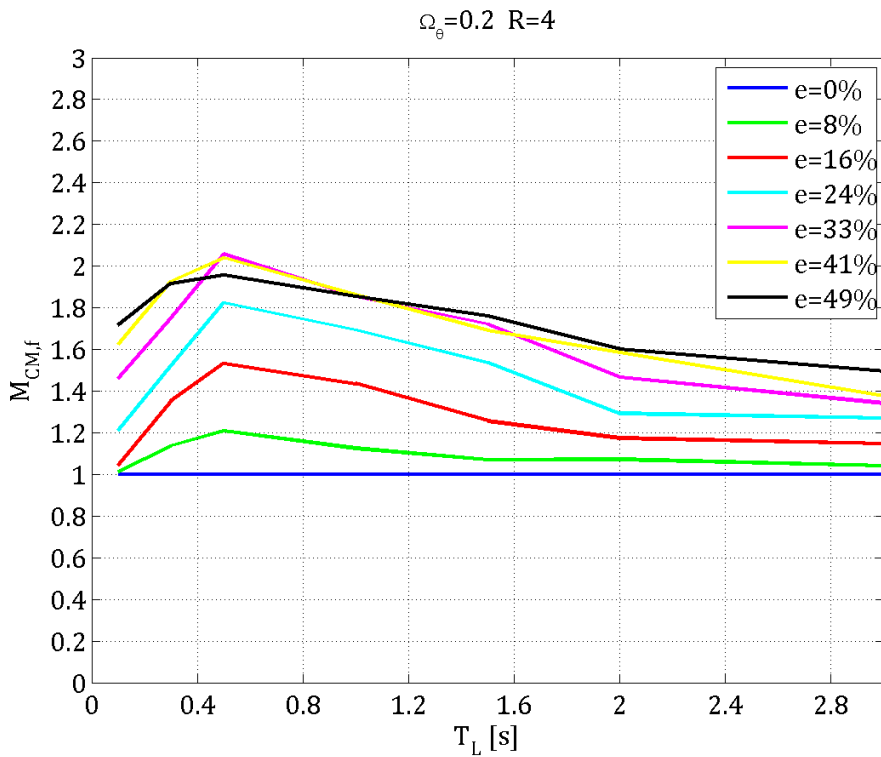
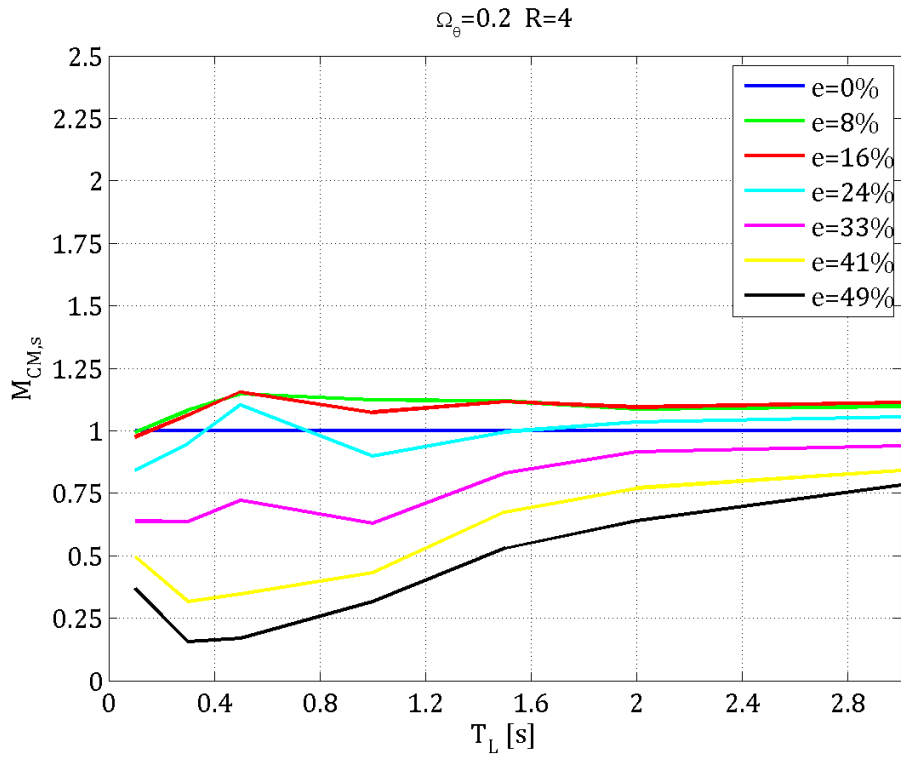
L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  appiattisce ulteriormente tutti gli andamenti portandoli sempre più vicino al valore unitario.



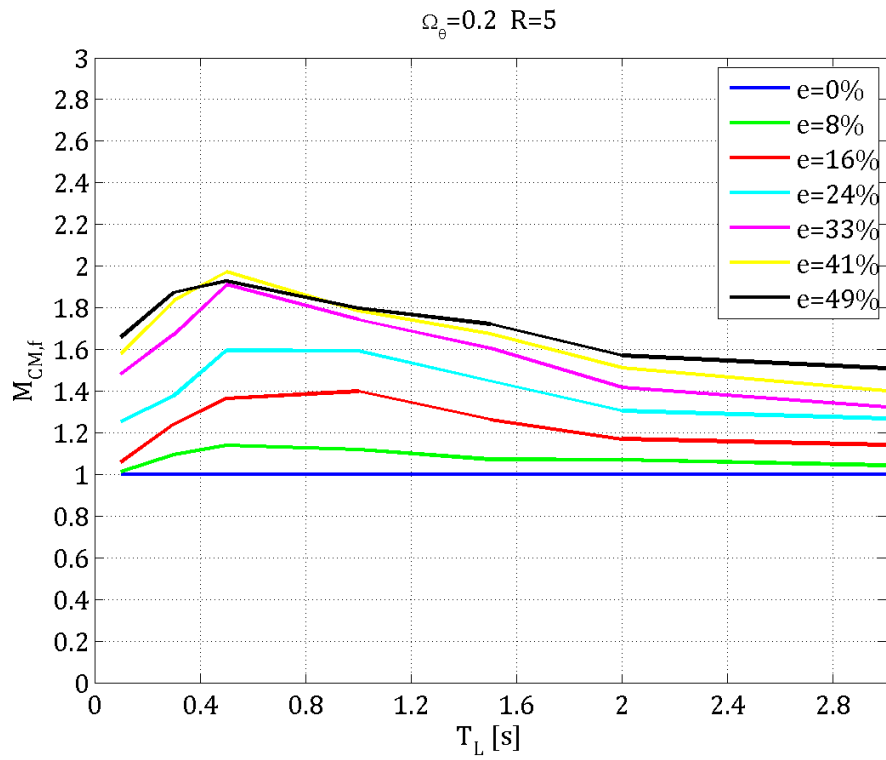
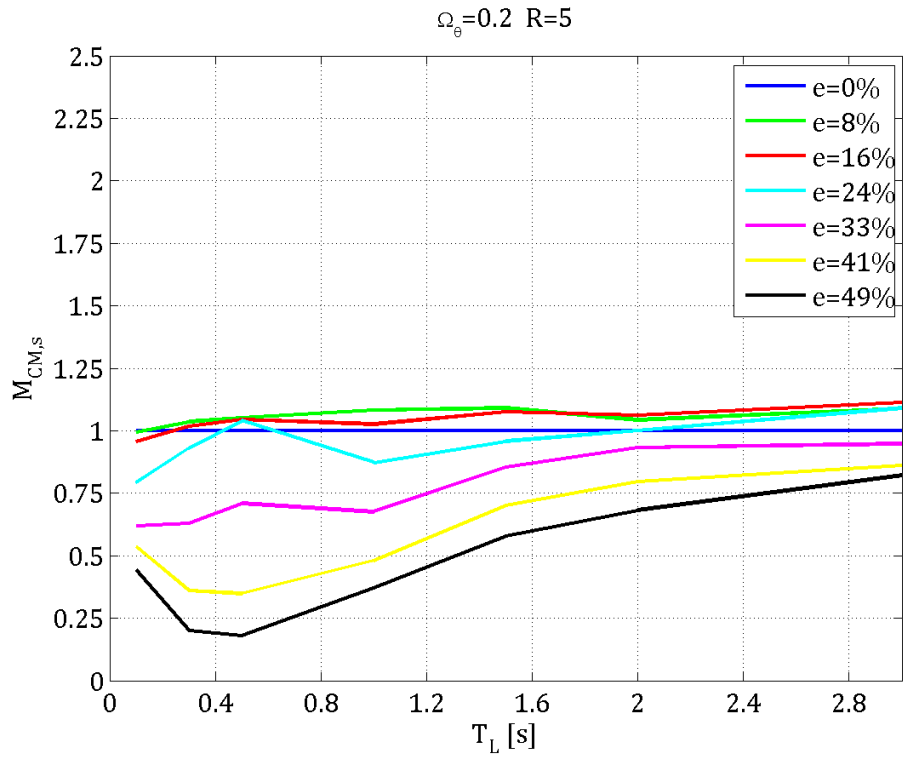
**Figura 6.25**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$  ed  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.26**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$  ed  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

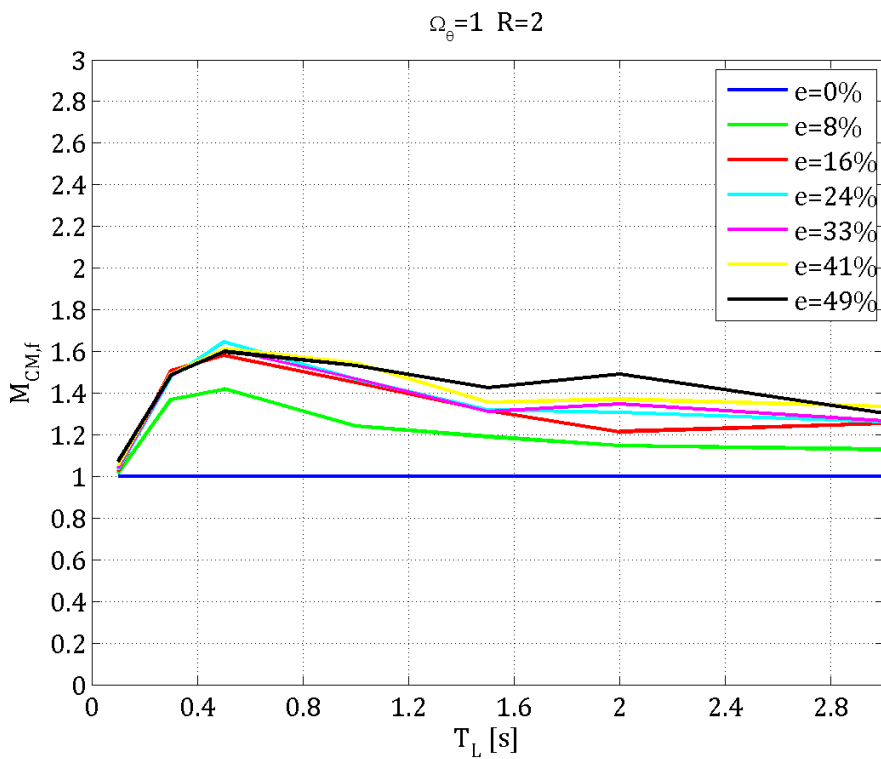
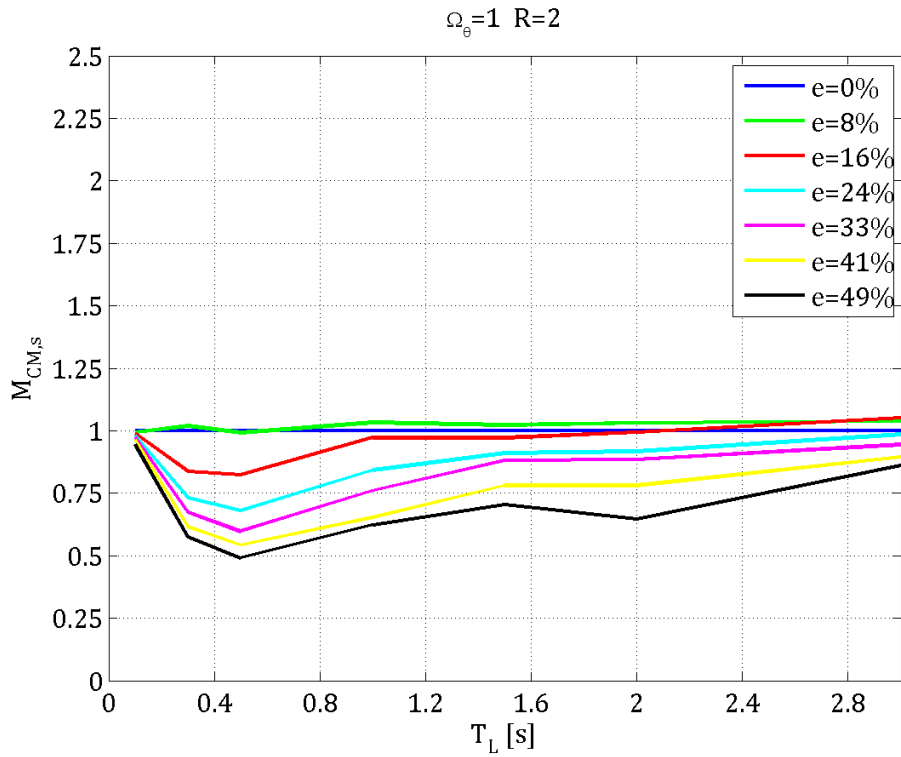


**Figura 6.27**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$  ed  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

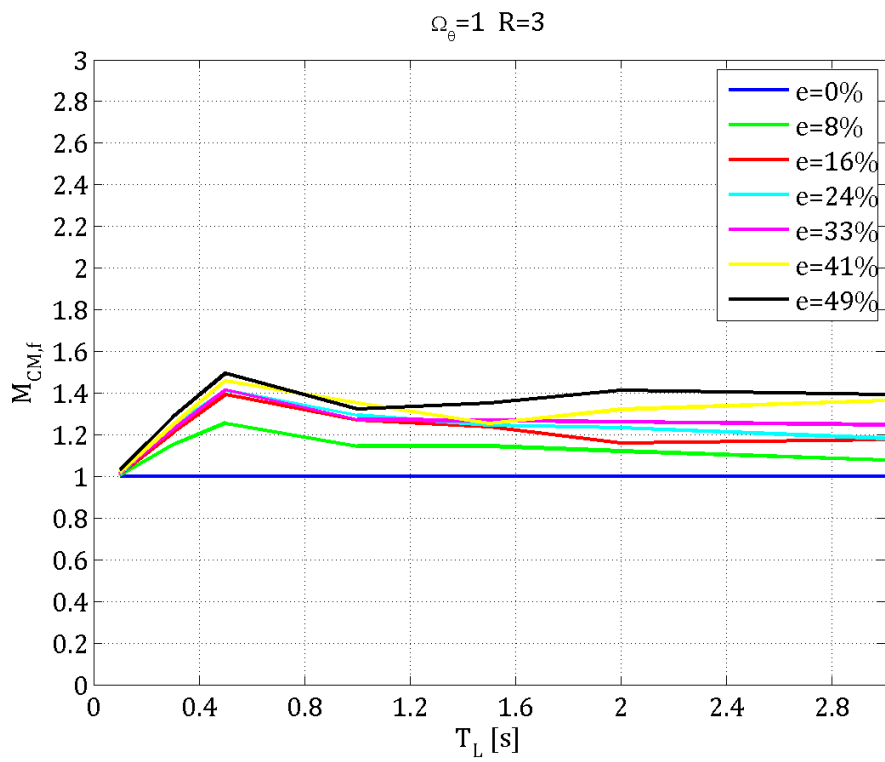
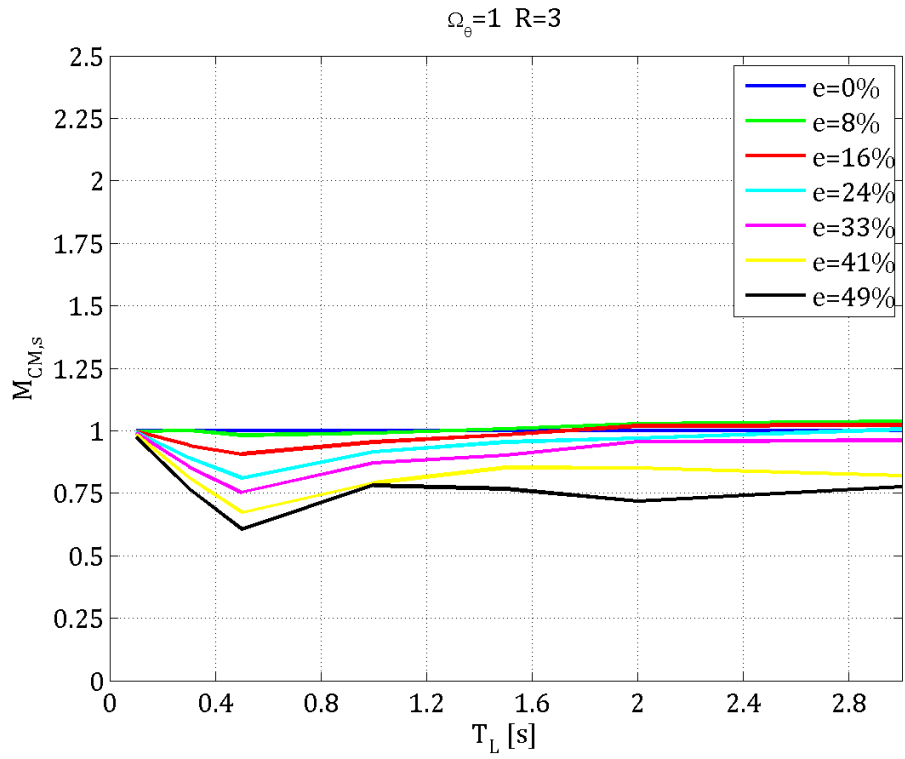


**Figura 6.28**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$  ed  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

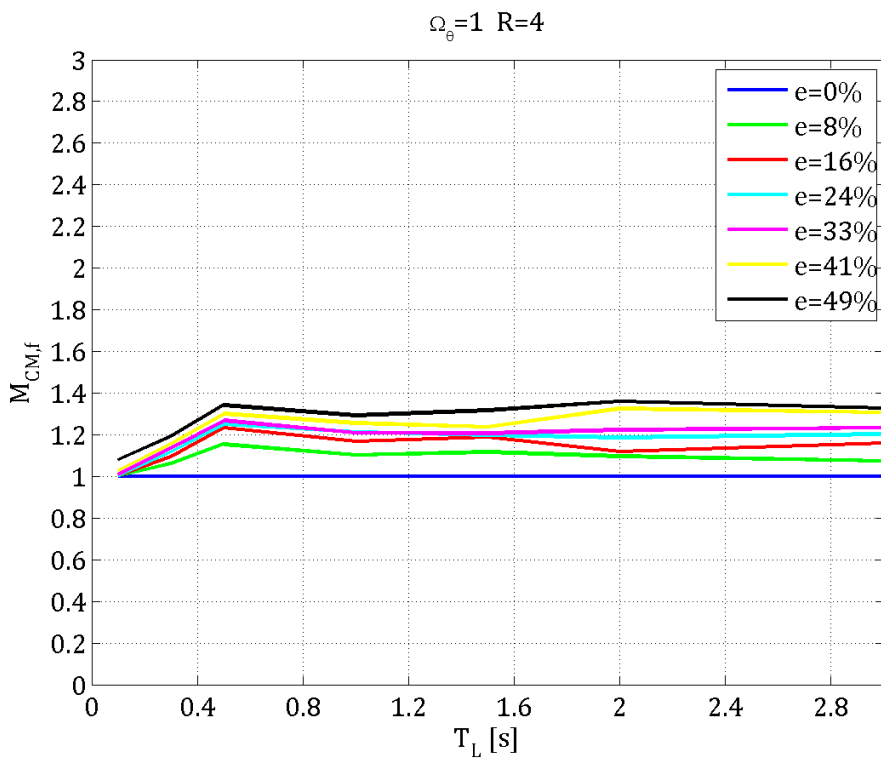
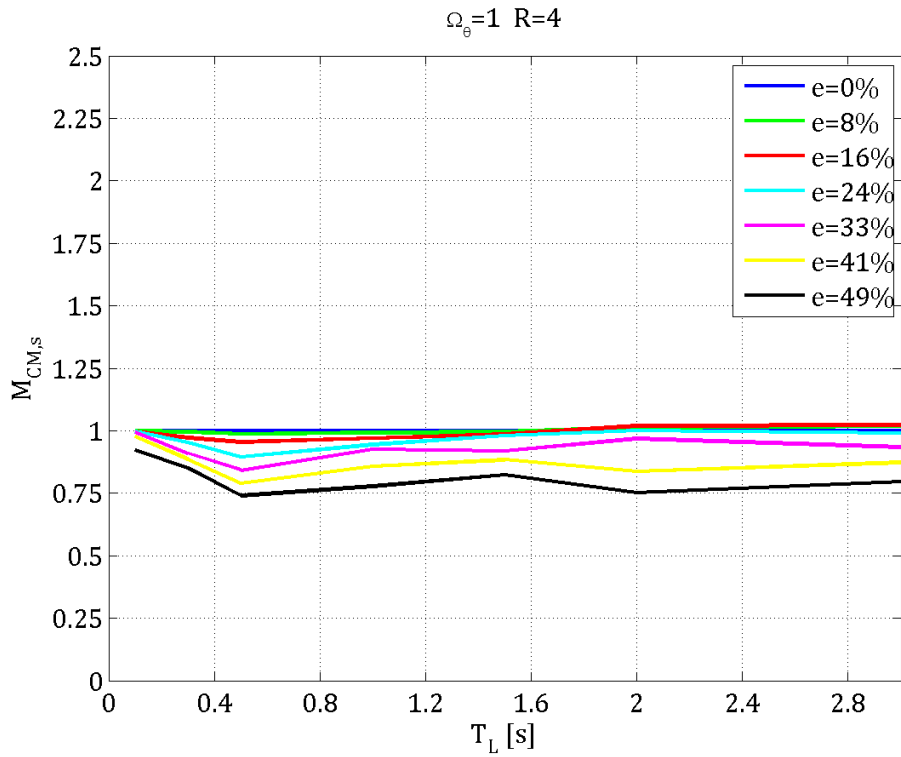




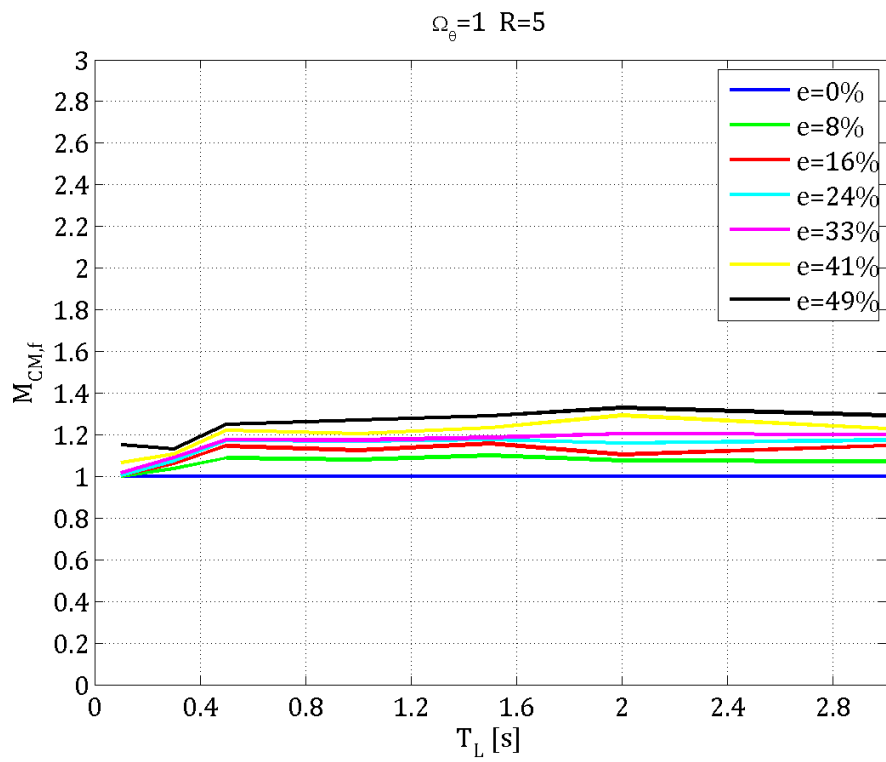
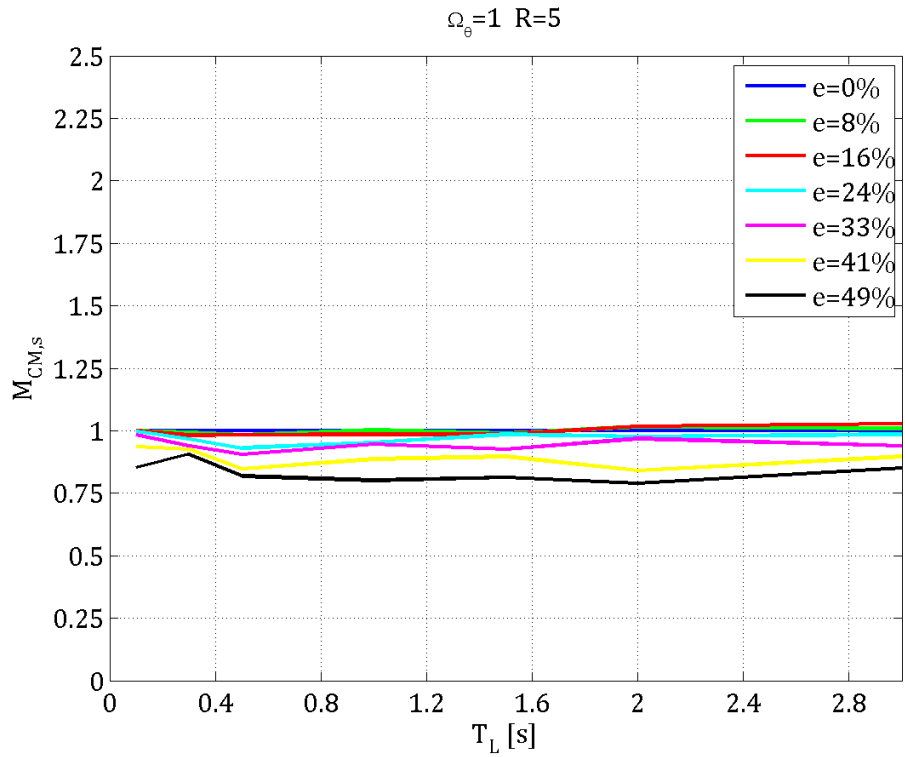
**Figura 6.29**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$  ed  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



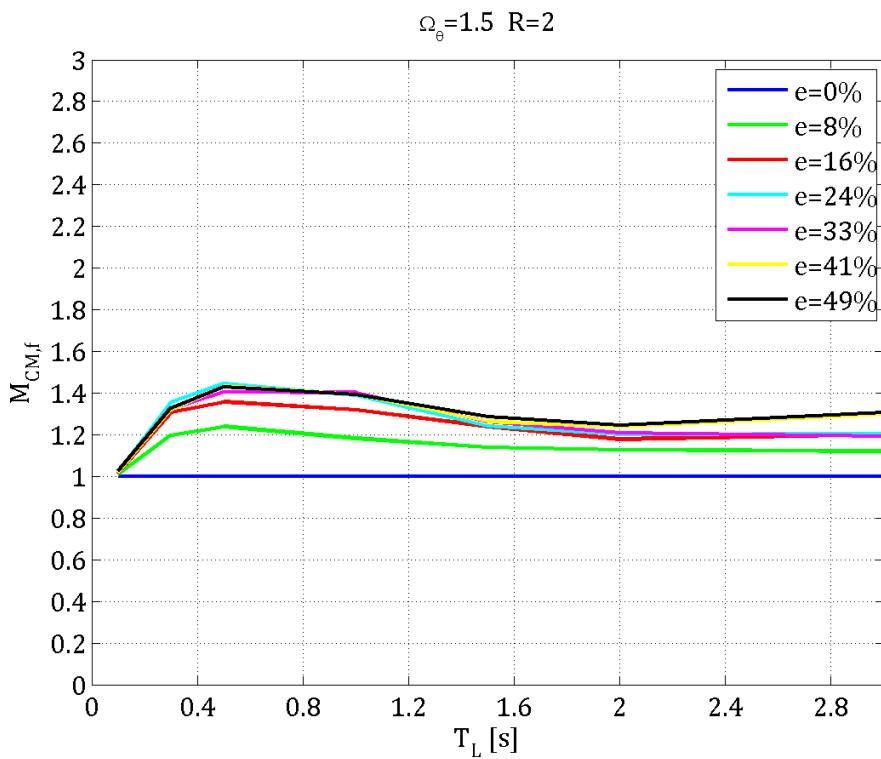
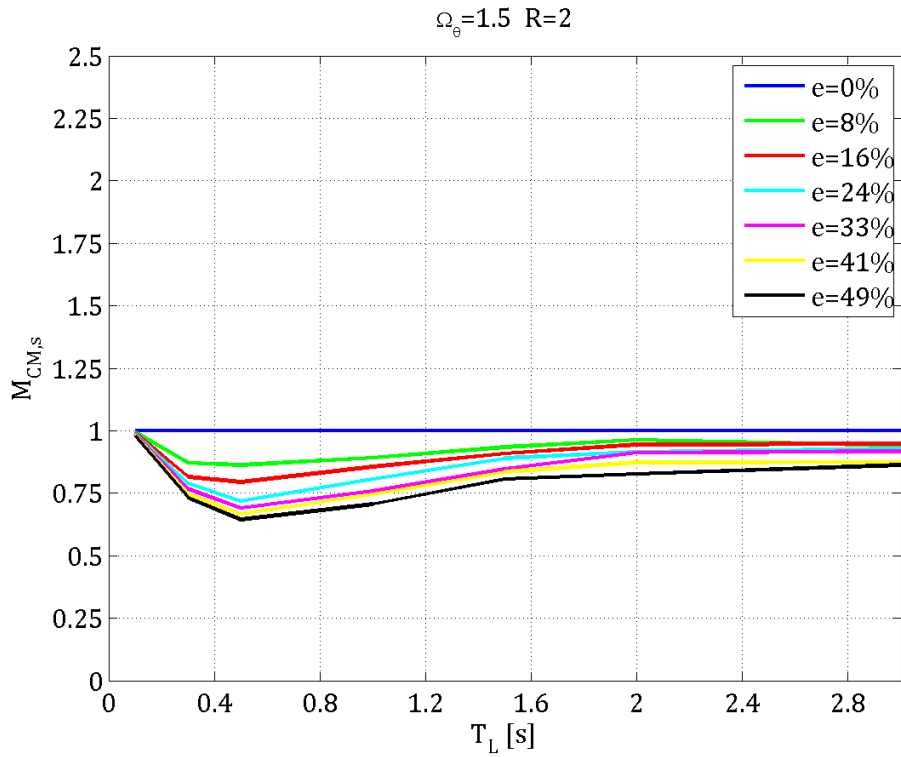
**Figura 6.30**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$  ed R=3 in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



