

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

METODI
DI OTTIMIZZAZIONE
DI PORTAFOGLIO

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Simona Riggi

III Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

La Finanza Matematica è una disciplina sviluppatasi recentemente allo scopo di risolvere problemi di tipo economico-finanziario utilizzando teorie matematiche, in particolare concetti di probabilità. Inizialmente era legata strettamente all'econometria e successivamente ha utilizzato sempre nuove nozioni matematiche.

Argomento di questa tesi è l'ottimizzazione di un portafoglio, cioè, dato un portafoglio, massimizzarne il guadagno minimizzando il rischio.

Nel primo capitolo illustrerò le nozioni matematiche basi della finanza, come i mercati discreti, la definizione di portafoglio, il modello binomiale, l'arbitraggio e la misura martingala.

Nel secondo capitolo presenterò i due metodi risolutivi del problema di ottimizzazione: il Metodo Martingala e il Metodo della Programmazione Dinamica.

Nell'ultimo capitolo verifico la veridicità dei due metodi precedenti partendo dalla funzione d'utilità esponenziale.

Indice

1	Nozioni di Finanza Matematica	7
1.1	Mercati discreti	8
1.2	Portafoglio	9
1.3	Portafoglio relativo	10
1.4	Modello Binomiale	11
1.5	Arbitraggio	13
1.6	Misura martingala	14
2	Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica	17
2.1	Massimizzazione dell'utilità attesa	18
2.1.1	Strategie con consumo	18
2.1.2	Funzioni d'utilità	20
2.1.3	Problemi di ottimizzazione	22
2.2	Metodo "martingala"	25
2.2.1	Mercato completo:ricchezza finale	26
2.2.2	Mercato incompleto:ricchezza finale	30
2.2.3	Mercato completo:consumo intermedio	31
2.2.4	Mercato completo:consumo intermedio e ricchezza finale	33
2.3	Metodo della programmazione dinamica	35
2.3.1	Algoritmo ricorsivo	35
3	Utilità esponenziale	39
3.1	Utilità finale nel modello binomiale con il metodo martingala .	39

3.2	Consumo intermedio nel modello binomiale con il metodo mar- tingala	42
3.3	Utilità finale nel modello binomiale con il metodo della Pro- grammazione Dinamica	45
3.4	Consumo intermedio nel modello binomiale con il metodo della Programmazione Dinamica	46
	Bibliografia	49

Capitolo 1

Nozioni di Finanza Matematica

In questo capitolo riprenderò alcune delle nozioni fondamentali della Finanza Matematica per poter comprendere meglio l'argomento della tesi.

Un *derivato finanziario* è un contratto il cui valore dipende da uno o più titoli, chiamati sottostati. Un esempio di derivato è l'*opzione europea*, che dà il diritto a chi la detiene di comprare (in caso dell'*Opzione Call*) o di vendere (*Opzione Put*) una certa quantità di un sottostante a una data futura (*scadenza*) a un prezzo prefissato (*strike*).

Ora fornisco alcune definizioni che torneranno utili in seguito.

Definizione 1.0.1. Una *filtrazione* è una σ -algebra $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ tale che

$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F} \quad \forall n \geq 0$$

Una filtrazione rappresenta il flusso di informazioni.

Definizione 1.0.2. Dati X processo stocastico e $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, X si dice *adattato* a $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ se X_n è \mathcal{F}_n -misurabile $\forall n \geq 0$

Definizione 1.0.3. Una *martingala* è un processo stocastico $(X_n)_{n \geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0})$ tale che $\forall n \geq 0$

$$X_n = E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

1.1 Mercati discreti

Per rappresentare le date in cui avvengono le contrattazioni fissiamo

$$t_0, t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$$

con

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

dove t_0 rappresenta la data odierna, mentre T rappresenta la scadenza del derivato europeo.

Il modello di mercato discreto (S, B) è composto da $d + 1$ titoli ($d \in \mathbb{N}$), di cui B (*bond*) non è rischioso e corrisponde al deposito in banca, mentre d sono i titoli rischiosi $S = (S^1, \dots, S^d)$ (*stocks*), corrispondenti a d azioni quotate in borsa.

Il bond ha una dinamica deterministica, ossia è possibile prevedere in ogni istante di tempo quale sia il suo valore nel futuro:

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = B_{n-1}(1 + r_n), \quad n=1, \dots, N \end{cases} \quad (1.1)$$

dove B_0 indica il valore del bond oggi, B_n il valore del bond all'istante t_n e r_n , indica il tasso privo di rischio nel periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$.

I titoli rischiosi hanno la seguente dinamica:

$$\begin{cases} S_0^i \in \mathbb{R} \\ S_n^i = S_{n-1}^i(1 + \mu_n^i), \quad n=1, \dots, N \end{cases} \quad (1.2)$$

per $i = 1, \dots, d$ dove s_0^i indica il prezzo dell' i -esimo titolo rischioso oggi, S_n^i il prezzo dell' i -esimo titolo all'istante t_n e μ_n^i è una variabile aleatoria reale che rappresenta il tasso di rendimento dell' i -esimo titolo rischioso nel periodo $[t_{n-1}, t_n]$.

1.2 Portafoglio

Definizione 1.2.1. Un *portafoglio* (o *strategia*) è un processo stocastico in \mathbb{R}^{d+1}

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d, \beta_n)_{n=1, \dots, N}$$

dove α_n^i rappresenta il numero dei titoli S^i e β_n il numero di bond presenti nel portafoglio nel periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$.

Definizione 1.2.2. Si definisce il valore del portafoglio (α, β) nel periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$

$$V_n^{(\alpha, \beta)} = \alpha_n S_n + \beta_n B_n = \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_n^i + \beta_n B_n \quad (1.3)$$

Inoltre definisco il valore iniziale del portafoglio

$$V_0^{(\alpha, \beta)} = \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_1^i S_0^i + \beta_1 B_0 \quad (1.4)$$

Definizione 1.2.3. Un portafoglio (α, β) si dice *autofinanziante* se vale

$$V_n = \alpha_n S_n + \beta_n B_n = \alpha_{n-1} S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1} \quad \forall n = 1, \dots, N \quad (1.5)$$

Per l'equazione (1.3) vale

$$V_n - V_{n-1} = \alpha_n (S_n - S_{n-1}) + \beta_n (B_n - B_{n-1})$$

Questo significa che al tempo t_{n-1} , avendo a disposizione il capitale V_{n-1} si costruisce la strategia per periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$ con le nuove quantità α_n, β_n in modo da non mutare il valore complessivo del portafoglio.

Definizione 1.2.4. Un portafoglio (α, β) è *predicibile* se (α_n, β_n) è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile, $\forall n = 1, \dots, N$

Ossia, un portafoglio è predicibile se ho informazioni sul titolo fino all'istante t_{n-1} , che è il momento in cui costruisco la strategia.

Notazione: Indichiamo con \mathcal{A} l'insieme delle strategie autofinanzianti e predicibili:

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, \beta) | \text{strategia autofinanziante e predicibile}\}$$

Proposizione 1.2.1. *Il valore di una strategia autofinanziante (α, β) è determinato dal valore iniziale V_0 e ricorsivamente dalla relazione*

$$V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n), \quad n = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

1.3 Portafoglio relativo

Un portafoglio si può esprimere anche in termini relativi, indicando le proporzioni del valore totale investite nei singoli titoli.