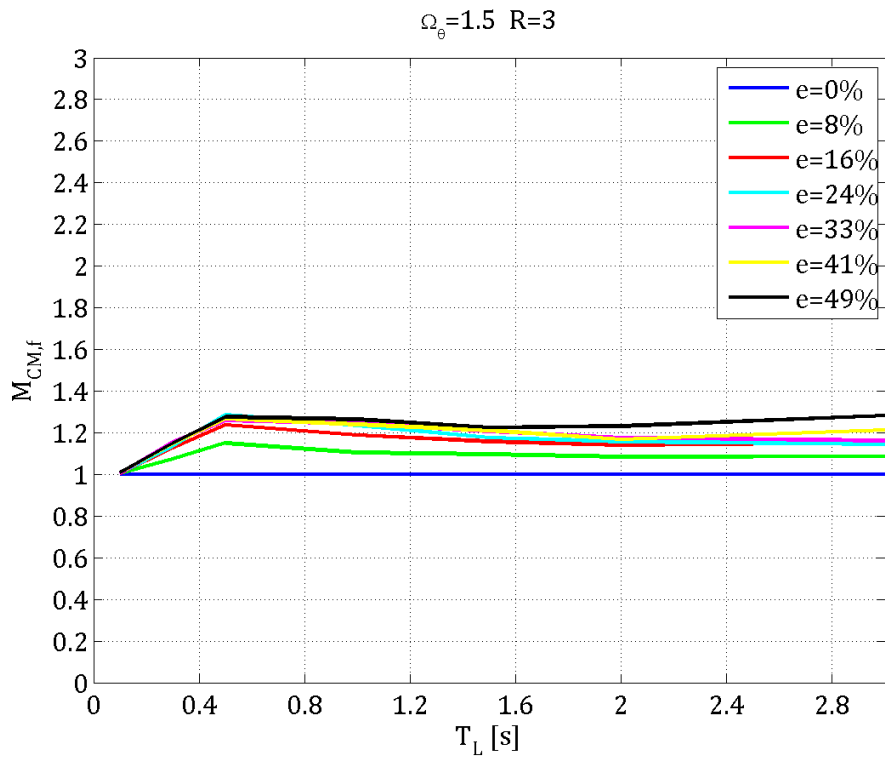
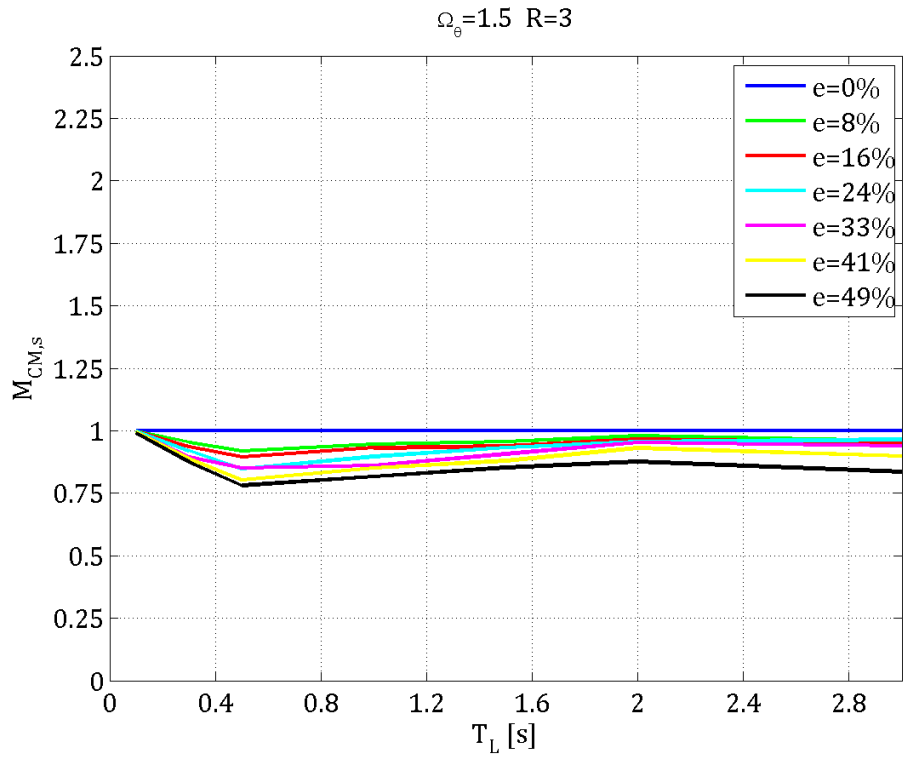
**Figura 6.31**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$  e  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



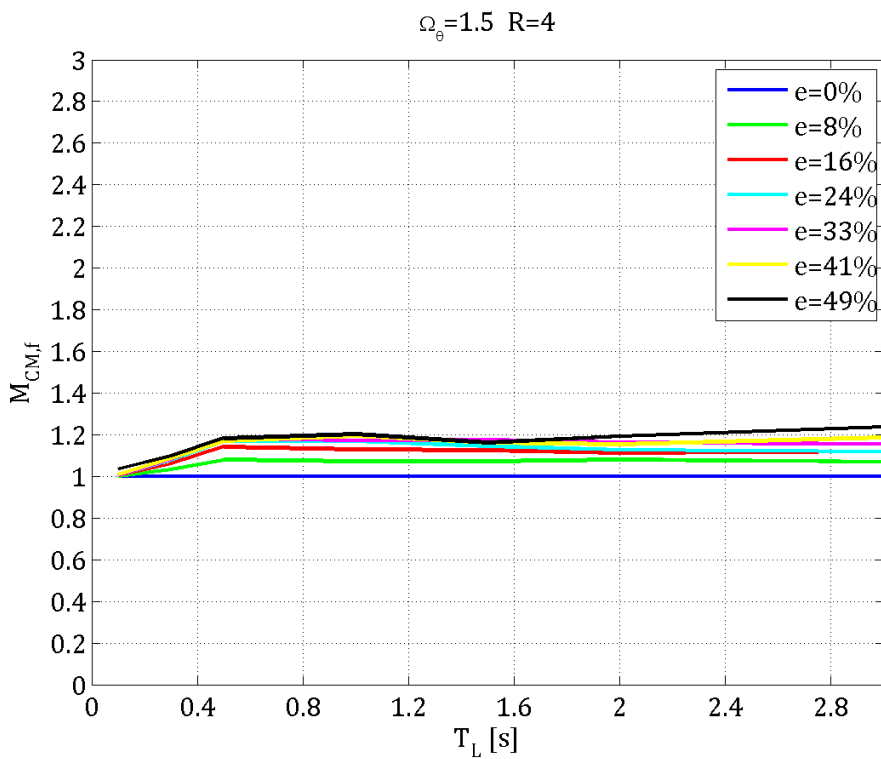
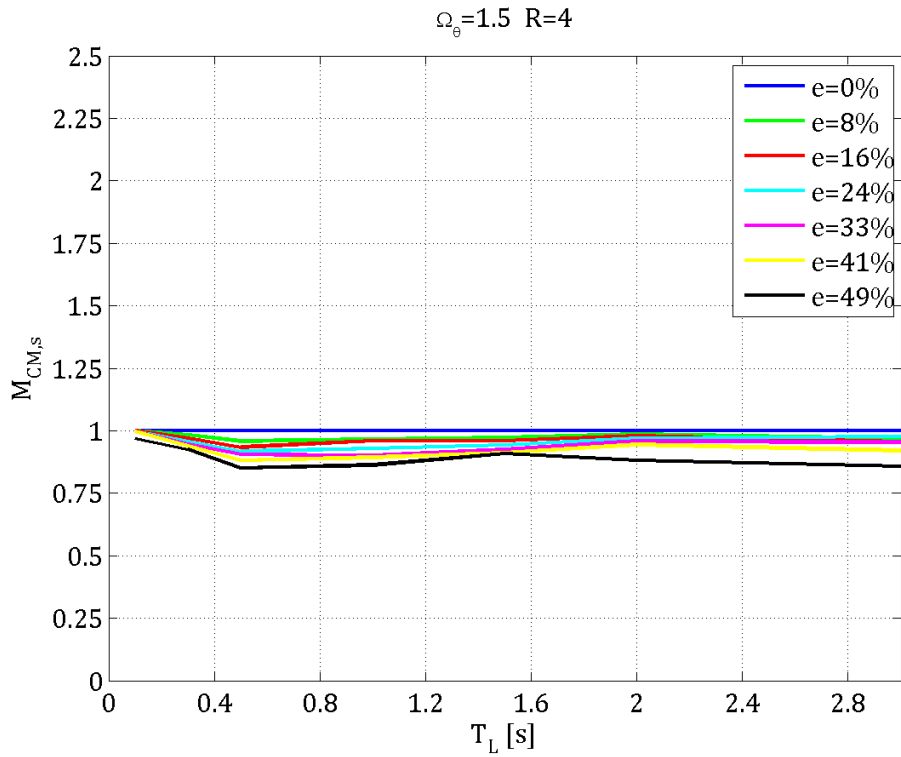
**Figura 6.32**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$  e  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



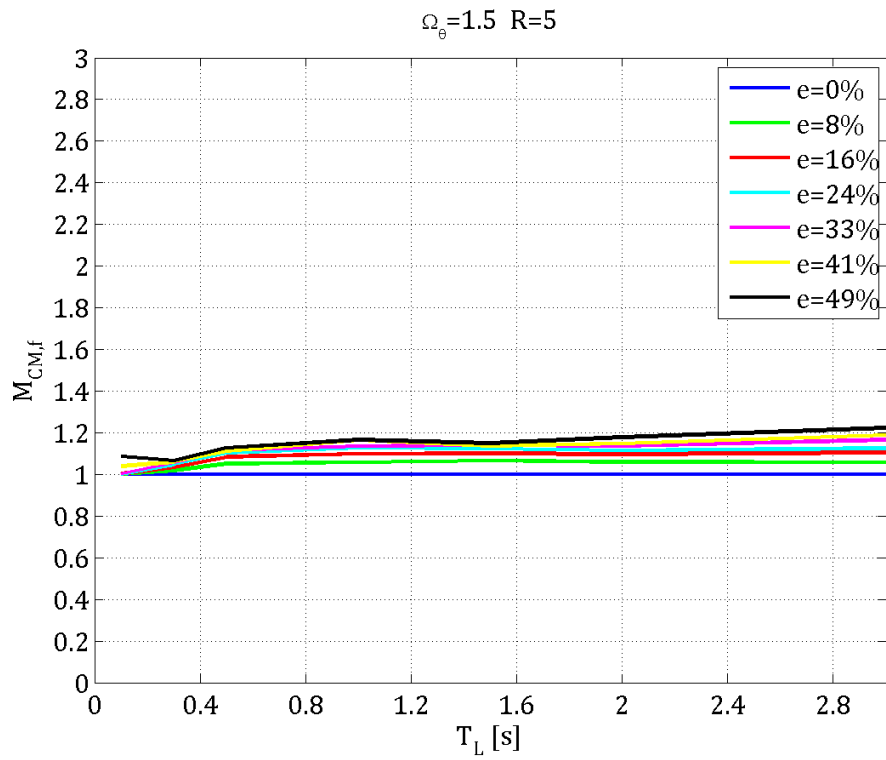
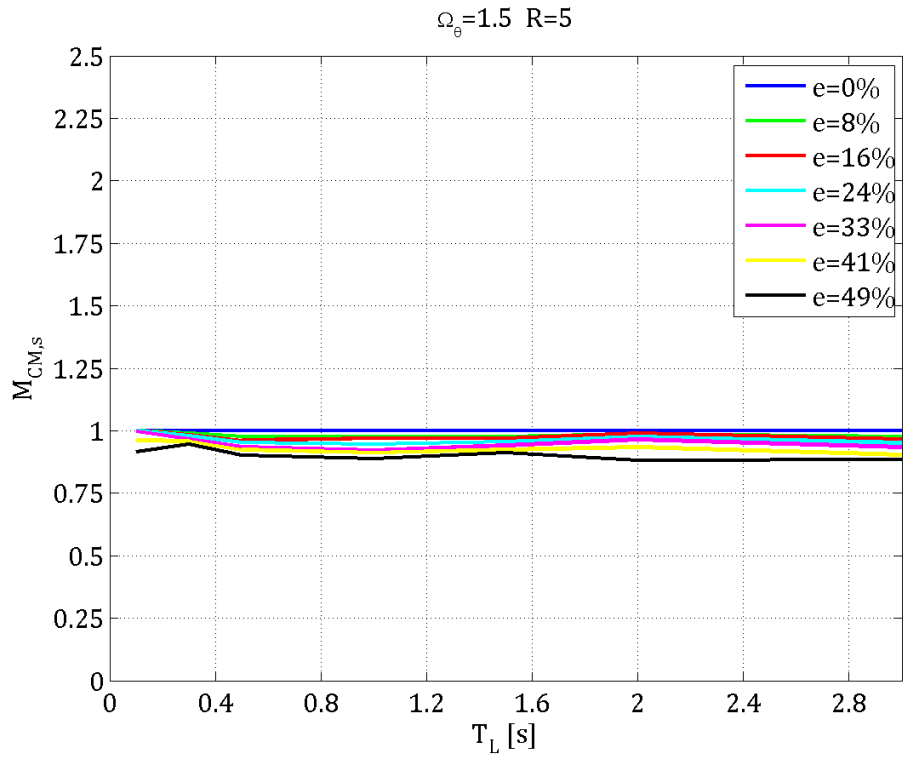
**Figura 6.33**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1,5$  ed  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.34**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1,5$  ed  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

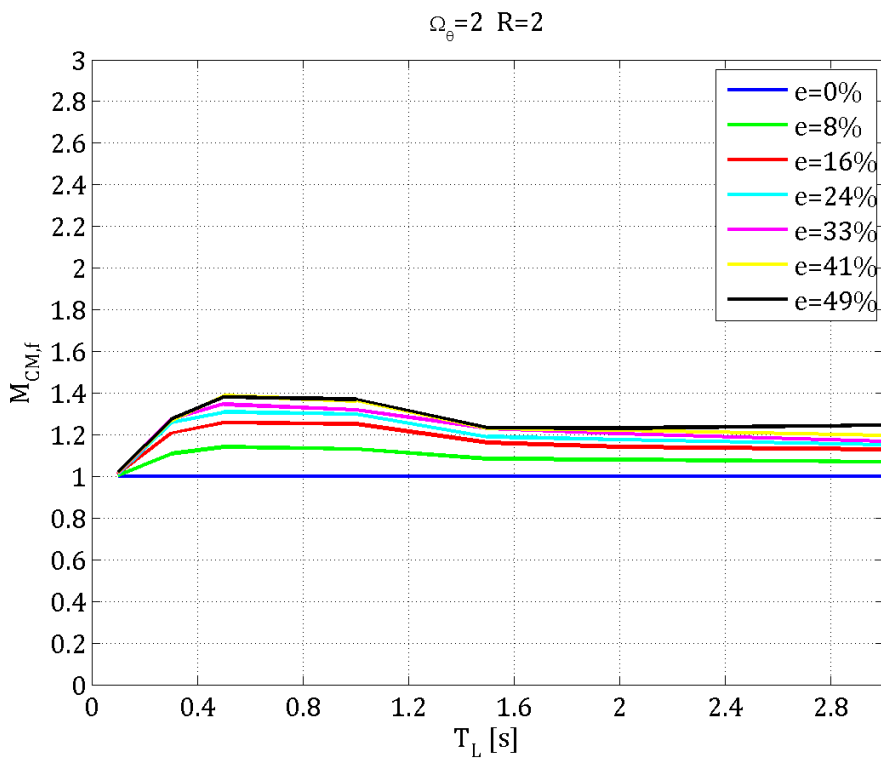
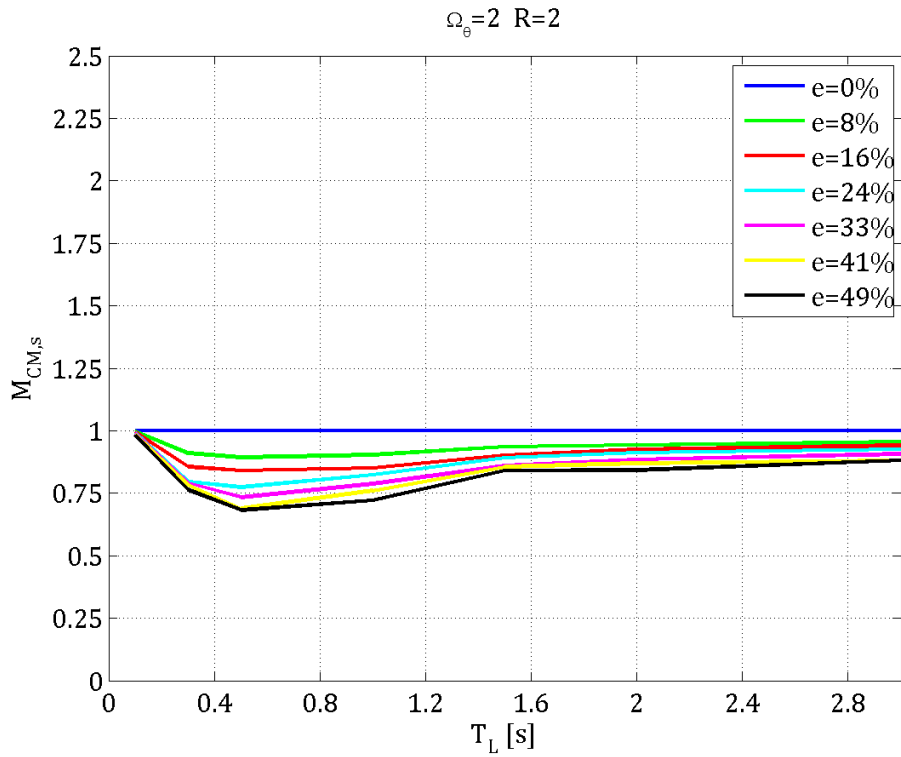


**Figura 6.35**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1,5$  ed  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

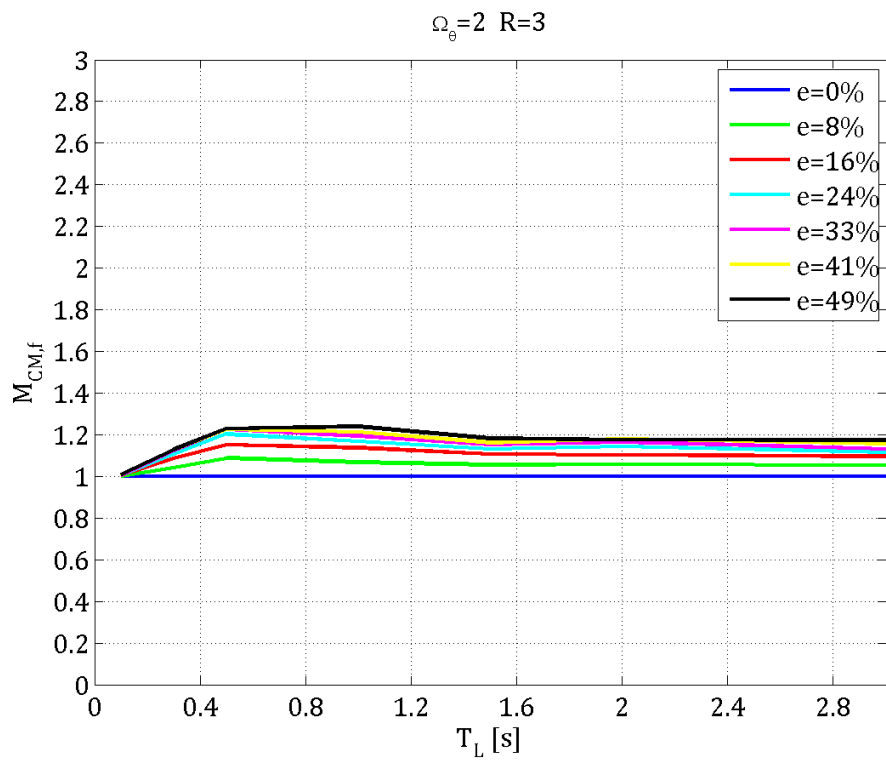
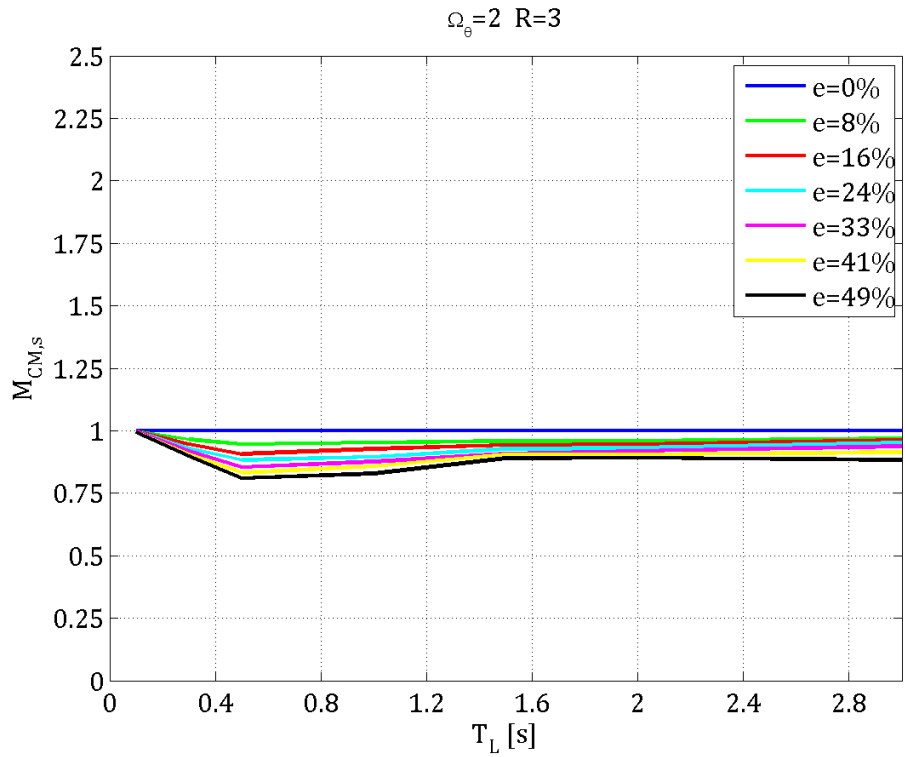


**Figura 6.36**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1,5$  ed  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

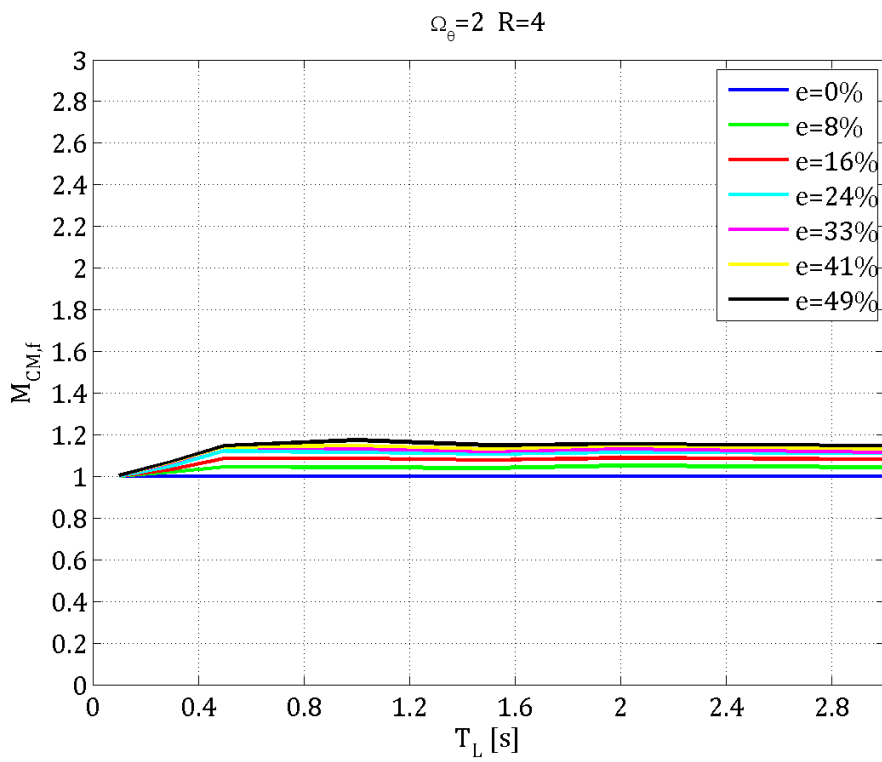
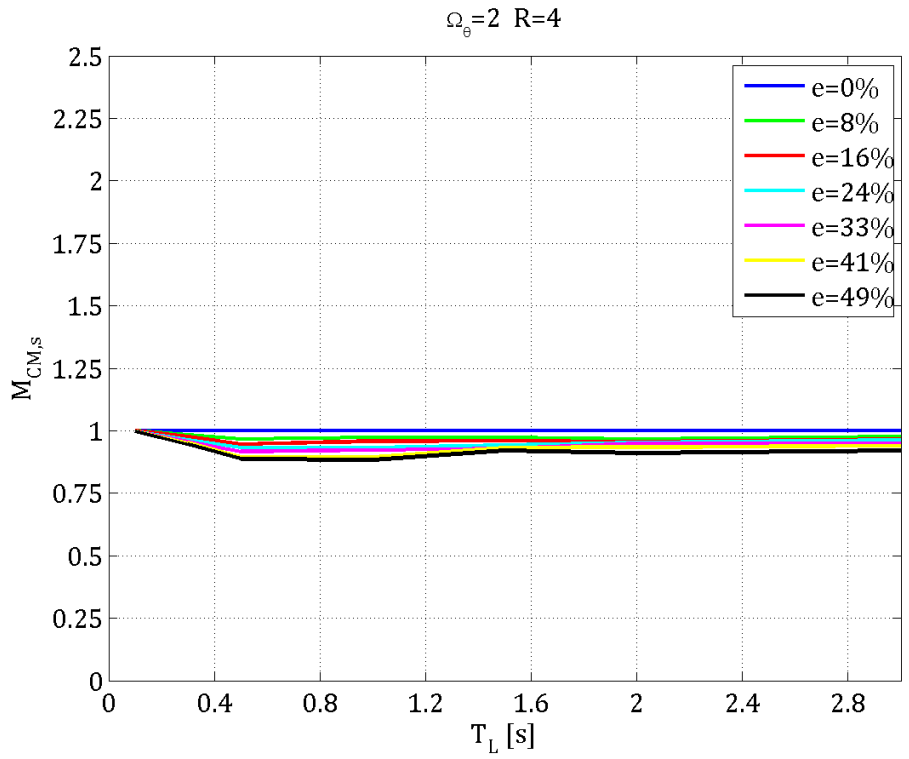




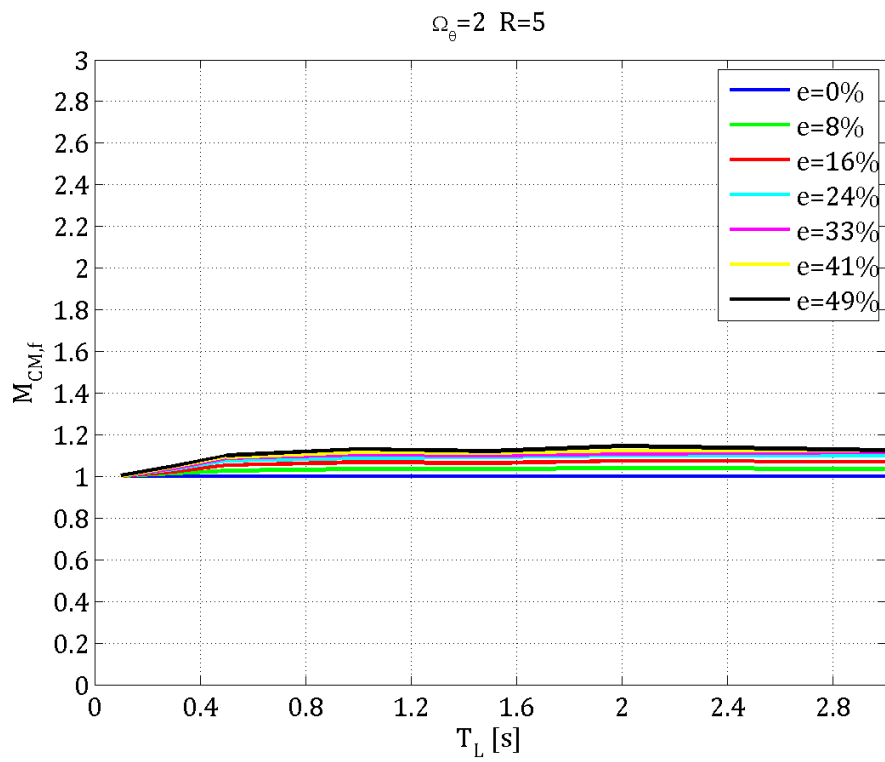
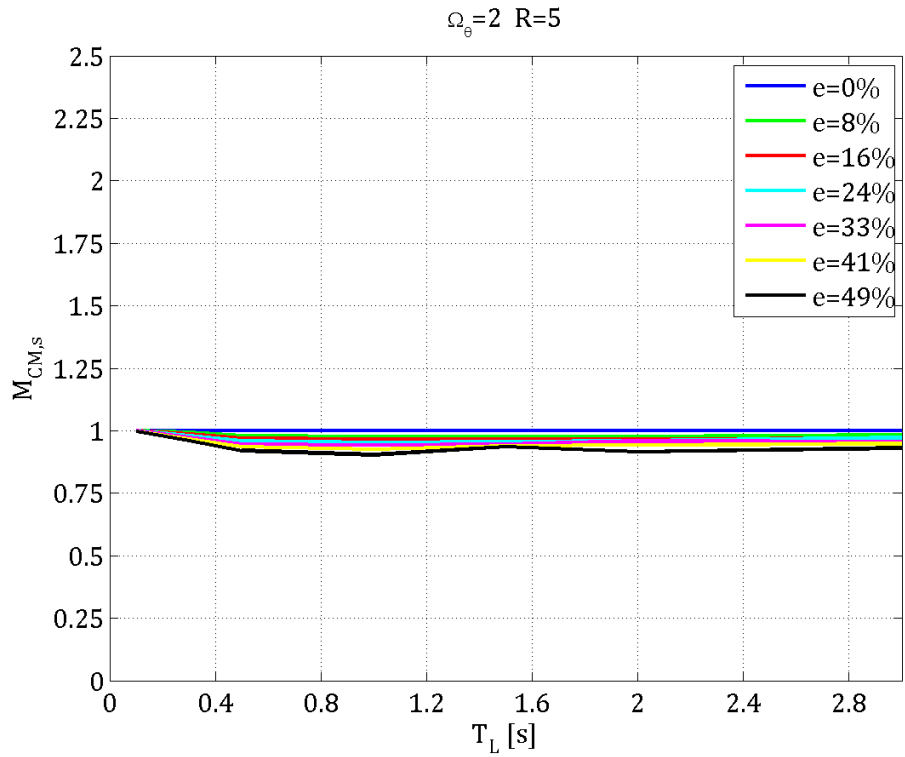
**Figura 6.37**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=2$  e  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.38**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=2$  e  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.39**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=2$  ed  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.40**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=2$  ed  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

6.2.2 Magnification Factors rispetto al sistema Non Eccentrico equivalente ( $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$ )

Strutture torsioflessibili ( $\Omega_\theta = 0,2$ )– Figure 6.41, 6.42, 6.43, 6.44

$M_{NE,s}$  per strutture torsioflessibili e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  è maggiore o uguale ad 1 per strutture con eccentricità relative comprese tra lo 0% e il 24%; è invece minore di 1 per eccentricità maggiori, e assume valori tanto minori quanto maggiore è l'eccentricità. In generale strutture con una stessa eccentricità ma diverso periodo longitudinale non presentano una gran variabilità del parametro  $M_{NE,s}$ .

L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  produce l'effetto di ricondurre ad 1 gli andamenti che con  $R=2$  erano maggiori di 1, mentre non ha particolari effetti sulle curve relative alle strutture con eccentricità maggiore. In generale più  $R$  è alto minore è la variabilità del coefficiente  $M_{NE,s}$  rispetto al periodo longitudinale.

$\delta$  per strutture torsioflessibili e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  è sempre maggiore o uguale ad 1. In generale tanto maggiore quanto maggiore è l'eccentricità della struttura per periodi minori di 1,5s; per periodi maggiori di 1,5s invece  $\delta$  assume valore unitario per tutte le strutture.

Si nota come nel caso non lineare si perda, rispetto al caso lineare, l'effetto di amplificazione degli spostamenti longitudinali rispetto a quelli dell'oscillatore non eccentrico equivalente (*period shifting*): in questo caso infatti non c'è alcun andamento asintotico per periodo bassi. Al contrario i valori maggiori del parametro  $\delta$  si hanno per un periodo di circa 0,3s; per periodi inferiori  $\delta$  si riconduce a valori prossimi ad 1.

L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  “schiaccia” tutte le curve diminuendo la variabilità con l'eccentricità, smorza e abbassa i picchi in

corrispondenza del periodo longitudinale di 0,3s e allarga l'intervallo in cui  $\delta = 1$  indipendentemente dal periodo e dall'eccentricità.

$M_{NE,f}$  per strutture torsioflessibili e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  è tanto maggiore quanto maggiore è l'eccentricità della struttura. Aumentando il periodo, ha un andamento crescente fino a  $T_L = 0,3s$  che poi diventa decrescente per periodi maggiori. Anche in questo caso il *period shifting effect* è annullato rispetto al corrispondente caso lineare: non c'è più un andamento asintotico delle curve.

L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  "schiaccia" tutte le curve diminuendo la variabilità con l'eccentricità, smorza e abbassa i picchi in corrispondenza del periodo longitudinale di 0,3s e allarga l'intervallo in cui  $M_{NE,f} = 1$  indipendentemente dal periodo e dall'eccentricità.

*Strutture con  $\Omega_\theta = 1$  - Figure 6.45, 6.46, 6.47, 6.48*

$M_{NE,s}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  all'aumentare del periodo longitudinale assume un andamento oscillante attorno al valore unitario mantenendo le curve specifiche di ogni eccentricità molto vicine tra loro. È compreso tra 0,7 ed 1,3 circa.

L'aumento dell'indice di riduzione delle forze  $R$  ha l'effetto di avvicinare gli andamenti al valore unitario, ma non comporta variazioni apprezzabili.

$\delta$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  non ha andamenti influenzati dal *period shifting*. È sempre maggiore di 1. In generale è tanto più grande quanto maggiore è l'eccentricità per periodi minori di 1,8s (anche se le variazioni più apprezzabili si hanno per periodi inferiori a 0,4s). per periodi maggiori a 1,8s  $\delta = 1$  indipendentemente dall'eccentricità e dal periodo longitudinale.

L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  appiattisce tutte le curve che possono essere approssimate con il valore unitario.

$M_{NE,f}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1$  e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  non ha andamenti influenzati dal *period shifting*. In generale è tanto maggiore quanto maggiore è l'eccentricità. Ha un valore massimo pari a 3 con  $T_L=0,3s$ ; si mantiene sempre maggiore di 1.

L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  appiattisce tutte le curve che restano comprese in un intervallo che va da 1 ad 1,7.

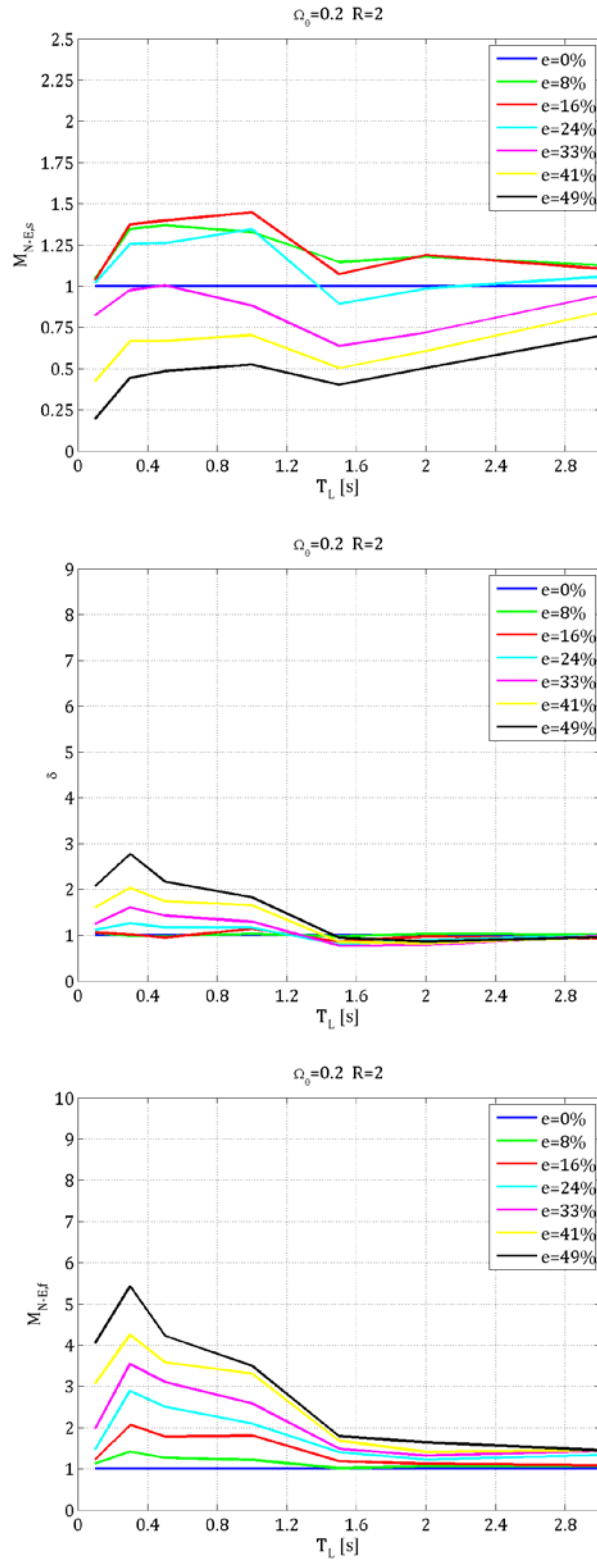
*Strutture torsiorigide ( $\Omega_\theta = 1,5$  e  $2$ ) – Figure 6.49 : 6.52 e 6.53 : 6.56*

$M_{NE,s}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 1,5$  e fattore di riduzione delle forze  $R=2$  è minore o uguale ad 1 per strutture con eccentricità relative inferiori al 24%; maggiore di 1 negli altri casi. Tale coefficiente presenta i valori maggiori per un periodo longitudinale pari a 0,1s.

L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  per strutture con  $T_L < 2s$  non ha effetto sulle amplificazioni (le curve maggiori di 1 restano quasi invariate), al contrario alza gli andamenti relativi alle eccentricità minori portandoli a valori maggiori o uguali ad 1.

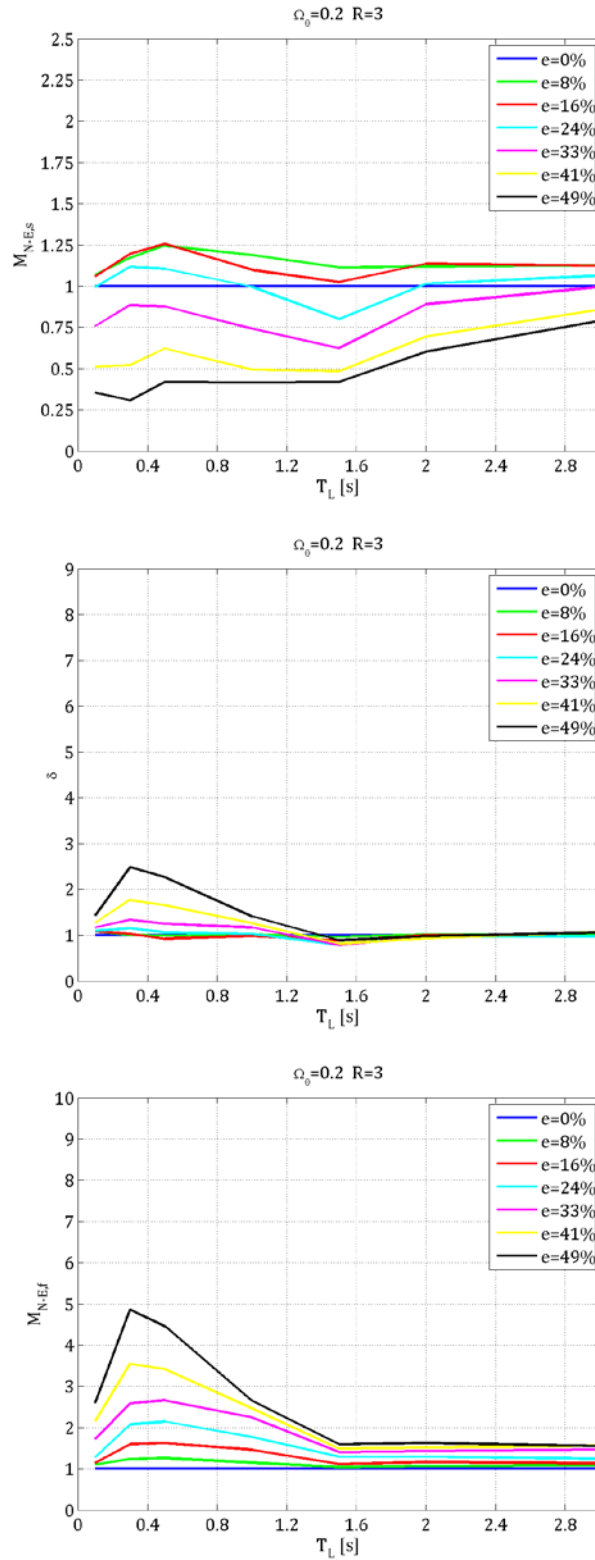
$M_{NE,s}$  per strutture con  $\Omega_\theta = 2$  è invece praticamente sempre minore di zero tranne che per periodi inferiori a 0,5s, per i quali assume valori maggiori di 1 fino ad un massimo di 1,25. L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  non ha effetto sulle amplificazioni (le curve maggiori di 1 restano quasi invariate), al contrario alza gli andamenti relativi alle eccentricità minori riconducendoli al valore unitario.

$\delta$  ed  $M_{NE,f}$  per strutture molto torsiorigide hanno gli stessi andamenti del caso con  $\Omega_\theta = 1$  con valori più bassi ma sempre maggiori di 1. L'aumento del fattore di riduzione delle forze  $R$  ha l'effetto di appiattare le curve e di ricondurle al valore unitario, indipendentemente dall'eccentricità e dal periodo longitudinale.

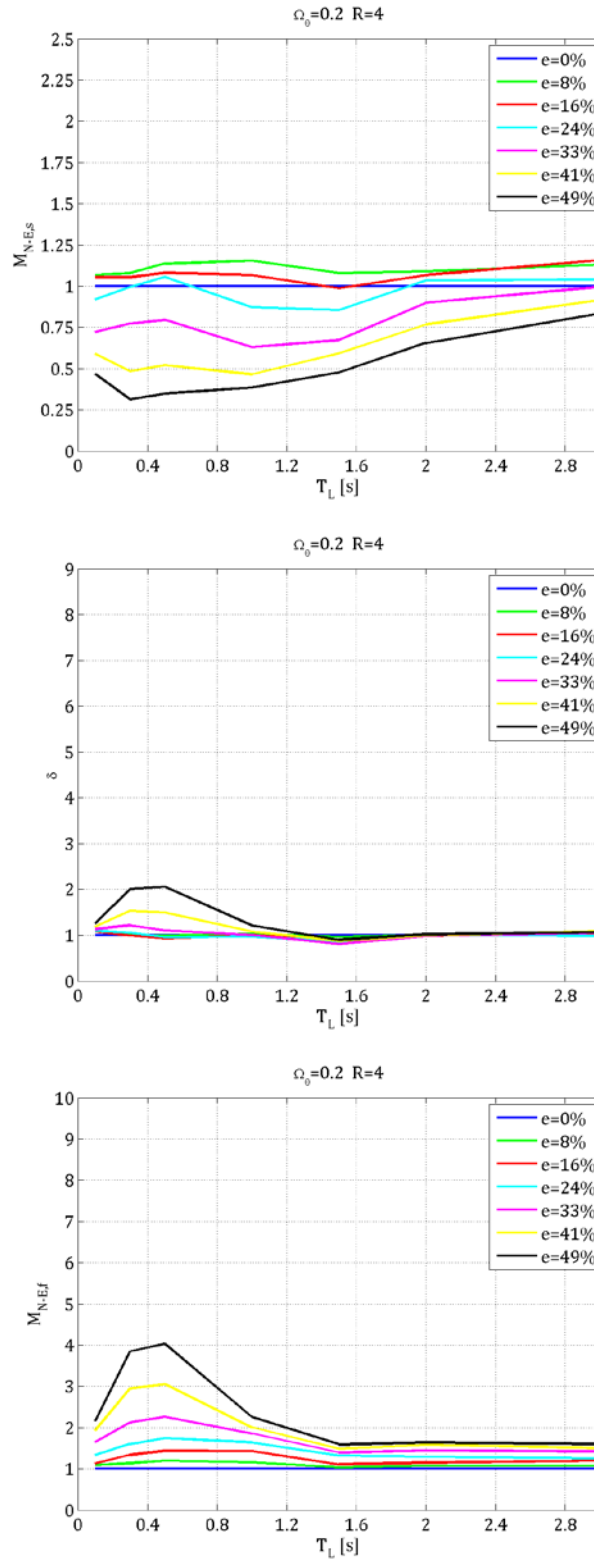


**Figura 6.41**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=0,2$  ed  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

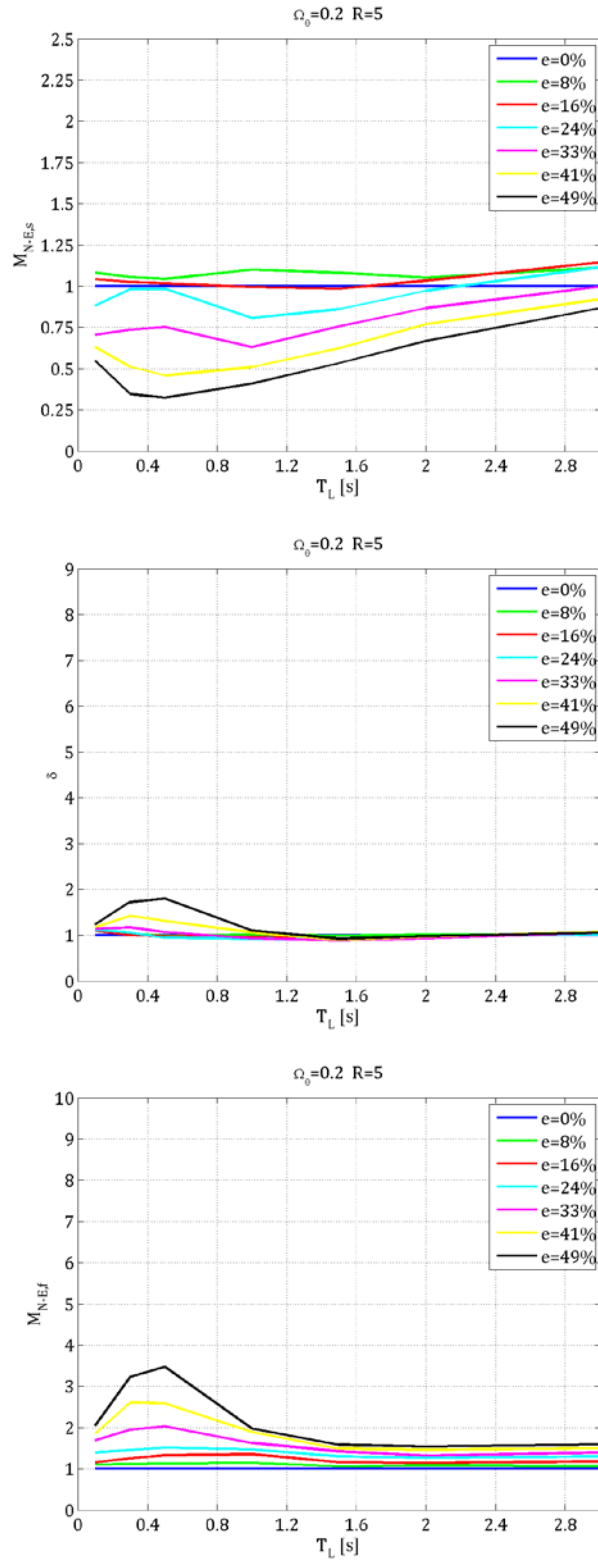




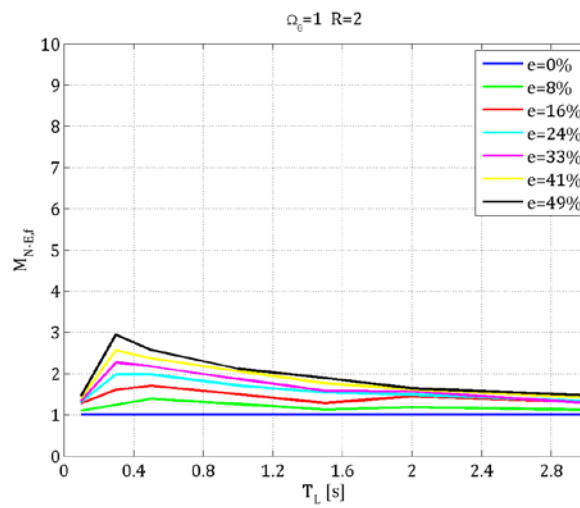
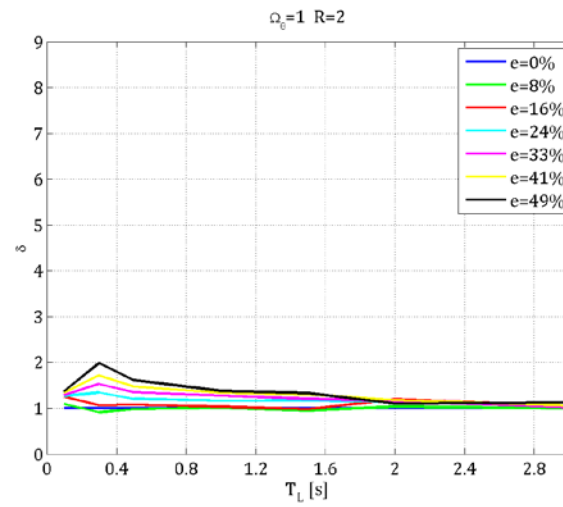
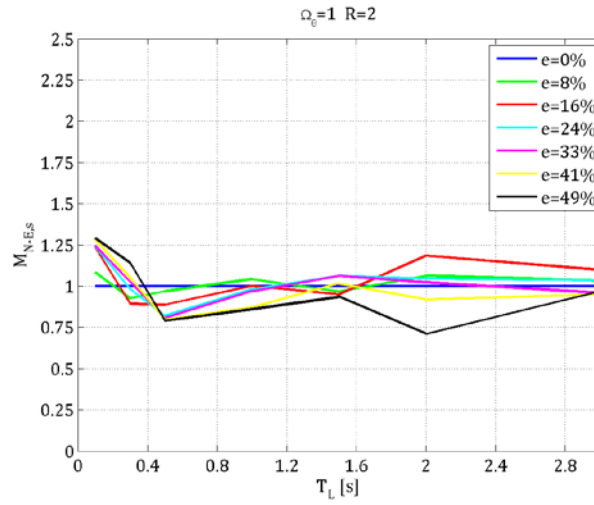
**Figura 6.42**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0 = 0,2$  ed  $R = 3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



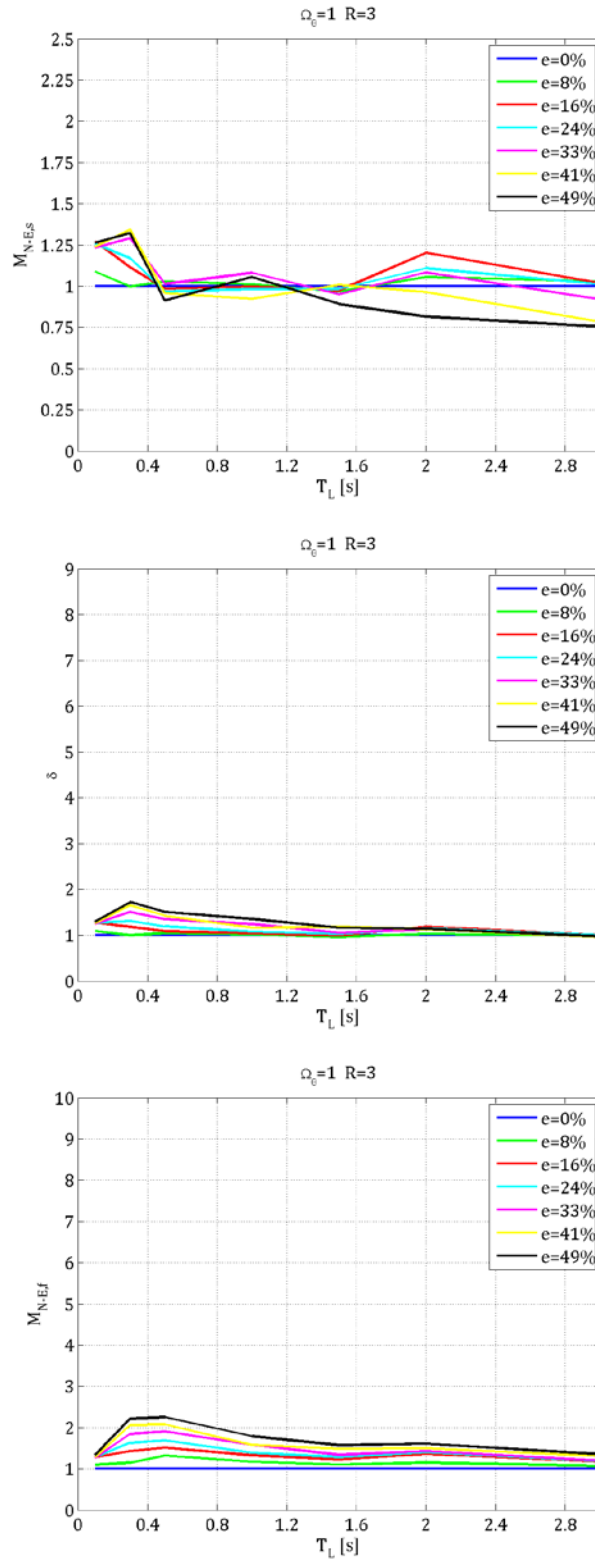
**Figura 6.43**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=0,2$  ed  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



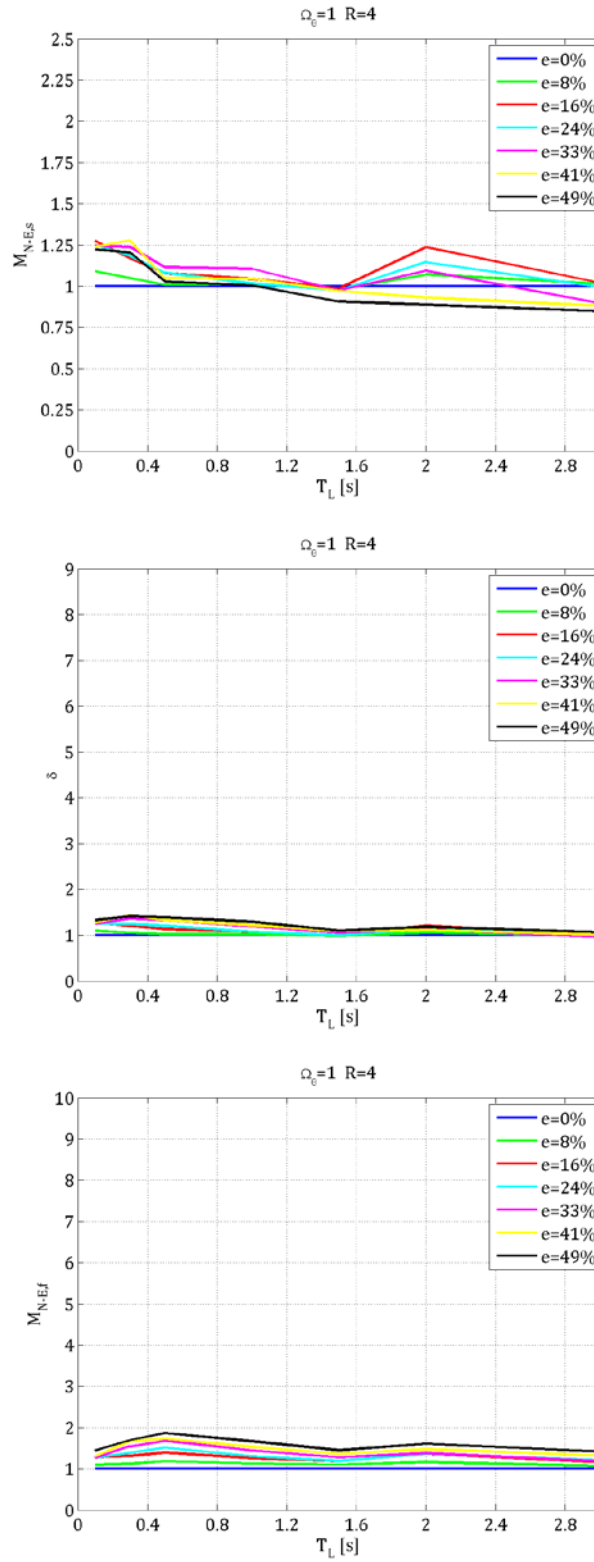
**Figura 6.44**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=0,2$  ed  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