Definizione 1.3.1. *Se $V_{n-1} \neq 0$ si definiscono le **proporzioni investite nel periodo n -esimo***

$$[t_{n-1}, t_n] \quad \forall n = 1, \dots, N$$

$$\pi_n^i = \frac{\alpha_n^i S_{n-1}^i}{V_{n-1}}, \quad i = 1, \dots, d \quad (1.7)$$

e

$$\pi_n^0 = \frac{\beta_n B_{n-1}}{V_{n-1}} = 1 - \sum_{i=1}^d \pi_n^i \quad (1.8)$$

Se $V_{n-1} = 0$ si pone per convenzione $\pi_n^i = 0, \quad \forall i = 0, \dots, d$

Proposizione 1.3.1. *Il valore di una strategia autofinanziante (α, β) è determinato dal valore iniziale $V_0 \in \mathbb{R}$ e dai processi π^1, \dots, π^d mediante la relazione ricorsiva*

$$V_n = V_{n-1}(1 + \pi_n \mu_n + \pi_n^0 r_n)$$

che per l'equazione (1.8) è equivalente a

$$V_n = V_{n-1} \left(1 + r_n + \sum_{i=1}^d \pi_n^i (\mu_n^i - r_n) \right)$$

e per le equazioni (1.1) e (1.2) è anche equivalente a

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{V_{n-1}} = \pi_n \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} + \pi_n^0 \frac{B_n - B_{n-1}}{B_{n-1}} \quad (1.9)$$

Questo significa che il rendimento relativo di un portafoglio autofinanziante è combinazione lineare dei rendimenti dei titoli che lo compongono con pesi espressi dal portafoglio relativo.

Osservazione Si noti che dati $V_0 \in \mathbb{R}$ e π^1, \dots, π^d processi predicibili, per le equazioni (1.7) e (1.8) è possibile ricavare la corrispondente strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ mediante le formule

$$\alpha_n^i = \frac{\pi_n^i V_{n-1}}{S_{n-1}^i} \quad (1.10)$$

$$\beta_n = \frac{V_{n-1}}{B_{n-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^d \pi_n^i \right) \quad (1.11)$$

1.4 Modello Binomiale

Il modello binomiale è un esempio di mercato discreto. Il mercato è composto da un titolo non rischioso $B(\text{bond})$ e da un solo titolo rischioso $S(\text{stoke})$.

Come prima fissiamo $t_0, t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ con

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

che rappresentano le date in cui avvengono le contrattazioni, dove $t_0 = 0$ indica la data odierna, mentre $t_N = T$ rappresenta la scadenza di un derivato. Nel modello binomiale, il bond ha la seguente dinamica:

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = B_{n-1}(1+r) = B_0(1+r)^n = (1+r)^n, \quad n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.12)$$

dove r indica il tasso di interesse privo di rischio ed è costante durante il periodo $[0, T]$.

Per il titolo rischioso assumo che passando dal tempo t_{n-1} al tempo t_n l'azione aumenti il proprio valore con tasso di crescita u costante o lo diminuisca con

tasso di decrescita d sempre costante. Il titolo rischioso segue la dinamica:

$$\begin{cases} S_0 \in \mathbb{R}_+ \\ S_n = S_{n-1}(1 + \mu_n), \quad n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.13)$$

dove le μ_n sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite su uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) aventi come distribuzione una combinazione lineare di Delta di Dirac

$$p\delta_{u-1} + (1-p)\delta_{d-1}$$

e tali che

$$1 + \mu_n = \begin{cases} u & \text{con probabilità } p \\ d & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$$

con $p \in]0, 1[$ e $0 < d < u$.

Dove la distribuzione di Delta di Dirac si tratta di un esempio di distribuzione $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (dove \mathcal{B} è la σ -algebra di Borel), in cui fisso un punto $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in H \\ 0 & \text{se } x_0 \notin H \end{cases} \quad (1.14)$$

con $H \in \mathcal{B}$.

Teorema 1.4.1. *Nel modello binomiale il mercato è completo, ossia per il Secondo Teorema fondamentale della valutazione esiste una ed una sola misura martingala, se e solo se vale:*

$$d < 1 + r < u$$

Dimostrazione. Supponiamo che nel modello binomiale esista una misura martingala, dunque vale

$$\bar{S}_{n-1} = E^Q[\bar{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}], \quad \forall n = 1, \dots, N$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} &= E^Q \left[\frac{S_n}{B_n} | \mathcal{F}_{n-1} \right] \implies \frac{S_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} = E^Q \left[\frac{S_{n-1}}{(1+r)^n} | \mathcal{F}_{n-1} \right] \\ &\implies \frac{(1+r)}{1+r^n} S_{n-1} = \frac{1}{(1+r)^n} E^Q[S_n | \mathcal{F}_{n-1}] \implies (1+r)S_{n-1} = E^Q[S_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &\implies (1+r)S_{n-1} = E^Q[S_{n-1}(1+\mu_n) | \mathcal{F}_{n-1}] \implies (1+r)S_{n-1} = S_{n-1} E^Q[(1+\mu_n) | \mathcal{F}_{n-1}] \end{aligned}$$

dato che S_{n-1} è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile e vale

$$E^Q[S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}$$

si ha quindi che

$$\begin{aligned} (1+r) &= E^Q[(1+\mu_n) | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= uQ(1+\mu_n = u | \mathcal{F}_{n-1}) + dQ(1+\mu_n = d | \mathcal{F}_{n-1}) \end{aligned}$$

dove ponendo $Q(1+\mu_n = u | \mathcal{F}_{n-1}) = q_n$ (variabile aleatoria), quindi $Q(1+\mu_n = d | \mathcal{F}_{n-1}) = 1 - q_n$ si ottiene

$$1+r = uq_n + d(1-q_n) \implies q_n = \frac{1+r-d}{u-d} \in]0, 1[$$

Dunque:

$$0 < q_n < 1 \implies 0 < \frac{1+r-d}{u-d} < 1 \implies d < 1+r < u$$

□

1.5 Arbitraggio

Se ho due investimenti rischiosi, dove X_t, Y_t rappresentano il prezzo al tempo t dei due investimenti. Secondo il principio di non arbitraggio

$$\text{se } X_T = Y_T \implies X_0 = Y_0.$$

Cioè se attualmente due investimenti hanno lo stesso valore, allora anche inizialmente avevano lo stesso valore.

Un *arbitraggio* è un'operazione illegale che consiste nell'acquistare un bene o un'attività finanziaria su un mercato rivendendolo su un altro sfruttando le differenze di prezzo al fine di ottenere un profitto senza correre rischio.

Definizione 1.5.1. *Un arbitraggio è una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ che verifica le condizioni:*

1. $V_0^{(\alpha, \beta)} = 0$
2. $V_N^{(\alpha, \beta)} \geq 0$
3. $P(V_N^{(\alpha, \beta)} > 0) > 0$

Quindi un arbitraggio è una strategia che senza richiedere un investimento iniziale ($V_0^{(\alpha, \beta)} = 0$) e non esponendo ad alcun rischio ($V_N^{(\alpha, \beta)} \geq 0$) sicuramente avrà un valore positivo ($P(V_N^{(\alpha, \beta)} > 0) > 0$).