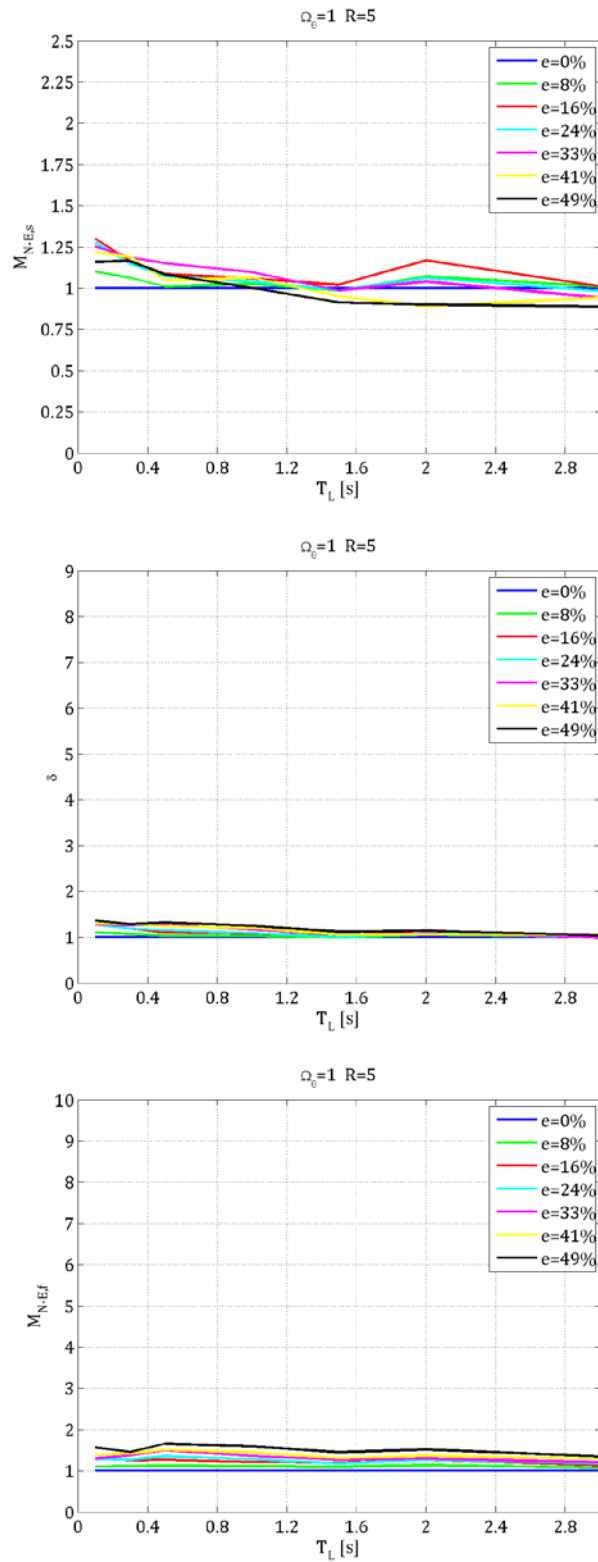
**Figura 6.45**  $M_{N-E_s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E_f}$  con  $\Omega_\theta=1$  ed  $R=2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



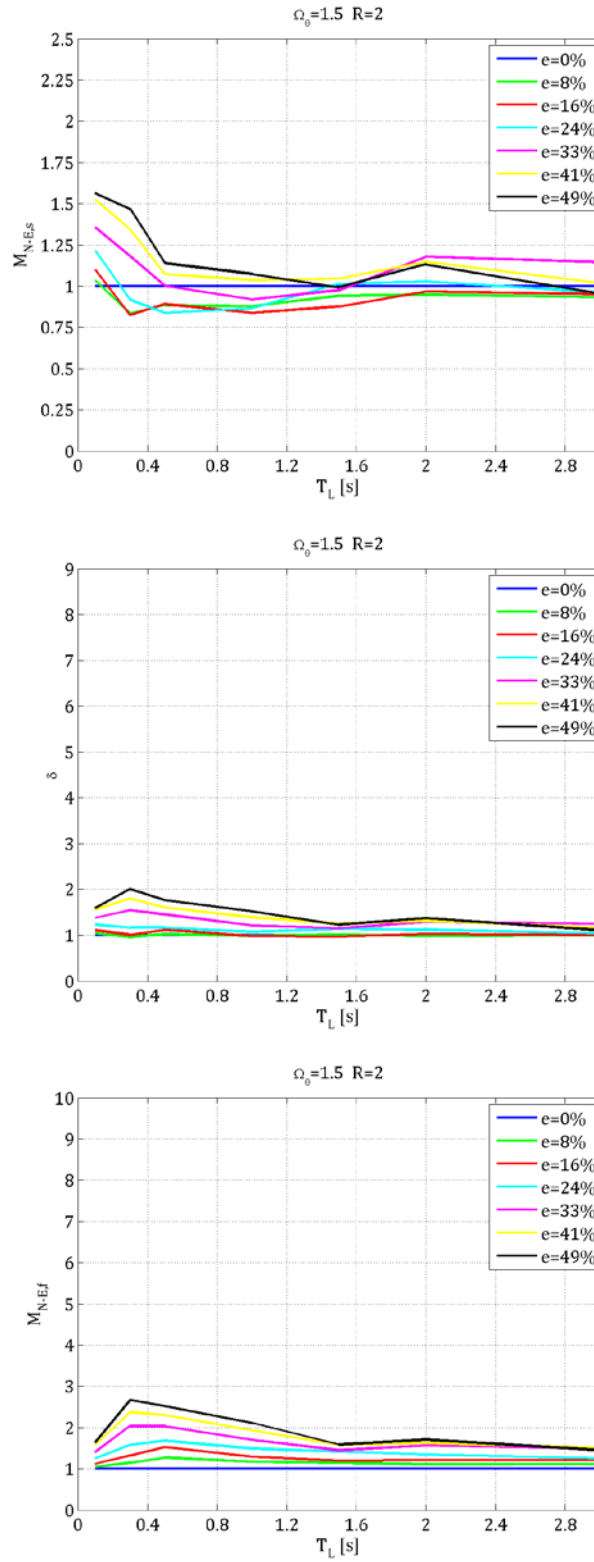
**Figura 6.46**  $M_{N-ES}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1$  ed  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.47**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1$  ed  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

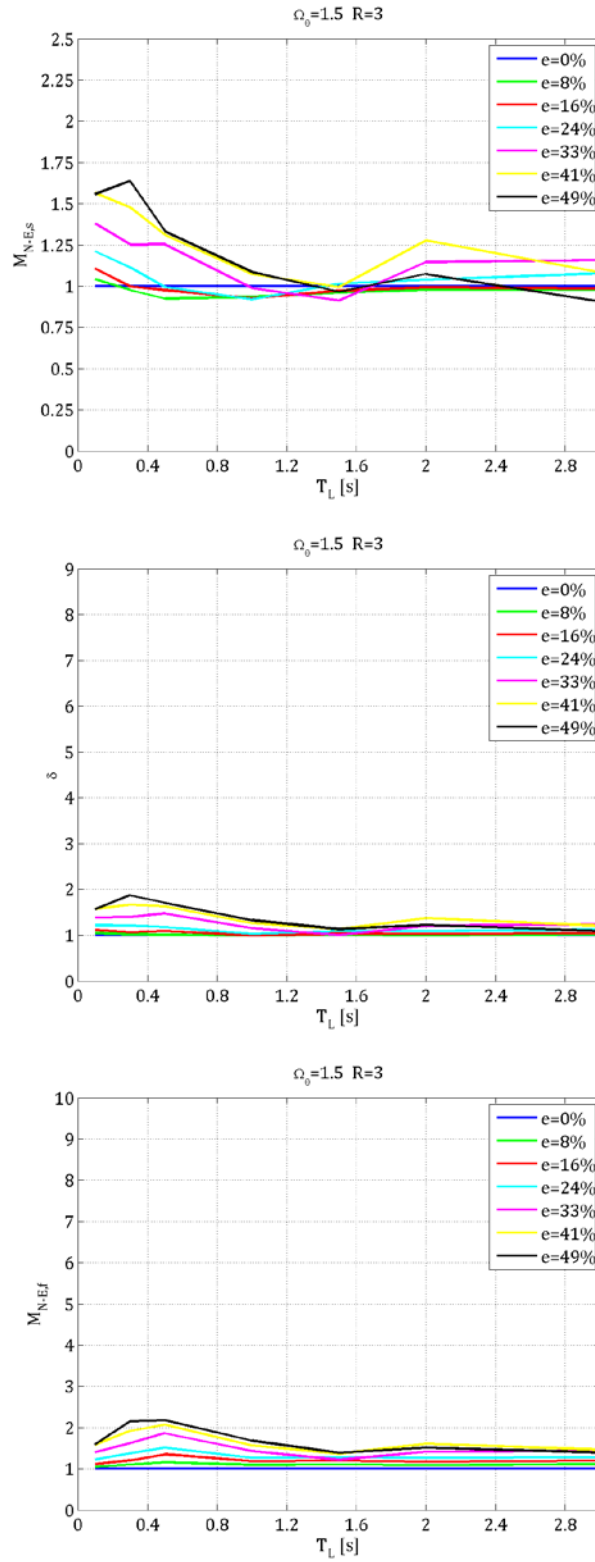


**Figura 6.48**  $M_{N-ES}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1$  ed  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

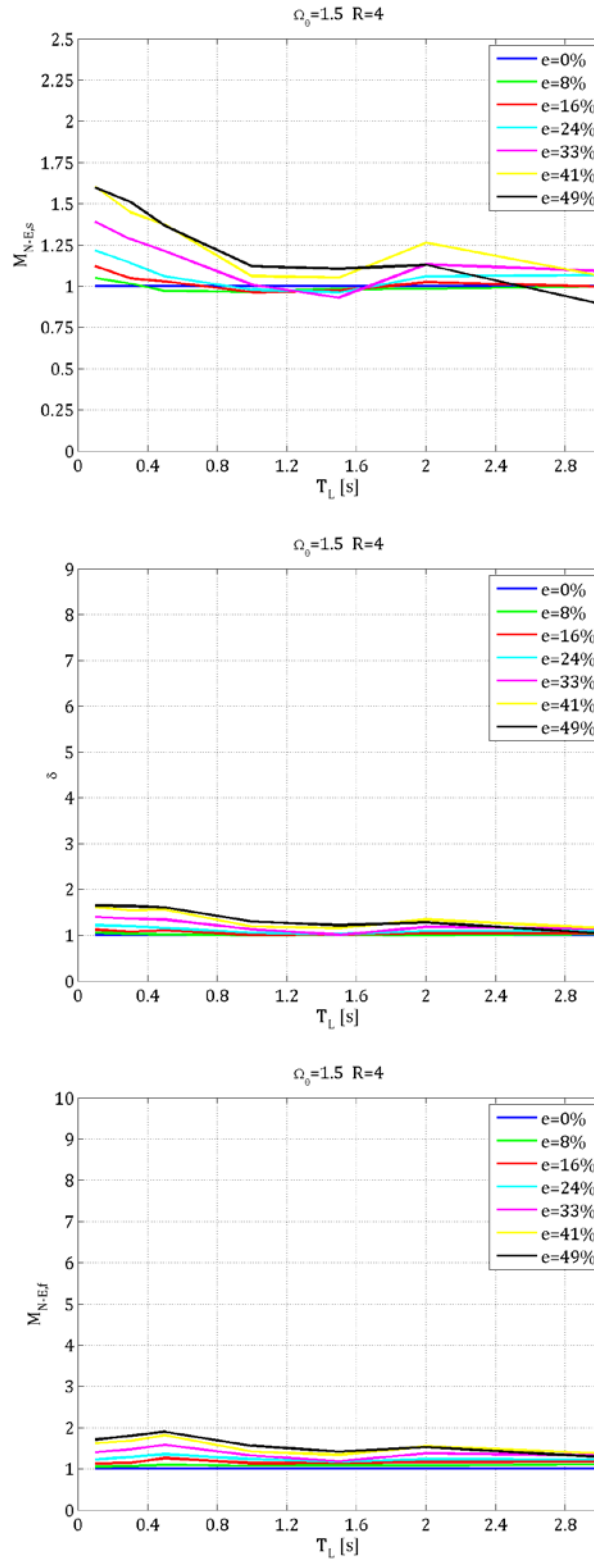


**Figura 6.49**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0 = 1,5$  ed  $R = 2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

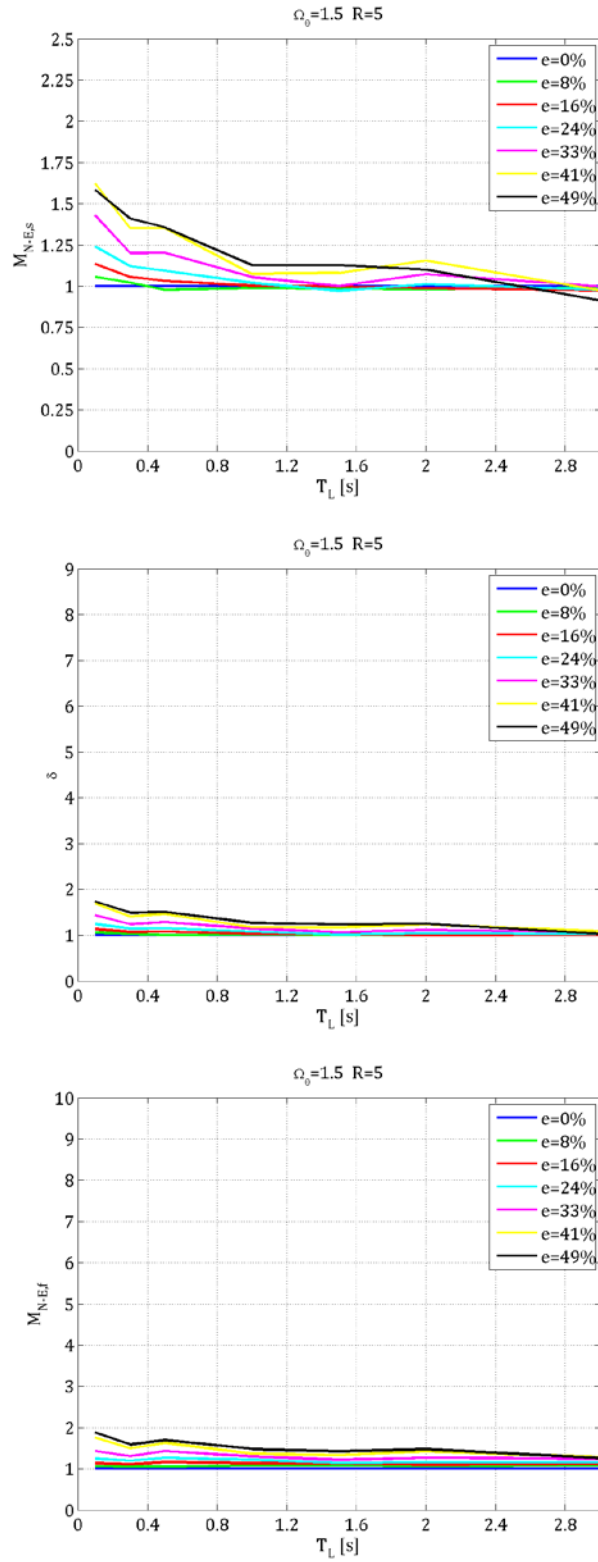




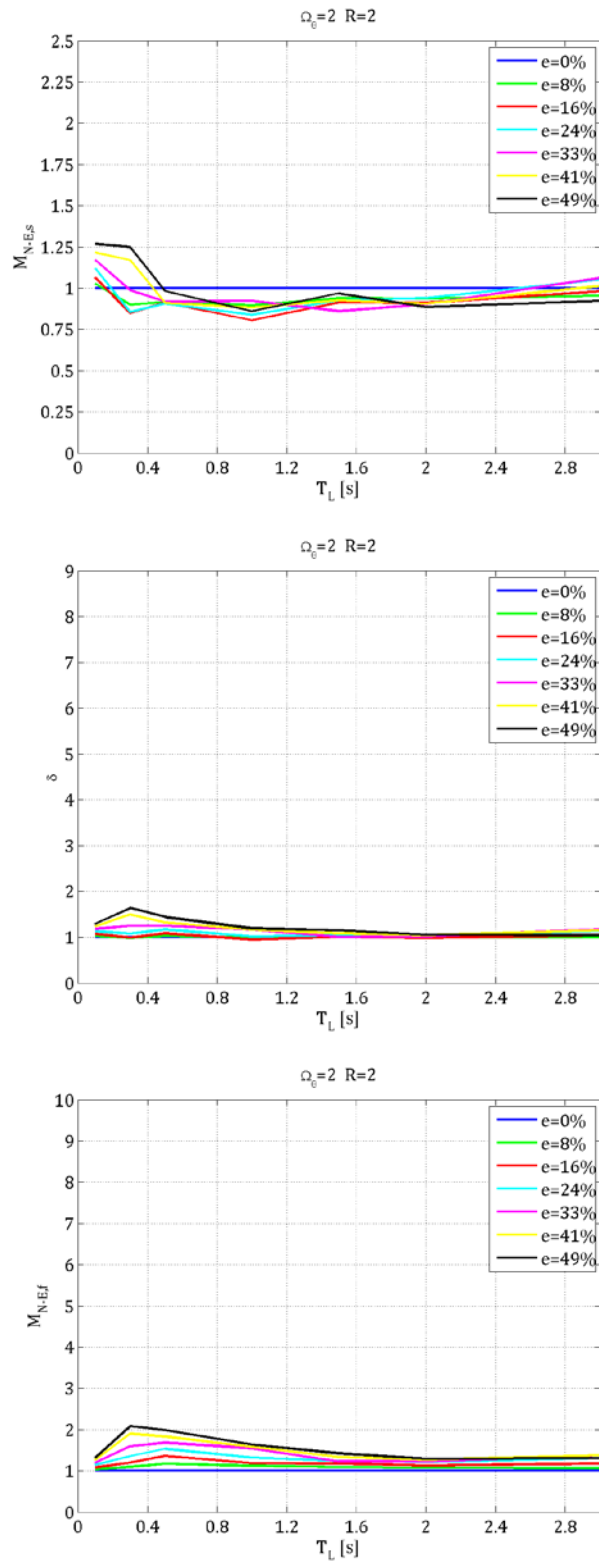
**Figura 6.50**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1,5$  ed  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



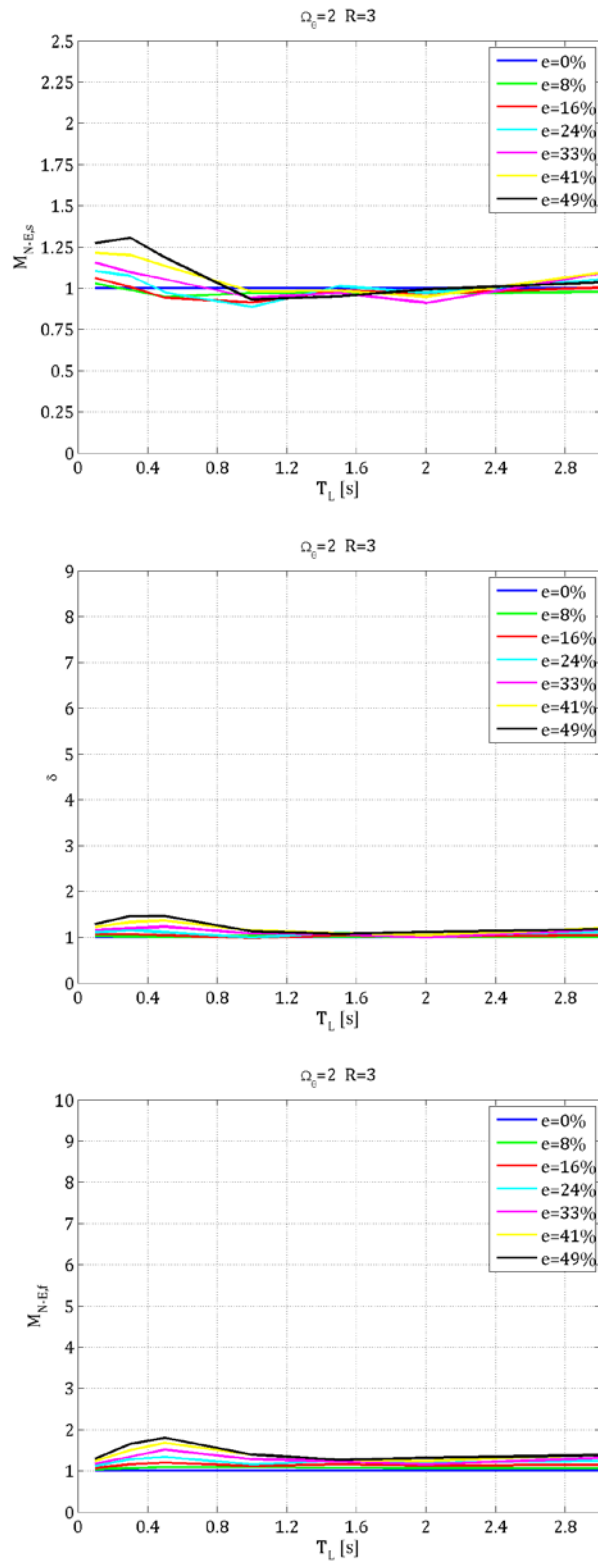
**Figura 6.51**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1,5$  ed  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



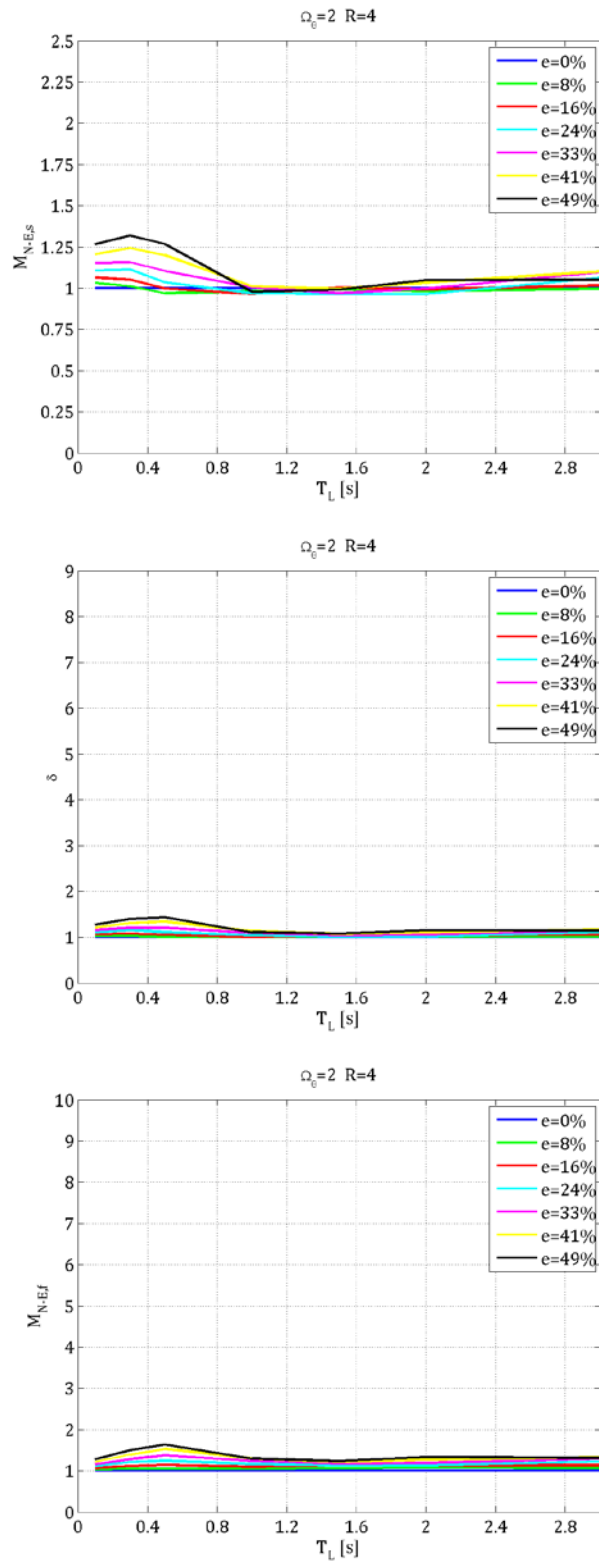
**Figura 6.52**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=1,5$  ed  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



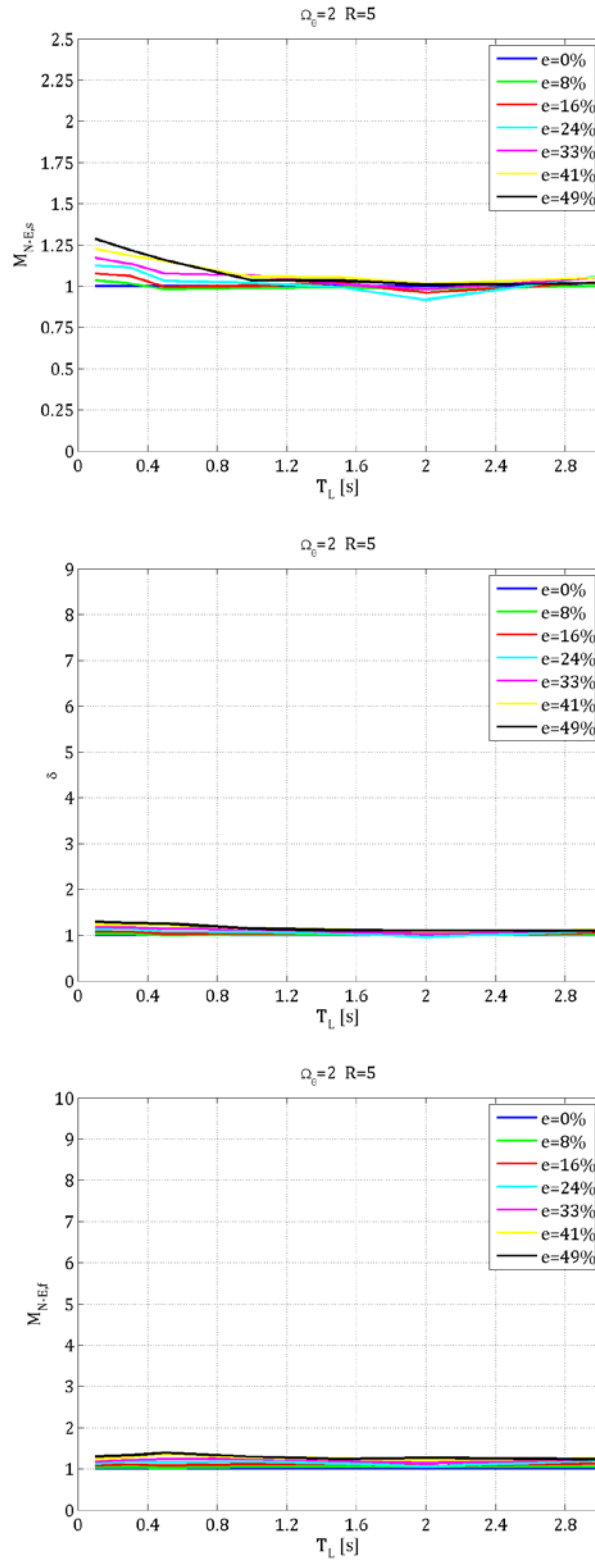
**Figura 6.53**  $M_{N-E_s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E_f}$  con  $\Omega_\theta = 2$  ed  $R = 2$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.54**  $M_{N-ES}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=2$  ed  $R=3$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.55**  $M_{N-Es}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_\theta=2$  ed  $R=4$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 6.56**  $M_{N-ES}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-Ef}$  con  $\Omega_0=2$  ed  $R=5$  in funzione del periodo longitudinale  $T_L$  per prefissati valori di eccentricità relativa  $e$ .

### 6.3 Sintesi dei risultati

Per quanto riguarda i Magnification Factors relativi al Centro di Massa della struttura eccentrica, si possono trarre le seguenti conclusioni:

Strutture *torsio-flessibili* (nel presente caso  $\Omega_\theta = 0,2$ ):

- $M_{CM,s}$  in generale diminuisce all'aumentare dell'eccentricità e assume valori compresi tra 0,05 e 1,7 (nel caso lineare con  $\xi = 5\%$ ) e tra 0,1 e 1,5 (nel caso non lineare con  $R=2$ ). Nel caso lineare l'incremento di  $\xi$  non influenza particolarmente gli andamenti; nel caso non lineare l'aumento di  $R$  abbassa le curve maggiori di 1 (fa diminuire le amplificazioni).
- $M_{CM,f}$  è sempre maggiore di 1 (sia nel caso lineare che in quello non lineare) e aumenta con l'eccentricità. Nel caso lineare è presente il *period shifting effect* che per periodi longitudinali piccoli fa assumere al coefficiente valori anche pari a 3 (per  $\xi = 5\%$ ). Nel caso non lineare questo effetto svanisce, per ogni valore di eccentricità i picchi si registrano con un periodo pari a 0,3s. Gli incrementi di  $\xi$  nel caso lineare e di  $R$  nel caso non lineare non influenzano più di tanto i rispettivi andamenti del coefficiente  $M_{CM,f}$ .

Strutture con  $\Omega_\theta = 1$ :

- $M_{CM,s}$  in generale diminuisce all'aumentare dell'eccentricità, e tranne che per le eccentricità più piccole in strutture con periodi grandi per le quali può raggiungere il valore di 1,25 nel caso lineare con  $\xi = 5\%$ , per il resto si mantiene sempre minore o uguale ad 1. La differenza sostanziale tra caso lineare e caso non lineare si ha per periodi piccoli (nei pressi di  $T_L=0,1$ ): in questo intorno il caso lineare registra i valori minori di ogni andamento, il caso non lineare invece fa assumere ad ogni andamento un valore prossimo all'unità indipendentemente dall'eccentricità. Nel caso lineare l'incremento di  $\xi$  non influenza particolarmente le curve già minori di 1 e riconduce a valore unitario



quei casi che con valori di smorzamento minori si trovavano sopra 1 portando amplificazioni. Nel caso non lineare l'aumento di R avvicina tra di loro le curve e le porta ad assumere valori di poco minori o uguali ad 1, indipendentemente dal periodo e dall'eccentricità.

- $M_{CM,f}$  è sempre maggiore di 1. Nel caso lineare si dimostra indipendente dal periodo longitudinale e, a partire da eccentricità relative maggiori del 16% si attesta attorno a valori compresi tra 1,6 e 1,8. Il suo andamento non è particolarmente influenzato dall'incremento di  $\xi$ . Nel caso non lineare invece assume valore unitario per  $T_L=0,1s$  per poi crescere fino a  $T_L=0,5s$  e decrescere gradualmente per periodi maggiori assumendo man mano un andamento costante. L'aumento di R accorcia il tratto crescente annullando di fatto il picco: a partire da  $T_L=0,5s$  il fattore  $M_{CM,f}$  assume valore costante con il periodo e di poco variabile con l'eccentricità.

Strutture *torsio-rigide* (nel presente caso  $\Omega_\theta = 1,5 - 2$ ):

- $M_{CM,s}$  è sempre minore di 1 e inversamente proporzionale all'eccentricità. In campo lineare per periodi inferiori ad 1,2s si può ritenere costante con il periodo, poi assume un andamento crescente all'aumentare del periodo ma solo per eccentricità maggiori del 30%. Il suo andamento non è particolarmente influenzato dall'incremento di  $\xi$  che ha il solo effetto di trasformare i tratti crescenti in tratti orizzontali, rendendo di fatto completa l'indipendenza di tale fattore dal periodo della struttura. In campo non lineare valgono le stesse cose dette per  $\Omega_\theta = 1$  con la differenza che l'aumento della rigidezza torsionale fa avvicinare tra loro tutte le curve oltre a comportare un calo in modulo dei valori di  $M_{CM,s}$ .
- $M_{CM,f}$  è sempre maggiore di 1 e proporzionale all'eccentricità. Nel caso lineare è sempre indipendente dal periodo, assume valori che vanno da 1 ad 1,6 e non è particolarmente influenzata dall'incremento

di  $\xi$ . Nel caso non lineare valgono le stesse cose dette per  $\Omega_\theta = 1$ . L'incremento di R porta tutte le curve a schiacciarsi e ad avvicinarsi al valore unitario.

All'aumentare della rigidità torsionale  $M_{CM,s}$  diventa sempre minore di 1 facendo di fatto diminuire le amplificazioni e riduce il modulo (si attesta intorno a valori compresi tra 0,5 ed 1 per il caso lineare, tra 0,7 ed 1 per il caso non lineare.).

All'aumentare della rigidità torsionale  $M_{CM,f}$  riduce la variabilità dei valori con l'eccentricità e il loro modulo.

Per quanto riguarda invece i Magnification Factors relativi alla struttura Non Eccentrica equivalente, si possono trarre le seguenti conclusioni:

Strutture *torsio-flessibili* (nel presente caso  $\Omega_\theta = 0,2$ ):

- $M_{N-E,s}$  nel caso lineare è sempre maggiore di 1 tranne che per eccentricità maggiori del 33%. Risente del *period shifting effect* soprattutto in strutture con bassa eccentricità. L'aumento di  $\xi$  fa svanire tale effetto. Nel caso non lineare non è più presente il *period shifting effect*. L'aumento di R abbassa le curve maggiori di 1, riportandole ad un valore unitario.
- $M_{N-E,f}$  è sempre maggiore di 1 e aumenta con l'eccentricità. Nel caso lineare risente ampiamente del *period shifting effect* che per periodi piccoli ed eccentricità grandi assume valori che possono arrivare di poco al di sotto di 20. L'incremento  $\xi$  abbassa le curve ma non modifica gli andamenti. Anche il caso non lineare è influenzato dal *period shifting effect* ma in maniera molto minore: i valori maggiori si hanno per  $T_L=0,3s$  e sono inferiori a 6. L'aumento di R abbassa le curve senza modificare gli andamenti.
- $\delta$  in campo lineare è sempre maggiore di 1 per periodi maggiori di 1s e presenta le stesse caratteristiche di  $M_{N-E,f}$  assumendo valori

leggermente minori. Per periodi superiori a 1s oscilla tra i valori di 0,5 ed 1. Anche in campo non lineare valgono per  $\delta$  le cose dette per  $M_{N-E,f}$  non lineare. Si può tuttavia aggiungere che per periodi superiori a 1,2s assume valore unitario indipendentemente dall'eccentricità.

Strutture con  $\Omega_\theta = 1$ :

- $M_{N-E,s}$  nel caso lineare è sempre minore di 1, in particolare compreso tra 0,5 ed 1, e non dipende dall'indice di smorzamento  $\xi$ . Nel caso non lineare oscilla attorno al valore unitario ma in generale per periodi inferiori a 0,4s è maggiore di 1. La variazione di R non influenza più di tanto gli andamenti.
- $M_{N-E,f}$  è sempre maggiore di 1 ed aumenta con l'eccentricità. Nel caso lineare risente sempre del *period shifting effect* ma in maniera molto più attenuata: il valore massimo ora è inferiore a 3,5. L'aumento di  $\xi$  abbassa le curve senza modificare gli andamenti. In campo non lineare non c'è quasi traccia del *period shifting effect* e le curve hanno un picco per  $T_L=0,3s$  (picco massimo pari a 3). L'aumento di R appiattisce i picchi, schiaccia le curve e le avvicina al valore unitario.
- $\delta$  sia in campo lineare che in campo non lineare presenta gli stessi trend del fattore  $M_{N-E,f}$  solo un po' più attenuati.

Strutture *torsio-rigide* (nel presente caso  $\Omega_\theta = 1,5 - 2$ ):

- $M_{N-E,s}$  in campo lineare è sempre minore di 1 in generale diminuisce con l'aumentare dell'eccentricità ed è quasi indipendente dal periodo longitudinale, ad eccezione del caso ad eccentricità maggiore (vedi grafici). L'aumento di  $\xi$  non influenza particolarmente gli andamenti che restano compresi tra i valori di 0,6 ed 1. In campo non lineare vale la stessa cosa detta nel caso  $\Omega_\theta = 1$ : le curve oscillano attorno al valore 1 e sono quasi indipendenti da periodo ed eccentricità. L'incremento di R riconduce gli andamenti a valore unitario.

- $M_{N-E,f}$  sia in campo lineare che in campo non lineare presenta gli stessi trend del medesimo fattore nel caso  $\Omega_\theta = 1$  solo ulteriormente attenuati (ora, indipendentemente da eccentricità e periodo longitudinale, vale circa 1).
- $\delta$  sia in campo lineare che in campo non lineare presenta gli stessi trend del medesimo fattore nel caso  $\Omega_\theta = 1$  solo ulteriormente attenuati (ora, indipendentemente da eccentricità e periodo longitudinale, vale circa 1).

In generale all'aumentare della rigidità torsionale le strutture perdono come da aspettativa le amplificazioni dovute al *period shifting effect*.

In generale strutture torsioflessibili a comportamento non lineare ne risentono già molto meno rispetto a strutture equivalenti che lavorano in campo lineare.

## 7. VALIDAZIONE NUMERICA DEGLI SPETTRI DEI MAGNIFICATION FACTORS

Utilizzando il software per la modellazione ad elementi finiti Sap2000 sono state create varie strutture pseudo-realistiche ad 1 piano caratterizzate dallo stesso diametro equivalente  $D_e$  (cioè dalle stesse dimensioni in pianta), dalla medesima massa distribuita  $m$  e dalla stessa rigidezza traslazionale totale ( $K_{tot}$  uguale per tutti i modelli).

Le strutture si distinguono invece per una diversa disposizione e/o dimensione degli elementi resistenti, caratteristiche che influiscono sul raggio di inerzia delle rigidezze, (cioè sul parametro  $\Omega_\theta$ ) e sull'eccentricità  $e$ .

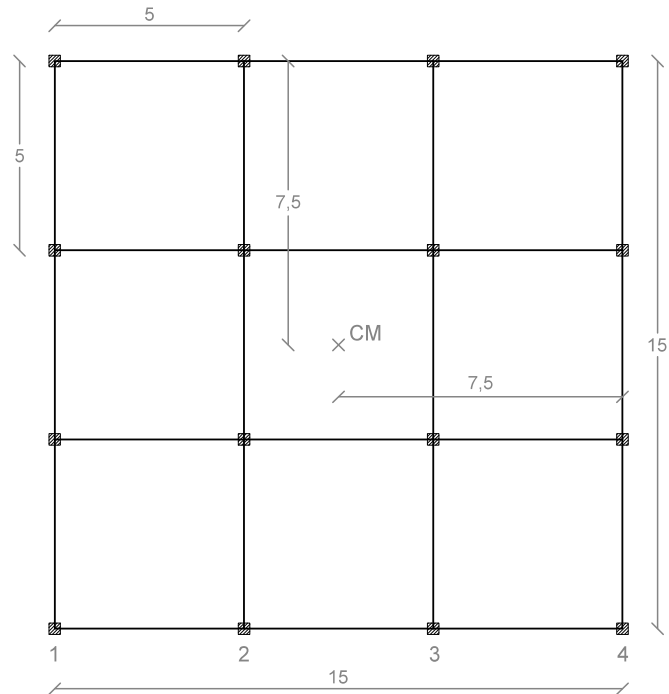
Si fa presente che per mantenere la stessa rigidezza traslazionale tra le strutture si è modificato il modulo elastico  $E$  del materiale.

Inoltre è importante specificare che i *setti* presenti in alcune strutture sono stati modellati come elementi *frame* per una più facile applicazione delle cerniere plastiche con Sap2000 (si veda § 7.5.1).

Per ogni modello sono state condotte analisi time-history con 10 accelerogrammi artificiali spettrocompatibili: ad ogni sisma la struttura ha risposto con uno spostamento longitudinale massimo (in modulo) valutato in 3 punti (lato rigido, centro di massa e lato flessibile).

Gli spostamenti longitudinali massimi di ciascun punto notevole sono infine stati ottenuti dalla media degli spostamenti massimi dati da ogni sisma.

## 7.1 Modello di riferimento



**Figura 7.1** Pianta del modello non eccentrico di riferimento.

### *Geometria, materiali e carichi telaio:*

- Struttura ad 1 piano con 3 campate uguali
- pianta 15x15 m
- pilastri 30x30 cm
- travi 30x45 cm
- altezza di piano 3,5 m
- vincolo nodi alla base: incastro
- vincolo nodi pilastro/travi: rotazioni flessionali impedito
- materiale: calcestruzzo armato C25/30 con  $E=30000$  MPa
- densità materiale impostata nulla perché la posizione del baricentro della struttura non sia influenzata dalla disposizione degli elementi

irrigidenti (pilastri e setti). In questo modo il DEAD LOAD risulta nullo.

- solaio costituito da elementi shell/membrane con spessore 25 cm e rigidità flessionale nulla (*bending thickness* = 0 cm)
- carichi = 100 kN/m<sup>2</sup> (inseriti nel caso di carico PERMANENTI); si tratta di un carico sproporzionato per strutture ad 1 piano, tuttavia è stato scelto per aumentare il periodo di vibrazione longitudinale delle strutture in modo tale da avere un miglior confronto con gli spettri dei Magnification Factors.
- mass source: per avere la combinazione sismica si utilizzano coefficienti di contemporaneità pari a 1 sia per i carichi DEAD (peso proprio) sia per quelli PERMANENTI.

## 7.2 Accelerogrammi spettrocompatibili

Le azioni conseguenti al moto sismico possono essere modellate sia direttamente, attraverso forze statiche equivalenti o spettri di risposta, sia indirettamente, attraverso accelerogrammi.

Gli accelerogrammi *naturali* (o *registrati*) sono la più diretta rappresentazione del moto al suolo poiché contengono caratteristiche quali ampiezza, contenuto in frequenza, energia, durata e fase di eventi reali. Oggi è facile operare analisi dinamiche non lineari utilizzando tali accelerogrammi grazie alla presenza di database online contenenti migliaia di registrazioni sismiche, per esempio il catalogo *Peer*.

Il paragrafo 3.2.3.6 delle NTC 2008 impone che: *“L'uso di accelerogrammi registrati è ammesso, a condizione che la loro scelta sia rappresentativa della sismicità del sito e sia adeguatamente giustificata in base alle caratteristiche sismogenetiche della sorgente, alle condizioni del sito di registrazione, alla magnitudo, alla distanza dalla sorgente e alla massima accelerazione orizzontale attesa al sito.”*

*Gli accelerogrammi registrati devono essere selezionati e scalati in modo da approssimare gli spettri di risposta nel campo di periodi di interesse per il problema in esame.”*

Per quanto riguarda invece gli accelerogrammi *artificiali*, il paragrafo 3.2.3.6 delle NTC 2008 prescrive che il set di tali accelerogrammi utilizzato per le analisi abbia uno spettro di risposta medio coerente con quello elastico definito dal codice. Tale coerenza è da verificare in base alla media delle ordinate spettrali ottenute con i diversi accelerogrammi per un coefficiente di smorzamento viscoso equivalente  $\xi$  pari al 5%.

Nel dettaglio la norma spiega: *“L'ordinata spettrale media non deve presentare uno scarto in difetto superiore al 10%, rispetto alla corrispondente componente dello spettro elastico, in alcun punto del maggiore tra gli intervalli 0,15s ÷ 2,0s*



*e  $0,15s \div 2T$ , in cui  $T$  è il periodo fondamentale di vibrazione della struttura in campo elastico, per le verifiche agli stati limite ultimi, e  $0,15 s \div 1,5 T$ , per le verifiche agli stati limite di esercizio. Nel caso di costruzioni con isolamento sismico, il limite superiore dell'intervallo di coerenza è assunto pari a  $1,2 T_{is}$ , essendo  $T_{is}$  il periodo equivalente della struttura isolata, valutato per gli spostamenti del sistema d'isolamento prodotti dallo stato limite in esame. [...]*"

Per quanto riguarda il *numero di accelerogrammi* da utilizzare per le analisi, le NTC 2008 specificano nel paragrafo 7.3.5 (*Risposta alle diverse componenti dell'azione sismica ed alla variabilità spaziale del moto*) che *"Se la risposta viene valutata mediante analisi dinamica con integrazione al passo, in campo lineare o non lineare, le due componenti accelerometriche orizzontali (e quella verticale, ove necessario) sono applicate simultaneamente a formare un gruppo di accelerogrammi e gli effetti sulla struttura sono rappresentati dai valori medi degli effetti più sfavorevoli ottenuti dalle analisi, se si utilizzano almeno 7 diversi gruppi di accelerogrammi, dai valori più sfavorevoli degli effetti, in caso contrario. In nessun caso si possono adottare meno di tre gruppi di accelerogrammi."*

La definizione di *gruppo* di accelerogrammi è data dal paragrafo 3.2.3.6, in cui si specifica che è costituito dall'insieme delle tre componenti dell'azione sismica (due orizzontali, tra loro ortogonali, ed una verticale).

Tenuto conto che la componente verticale dell'azione sismica va considerata solo in casi particolari, specificati nel paragrafo 7.2.1 e in cui i modelli trattati non ricadono, e che per analisi su strutture piane l'azione sismica può essere considerata come agente secondo una sola direzione, in questa trattazione il *gruppo* di accelerogrammi si riduce alla sola componente orizzontale in direzione  $y$ .

Per poter considerare la media degli effetti più sfavorevoli sulla struttura (cioè la media dei valori massimi di spostamento causati sulla struttura da ogni sisma), sono stati presi 10 accelerogrammi.

In questa trattazione si è scelto di utilizzare accelerogrammi artificiali spettrocompatibili, creati attraverso il programma SIMQKE di Gelfi rispettando la normativa.

In particolare si è considerato lo spettro di progetto SLV fornito dalla normativa per la zona del comune di Faenza (RA) impostando i parametri presentati in Figura 7.1.

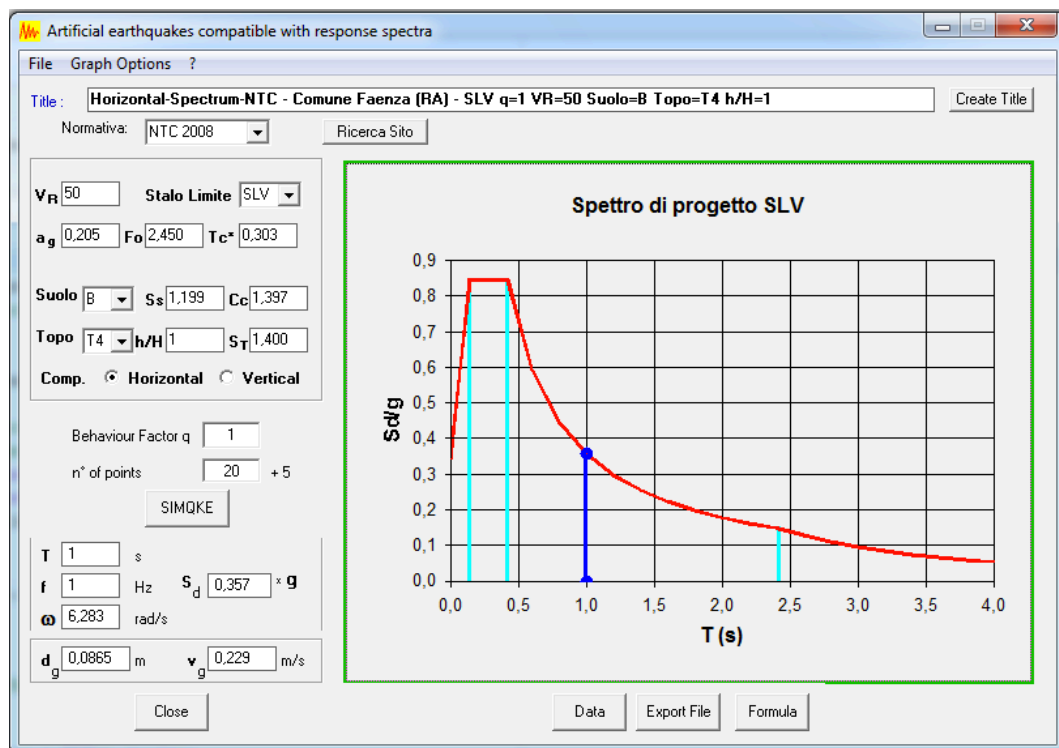
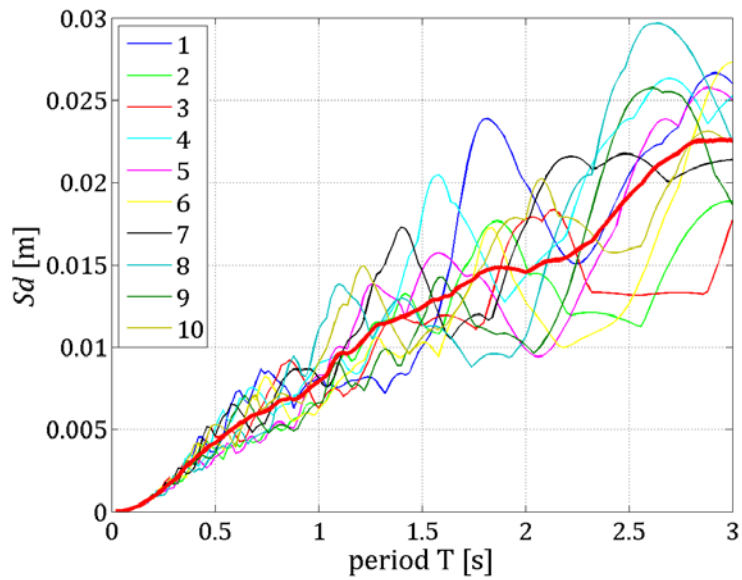


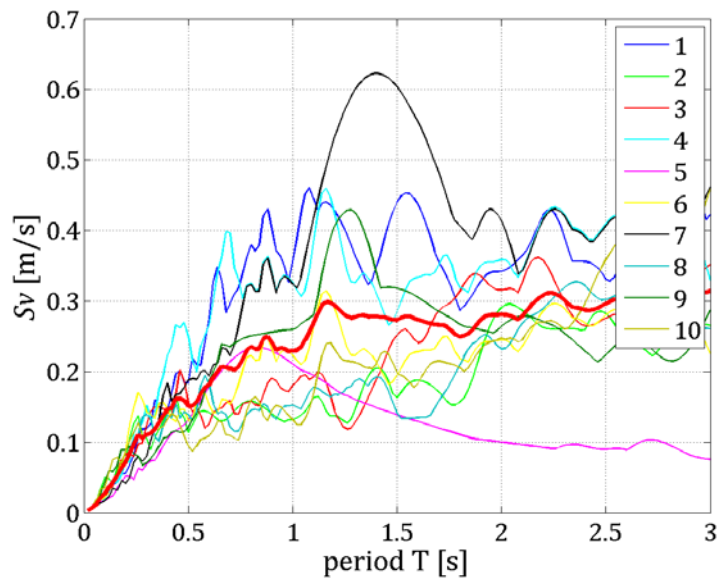
Figura 7.2 Spettro di progetto da SIMQKE.

Successivamente si è chiesto al programma di creare 10 accelerogrammi compatibili con quello spettro, esportati poi in tabelle. Tali accelerogrammi hanno una durata di 20s ed una frequenza di campionamento di 0,01s.

Attraverso uno *script* creato con Matlab si sono voluti ricavare anche gli *spettri medi* degli spostamenti e delle velocità, presentati qui di seguito.



**Figura 7.3** Spettro degli spostamenti degli accelerogrammi ottenuti con SIMQKE.



**Figura 7.4** Spettro delle velocità degli accelerogrammi ottenuti con SIMQKE.

### 7.3 Casi di studio e calcolo dei parametri fisici

I casi di studio si sono sempre attenuti all'ipotesi iniziale che riguarda la presenza di eccentricità in una sola direzione (direzione x).

Nella pratica questo si traduce in modifiche sulla struttura di riferimento eseguite in modo simmetrico rispetto all'asse x, ed asimmetrico rispetto all'asse y.

I modelli eccentrici sono stati ottenuti, come vedremo, seguendo vari approcci: un metodo prevede l'inserimento di setti, un altro la modifica della sezione dei pilastri del modello di riferimento.

Nei paragrafi seguenti vengono calcolati massa totale delle strutture, rigidezze traslazionali e torsionali degli elementi resistenti utilizzati e periodo longitudinale dei sistemi.

#### 7.3.1 Massa dei sistemi

L'eccentricità del sistema, cioè la distanza tra centro di massa e centro di rigidezza, è calcolata sotto l'ipotesi che la posizione del centro di massa rimanga invariata quale che sia la configurazione degli elementi resistenti.

Per rispettare tale ipotesi, come detto in precedenza, si è considerato un carico uniformemente distribuito sul solaio che incorporasse carichi permanenti e pesi propri. Gli elementi irrigidenti del sistema sono stati quindi costituiti da un materiale con una certa rigidezza ma con una densità nulla.

Si è scelto un carico distribuito pari a  $100 \text{ kN/m}^2$ .

La massa totale del sistema vale pertanto:

$$M_{\text{tot}} = \frac{100 \cdot 15 \cdot 15}{9,81} = 2293,58 \frac{\text{Ns}^2}{\text{mm}}$$

### 7.3.2 Rigidezza traslazionale degli elementi resistenti

- *Rigidezza pilastri*

La *rigidezza totale del pilastro* coincide con la sua rigidezza flessionale, poiché la rigidezza tagliante viene di norma trascurata. Considerando un vincolamento ad incastro-incastro scorrevole, essa vale:

$$K_{pil} = \frac{12EJ_{pil}}{h^3} \quad (7.1)$$

dove  $E$  è il modulo elastico longitudinale del materiale,  $J$  il momento di inerzia della sezione di base del pilastro rispetto ad un asse baricentrico,  $h$  l'altezza del pilastro.

Sono stati considerati pilastri in calcestruzzo armato C25/30 (modulo elastico  $E=30\,000$  MPa), con sezione di 30x30 cm ed altezza di piano pari a 3,5 m.

Poiché tale area è quadrata, i *momenti di inerzia* della sezione del pilastro risultano uguali e pari a:

$$J_{pil} = \frac{300^4}{12} = 675\,000\,000 \text{ mm}^4$$

La *rigidezza di un pilastro* risulta pertanto:

$$K_{pil} = \frac{12 \cdot 30\,000 \cdot 675\,000\,000}{3500^3} = 5667,64 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

- *Rigidezza setti*

La *rigidezza del setto* dipende dalla sua rigidezza flessionale ( $K_b$ ) e dalla sua rigidezza tagliante ( $K_v$ ) nel seguente modo:

$$\frac{1}{K_{tot}} = \frac{1}{K_b} + \frac{1}{K_v} \quad \rightarrow \quad K_{tot} = \frac{K_b \cdot K_v}{K_b + K_v} \quad (7.2)$$

La *rigidezza a flessione* del setto è stata valutata considerando un suo vincolamento a doppio incastro (incastro-incastro scorrevole). Essa vale pertanto:

$$K_b = \frac{12EJ}{h^3} \quad (7.3)$$

dove  $E$  è il modulo elastico longitudinale del materiale,  $J$  il momento di inerzia della sezione di base del setto rispetto ad un asse baricentrico,  $h$  l'altezza del setto.

La *rigidezza a taglio* del setto invece è definita dalla formula seguente:

$$K_v = \frac{AG}{\chi h} \quad (7.4)$$

in cui  $A$  è l'area di base del setto,  $G$  il modulo elastico trasversale,  $\chi$  il fattore di riduzione per l'area sottoposta a taglio (che per sezioni rettangolari vale 1,2),  $h$  l'altezza del setto.

Sono stati considerati setti in calcestruzzo armato C25/30 (modulo elastico  $E=30000\text{MPa}$ ), con spessore di 30 cm e lunghezza di 3 m; l'altezza dei setti è ovviamente pari a quella di piano che è di 3,5 m. Si è scelto di inserire 2 setti in direzione  $x$  e 2 setti in direzione  $y$  (guardando la pianta dell'edificio), rispettando così l'ipotesi iniziale di struttura con uguale rigidezza nelle due direzioni.

I setti presentano due rigidezze diverse a seconda che siano sollecitati lungo il proprio piano o perpendicolarmente ad esso.

Si individuano perciò una direzione cosiddetta *strong*, che è quella lungo il piano del setto, e una direzione *weak*, perpendicolare al piano del muro.

I momenti di inerzia che si ottengono sono:

$$J_{\text{wall, strong}} = \frac{300 \cdot 3000^3}{12} = 1000 \cdot J_{\text{pil}} = 675\,000\,000\,000 \text{ mm}^4$$

$$J_{\text{wall, weak}} = \frac{3000 \cdot 300^3}{12} = 10 \cdot J_{\text{pil}} = 6\,750\,000\,000 \text{ mm}^4$$

Le rigidezze flessionali dei setti nelle due direzioni valgono:

$$K_{b, \text{wall, strong}} = \frac{12 \cdot 30\,000 \cdot 1000 \cdot J_{\text{pil}}}{3500^3} = 1000 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{b, \text{wall, weak}} = \frac{12 \cdot 30\,000 \cdot 10 \cdot J_{\text{pil}}}{3500^3} = 10 \cdot K_{\text{pil}}$$

Per il calcolo della rigidezza a taglio occorre ricavare il modulo elastico trasversale  $G$ , che vale:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{30\,000}{2(1 + 0,2)} = 12\,500 \text{ MPa} \quad (7.5)$$

La rigidezza tagliante del setto quindi è pari a:

$$K_{V, \text{wall}} = \frac{(300 \cdot 3000) \cdot 12\,500}{1,2 \cdot 3500} = 2\,678\,571 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 472,608 \cdot K_{\text{pil}}$$

Per concludere, le rigidezze totali del setto, calcolate nelle due direzioni, valgono:

$$\begin{aligned} K_{\text{tot, wall, strong}} &= \frac{1000 \cdot 472,608}{1000 + 472,608} \cdot K_{\text{pil}} = 320,933 \cdot K_{\text{pil}} \\ &= 1\,879\,561,714 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \end{aligned}$$

$$K_{\text{tot, wall, weak}} = \frac{10 \cdot 472,608}{10 + 472,608} \cdot K_{\text{pil}} = 9,793 \cdot K_{\text{pil}} = 57\,352,077 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

- *Rigidezza vano ascensore*

Come si vedrà in seguito, è stata modellata anche una struttura con un vano ascensore; le pareti del vano sono state inserite in Sap2000 come setti separati. Questo implica che il vano ascensore non si comporti come unico elemento resistente a sezione quadrata cava, ma abbia caratteristiche di rigidezza traslazionale e torsionale data dalla somma dei setti.