1.6 Misura martingala

Definizione 1.6.1. *Una misura martingala è una misura di probabilità Q su (Ω, \mathcal{F}) tale che*

- *Q equivale a P , cioè le due probabilità hanno gli stessi eventi trascurabili e se si verifica l'evento di uno si verifica anche l'evento dell'altro*
- *il prezzo scontato del titolo rischioso, \tilde{S} , è una Q -martingala, ossia*

$$\tilde{S}_{n-1} = E^Q[\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}]$$

Osservazione: Se Q è una misura martingala e $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$, allora $\bar{V}^{(\alpha, \beta)}$ è una Q -martingala:

$$\bar{V}_{n-1}^{(\alpha, \beta)} = E^Q[\bar{V}_n^{(\alpha, \beta)} | \mathcal{F}_{n-1}] \quad n = 1, \dots, N$$

e in particolare

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = E^Q[\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)}]$$

Teorema 1.6.1 (Primo Teorema fondamentale della valutazione). *Un mercato discreto è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.*

Dimostrazione. Suppongo per assurdo che $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ sia un arbitraggio. Allora per l'osservazione precedente, dato che per ipotesi esiste una misura martingala Q , varrà che:

$$0 = V_0^{(\alpha,\beta)} = E^Q[\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)}] = \sum_k v_k Q(\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)} = v_k) > 0$$

in quanto $v_k \geq 0$ e $Q(\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)} = v_k) > 0$. Ma questo è assurdo. Quindi se esiste una misura martingala il mercato è libero da arbitraggi. \square

Capitolo 2

Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica

In questo capitolo mi occuperò dei metodi per ottimizzare un portafoglio. Cioè di come investire un patrimonio nel mercato finanziario cercando di ottenere un beneficio, attraverso la **massimizzazione dell'utilità attesa**. Dobbiamo quindi risolvere due sottoproblemi, che consistono nella massimizzazione dell'utilità attesa e nell'attesa derivante dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale residua.

Gli approcci per la risoluzione sono:

- programmazione dinamica, che consiste nell'ottimizzazione intertemporale sia in un contesto deterministico che stocastico;
- metodo martingala, dove l'ottimizzazione dinamica viene decomposta in 2 sottoproblemi:
 1. problema statico, si determina il valore terminale ottimale del portafoglio autofinanziante che è raggiungibile a partire da un dato patrimonio iniziale,
 2. determinare la strategia di investimento ottimale (strategia che replica il valore terminale ottimo del portafoglio).

2.1 Massimizzazione dell'utilità attesa

2.1.1 Strategie con consumo

Tratterò le strategie che considerano quanto abbiamo consumato del patrimonio iniziale.

Definizione 2.1.1. *Nel mercato discreto un **processo di consumo** è un processo stocastico non negativo e adattato $C = (C_n)$, dove C_n indica l'ammontare di capitale consumato all'istante t_n .*

*Una **strategia con consumo** è una tripla (α, β, C) dove (α, β) è una strategia e C un processo di consumo.*

Definizione 2.1.2. *Una strategia con consumo (α, β, C) è:*

- **autofinanziante** se vale $\implies V_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1} + C_{n-1}$
- **ammissibile** se vale $\implies V_N \geq C_N$

Proposizione 2.1.1. *Il valore di una strategia autofinanziante con consumo (α, β, C) è determinato dal valore iniziale V_0 e ricorsivamente dalla relazione:*

$$V_n = (V_{n-1} - C_{n-1})(1 + r_n) + \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n) \quad \forall n = 1, \dots, N$$

dove r_n è il tasso di interesse, mentre μ_n è il tasso di rendimento del titolo rischioso.

Corollario 2.1.1. *Dati $V_0 \in \mathbb{R}$, un processo predicibile α e un processo di consumo C , esiste ed è unico il processo predicibile β tale che (α, β, C) sia una strategia autofinanziante con consumo di valore iniziale pari a V_0 .*

Dimostrazione. Dati $V_0 \in \mathbb{R}$ e i processi α, C , definiamo il processo:

$$\beta_n = \frac{V_{n-1} - \alpha_n S_{n-1} - C_{n-1}}{B_{n-1}}$$

dove (V_n) è definito ricorsivamente. Per costruzione (β_n) è predicibile e la strategia (α, β, C) è autofinanziante. \square

Osservazione: Questa dimostrazione fa notare come il processo β dipende da V_0 , da α e dal processo adattato (C_0, \dots, C_{N-1}) , ma non da C_N . Quindi è ben posta la seguente:

Definizione 2.1.3. *Un processo di consumo C è (V_0, α) – ammissibile se la strategia autofinanziante con consumo (α, β, C) di valore iniziale V_0 è ammissibile.*

Osservazione: La condizione di autofinanziamento per una strategia con consumo diventa:

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_0 + G_n^{(\alpha)} - \sum_{i=1}^d \tilde{C}_k$$

dove $G^{(\alpha)}$ è una martingala con media nulla e indica il processo di rendimento scontato della strategia:

$$G_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1})$$

Inoltre vale la formula di valutazione neutrale al rischio:

$$V_{n-1} = E^Q \left[\frac{V_n}{1+r} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] + C_{n-1} \quad (2.1)$$

Infine esprimo la condizione di autofinanziamento in termini relativi, indicando le proporzioni del valore totale investite nei singoli titoli.

Indichiamo con:

$$\pi_n^i = \frac{\alpha_n^i S_{n-1}^i}{V_{n-1}}$$

le proporzioni investite ne periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$ con $n = 1, \dots, N$.

Proposizione 2.1.2. *Il valore di una strategia autofinanziante con consumo (α, β, C) è determinato dal valore iniziale $V_0 \in \mathbb{R}$ e dai processi π^1, \dots, π^d e C mediante la relazione ricorsiva*

$$V_n = (V_{n-1} - C_{n-1})(1 + r_n) + V_{n-1} \sum_{i=1}^d \pi_n^i (\mu_n^i - r_n)$$

2.1.2 Funzioni d'utilità

D'ora in poi I indica l'intervallo reale $]a, \infty[$ dove $a \leq 0$ è una costante fissata, eventualmente $a = -\infty$.

Definizione 2.1.4. *una funzione d'utilità è una funzione di classe C^1 : $I \rightarrow \mathbb{R}$ che è:*

1. *strettamente crescente;*
2. *strettamente concava;*
3. *nel caso $a > -\infty$, vale $\lim_{v \rightarrow a^+} u' = \infty$; nel caso $a = -\infty$, u è superiormente limitato.*

Alcuni esempi di funzioni d'utilità sono:

- funzione d'utilità logaritmica

$$u(v) = \log v, \quad v \in \mathbb{R}_+$$

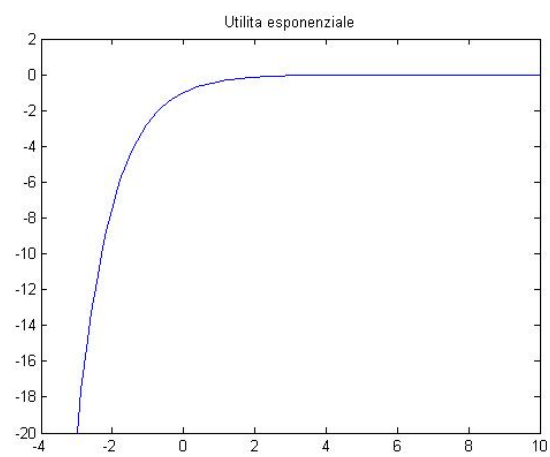
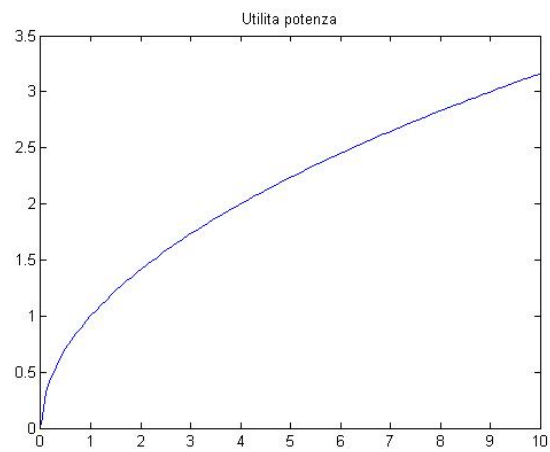
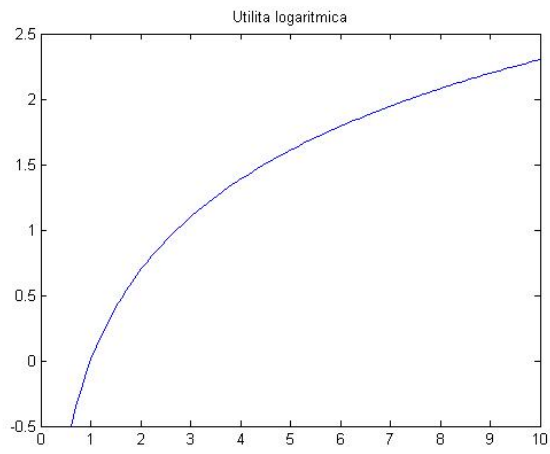
- funzione d'utilità potenza

$$u(v) = \frac{v^\gamma}{\gamma}, \quad v \in \mathbb{R}_+, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0, \gamma < 1$$

- funzione d'utilità esponenziale

$$u(v) = -e^{-v}, \quad v \in \mathbb{R}$$

I cui grafici sono:



2.1.3 Problemi di ottimizzazione

Assegnate le funzioni d'utilità u, u_0, u_1, \dots, u_N , definite su I , mi occuperò dei problemi di ottimizzazione del portafoglio:

- **massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale:** fissato $V_0 \in \mathbb{R}_+$ il problema consiste nel determinare se esiste:

$$\max_{\alpha, C} E \left[u \left(V_N^{(\alpha)} \right) \right] \quad (2.2)$$

dove il massimo è ricercato fra i processi α predicibili t.c. $V_N^{(\alpha)} \in I$;

- **massimizzazione dell'utilità attesa dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale:** fissato $V_0 \in \mathbb{R}_+$ il problema consiste nel determinare, se esiste:

$$\max_{\alpha, C} E \left[\sum_{n=0}^N u_n(C_n) + u \left(V_N^{(\alpha, C)} - C_N \right) \right] \quad (2.3)$$

dove il massimo è ricercato fra i processi α predicibili e C di consumo (V_0, α) -ammissibili t.c. $C_0, \dots, C_N \in I$ e $(V_n^{(\alpha, C)} - C_n) \in I$.

Osservazione: Se $u \equiv 0$, si considera la massimizzazione dell'utilità attesa dal solo consumo intermedio. Per la condizione di ammissibilità della strategia con consumo e per la proprietà di monotonia delle funzioni d'utilità, la strategia ottimale è t.c. $C_N = V_N^{(\alpha, C)}$, ossia all'istante finale tutto il capitale viene consumato.

In un mercato libero da arbitraggi questi problemi di massimizzazione dell'utilità attesa hanno soluzione.

Utilità attesa dalla ricchezza finale

Nel seguito assumeremo sempre che u sia una funzione d'utilità che gode delle proprietà 1.,2.,3. e lo spazio Ω ha cardinalità finita.

Teorema 2.1.1. *Esiste una strategia ottimale per risolvere il problema (2.2) \Leftrightarrow il mercato è libero d'arbitraggi.*

Dimostrazione. Sia α una strategia ottimale di valore iniziale v e suppongo per assurdo che esista una strategia d'arbitraggio $\bar{\alpha}$ per la quale valga

$$V_0^{(\bar{\alpha})} = 0, \quad V_N^{(\bar{\alpha})} \geq 0, \quad P(V_N^{(\bar{\alpha})} > 0) > 0.$$

Allora la strategia $\alpha + \bar{\alpha}$ è tale che

$$V_0^{(\alpha+\bar{\alpha})} = v, \quad V_N^{(\alpha+\bar{\alpha})} = V_N^{(\alpha)} + V_N^{(\bar{\alpha})} \geq V_N^{(\alpha)}, \quad P(V_N^{(\alpha+\bar{\alpha})} > V_N^{(\alpha)}) > 0,$$

che contraddice l'ottimalità di α , essendo la funzione u strettamente crescente. Questo prova che se esiste una strategia ottimale allora il mercato è libero d'arbitraggi.

Viceversa indico con \mathcal{V}_v l'insieme dei valori finali raggiungibili con una strategia autofinanziante di valore iniziale pari a v :

$$\mathcal{V}_v = \left\{ V_N^{(\alpha)} \mid \alpha \text{ predicibile, } V_0^{(\alpha)} = v \right\}$$

Per dimostrare la tesi ambiente il problema in uno spazio Euclideo: indico con M la cardinalità di Ω e con $\omega_1, \dots, \omega_M$ gli eventi elementari. Se Y è una variabile aleatoria su Ω a valori reali, pongo $Y(\omega_j) = Y_j$ e identifico Y col vettore di \mathbb{R}^M (Y_1, \dots, Y_M) . Allora vale

$$E^P[Y] = \sum_{j=1}^M Y_j P(\omega_j)$$

e il problema di ottimizzazione (2.2) equivale a un problema di massimizzazione della funzione:

$$f(V) := \sum_{j=1}^M u(V_j) P(\omega_j) = E^P[u(V)]$$

per l'ipotesi di assenza di opportunità d'arbitraggio e per il primo teorema fondamentale della valutazione, esiste una misura martingala Q . Rispetto a Q , ogni $V \in \mathcal{V}_v$ verifica la condizione

$$v = E^Q[B_N^{-1}V] = B_N^{-1} \sum_{j=1}^M v_j Q(\{\omega_j\})$$

24 2. Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica

Proviamo la tesi assumendo che il dominio I della funzione d'utilità sia inferiormente limitato, ossia $I =]a, +\infty[$ con $a > -\infty$. Sia (V^n) una successione in $\mathcal{V}_n \cap I^M$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[u(V^n)] = \sup_{V \in \mathcal{V}_v \cap I^M} E[u(V)] \quad (2.4)$$

Le componenti V_j^n sono limitate uniformemente in j e n . (V^n) è convergente ad un limite \hat{V} e tale limite appartiene a \mathcal{V}_v . In particolare esiste $\hat{\alpha}$ predicibile tale che $\hat{V} = V_N^{(\hat{\alpha})}$ e $V_0^{(\hat{\alpha})} = v$. Ora mostro che $\hat{V} \in I^M$ ossia

$$\hat{V}_j > a, \quad j = 1, \dots, M$$

Per assurdo, sia $F := \{\hat{V} = a\} \neq \emptyset$. Consideriamo la strategia α , di valore iniziale v , che consiste nel detenere tutto il capitale nel titolo non rischioso. Per la concavità di u , per ogni $\varepsilon \in]0, 1[$ vale

$$E\left[u(\varepsilon V_N^{(\alpha)} + (1 - \varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}) - u(V_N^{(\hat{\alpha})})\right] \geq \varepsilon(I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon))$$

Ora per arrivare all'assurdo basta far vedere che esiste un ε per cui l'espressione sopra è positiva. Per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ si ha

$$I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) \rightarrow +\infty.$$

Dunque $\varepsilon(I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)) > 0$ se ε è sufficientemente piccolo questo contraddice l'ottimalità di \hat{V} e conclude la prova.