Per completezza tuttavia in questo paragrafo si calcola anche la *rigidezza traslazionale del vano ascensore*.

Se il vano ha una sezione quadrata di dimensioni all'asse pari a 3m e spessore 0,3m, il suo momento di inerzia nelle due direzioni vale:

$$J_{V.A.} = \frac{3,3^4 - 2,7^4}{12} = 5,454 \text{ m}^4 = 8080 \cdot J_{pil}$$

Considerando un vincolamento a doppio incastro la *rigidezza flessionale* del vano vale:

$$K_{b,V.A.} = \frac{12 E J_{V.A.}}{h^3} = \frac{12 \cdot 30\,000 \cdot 8080 \cdot J_{pil}}{3500^3} = 8080 \cdot K_{pil}$$

La *rigidezza tagliante* del vano invece è pari a:

$$K_{v,V.A.} = \frac{(3300^2 - 2700^2) \cdot 12\,500}{1,2 \cdot 3500} = 10\,714\,286 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 1890 \cdot K_{pil}$$

Per concludere, la rigidezza traslazionale totale del vano ascensore, uguale nelle due direzioni, vale:

$$K_{tot,V.A.} = \frac{8080 \cdot 1890}{8080 + 1890} \cdot K_{pil} = 1531,72 \cdot K_{pil}$$



### 7.3.3 Rigidezza torsionale degli elementi resistenti

Il comportamento rotazionale globale della struttura è influenzato anche dalla rigidezza torsionale dei suoi elementi strutturali. Tale contributo risulta consistente nel caso di elementi resistenti chiusi a sezione sottile (come ad esempio i vani ascensore), mentre è minimo negli altri elementi. Per completezza si sono calcolate le rigidezze torsionali di tutti gli elementi resistenti utilizzati nei modelli, per poi decidere quali trascurare e quali no.

La *rigidezza torsionale* di un elemento è definita dalla seguente formula:

$$K_{tors} = \frac{G \cdot J_G}{q \cdot H} \quad (7.6)$$

con

$G$  = modulo elastico trasversale

$J_G = J_x + J_y$  = momento d'inerzia polare della sezione

$q$  = fattore di forma della sezione

$H$  = altezza dell'elemento resistente

- *Rigidezza torsionale pilastro*

$$G = 12\,500\,000 \frac{kN}{m^2}$$

$$J_G = J_x + J_y = 2 \cdot \frac{0,3^4}{12} = 0,00135 m^4$$

$$q = 1,186 \quad (\text{sezione quadrata})$$

$$H = 3,5 m$$

$$K_{pil,tors} = 4065,29 kN \cdot m = 0,717 \cdot K_{pil}$$

La rigidezza torsionale del pilastro fornisce la stessa resistenza alla rotazione globale della struttura data dalla rigidezza traslazionale del pilastro stesso quando esso è vicino 0,717 m dal centro assoluto di rotazione. Nei modelli in esame la rigidezza torsionale dei pilastri risulta trascurabile rispetto al loro contributo traslazionale.

- *Rigidezza torsionale setto*

$$G = 12\,500\,000 \frac{kN}{m^2}$$

$$J_G = J_x + J_y = \frac{0,3^3 \cdot 3}{12} + \frac{3^3 \cdot 0,3}{12} = 0,68175 m^4$$

$$q = 3,2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{12b^2} = 3,2 \cdot \frac{3^2 + 0,3^2}{12 \cdot 0,3^2} = 26,93 \quad (\text{sez. rettangolare con } \frac{a}{b} = 10)$$

$$H = 3,5 m$$

$$K_{\text{wall,tors}} = 90\,412 \text{ kN} \cdot \text{m} = 15,95 \cdot K_{\text{pil}}$$

La rigidezza torsionale dell'elemento viene trascurata solo in alcuni casi. Il contributo traslazionale che ogni setto dà alla rotazione globale della struttura dipende infatti da quanto esso è distante dal centro assoluto di rotazione: quando i setti si trovano vicino a tale punto la rigidezza torsionale non viene trascurata, altrimenti si.

- *Rigidezza torsionale vano ascensore*

$$G = 12\,500\,000 \frac{kN}{m^2}$$

$$J_G = (J_x + J_y)_{3,3 \times 3,3} - (J_x + J_y)_{2,7 \times 2,7} = 2 \cdot \left( \frac{3,3^4 - 2,7^4}{12} \right) = 10,908 m^4$$

$$q = 1,186 \quad (\text{sezione quadrata})$$

$$H = 3,5 m$$

$$K_{\text{V.A.,tors}} = 32\,847\,507 \text{ kN} \cdot \text{m} = 5795,63 \cdot K_{\text{pil}}$$

La rigidezza torsionale del vano ascensore fornisce un contributo consistente in ogni caso, per cui deve essere sempre considerata.

Tuttavia, come detto in precedenza, il vano ascensore è stato reso con Sap2000 attraverso 4 setti, per cui si è perso tale contributo torsionale.

### 7.3.4 Pulsazione e periodo longitudinali dei sistemi

Tutte le strutture analizzate sono legate dallo stesso periodo disaccoppiato (quindi dalla stessa pulsazione longitudinale), cioè hanno la stessa massa e la stessa rigidità traslazionale.

Si è scelto fissare il periodo di una struttura ottenuta dalla struttura di riferimento aggiungendo due setti in direzione x e due setti in direzione y.

La rigidità traslazionale totale in direzione x inoltre è uguale alla rigidità traslazionale totale in direzione y e vale:

$$\begin{aligned}K_{\text{tot}} = K_x = K_y &= 16 \cdot K_{\text{pil}} + 2 \cdot K_{\text{tot,wall,strong}} + 2 \cdot K_{\text{tot,wall,weak}} \\ &= (16 + 641,866 + 19,586) \cdot K_{\text{pil}} = 677,452 \cdot K_{\text{pil}} \\ &= 3\,839\,554 \frac{\text{N}}{\text{mm}}\end{aligned}$$

La pulsazione longitudinale è quindi pari a:

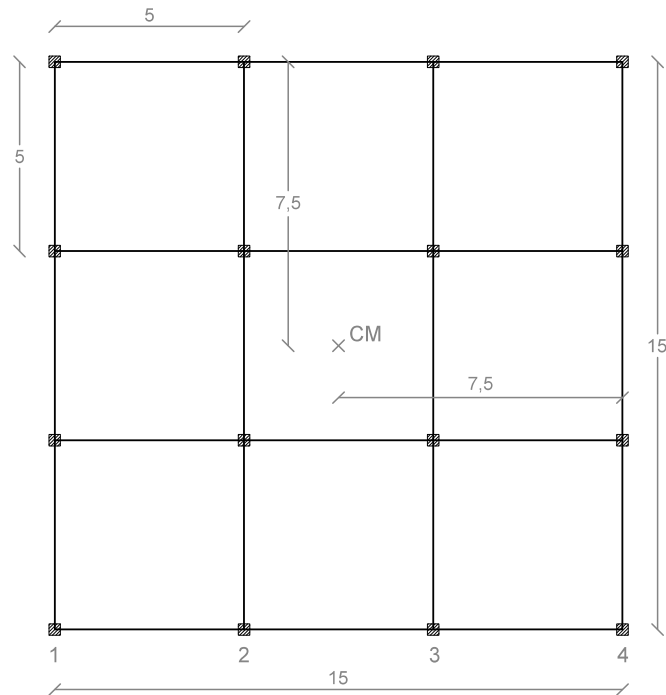
$$\omega_L = \sqrt{\frac{K_{\text{tot}}}{M_{\text{tot}}}} = \sqrt{\frac{3\,839\,554}{2293,58}} = 40,915 \frac{1}{\text{s}}$$

Il periodo longitudinale è:

$$T_L = \frac{2\pi}{\omega_L} = 0,154 \text{ s}$$

### 7.3.5 Parametri e ed $\Omega_\theta$

#### Struttura non eccentrica



**Figura 7.5** Pianta del modello non eccentrico di riferimento.

$$L = 15 \text{ m}$$

$$N = 4$$

$$K_x = K_y = K_{\text{tot}} = 16 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{\text{pil,tors}} = 0,717 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$I_{\rho,k,CM} = \frac{1}{6} \cdot \frac{N+1}{N-1} \cdot K_{\text{tot}} \cdot L^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4+1}{4-1} \cdot 16 \cdot K_{\text{pil}} \cdot 15^2 = 1000 \cdot K_{\text{pil}}$$

N.B. La rigidezza torsionale dei pilastri è stata trascurata.

$$D_e = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{15^2 + 15^2} = 21,213 \text{ m}$$

$$\rho_m = D_e / \sqrt{12} = 6,1237$$

$$\Omega_\theta = \sqrt{\frac{N+1}{N-1}} = \sqrt{\frac{4+1}{4-1}} = 1,29$$

*Modifica del modulo elastico nella struttura non eccentrica*

La struttura non eccentrica, come si può vedere, è costituita da 16 pilastri 30x30 ed ha quindi una rigidezza alla traslazione in una direzione pari a 16  $K_{pil}$ .

Per avere il periodo longitudinale disaccoppiato calcolato nel paragrafo precedente, si è scelto di aumentare la rigidezza di tale struttura incrementando il modulo elastico del materiale, che in questo modello risulta pari a:

$$E = 30\,000 \cdot \frac{677,452}{16} = 1\,270\,223 \text{ MPa}$$

## Strutture a setti

### 1. Struttura con setti ad angolo

$$E = 30\,000 \text{ MPa}$$

$$L_{\text{wall}} = 3 \text{ m}$$

$$s_{\text{wall}} = 0,3 \text{ m}$$

$$K_{\text{wall, strong}} = 320,933 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{\text{wall, weak}} = 9,793 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{\text{tot}} = K_x = K_y = 677,45 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{\text{wall, tors}} = 15,95 \cdot K_{\text{pil}}$$

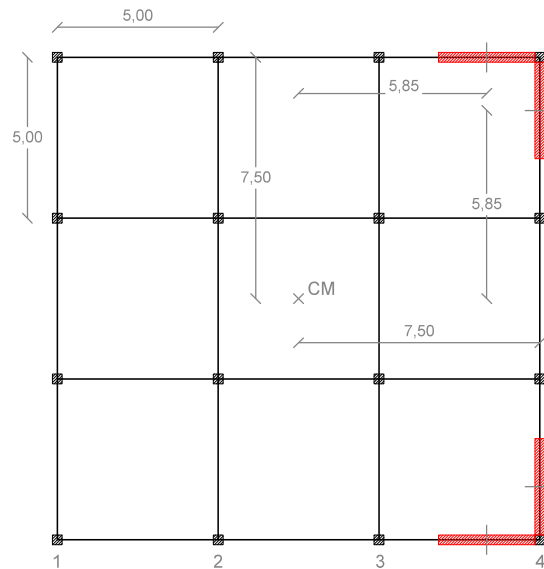


Figura 7.5 Modello eccentrico con setti ad angolo.

$$E_{k,x} = \frac{2 \cdot K_{\text{wall, weak}} \cdot (7,5 - 1,65) + 2 \cdot K_{\text{wall, strong}} \cdot 7,5}{K_y}$$

$$= \frac{2 \cdot 9,793 \cdot 5,85 + 2 \cdot 320,933 \cdot 7,5}{677,452} = 7,267 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{E_{k,x}}{D_e} = \frac{7,267}{21,21} = 0,34$$

$$I_{\rho,k,CK} = I_{\rho,k,CM}^{\text{pil}} + 16k_{\text{pil}} \cdot E_{k,x}^2 + 2 \cdot K_{\text{wall, strong}} \cdot 7,5^2 + 2 \cdot K_{\text{wall, weak}} \cdot (1,65 - (7,5 - E_{k,x}))^2 + 2 \cdot K_{\text{wall, strong}} \cdot (7,5 - E_{k,x})^2 + 2 \cdot K_{\text{wall, weak}} \cdot (7,5 - 1,65)^2 = 38\,713,632 \cdot k_{\text{pil}}$$

N.B. La rigidezza torsionale di setti e pilastri è stata trascurata.

$$\rho_{k,x} = \sqrt{I_{\rho,k,CK} / K_x} = \sqrt{\frac{38\,713,632}{677,452}} = 7,5595$$

$$\Omega_{\theta} = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{7,5595}{6,1237} = 1,234$$

## 2. Struttura con vano ascensore

$$E = 30\,000 \text{ MPa}$$

dimensioni all'asse = 3 x 3 m

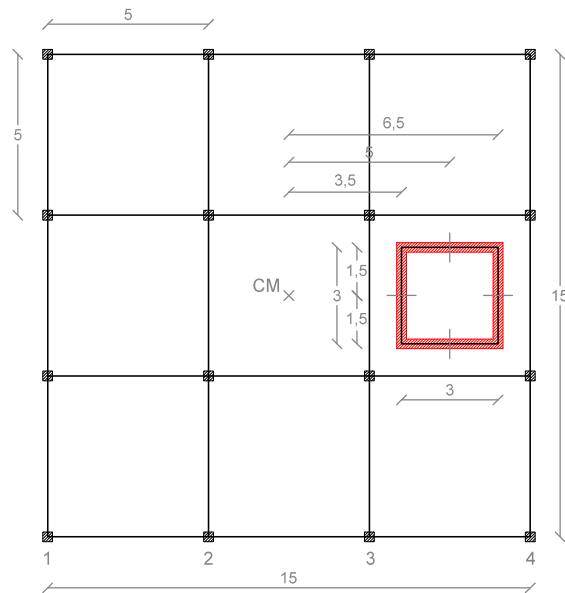
$$s_{\text{wall}} = 0,3 \text{ m}$$

$$K_{\text{wall, strong}} = 320,933 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{\text{wall, weak}} = 9,793 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{\text{tot}} = K_x = K_y = 677,45 \cdot K_{\text{pil}}$$

$$K_{\text{wall, tors}} = 15,95 \cdot K_{\text{pil}}$$



**Figura 7.6** Modello eccentrico con vano ascensore.

$$E_{k,x} = \frac{K_{\text{wall, strong}} \cdot 3,5 + 2 \cdot K_{\text{wall, weak}} \cdot 5 + K_{\text{wall, strong}} \cdot 6,5}{K_y}$$

$$= \frac{320,933 \cdot 3,5 + 2 \cdot 9,793 \cdot 5 + 320,933 \cdot 6,5}{677,452} = 4,882 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{E_{k,x}}{D_e} = \frac{4,882}{21,21} = 0,230$$

$$I_{\rho,k,CK} = I_{\rho,k,CM}^{\text{pil}} + 16k_{\text{pil}} \cdot E_{k,x}^2$$

$$+ K_{\text{wall, strong}} \left[ (E_{k,x} - 3,5)^2 + (6,5 - E_{k,x})^2 + 2 \cdot 1,5^2 \right] + 2$$

$$\cdot K_{\text{wall, weak}} \cdot (5 - E_{k,x})^2 = 4\,278,95 \cdot k_{\text{pil}}$$

N.B. La rigidezza torsionale di pilastri e setti è stata trascurata.

Come detto nel paragrafo precedente, il vano ascensore è stato modellato accostando 4 setti, quindi non vengono prese in esame le rigidzze traslazionale e torsionale del vano.

$$\rho_{k,x} = \sqrt{I_{p,k,CK}/K_x} = \sqrt{\frac{4\,278,95}{677,452}} = 2,513$$

$$\Omega_{\theta} = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{2,513}{6,1237} = 0,4104$$

### 3. Struttura con due setti

$$E^{pil} = 30\,000 \text{ MPa}$$

$$E^{wall} = 60\,000 \text{ MPa}$$

$$L_{wall} = 3 \text{ m}$$

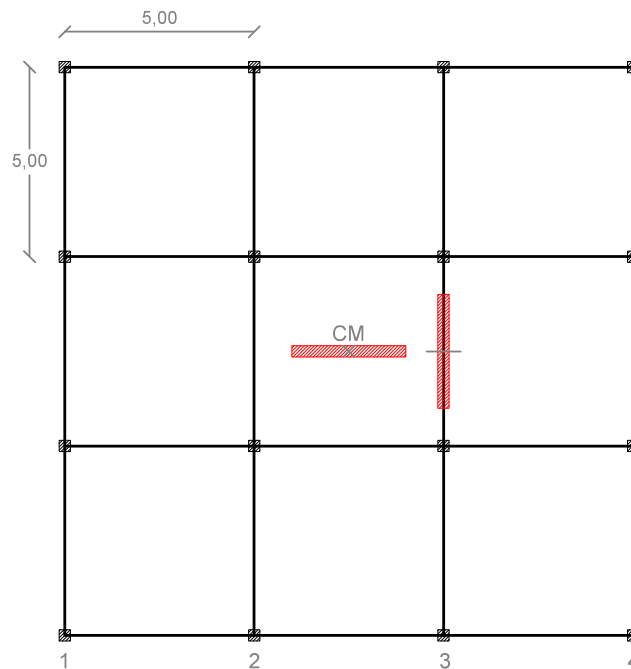
$$S_{wall} = 0,3 \text{ m}$$

$$K_{wall, strong} = 641,866 \cdot K_{pil}$$

$$K_{wall, weak} = 19,586 \cdot K_{pil}$$

$$K_{tot} = K_x = K_y = 677,45 \cdot K_{pil}$$

$$K_{wall, tors} = 31,9 \cdot K_{pil}$$



**Figura 7.7** Modello eccentrico con due setti.

$$E_{k,x} = \frac{K_{wall, strong} \cdot 2,5}{K_y} = \frac{641,866 \cdot 2,5}{677,452} = 1,895 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{E_{k,x}}{D_e} = \frac{1,895}{21,21} = 0,089$$



$$I_{\rho,k,CK} = I_{\rho,k,CM}^{pil} + 16k_{pil} \cdot E_{k,x}^2 + K_{wall,weak} \cdot E_{k,x}^2 + 2 \cdot K_{wall,strong} \cdot (2,5 - E_{k,x})^2 = 1362,729 \cdot k_{pil}$$

N.B. La rigidezza torsionale di setti e pilastri è stata trascurata.

$$\rho_{k,x} = \sqrt{I_{\rho,k,CK} / K_x} = \sqrt{\frac{1362,729}{677,452}} = 1,4183$$

$$\Omega_{\theta} = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{1,4183}{6,1237} = 0,2316$$

### *Modifica del modulo elastico dei setti nella struttura a due setti*

Per ottenere lo stesso periodo longitudinale la rigidezza totale deve essere uguale a 677,452  $K_{pil}$ .

Si modifica perciò il modulo elastico di ogni setto, che diventa pari a:

$$E = 30\,000 \cdot 2 = 60\,000 \text{ MPa}$$

Il modulo elastico dei pilastri in questo caso rimane uguale a 30 000 MPa.

### ***Strutture a pilastri modificati***

Nei modelli seguenti la posizione degli elementi resistenti rimane invariata rispetto a quella del modello non eccentrico: ciò che cambia è la sezione dei pilastri appunto. Sono stati scelti pilastri più grandi (sezione 60x60) e pilastri più piccoli (sezione 15x15) ottenendo i seguenti momenti di inerzia:

$$J_{pil,60} = \frac{600^4}{12} = \frac{16 \cdot 300^4}{12} = 16 \cdot J_{pil}$$

$$J_{pil,15} = \frac{150^4}{12} = \frac{\frac{300^4}{16}}{12} = \frac{1}{16} \cdot J_{pil}$$

Rispetto a quella del pilastro standard 30x30, la rigidezza del pilastro grande risulta 16 volte maggiore, la rigidezza del pilastro piccolo è invece 16 volte minore.

Si sostituiscono 4 pilastri standard con 4 pilastri grandi e altri 4 pilastri standard con 4 pilastri piccoli, ottenendo una rigidezza totale alla traslazione in direzione x (o in direzione y) pari a:

$$\begin{aligned} K_{tot} = K_x = K_y &= 8 \cdot K_{pil} + 4 \cdot K_{pil,60} + 4 \cdot K_{pil,15} = (8 + 64 + \frac{1}{4}) \cdot K_{pil} \\ &= 72,25 \cdot K_{pil} \end{aligned}$$

### ***Modifica del modulo elastico nelle strutture a pilastri modificati***

Per ottenere lo stesso periodo longitudinale la rigidezza totale deve essere uguale a 677,452  $K_{pil}$ .

Si modifica perciò il modulo elastico del materiale, che diventa pari a:

$$E = 30\,000 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 281\,295 \text{ MPa}$$

#### 4. Struttura con pilastri modificati (1)

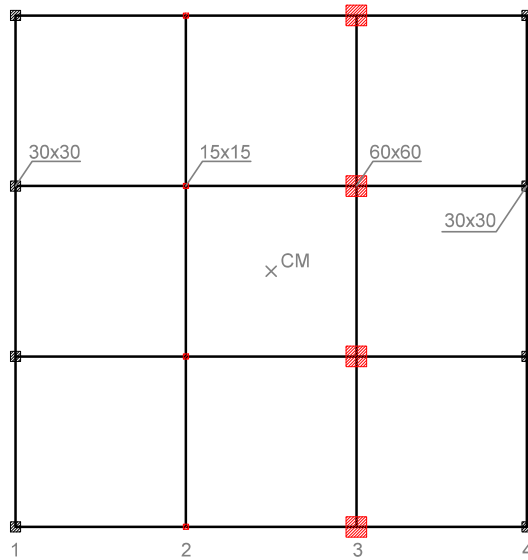
$$E^{\text{modif}} = 31\,000 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 290\,671,45 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 5856,56 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 54\,914,02 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} = \frac{1}{16} \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} = 16 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{tot}} = K_x = K_y = 72,25 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 677,45 \cdot K_{\text{pil}}$$



**Figura 7.8** Modello eccentrico con i pilastri modificati (1).

$$E_{k,x} = \frac{4 \cdot [K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (-2,5) + K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 2,5]}{K_y} = 2,206 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{E_{k,x}}{D_e} = \frac{2,206}{21,21} = 0,104$$

$$I_{\rho,k,CK} = 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (7,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (7,5 - E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (2,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot (2,5 - E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 = 2757,813 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

N.B. La rigidezza torsionale dei pilastri è stata trascurata.

$$\rho_{k,x} = \sqrt{I_{\rho,k,CK} / K_x} = \sqrt{\frac{2757,813}{72,25}} = 6,1782$$

$$\Omega_{\theta} = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{6,1782}{6,1237} = 1,0089$$

## 5. Struttura con pilastri modificati (2)

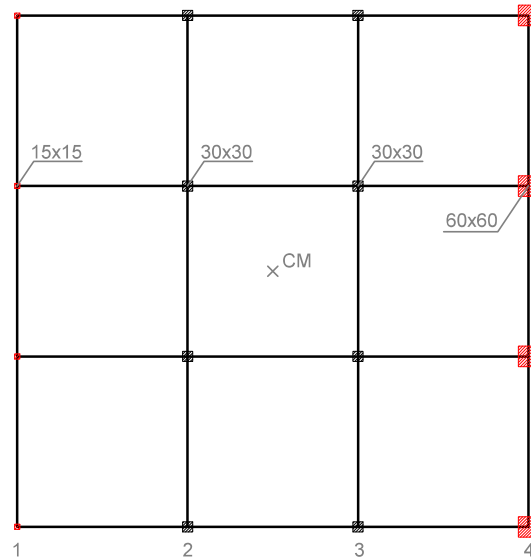
$$E^{\text{modif}} = 31\,000 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 290\,671,45 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 5856,56 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 54\,914,02 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} = \frac{1}{16} \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} = 16 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{tot}} = K_x = K_y = 72,25 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 677,45 \cdot K_{\text{pil}}$$



**Figura 7.9** Modello eccentrico con i pilastri modificati (2).

$$E_{k,x} = \frac{4 \cdot [K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (-7,5) + K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 7,5]}{K_y} = 6,6176 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{E_{k,x}}{D_e} = \frac{6,6176}{21,21} = 0,312$$

$$\begin{aligned} I_{\rho,k,CK} = & 4 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (7,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (2,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \\ & \cdot (E_{k,x} - 2,5)^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot (7,5 - E_{k,x})^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 2 \\ & \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 \\ & + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 = 2757,813 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \end{aligned}$$

N.B. La rigidezza torsionale dei pilastri è stata trascurata.

$$\rho_{k,x} = \sqrt{I_{\rho,k,CK} / K_x} = \sqrt{\frac{2757,813}{72,25}} = 6,1782$$

$$\Omega_{\theta} = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{6,1782}{6,1237} = 1,0089$$

6. Struttura con pilastri modificati (3)

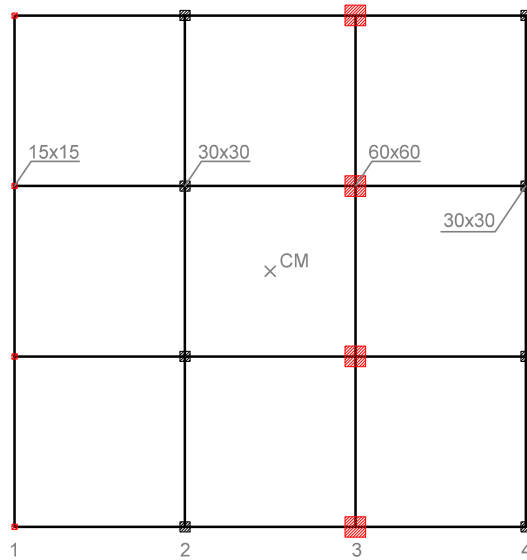
$$E^{\text{modif}} = 31\,000 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 290\,671,45 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 5856,56 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 54\,914,02 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} = \frac{1}{16} \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} = 16 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{tot}} = K_x = K_y = 72,25 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 677,45 \cdot K_{\text{pil}}$$



**Figura 7.10** Modello eccentrico con i pilastri modificati (3).

$$E_{k,x} = \frac{4 \cdot [K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (-7,5) + K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (-2,5) + K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 7,5 + K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 2,5]}{K_y} = 2,43 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{E_{k,x}}{D_e} = \frac{2,430796}{21,21} = 0,115$$

$$I_{\rho,k,CK} = 4 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (7,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (2,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot (2,5 - E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (7,5 - E_{k,x})^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 = 2482,813 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

N.B. La rigidezza torsionale dei pilastri è stata trascurata.

$$\rho_{k,x} = \sqrt{I_{\rho,k,CK} / K_x} = \sqrt{\frac{2482,813}{72,25}} = 5,8621$$

$$\Omega_{\theta} = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{5,8621}{6,1237} = 0,957$$

## 7. Struttura con pilastri modificati (4)

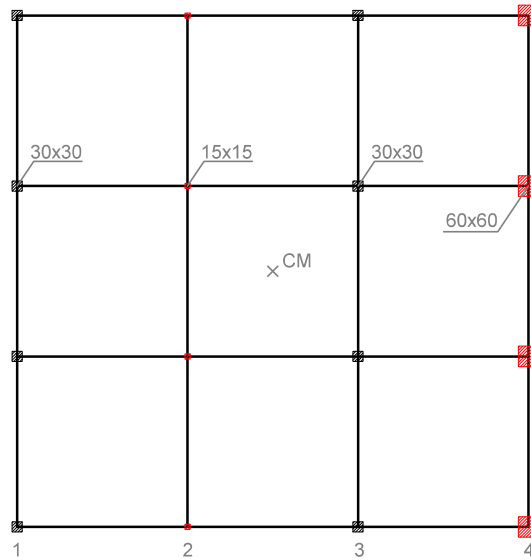
$$E^{\text{modif}} = 31\,000 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 290\,671,45 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 5856,56 \cdot \frac{677,452}{72,25} = 54\,914,02 \text{ MPa}$$

$$K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} = \frac{1}{16} \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} = 16 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

$$K_{\text{tot}} = K_x = K_y = 72,25 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} = 677,45 \cdot K_{\text{pil}}$$



**Figura 7.11** Modello eccentrico con i pilastri modificati (4).

$$E_{k,x} = \frac{4 \cdot [K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (-7,5) + K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (-2,5) + K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 2,5 + K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 7,5]}{K_y} = 6,35 \text{ m}$$

$$e_x = \frac{E_{k,x}}{D_e} = \frac{6,35813}{21,21} = 0,2997$$

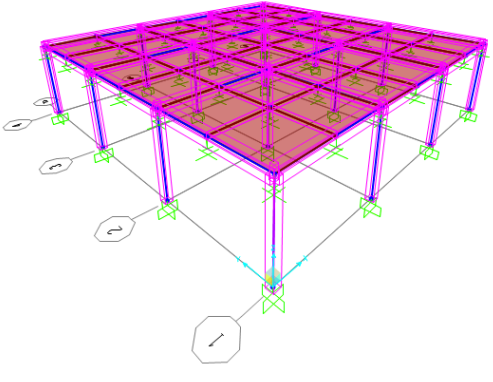
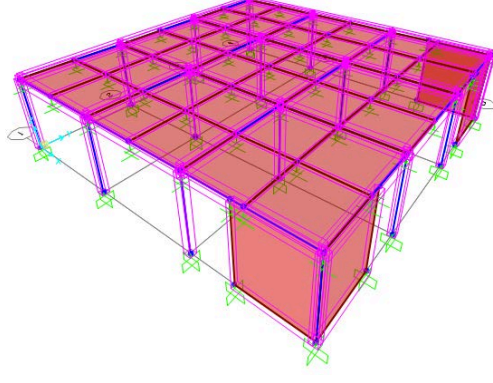
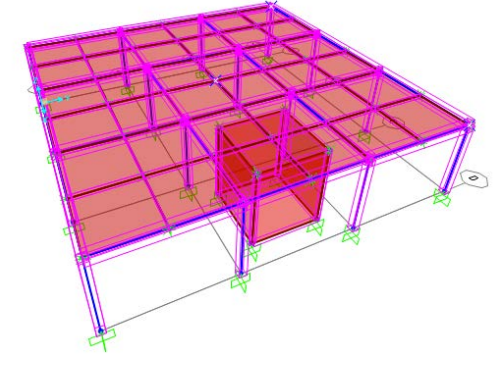
$$I_{\rho,k,CK} = 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (7,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot (2,5 + E_{k,x})^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot (E_{k,x} - 2,5)^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot (7,5 - E_{k,x})^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 7,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},15}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 4 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 + 2 \cdot K_{\text{pil},60}^{\text{modif}} \cdot 2,5^2 = 3188,6085 \cdot K_{\text{pil},30}^{\text{modif}}$$

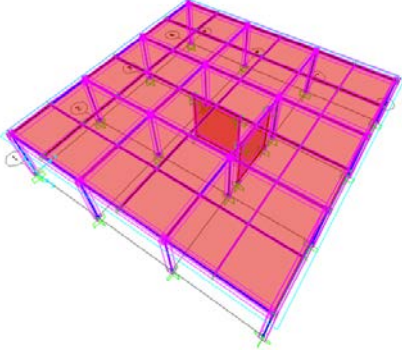
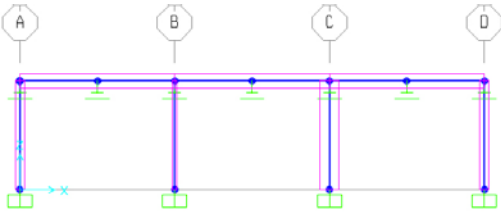
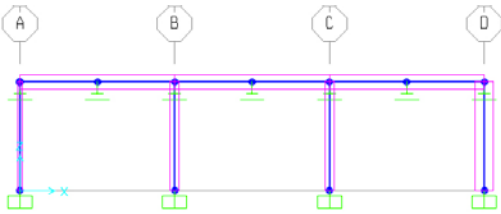
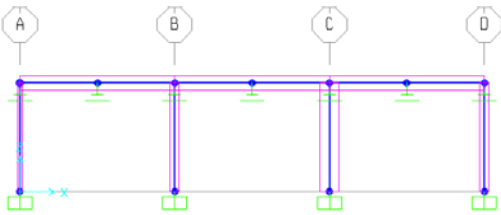
N.B. La rigidezza torsionale dei pilastri è stata trascurata.

$$\rho_{k,x} = \sqrt{I_{\rho,k,CK} / K_x} = \sqrt{\frac{3188,6085}{72,25}} = 6,6433$$

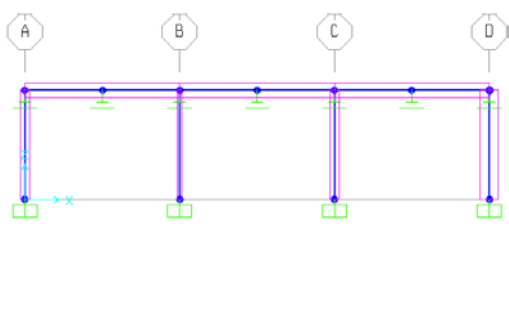
$$\Omega_{\theta} = \frac{\rho_k}{\rho_m} = \frac{6,6433}{6,1237} = 1,0848$$

La tabella seguente permette un veloce riepilogo delle strutture modellate con Sap2000, riportando la dimensione degli elementi resistenti, il modulo elastico utilizzato per ogni modello, il coefficiente  $\Omega_\theta$ , l'eccentricità relativa  $e$  ed il periodo longitudinale  $T_L$ .

	<p style="text-align: center;"><b>Struttura non eccentrica</b></p> <p>Pilastri 30x30 cm E = 1 270 223MPa</p> <p><math>\Omega_\theta = 1,29</math> <math>T_L = 0,154</math> s</p>
	<p style="text-align: center;"><b>1) Struttura con setti ad angolo</b></p> <p>Pilastri 30x30 cm Setti 30x300 cm E = 30 000 MPa</p> <p><math>\Omega_\theta = 1,234</math>   <math>e = 0,34</math> <math>T_L = 0,154</math> s</p>
	<p style="text-align: center;"><b>2) Struttura con vano ascensore</b></p> <p>Pilastri 30x30 cm Setti 30x300 cm E = 30 000 MPa</p> <p><math>\Omega_\theta = 0,41</math>   <math>e = 0,23</math> <math>T_L = 0,154</math></p>

	<p><b>3) Struttura con due setti</b></p> <p>Pilastri 30x30 cm <math>E = 30\,000</math> MPa  Setti 30x300 cm <math>E = 60\,000</math> MPa</p> <p><math>\Omega_\theta = 0,41</math> <math>e = 0,09</math>  <math>T_L = 0,154</math></p>
	<p><b>4) Struttura a pilastri modificati (1)</b></p> <p>Pilastri: 30x30/15x15/30x30/60x60  <math>E = 281\,295</math> MPa</p> <p><math>\Omega_\theta = 1,01</math> <math>e = 0,10</math>  <math>T_L = 0,159</math> s</p>
	<p><b>5) Struttura a pilastri modificati (2)</b></p> <p>Pilastri: 15x15/30x30/30x30/60x60  <math>E = 281\,295</math> MPa</p> <p><math>\Omega_\theta = 1,01</math> <math>e = 0,31</math>  <math>T_L = 0,159</math> s</p>
	<p><b>6) Struttura a pilastri modificati (3)</b></p> <p>Pilastri: 15x15/30x30/60x60/30x30  <math>E = 281\,295</math> MPa</p> <p><math>\Omega_\theta = 0,96</math> <math>e = 0,11</math>  <math>T_L = 0,159</math> s</p>



	<b>7) Struttura a pilastri modificati (4)</b>
	Pilastri: 30x30/15x15/30x30/60x60 $E = 281\,295 \text{ MPa}$
	$\Omega_\theta = 1,09 \quad e = 0,30$ $T_L = 0,159 \text{ s}$

**Tabella 7.1** Riepilogo delle strutture modellate con Sap2000.

## 7.4 Caso Lineare

Per ognuno dei modelli descritti nei paragrafi precedenti sono state condotte analisi time-history in campo lineare con 10 accelerogrammi artificiali spettrocompatibili applicati in direzione longitudinale  $y$ : ad ogni sisma la struttura ha risposto con uno spostamento longitudinale massimo (in modulo) valutato in 3 punti (lato rigido, centro di massa e lato flessibile).

Gli spostamenti longitudinali massimi di ciascun punto notevole sono infine stati ottenuti dalla media degli spostamenti massimi dati da ogni sisma.

In altre parole, di ogni struttura eccentrica è stato valutato il massimo (in modulo) spostamento longitudinale di tre punti notevoli: lato *stiff*, centro di massa e lato *flexible*. Tali valori sono stati poi divisi per il valore di spostamento longitudinale massimo ricavato dall'oscillatore non eccentrico equivalente cui sono stati applicati gli stessi 10 accelerogrammi.

Il risultato di questi quozienti sono i 3 Magnification Factors relativi alla struttura non eccentrica equivalente, rispettivamente:  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  ed  $M_{N-E,f}$ .

In campo lineare la struttura non eccentrica ha uno spostamento massimo longitudinale pari a:

$$u_{y,N-E,max} = 0,0051 \text{ m}$$

Tale valore è stato ottenuto sia con Sap2000 sia con lo script di Matlab specifico per l'oscillatore semplice smorzato a comportamento elastico lineare.

Sono stati inoltre ricavati i Magnification Factors relativi al Centro di Massa della struttura eccentrica stessa:  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$ .

Nel paragrafo seguente è presentata la tabella con i Magnification Factors ottenuti da Sap2000 (in grassetto), confrontati con i valori analitici provenienti dagli spettri (tra parentesi).

### 7.4.1 Risultati ottenuti

CAMPO LINEARE							(da Sap2000)						
	TL	S_NE_eq	Q8	e	u_stiff	u_CM	u_flex	M_NEs	6	M_NEf	M_CM,s	M_CM,f	
0	STRUTTURA NON ECCENTRICA	0,155	0,0050556	1,29	0	0,0050556	0,0050556	0,0050556	//	//	//	//	
1	STRUTTURA CON SETTI AD ANGOLO (beam - no rotaz.)	0,154	0,0050556	1,23	0,344	0,00392	0,009282	0,014715	0,78 (1,05)	1,84 (2,70)	2,91 (4,50)	0,42 (0,38) 1,59 (1,64)	
2	STRUTTURA CON VANO ASCENSORE (beam - no rotaz.)	0,154	0,0050556	0,41	0,233	0,007931	0,018913	0,044979	1,57 (1,60)	3,74 (3,90)	8,90 (9,20)	0,42 (0,40) 2,38 (2,30)	
3	STRUTTURA CON 2 SETTI (beam - no rotaz.)	0,154	0,0050556	0,23	0,089	0,019213	0,009804	0,036583	3,80 (2,10)	1,94 (1,50)	7,24 (4,00)	1,96 (1,70) 3,73 (2,95)	
4	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (1)	0,159	0,0050556	1,01	0,104	0,003705	0,004778	0,008844	0,73 (0,65)	0,95 (1,25)	1,75 (2,20)	0,78 (0,60) 1,85 (1,75)	
5	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (2)	0,159	0,0050556	1,01	0,312	0,003216	0,010694	0,018424	0,64 (0,85)	2,12 (2,70)	3,64 (4,60)	0,30 (0,30) 1,72 (1,70)	
6	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (3)	0,159	0,0050556	0,96	0,115	0,003917	0,004893	0,009511	0,77 (0,65)	0,97 (1,25)	1,88 (2,20)	0,80 (0,60) 1,94 (1,75)	
7	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (4)	0,159	0,0050556	1,08	0,300	0,003205	0,009516	0,016056	0,63 (0,85)	1,88 (2,50)	3,18 (4,10)	0,34 (0,30) 1,69 (1,70)	

Tabella 7.2 Magnification Factors ottenuti dalle analisi lineari.

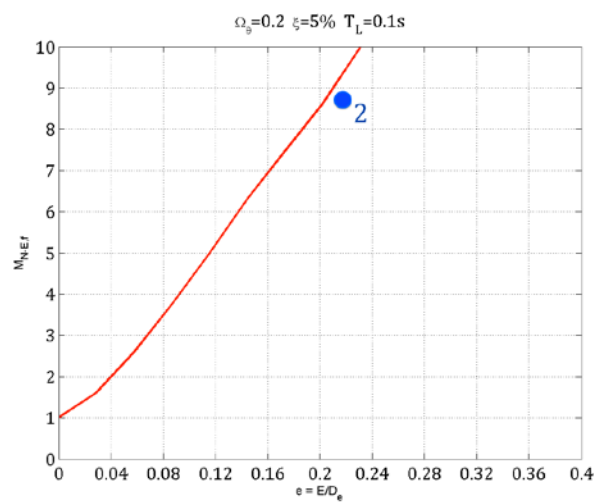
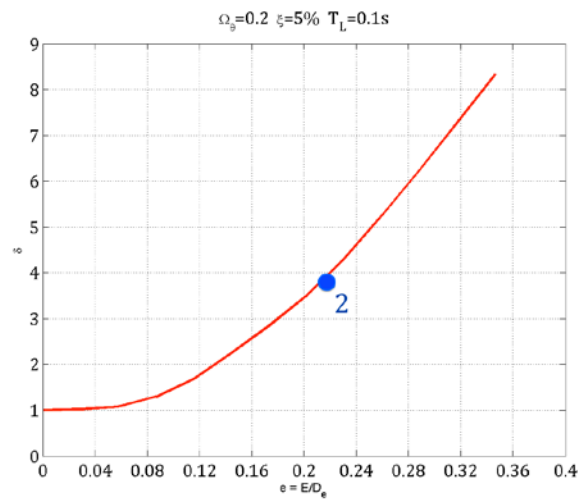
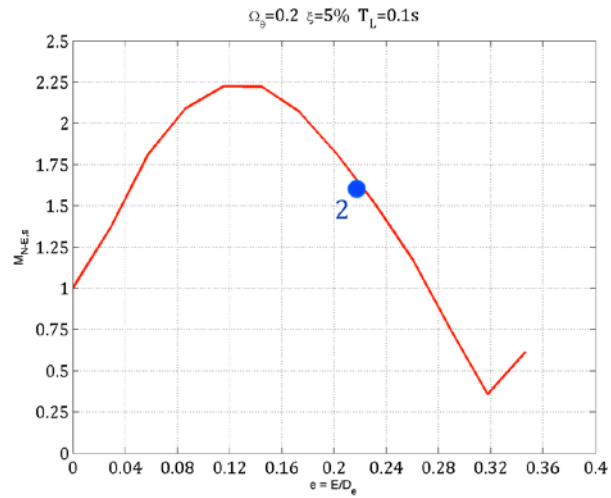
Dall'osservazione della tabella si può notare come i valori analitici provenienti dagli spettri e rappresentati tra parentesi sono molto simili a quelli ottenuti con Sap2000.

L'unico caso in cui la differenza non è accettabile è rappresentata dai Magnification Factors riferiti alla struttura non eccentrica equivalente del modello con due setti (modello 3).

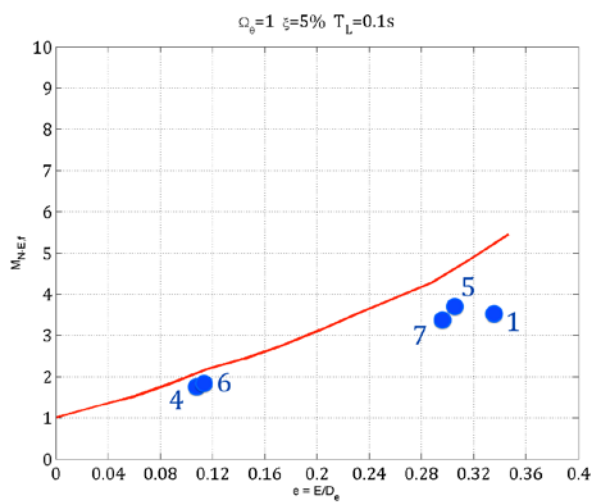
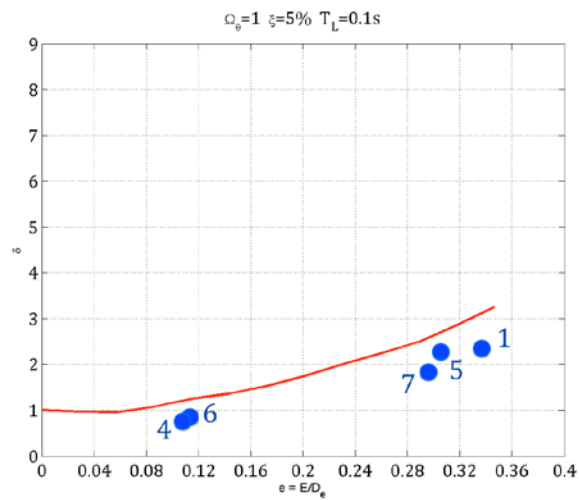
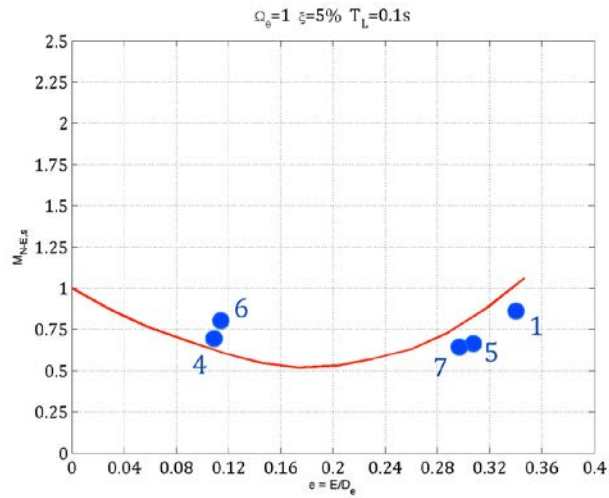
In linea di massima comunque gli spettri riescono a prevedere con buona approssimazione gli spostamenti dei punti notevoli delle strutture eccentriche.

Di seguito i risultati vengono presentati in maniera grafica: gli spettri tridimensionali dei Magnification Factors (che in questa tesi non sono stati rappresentati) sono stati sezionati da un piano verticale corrispondente al periodo longitudinale  $T_L$  caratteristico di tutte le strutture ottenendo un grafico bidimensionale che rappresenta quindi i Magnification Factors in funzione dell'eccentricità relativa  $e$  (ascisse) per un prefissato valore di  $\Omega_\theta$ ,  $\xi$  e  $T_L$ .

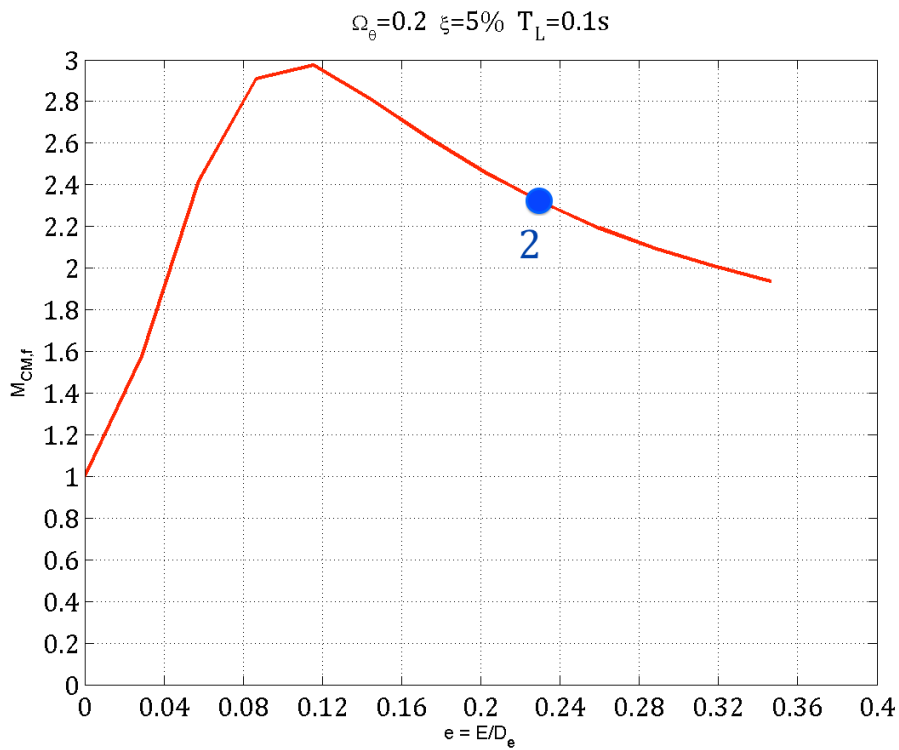
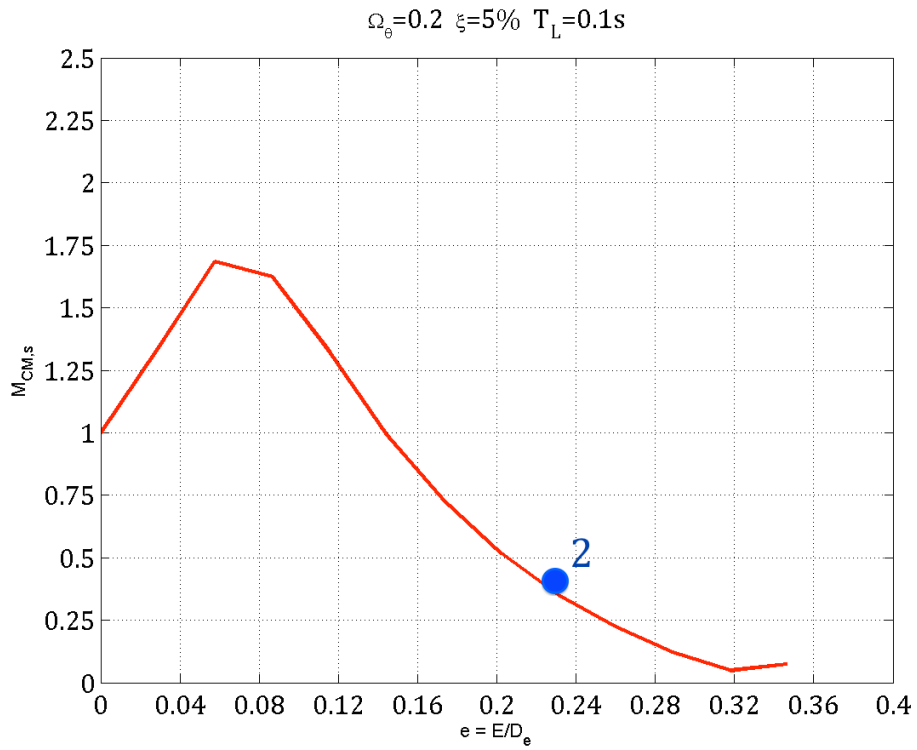
A tali andamenti bidimensionali sono stati sovrapposti i punti rappresentativi delle strutture in esame, ottenendo un'efficace rappresentazione grafica dei risultati.



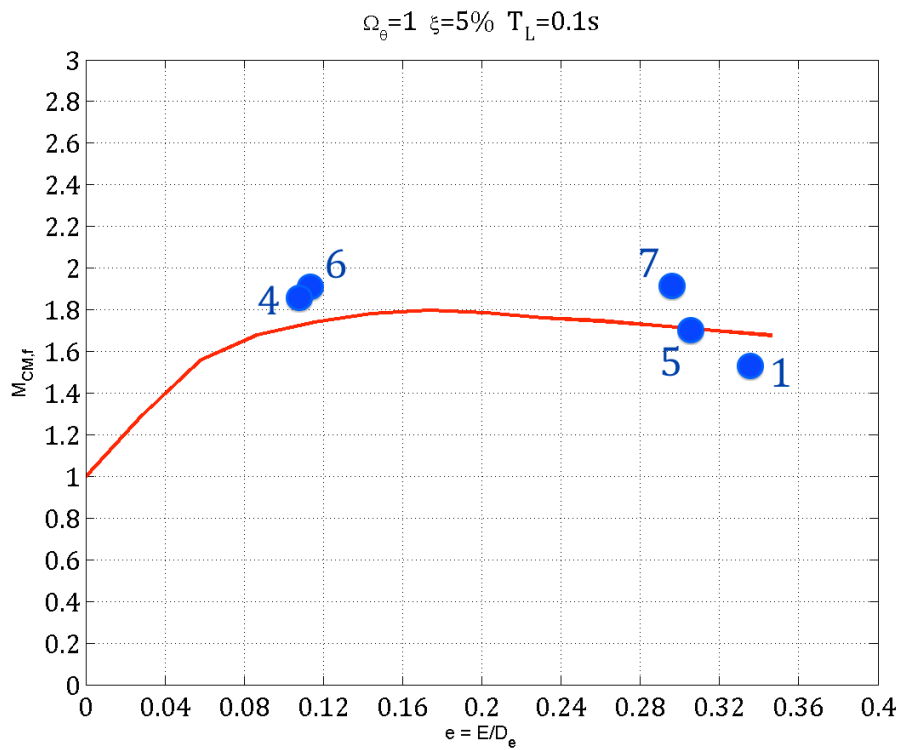
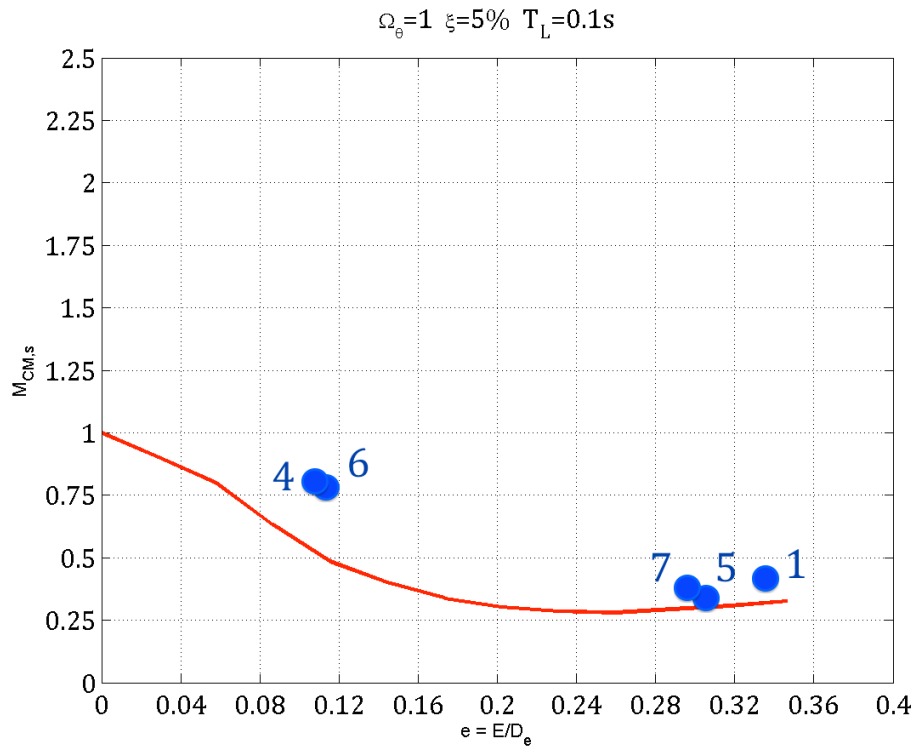
**Figura 7.12**  $M_{N-E,S}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,F}$  con  $\Omega_0=0,2$ ,  $\xi=5\%$  e  $T_L=0,1s$  in funzione dell'eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 7.13**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_\theta=1$ ,  $\xi=5\%$  e  $T_L=0,1s$  in funzione dell'eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 7.14**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$ ,  $\xi=5\%$  e  $T_L=0,1s$   
in funzione dell'eccentricità relativa  $e$ .



**Figura 7.15**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$ ,  $\xi=5\%$  e  $T_L=0,1s$  in funzione dell'eccentricità relativa  $e$ .



## 7.5 Caso Non Lineare

Per ognuno dei modelli descritti nei paragrafi precedenti sono state condotte analisi time-history in campo non lineare (*direct integration*) con gli stessi 10 accelerogrammi artificiali spetrocompatibili applicati in direzione longitudinale  $y$ : ad ogni sisma la struttura ha risposto con uno spostamento longitudinale massimo (in modulo) valutato in 3 punti (lato rigido, centro di massa e lato flessibile).

Gli spostamenti longitudinali massimi di ciascun punto notevole sono infine stati ottenuti dalla media degli spostamenti massimi dati da ogni sisma.

In altre parole, di ogni struttura eccentrica è stato valutato il massimo (in modulo) spostamento longitudinale di tre punti notevoli: lato *stiff*, centro di massa e lato *flexible*. Tali valori sono stati poi divisi per il valore di spostamento longitudinale massimo ricavato dall'oscillatore non eccentrico equivalente cui sono stati applicati gli stessi 10 accelerogrammi.

Il risultato di questi quozienti sono i 3 Magnification Factors relativi alla struttura non eccentrica equivalente con lo stesso fattore di riduzione delle forze  $R$ , rispettivamente:  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  ed  $M_{N-E,f}$ .

È stato svolto solamente il caso con  $R=5$ .

In questo caso la struttura non eccentrica ha uno spostamento massimo longitudinale pari a:

$$u_{y,N-E,max} = 0,0238 \text{ m}$$

Tale valore è stato ottenuto solamente con Sap2000.

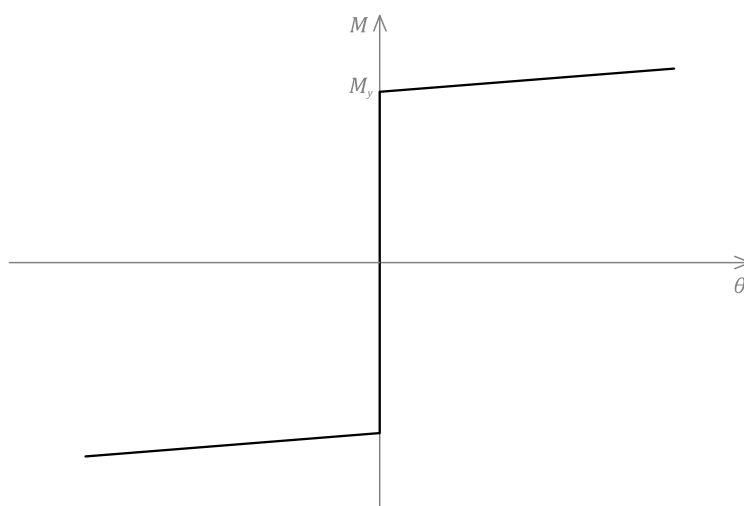
Sono stati inoltre ricavati i Magnification Factors relativi al Centro di Massa della struttura eccentrica stessa:  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$ .

Nel paragrafo 7.5.2 è presentata la tabella con i Magnification Factors ottenuti da Sap2000 (in grassetto), confrontati con i valori analitici provenienti dagli spettri (tra parentesi).