Provo ora la tesi assumendo che u sia superiormente limitato e $I = \mathbb{R}$, ossia $a = -\infty$. Innanzitutto, per la concavità di u , si ha

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} u(v) = -\infty \quad (2.5)$$

Considero una successione $(V^n) \in \mathcal{V}_v$ che verifica (2.4); la tesi consiste nel dimostrare che (V^n) ammette una sottosuccessione convergente. Assumo per assurdo che non la ammetta, quindi che non sia limitata.

si può provare che esistono due successioni di indici (k_n) e (j_n) tale che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{j_n}^{k_n} = -\infty$$

Ma dall'ipotesi di limitatezza superiore di u e dalla (2.5) segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[u(V^n)] = -\infty$$

e questo contraddice la (2.4). Dunque (V^n) è convergente, a meno di sottosuccessioni, in \mathcal{V}_v al valore finale di una strategia ottimale. \square

Corollario 2.1.2. *In un mercato libero da arbitraggi, sia $\bar{V} = V_N^{(\bar{\alpha})}$ il valore finale ottima per il problema (2.2). Allora la misura Q definita da*

$$Q(\{w\}) = \frac{u'(V(w))B_N}{E^P[B_N u'(V)]} P(w), \quad w \in \Omega$$

è una misura martingala.

Utilità attesa da consumo intermedio e ricchezza finale

Teorema 2.1.2. *Esiste una strategia ottimale per il problema (2.3) \Leftrightarrow il mercato è libero da arbitraggi.*

Dimostrazione. Analoga a quella del Teorema 2.1.1. \square

2.2 Metodo “martingala”

Il metodo martingala viene utilizzato per risolvere i problemi di replicazione di un derivato e di ottimizzazione stocastica.

Definizione 2.2.1. *Un derivato X è replicabile $\Leftrightarrow E^Q[B_N^{-1}X]$ assume lo stesso valore per ogni misura martingala Q .*

Definizione 2.2.2. *Un modello di mercato (S, B) si dice completo se ogni derivato europeo è replicabile.*

Dato X derivato europeo (variabile aleatoria che rappresenta il payoff del derivato) per risolvere il problema della copertura bisogna determinare:

- un valore iniziale $V_0 = v$

26 2. Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica

- una strategia autofinanziante α t.c. $V_N^{(\alpha)} = X$ quasi sicuramente in \mathbb{P} , quindi anche \forall misura martingala \mathbb{Q} .

Il valore scontato di ogni strategia autofinanziante e predicibile è una martingala rispetto ad ogni misura martingala.

Dall'equazione di replicazione si ricava:

$$v = E^{\mathbb{Q}}[V_N^{(\alpha)}] = E^{\mathbb{Q}}[B_N^{-1}X] \quad (2.6)$$

Determinare la strategia di copertura corrisponde a risolvere il problema di rappresentazione di martingala. Infatti:

- posso fissare una misura martingala \mathbb{Q} e definisco la martingala

$$\widetilde{M}_n = E^{\mathbb{Q}}[B_N^{-1}X | F_n], \quad n = 0, \dots, N$$

- se determino una strategia α t.c.

$$\widetilde{M}_n = \widetilde{V}_n^{(\alpha)} = v + \sum_{k=1}^n \alpha_k (\widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}), \quad n = 0, \dots, N \quad (2.7)$$

Parto dal valore iniziale v e seguendo la strategia α , ottengo $\widetilde{V}_N^{(\alpha)} = \widetilde{X}$ e quindi anche $V_N^{(\alpha)} = X$.

Dunque determinare la strategia α equivale a trovare una rappresentazione per la martingala \widetilde{M} della forma (2.7).

2.2.1 Mercato completo: ricchezza finale

Considero il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale

$$\max_{\alpha} E[u(V_N^{(\alpha)})] \quad (2.8)$$

a partire dalla ricchezza iniziale v .

Il metodo martingala decompone l'originario problema dinamico di ottimizzazione di portafoglio in un problema statico (la determinazione del valore

finale ottimale) e in un problema di replicazione.

Il metodo martingala consiste in tre passi:

1. determinare l'insieme dei valori finali raggiungibili

$$V_v = \{V | V = V_N^{(\alpha)}, \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha)} = v\}$$

Problema risolto utilizzando la condizione di martingalità che stabilisce il legame fra il valore atteso finale e il valore iniziale.

In un mercato completo e libero da arbitraggi esiste ed è unica la misura martingala. Quindi si ha la caratterizzazione

$$V_v = \{V | E^Q[B_N^{-1}V] = v\} \quad (2.9)$$

per l'insieme dei valori raggiungibili con una strategia autofinanziante di valore iniziale v .

2. determinare il valore finale raggiungibile ottimale \bar{V}_N che realizza il massimo in (2.8)
3. determinare una strategia autofinanziante $\bar{\alpha}$ t.c. $V_N^{(\bar{\alpha})} = \bar{V}_N$.

Corrisponde a un problema standard di copertura, dove il payoff da replicare è il valore finale ottimale \bar{V}_N

Per risolvere il punto 2. utilizzerò il seguente

Teorema 2.2.1. *In un mercato completo e libero da arbitraggi si consideri il problema di massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale (2.8) a partire dal capitale iniziale $v \in \mathbb{R}_+$.*

Se vale la condizione

$$u'(I) = \mathbb{R}_+ \quad (2.10)$$

allora il valore finale ottimale è pari a

$$\bar{V}_N = \mathcal{I}(\lambda \bar{L}) \quad (2.11)$$

28 2. Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica

dove $\bar{L} = B_N^{-1}L$, con $L = \frac{dQ}{dP}$. Essendo Q la misura martingala e $\lambda \in \mathbb{R}$ è determinato dall'equazione

$$E^P[\mathcal{I}(\lambda\bar{L})\bar{L}] = v \quad (2.12)$$

detta equazione di budget.