### 7.5.1 Dimensionamento cerniere plastiche

La modellazione in campo non lineare aggiunge ai modelli l'ipotesi che il materiale non si deformi in modo indefinitamente elastico, ma che, oltre una certa soglia, entri in gioco il comportamento plastico con conseguente formazione di cerniere plastiche.

Si è introdotta perciò una legge costitutiva elastico incrudente attraverso l'inserimento del seguente *legame momento/rotazione*:



**Figura 7.4** *Legame costitutivo momento/rotazione delle cerniere plastiche.*

Come si legge dal grafico, gli elementi resistenti rispondono in campo elastico senza rotazione delle proprie sezioni. Quando però il momento raggiunge il valore di snervamento  $M_y$  in una sezione, questa inizia a sviluppare una cerniera plastica con conseguente incremento delle rotazioni. Durante la rotazione tali cerniere hanno un comportamento incrudente, poiché permettono di assorbire un momento resistente maggiore, anche se di poco, rispetto al momento di snervamento.

Si ricorda che per i pilastri l'andamento delle sollecitazioni flessionali di momento segue il caratteristico diagramma "a farfalla", che sollecita maggiormente le sezioni in testa e alla base degli stessi: proprio queste sono le zone in cui per prime si sviluppano le cerniere plastiche.

Tutti gli elementi resistenti sono stati quindi modellati su Sap2000 con cerniere plastiche in sommità e al piede.

In particolare per ogni pilastro e setto è stato calcolato dapprima il momento flettente massimo in direzione  $x$  ( $M_2$ ) ed il momento flettente massimo in direzione  $y$  ( $M_3$ ) ricavati dalle analisi time-histories elastiche. Successivamente ogni elemento è stato dotato di due tipi di cerniere, ciascuna con un momento di snervamento  $M_y$  uguagliato al momento flettente massimo nella direzione in cui la cerniera stessa agisce.

In altre parole, il dimensionamento delle cerniere è avvenuto, per ognuna delle due direzioni, uguagliando il momento di snervamento al momento flettente massimo (tra piede e sommità dell'elemento resistente) agente in quella direzione.

Per una più facile applicazione delle cerniere plastiche i setti sono stati modellati come elementi "*frame*".

In campo non lineare è stato modellato solamente il caso con  $R=5$ .

Per fare ciò il momento di snervamento  $M_y$  di ogni cerniera plastica è stato diviso per 5.

Gli spostamenti delle strutture in campo non lineare sono stati valutati attraverso analisi time-histories non lineari che utilizzano l'integrazione diretta.

## 7.5.2 Risultati ottenuti

CAMPO NON LINEARE							Coefficients ricavati con Sap 2000						
R=5							(da Sap 2000)						
	TL	S_NE_eq	qR	e	u_stiff	u_CM	u_flex	M_NE,s	δ	M_NE,f	M_CM,s	M_CM,f	
0	STRUTTURA NON ECCENTRICA	0,155	0,0238341	1,29	0	0,0238341	0,0238341	//	//	//	//	//	
1	STRUTTURA CON SETTI AD ANGOLO (beam - no rotaz.)	0,154	0,0238341	1,23	0,344	0,0291617	0,0317126	1,22 (1,55)	1,33 (1,60)	1,55 (1,90)	0,92 (0,90)	1,16 (1,10)	
2	STRUTTURA CON VANO ASCENSORE (beam - no rotaz.)	0,154	0,0238341	0,41	0,233	0,0091149	0,0224314	0,38 (0,70)	0,94 (1,10)	1,98 (1,80)	0,41 (0,60)	2,11 (1,55)	
3	STRUTTURA CON 2 SETTI (beam - no rotaz.)	0,154	0,0238341	0,23	0,089	0,0191761	0,0009967	0,80 (1,10)	0,42 (1,10)	1,41 (1,20)	1,92 (1,00)	3,36 (1,10)	
4	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (1)	0,159	0,0238341	1,01	0,104	0,0222477	0,0230584	0,93 (1,25)	0,97 (1,30)	1,03 (1,20)	0,96 (1,00)	1,07 (1,10)	
5	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (2)	0,159	0,0238341	1,01	0,312	0,0085336	0,0194686	0,36 (1,20)	0,82 (1,40)	1,47 (1,50)	0,44 (0,80)	1,80 (1,15)	
6	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (3)	0,159	0,0238341	0,96	0,115	0,0257572	0,0283045	1,08 (1,25)	1,19 (1,30)	1,40 (1,20)	0,91 (1,00)	1,18 (1,10)	
7	STRUTTURA CON PILASTRI MODIFICATI (4)	0,159	0,0238341	1,08	0,300	0,0263595	0,0285983	1,11 (1,20)	1,20 (1,40)	1,34 (1,50)	0,92 (0,80)	1,12 (1,15)	

Tabella 7.3 Magnification Factors ottenuti dalle analisi non lineari.

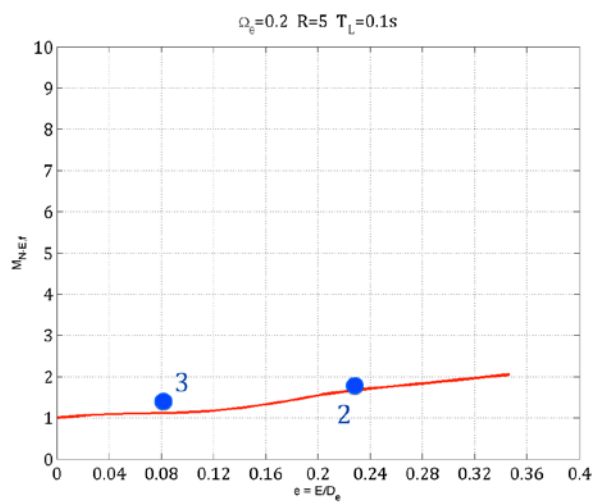
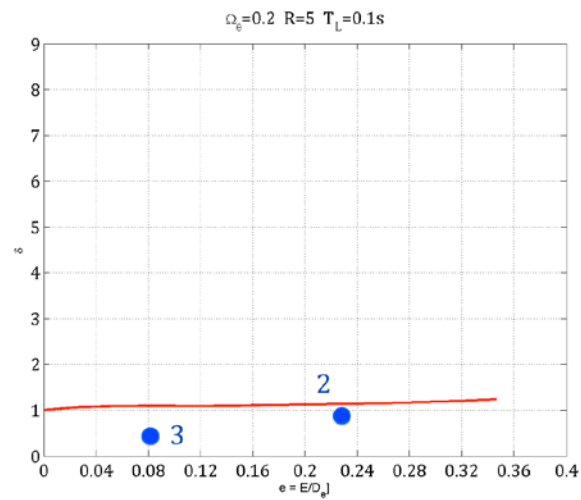
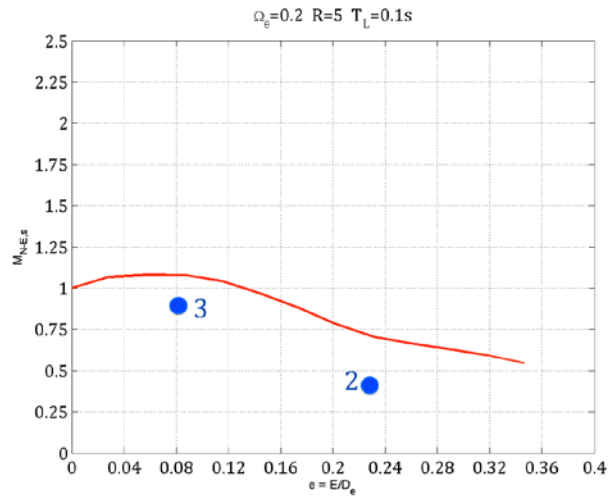
Dall'osservazione della tabella si può notare come i valori analitici provenienti dagli spettri e rappresentati tra parentesi sono molto simili a quelli ottenuti con Sap2000.

L'unico caso in cui la differenza non è accettabile è rappresentata dai Magnification Factors riferiti al centro di massa del modello con due setti (modello 3) e del modello 5.

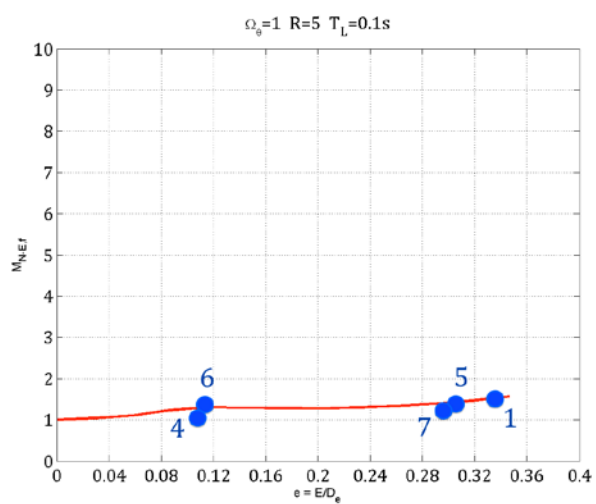
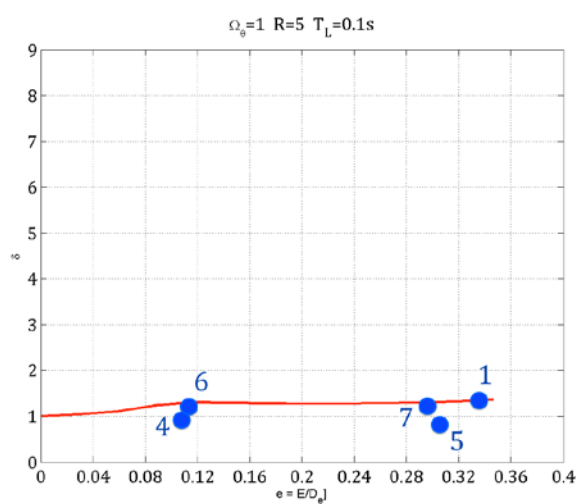
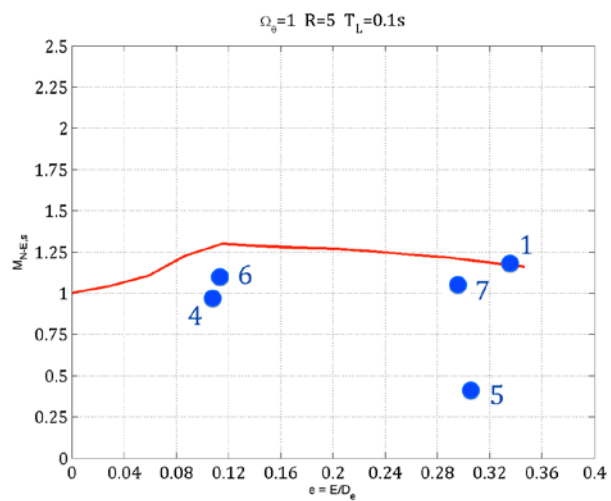
In linea di massima comunque gli spettri riescono a prevedere con buona approssimazione gli spostamenti dei punti notevoli delle strutture eccentriche.

Di seguito i risultati vengono presentati in maniera grafica: gli spettri tridimensionali dei Magnification Factors (che in questa tesi non sono stati rappresentati) sono stati sezionati da un piano verticale corrispondente al periodo longitudinale  $T_L$  caratteristico di tutte le strutture ottenendo un grafico bidimensionale che rappresenta quindi i Magnification Factors in funzione dell'eccentricità relativa  $e$  (ascisse) per un prefissato valore di  $\Omega_\theta$ ,  $\xi$  e  $T_L$ .

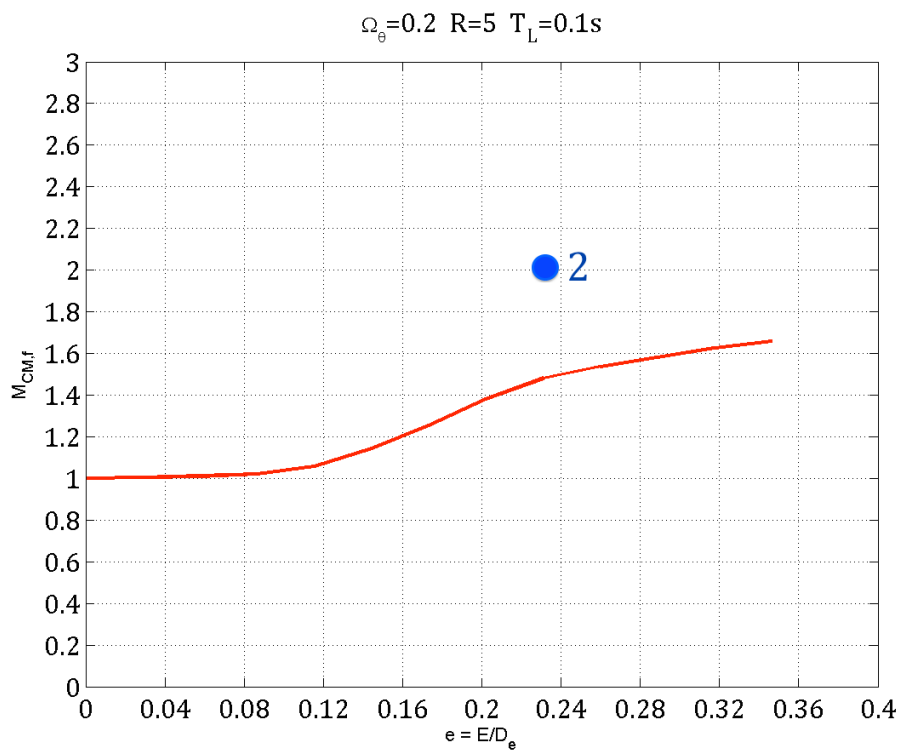
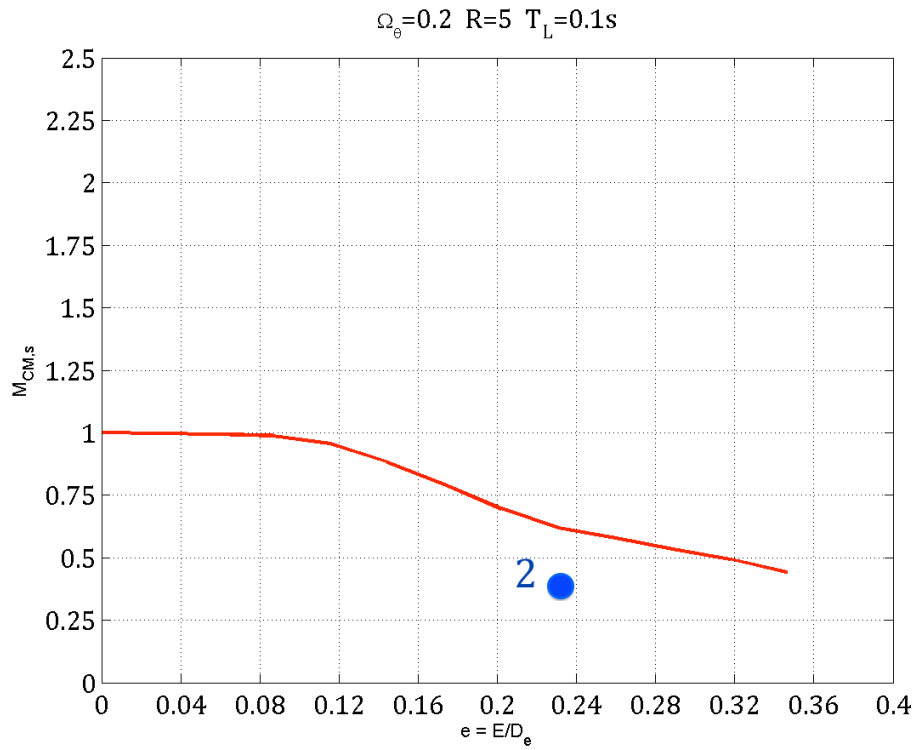
A tali andamenti bidimensionali sono stati sovrapposti i punti rappresentativi delle strutture in esame, ottenendo un'efficace rappresentazione grafica dei risultati.



**Figura 7.16**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_0=0,2$ ,  $R=5$  e  $T_L=0,1s$  in funzione dell'eccentricità relativa  $e$  in campo non lineare.

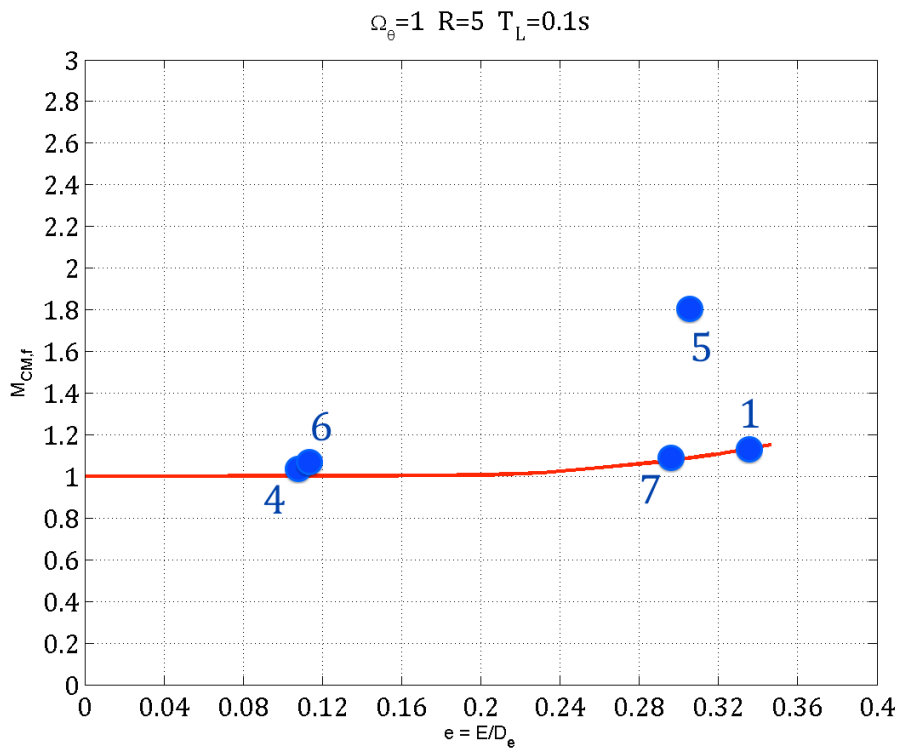
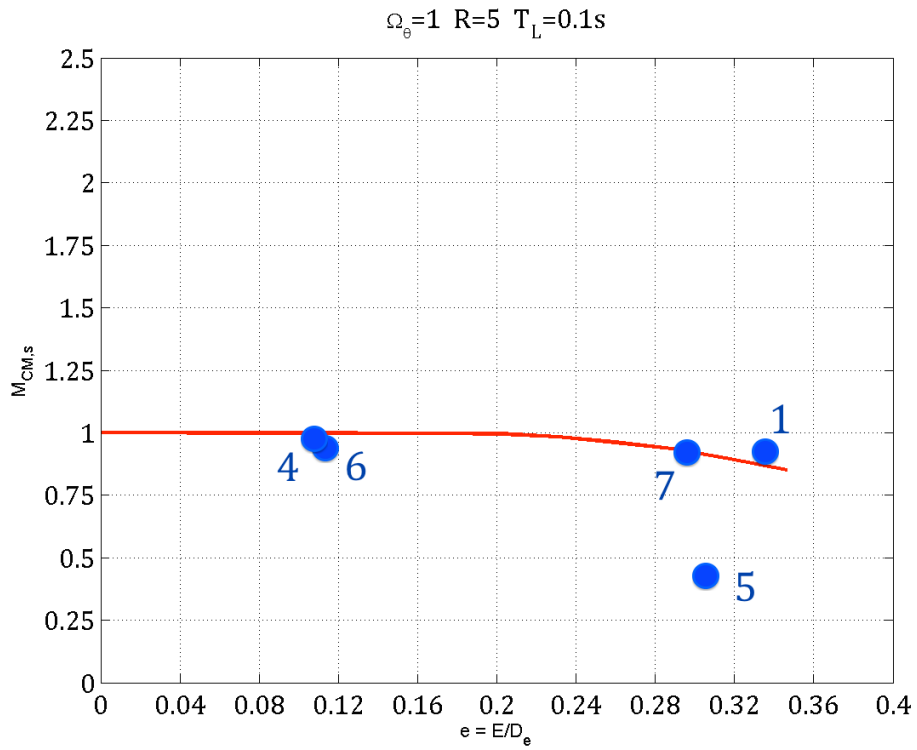


**Figura 7.13**  $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$  e  $M_{N-E,f}$  con  $\Omega_\theta=1$ ,  $R=5$  e  $T_L=0,1s$  in funzione dell'eccentricità relativa  $e$  in campo non lineare.



**Figura 7.14**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=0,2$ ,  $R=5$  e  $T_L=0,1s$  in funzione dell'eccentricità relativa  $e$  in campo non lineare.





**Figura 7.15**  $M_{CM,s}$  ed  $M_{CM,f}$  con  $\Omega_\theta=1$ ,  $R=5$  e  $T_L=0,1s$  in funzione dell'eccentricità relativa  $e$  in campo non lineare.

## 8. CONCLUSIONI

La tesi ha riguardato la costruzione analitica (attraverso l'integrazione delle equazioni del moto) degli spettri lineari e non lineari dei Magnification Factors ( $M_{N-E,s}$ ,  $\delta$ ,  $M_{N-E,f}$ ,  $M_{CM,s}$ ,  $M_{CM,f}$ ) utilizzabili per quasi la totalità delle strutture eccentriche ad un piano con un comportamento assimilabile ad un sistema a 3 gradi di libertà.

Al vero nella presente trattazione i veri e propri spettri, cioè i grafici tridimensionali, non sono stati rappresentati per ragioni di leggibilità e di pesantezza della stessa. Sono state invece raffigurate alcune sezioni di tali spettri (per determinate eccentricità relative o per determinati periodi longitudinali).

Alla costruzione analitica è seguita una fase di validazione numerica di tali spettri attraverso la modellazione ad elementi finiti di strutture eccentriche ad un piano di cui sono stati valutati gli spostamenti sia in campo lineare che non lineare.

Dal confronto dei risultati si è dimostrato come gli spettri analitici riescano a prevedere con buona approssimazione il comportamento, in termini di spostamenti di punti notevoli (lato rigido, centro di massa e lato flessibile), di strutture eccentriche pseudo-reali ad un piano.

I risultati ottenuti costituiscono un'ottima base per l'estensione delle analisi ad edifici reali multipiano a comportamento elastico e/o elasto-plastico col fine ultimo di arrivare ad una loro progettazione preliminare di massima affidabile a partire da soli parametri fisici.

## 9. BIBLIOGRAFIA

### *Metodo Alpha*

- [1] T.Trombetti, Un approccio semplificato all'analisi dei problemi torsionali negli edifici isolati sismicamente alla base, *Giornale del Genio Civile* 132, 243-267, 1994.
- [2] T.Trombetti, S.Silvestri, G.Gasparini, B.Pintucchi, M.De Stefano, Numerical Verification of the Effectiveness of the "Alpha" Method for the Estimation of the Maximum Rotational Elastic Response of Eccentric Systems, *Journal of Earthquake Engineering* 12:2, 249-280, 2008.
- [3] T.Trombetti, S.Silvestri, G.Gasparini, M.Palermo, One storey asymmetric torsionally flexible systems: how period shifting affects the seismic response, *Proceedings of the 6th European Workshop on the seismic behavior of Irregular and Complex Structures*, Haifa, Israel, 12-13 September 2011.

### *Forme chiuse di coefficienti ed equazioni del moto*

- [4] T.Trombetti, J.P. Conte, New insight into and simplified approach to seismic analysis of torsionally coupled one-storey, elastic systems, *Journal of Sound and Vibration* 286, 265-312, 2005.
- [5] S.Silvestri, T.Trombetti, G.Gasparini, Closed-form solutions for corrective eccentricity, sensitivity to accidental eccentricity and increase in peak local displacements.

### *Alpha non lineare*

- [6] S.Silvestri, T.Trombetti, G.Gasparini, An Upper bound and an estimation for the maximum non-linear rotational response of one-storey asymmetric buildings.

### *Altri coefficienti*

- [7] T.Trombetti, M.Palermo, S.Silvestri, G.Gasparini, Period Shifting Effect on the Corner Displacement Magnification of One-Storey Asymmetric

Systems, 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, Portugal, 21-28 September 2012.

- [8] M.Palermo, S.Silvestri, G.Gasparini, T.Trombetti, “Physically-based prediction of the maximum corner displacement magnification of one-storey eccentric systems”, 2013

### ***Sistema non lineare idealizzato, Superposition Method***

- [9] A.K.Chopra, Dynamics of Structures: Theory and Applications to the Earthquake Engineering, Third Edition.

### ***Tesi sul metodo Alpha***

- [10] S.Silvestri, (2000), “Un approccio semplificato per l'analisi dei problemi torsionali negli edifici isolati sismicamente alla base con modellazione bilineare degli isolatori”, Tesi Magistrale, Università di Bologna, Dipartimento di Ingegneria Civile, Bologna, Italia.
- [11] C.Balloriani, (2010), “Risposta sismica di strutture asimmetriche in pianta: un metodo semplificato” Tesi Magistrale, Università di Bologna, Dipartimento di Ingegneria Civile, Bologna, Italia.
- [12] S.Casacci, (2012), “The seismic response of one-storey asymmetric structures”, Tesi Magistrale, Università di Bologna, Dipartimento di Civil Engineering, Bologna, Italia
- [13] E.Sammarco, (2014), “Non linear response of planar asymmetric systems”, Tesi Magistrale, Università di Bologna, Dipartimento di Civil Engineering, Bologna, Italia

***Primi studi (strutture semplici e multipiano, campo lineare e non lineare)***

- M.O.Erdik, Torsional effects in dynamically excited structures, Rice University PhD, 1975.
- Mustafa Ozder Erdik, Torsional effects in dynamically excited structures, Rice University, Ph.D 1975 Civil Engineering.
- A.Reinhorn, A. Rutenberg, J.Gluck, Dynamic torsional coupling in asymmetric building structures, Building and Environment Vol.12, 251-261, 1977.
- A.Reinhorn, A.Rutenberg, J.Gluck, Short communication of the dynamic properties of asymmetric wall-frame structures, Earthquake engineering and structural dynamics Vol.6, 317-320, 1978.
- A.Reinhorn, A.Rutenberg, J.Gluck, Dynamic torsional coupling in tall building structures, Proc. Instn Civ. Ingrs. Part.2, 67 June 411-424, 1979.
- C.L.Kan, A.K.Chopra, Linear and non linear earthquake responses of simply torsionally coupled systems, Earthquake Engineering Research centre, University of California, Berkeley, CA, 1987.
- R.Hejal, A.K.Chopra, Earthquake response of torsionally coupled buildings, Report UCB/EERC-87/20, Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkeley, CA, 1987.
- R.Goel, A.K.Chopra, Inelastic seismic response of one story, asymmetric plan system, Report UCB/EERC-90/14, Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkeley, CA, 1990.

***Strutture isolate alla base e smorzamento***

- S.Nagarajaiah, A.M.Reinhorn, M.C.Constantinou, Torsional coupling in sliding base-isolated structures, Journal of Structural Engineering ASCE 119, 130-149, 1993.

- S.Nagarajaiah, A.M.Reinhorn, M.C.Constantinou, Torsion in base-isolated structures with elastometric isolation systems, *Journal of Structural Engineering ASCE* 119, 2932-2951, 1993.
- Wen-Hsiung Lin, A.K.Chopra, Understanding and predicting effects of supplemental viscous damping on seismic response of asymmetric one-storey systems, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 30, 1475-1484, 2001.
- T.Trombetti, S.Silvestri, Added viscous dampers in shear-type structures: the effectiveness of mass proportional damping, *Journal of Earthquake Engineering*, 8:2, 275-313, 2004.

### ***Altri studi***

- J.C.De.La Lera, A.K.Chopra, Accidental and natural torsion in earthquake response and design of buildings, Report UCB/EERC-94/07, Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkeley, CA, 1994.
- Avigdor Rutenberg, EAEE Task Group (TG)8: Behaviour of irregular and complex structures – State of the art report: Seismic nonlinear response of code-designed asymmetric structures, 11th European Conference on Earthquake Engineering © 1998, Rotterdam.
- Gennaro Magliulo, Comportamento sismico degli edifici intelaiati in c.a. con irregolarità in pianta, Università degli studi di Napoli Federico II, Ph.D 2000 Dottorato di ricerca in ingegneria delle strutture.
- R.Castillo, Seismic Design of Asymmetric Ductile Systems, University of Canterbury Christchurch, New Zealand, 2004.
- A.Rutenberg, W.K.Tso, Horizontally irregular structures: some recent developments, Proceedings of the international Workshop on Performance- Based Seismic Design, Bled, Slovenia, June 28-July 1, 2004.
- D.Kusumastuti, A. Reinhorn, A. Rutenberg, A versatile experimentation model for study for structures near collapse applied to seismic evaluation of irregular structures, Technical Report MCEER-05-0002, 2005.

- I.Perus, P.Fajfar, On the inelastic torsional response of single-storey structures under bi-axial excitation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 34, 931-941, 2005.
- D.Marusic, P.Fajafar, On the inelastic seismic response of asymmetric buildings under bi-axial excitation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 34, 943-963, 2005.
- M. De Stefano, B. Pintucchi, A review of research on seismic behavior of irregular building structures since 2002, *Bull Earthquake Engineering* 6, 285-308, 2008.
- R.Barron, A.G. Ayala, An energy-based design method for buildings with supplemental damping and nonlinear behavior, 6th European Workshop on the seismic behavior of Irregular and Complex Structures (6EWICS), Haifa, Israel, 12-13 September 2011.