Dimostrazione. Ambientando il problema in uno spazio euclideo, il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale equivale ad un problema di ottimizzazione vincolata in \mathbb{R}^+ . Posto per brevità $P_i = P(\{\omega_i\})$ e $Q_i = Q(\{\omega_i\})$ per $i = 1, \dots, M$ è possibile riformulare il problema in termini di massimizzazione della funzione

$$f(V) := \sum_{i=1}^M u(V_i)P_i = E^P[u(V)]$$

soggetto al vincolo $V \in \mathcal{V}_v \cap I^M$ che per la (2.9) è espresso da

$$g(V) := \sum_{i=1}^M B_N^{-1}V_iQ_i - v = E^Q[B_N^{-1}V] - v = 0 \quad \text{e} \quad V_i > a, \quad i = 1, \dots, M$$

In base al teorema (2.1.1) esiste ed è unica $\bar{V}_N \in \mathcal{V}_v$, soluzione del problema di ottimizzazione, tale che $\bar{V}_N > a$. Per determinare tale valore ottimale bisogna utilizzare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Introduco la funzione Lagrangiana per la funzione f sul vincolo $\mathcal{V}_v = \{g = 0\}$:

$$\mathcal{L}(V, \lambda) = f(V) - \lambda g(V)$$

Annullando il gradiente ottengo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \partial_{v_i}\mathcal{L}(V, \lambda) &= u'(V_i)P_i - B_N^{-1}\lambda Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, M, \\ \partial_\lambda\mathcal{L}(V, \lambda) &= \sum_{i=1}^M B_N^{-1}V_iQ_i - v = 0 \end{aligned}$$

Per l'ipotesi (2.10), la funzione u' è biettiva da I in \mathbb{R}_+ : dunque la prima delle due equazioni precedenti ha soluzione unica

$$(\bar{V}_N)_i = \mathcal{I}\left(b_N^{-1}\lambda\frac{Q_i}{P_i}\right) \quad i = 1, \dots, M$$

e tale equazione equivale alla (2.11). Inserendo la (2.11) nella seconda equazione ottengo

$$h(\lambda) := \sum_{i=1}^M B_N^{-1} \mathcal{I} \left(B_N^{-1} \lambda \frac{Q_i}{P_i} \right) Q_i = v \quad (2.13)$$

che è equivalente alla (2.12). La funzione h definita in (2.13) è continua e strettamente decrescente. Quindi $\forall v \in \mathbb{R}_+$, esiste ed è unico λ soluzione di (2.13). \square

Le derivate di Radon-Nikodym di Q rispetto a P giocano un ruolo importante nel metodo martingala e torneranno utili nel prossimo capitolo, quindi le ricavo per quanto riguarda il *Modello binomiale*.

Considero un modello binomiale a N periodi con parametri:

- u di crescita
- r tasso privo di rischio
- d di decrescita
- p probabilità di crescita

Possiamo identificare gli eventi elementari ω dello spazio di probabilità, con le N -ple della forma $\omega = (0, 1, 0, 0, 1, \dots)$.

Allora il titolo rischioso si rappresenta

$$S_n = u^{\nu_n} d^{n-\nu_n} S_0$$

dove ν_n è la variabile aleatoria che conta il numero di crescite dopo n periodi.

Vale:

$$E[\nu_N] = pN$$

La misura martingala è definita da

$$Q(\{\omega\}) = q^{\nu_N(\omega)} (1-q)^{N-\nu_N(\omega)}, \quad \omega \in \Omega$$

dove

$$q = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Inoltre le v.a. μ_1, \dots, μ_N sono Q-indipendenti.

La derivata di Radon-Nikodym di Q rispetto a P vale

$$L(\omega) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu_N(\omega)} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-\nu_N(\omega)}$$

Ricavo l'espressione del processo

$$L_n = E^P[L|F_n] = E^P\left[\frac{dQ}{dP}|F_n\right]$$

Si ottiene

$$L_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu_n} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\nu-v_n}$$

2.2.2 Mercato incompleto:ricchezza finale

Se il mercato è libero da arbitraggi e incompleto, l'insieme delle misure martingale è infinito, quindi il problema 1. si complica.

L'insieme dei valori finali generati a partire da un capitale iniziale v ha la seguente caratterizzazione:

$$V_v = \{V|E^Q[B_N^{-1}V] = v, \text{ per ogni misura martingala Q}\}$$

La famiglia delle misure martingale(identificate con vettori di \mathbb{R}^M) è l'intersezione di uno spazio affine di \mathbb{R}^M con l'insieme delle misure di probabilità strettamente positive

$$\mathbb{R}_+^M = \{Q = (Q_1, \dots, Q_M) | Q_j > 0, j = 1, \dots, M\}$$

In particolare esistono delle misure $Q^{(1)}, \dots, Q^{(r)} \in \overline{\mathbb{R}_+^M}$ tale che ogni misura martingala Q può essere espressa come combinazione lineare del tipo

$$Q = a_1 Q^{(1)} + \dots + a_r Q^{(r)}$$

in cui la somma dei pesi a_i è pari a 1. Quindi vale

$$V_v = \{V|E^{Q^{(j)}}[B_N^{-1}V] = v, \text{ per } j=1, \dots, r\}$$

Individuate le misure estremali $Q^{(1)}, \dots, Q^{(r)}$, per risolvere il problema 2. della determinazione del valore finale raggiungibile ottimale \bar{V} a partire dal capitale iniziale $v \in I$, utilizzerò il seguente:

Teorema 2.2.2. *Se vale la condizione*

$$u'(I) = \mathbb{R}_+$$

il valore finale ottimale è pari a

$$\tilde{V}_N = \mathcal{I} \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \tilde{L}^{(j)} \right)$$

dove $\tilde{L}^{(j)} = B_N^{-1} L^{(j)}$ con $L^{(j)} = \frac{dQ^{(j)}}{dP}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sono determinati dal sistema di equazioni di budget.

$$E^P \left[\mathcal{I} \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k \tilde{L}^{(k)} \right) \tilde{L}^{(j)} \right] = v, \quad j = 1, \dots, r.$$

Dimostrazione. Analoga alla dimostrazione del Teorema (2.2.1) □

Osservazione: La risoluzione del problema della massimizzazione dell'utilità attesa della ricchezza finale col metodo martingala richiede la determinazione delle misure martingala estremali.

Se N è grande le difficoltà pratiche sono notevoli.

2.2.3 Mercato completo: consumo intermedio

In questa sezione mi occuperò del problema di massimizzazione dell'utilità attesa da consumo intermedio,

$$\max_{a, C} E \left[\sum_{n=0}^N u_n(C_n) \right] \tag{2.14}$$

u_0, \dots, u_N sono funzioni d'utilità definite sull'intervallo I . Nel seguito si considererà il caso $I = \mathbb{R}_+$, ossia $a = 0$.

Poichè il massimo è ricercato sull'insieme delle strategie con consumo ammissibili, la strategia ottimale è quando all'istante finale tutto il capitale viene consumato.

Il metodo martingala è formato dai passi:

32 2. Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica

- determinare l'insieme dei processi di consumo "raggiungibili"

$$C_v = \{C \text{ proc. di consumo} | C_N = V_N^{(\alpha, C)} \text{ con } \alpha \text{ predicibile, } V_0^{(\alpha, C)} = v\}$$

In un mercato libero da arbitraggi, la misura martingala Q esiste ed è unica. Abbiamo dunque la caratterizzazione della famiglia C_v :

$$C_v = \left\{ C \text{ proc. di consumo} \mid E^Q \left[\sum_{n=0}^N B_n^{-1} C_n \right] = v \right\}$$

- determinare il processo di consumo raggiungibile ottimale \bar{C} che raggiunge il massimo in (2.14). Tale problema è risolto dal

Teorema 2.2.3. *In un mercato completo e libero da arbitraggi si consideri il problema di massimizzazione dell'utilità attesa da consumo intermedio (2.14) a partire dal capitale iniziale $v \in \mathbb{R}_+$. Se vale la condizione*

$$u'_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+ \quad n = 0, \dots, N$$

allora il processo di consumo ottimale è dato da

$$\bar{C}_n = \mathcal{I}_n(\lambda \tilde{L}_n), \quad n = 0, \dots, N,$$

dove $\mathcal{I}_n = (u'_n)^{-1}$ e $\tilde{L}_n = B_n^{-1} L_n$ con $L_n = E^P \left[\frac{dQ}{dP} \mid F_n \right]$, essendo Q la misura martingala. Inoltre $\lambda \in \mathbb{R}$ è determinato dall'equazione di budget:

$$E^P \left[\sum_{n=0}^N \tilde{L}_n \mathcal{I}_n(\lambda \tilde{L}_n) \right] = v$$

- determinare la strategia autofinanziante con consumo raggiungibile ottimale relativa a \bar{C} .

La strategia ottimale α si può esprimere come somma

$$\alpha = \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(N)}$$

dove $\alpha^{(k)}$ è la strategia autofinanziante (senza consumo), definita sul periodo $[0, k]$ che replica \bar{C}_k . Dunque α si può determinare risolvendo

gli N problemi di replicazione relativi ai payoff C_1, \dots, C_N .

Per fini pratici è preferibile utilizzare l’algoritmo:

- fissato $v > 0$, determinare (α_N, β_N) imponendo la condizione di replicazione

$$\alpha_N S_N + \beta_N B_N = \tilde{V}_N = \bar{C}_N$$

che conduce a un sistema di equazioni lineari;

- al generico passo n , avendo calcolato \tilde{V}_n possiamo determinare (α_n, β_n) imponendo

$$\alpha_n S_n + \beta_n B_n = \tilde{V}_n ;$$

- per determinare \tilde{V}_n che rappresenta il valore in n di un portafoglio autofinanziante corrispondente al consumo dato dai \bar{C}_n abbiamo la relazione ricorsiva:

$$\tilde{V}_n = \frac{1}{1+r} E^Q \{ \tilde{V}_{n+1} | F_n \} + \bar{C}_n$$

Osservazione: La differenza tra il problema del consumo intermedio in un mercato completo ed in uno incompleto con r misure martingala estreme sta che in quello incompleto

$$\bar{C}_n = \mathcal{I}_n \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k \tilde{L}_n^{(j)} \right)$$

dove, per determinare i moltiplicatori di lagrange, si hanno r equazioni di budget, anzichè 1.

2.2.4 Mercato completo: consumo intermedio e ricchezza finale

Mi occuperò del problema della massimizzazione dell’utilità attesa da consumo intermedio e ricchezza finale

$$\max_{\alpha, C} E \left[\sum_{n=0}^N u_n(C_n) + u \left(V_N^{(\alpha, C)} - C_N \right) \right] \quad (2.15)$$

34 2. Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica

u, u_0, \dots, u_N sono funzioni d'utilità definite su \mathbb{R}_+ .

Il metodo martingala consiste nei seguenti passi:

1) Determinare l'insieme dei valori finali e processi di consumo raggiungibili

$$W_v = \{(V, C) \mid C \text{ proc di consumo}, C_N \leq V = V_N^{(\alpha, C)} \text{ con } \alpha \text{ predic}, V_0^{(\alpha, C)} = v\}$$

Questo risultato si prova con il

Lemma 2.2.1. *Vale:*

$$W_v = \left\{ (V, C) \mid C \text{ proc di consumo t.c. } C_N \leq V \text{ e } E^Q \left[B_N^{-1}V + \sum_{n=0}^{N-1} B_n^{-1}C_n \right] = v \right\}$$

2) determinare il valore finale e il processo di consumo raggiungibili e ottimali (\bar{V}, \bar{C}) che realizzano il massimo in (2.15).

Che si risolve con il

Teorema 2.2.4. *In un mercato completo e libero da arbitraggi si consideri il problema di massimizzazione dell'utilità attesa da consumo intermedio e ricchezza finale (2.15) a partire dal capitale iniziale $v \in \mathbb{R}_+$. Se vale la condizione*

$$u'(\mathbb{R}_+) = u'_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+, \quad n = 0, \dots, N,$$

allora il processo di consumo ottimale è dato da

$$\bar{C}_n = \mathcal{I}_n(\lambda \tilde{L}_n), \quad n = 0, \dots, N,$$

dove $\mathcal{I}_n = (u'_n)^{-1}$ e $\tilde{L}_n = B_n^{-1}L_n$ con $L_n = \left[\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_n \right]$ essendo Q la misura martingala e il valore finale ottimale è pari a

$$\tilde{V}_N = \mathcal{I}_N(\lambda \tilde{L}_N) + \mathcal{I}(\lambda \tilde{L}_N)$$

dove $\mathcal{I} = (u')^{-1}$. Inoltre $\lambda \in \mathbb{R}$ è determinato dalle equazione di budget

$$E^P \left[\tilde{L}_N \mathcal{I}(\lambda \tilde{L}_N) + \sum_{n=0}^N \tilde{L}_n \mathcal{I}_n(\lambda \tilde{L}_n) \right] = v \quad (2.16)$$

3) determinare la strategia autofinanziante con consumo relativa a (\bar{V}, \bar{C})

2.3 Metodo della programmazione dinamica

2.3.1 Algoritmo ricorsivo

In uno spazio di probabilità finito (Ω, F, P) considero un processo stocastico $(V_n)_{n=0, \dots, N}$. V può essere il valore di un portafoglio, la cui evoluzione dipende dalla scelta di un processo di controllo, una strategia di investimento o processo di consumo. Assumo valga la relazione ricorsiva

$$V_k = G_k(V_{k-1}, \mu_k; \eta_{k-1}(V_{k-1})), \quad \text{per } k = 1, \dots, N \quad (2.17)$$

dove

- μ_1, \dots, μ_N sono v.a. d -dimensionali indipendenti, rappresentano i fattori di rischio che guidano la dinamica dei titoli di un mercato discreto;
- η_0, \dots, η_N sono generiche funzioni

$$\eta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\ell, \quad k = 0, \dots, N$$

con $\ell \in \mathbb{N}$ dette funzioni di controllo o controlli;

- G_1, \dots, G_N sono generiche funzioni

$$G_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, N$$

Fissati $v \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \{0, \dots, N-1\}$, indico con

$$(V_k^{n,v})_{k=n, \dots, N} \quad (2.18)$$

il processo definito da $V_n^{n,v} = v$ e ricorsivamente da (2.17) per $k > n$. Inoltre pongo

$$U^{n,v}(\eta_n, \dots, \eta_N) = E \left[\sum_{k=n}^N u_k(V_k^{n,v}, \eta_k(V_k^{n,v})) \right]$$

dove u_0, \dots, u_N sono funzioni assegnate

$$u_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}, \quad n = 0, \dots, N$$

36 2. Metodo Martingala e Metodo della Programmazione Dinamica

Sono interessata al problema di ottimizzazione che consiste nel determinare l'estremo superiore di $U^{0,v}(\eta_0, \dots, \eta_N)$ al variare dei controlli η_0, \dots, η_N , ossia

$$\sup_{\eta_0, \dots, \eta_N} U^{0,v}(\eta_0, \dots, \eta_N)$$

Inoltre è interessante determinare i controlli ottimali che realizzano l'estremo superiore.

Il metodo di programmazione dinamica di ottimizzazione è basato sull'idea che *se un controllo è ottimale su un'intera successione di periodi, allora deve essere ottimale su ogni singolo periodo.*

Il metodo di Programmazione Dinamica è basato sul seguente risultato:

Teorema 2.3.1. *Per ogni $n = 0, \dots, N$ vale*

$$\sup_{\eta_n, \dots, \eta_N} U^{n,v}(\eta_n, \dots, \eta_N) = W_n(v) \quad (2.19)$$

dove W_n è definito ricorsivamente da

$$\begin{cases} W_N(v) = \sup_{\mu_N \in \mathbb{R}^\ell} u_N(v, \mu_N) & \text{per } n = N, \dots, 1 \\ W_{n-1}(v) = \sup_{\mu_{n-1} \in \mathbb{R}^\ell} \left(u_{n-1}(v, \mu_{n-1}) + E \left[W_n(G_n(v, \mu_{n-1}; \cdot)) \right] \right) \end{cases} \quad (2.20)$$

Il sistema (2.20) fornisce un algoritmo ricorsivo in cui ad ogni passo si effettua un'usuale ottimizzazione di una funzione di variabili reali. Sotto opportune ipotesi che garantiscano che l'estremo superiore in (2.19) è raggiunto, l'algoritmo permette di determinare i controlli ottimi $\bar{\eta}_0, \dots, \bar{\eta}_N$. Infatti essi risultano definiti dai punti di massimo delle funzioni da ottimizzare in (2.20). *In definitiva il metodo di Programmazione Dinamica fornisce un algoritmo deterministico in cui ad ogni passo si determinano il valore e il controllo ottimi mediante un'usuale operazione di massimizzazione scalare.* Per dimostrare il Teorema (2.3.1) utilizzo il seguente:

Lemma 2.3.1. *Siano X, Y variabili aleatorie reali indipendenti sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) e sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile e limitata. Posto*

$$f(x) = E[g(x, Y)], \quad x \in \mathbb{R}$$

vale

$$E[f(X)] = E[g(X, Y)]$$

Dimostrazione. (del Teorema (2.3.1))

Dimostro la tesi per induzione. Per $n=N$ si ha

$$\begin{aligned} W_n(v) &= \sup_{\in \mathbb{R}^\ell} u_N(v, \cdot) = \sup_{\eta_N} u_N(v, \eta_N(v)) \\ &= \sup_{\eta_N} E[u_N(v, \eta_N(v))] = \sup_{\eta_N} U^{N,v}(\eta_N) \end{aligned}$$

Assumendo ora valida la (2.19) per n , provo la tesi per $n-1$:

$$\begin{aligned} W_{n-1}(v) &= \sup_{\in \mathbb{R}^\ell} E \left[u_{n-1}(v, \cdot) + W_n(G_n(v, \mu_n; \cdot)) \right] \\ &= \sup_{\eta_{n-1}} E \left[u_{n-1}(v, \eta_{n-1}(v)) + W_n(G_n(v, \mu_n; \eta_{n-1}(v))) \right] \\ &\quad \text{(per ipotesi iduttiva)} \\ &= \sup_{\eta_{n-1}} E \left[u_{n-1}(v, \eta_{n-1}(v)) + \sup_{\eta_n, \dots, \eta_N} U^{n, G_n(v, \mu_n; \eta_{n-1}(v))}(\eta_n, \dots, \eta_N) \right] \\ &= \sup_{\eta_{n-1}} E \left[u_{n-1}(v, \eta_{n-1}(v)) + U^{n, G_n(v, \mu_n; \eta_{n-1}(v))}(\eta_n, \dots, \eta_N) \right] \\ &\quad \text{(per il lemma precedente)} \\ &= \sup_{\eta_{n-1}} E \left[u_{n-1}(v, \eta_{n-1}(v)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n}^N u_k \left(V_k^{n, G_n(v, \mu_n; \eta_{n-1}(v))}, \eta_k(V_k^{n, G_n(v, \mu_n; \eta_{n-1}(v))}) \right) \right] \\ &= \sup_{\eta_{n-1}, \dots, \eta_N} E \left[\sum_{k=n-1}^N u_k(V_k^{n-1, v}, \eta_k(V_k^{n-1, v})) \right] \\ &= \sup_{\eta_{n-1}, \dots, \eta_N} U^{n-1, v}(\eta_{n-1}, \dots, \eta_N) \end{aligned}$$

e questo conclude la prova. □

Capitolo 3

Utilità esponenziale

In questo capitolo dimostrerò i risultati esposti nel capitolo precedente partendo dalla funzione d'utilità esponenziale.

Ambienterò il problema nel modello binomiale, quindi utilizzando il metodo Martingala e il metodo della Programmazione Dinamica calcolo l'utilità finale e il consumo intermedio.

3.1 Utilità finale nel modello binomiale con il metodo martingala

Utilizzo il metodo martingala per risolvere il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale nel caso dell'utilità esponenziale in un modello binomiale. Preso $u(v) = -e^{-v}$, trovo che $\mathcal{I}(w) = -\log w$.

Inoltre per il teorema (2.2.1)

$$\bar{V}_N = -\log(\lambda \tilde{L}).$$

Dove $\tilde{L} = B_N^{-1}L$, essendo in un modello binomiale $B_N = (1+r)^N$, da cui $\tilde{L} = (1+r)^{-N} \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu_N} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-\nu_N}$.

Posso calcolare L tramite le derivate di Radon-Nikodym di Q rispetto a P, quindi:

$$L = \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu_N} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-\nu_N}$$

Ottingo allora:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= -\log \lambda \tilde{L} = -\log \left(\lambda \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu_N} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-\nu_N} (1+r)^{-N} \right) \\ &= \log \left(\frac{(1+r)^N}{\lambda} \right) - \nu_N \log \left(\frac{q}{p} \right) - (N - \nu_N) \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right) \end{aligned}$$

Inoltre λ è determinato da (2.12):

$$\begin{aligned} v &= E[\mathcal{I}(\lambda \tilde{L}) \tilde{L}] = E[-\tilde{L} \log(\lambda \tilde{L})] \\ &= E[-\tilde{L} \log \lambda] + E[-\tilde{L} \log \tilde{L}] = \log \lambda E[-\tilde{L}] + E[-\tilde{L} \log \tilde{L}] \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log \lambda E[-\tilde{L}] &= v + E[\tilde{L} \log \tilde{L}] \Rightarrow \log \lambda = -\frac{v + E[\tilde{L} \log \tilde{L}]}{E[\tilde{L}]} \\ \Rightarrow \lambda &= e^{-\frac{v + E[\tilde{L} \log \tilde{L}]}{E[\tilde{L}]}} \end{aligned}$$

Il valore ottimale dell'utilità attesa è

$$\begin{aligned} E[u(\bar{V})] &= E[-e^{-\bar{V}}] = E[-e^{\log(\lambda \tilde{L})}] = E[-\lambda \tilde{L}_N] = -\lambda E[\tilde{L}_N] \\ &= -\lambda E\left[L \frac{1}{(1+r)^N}\right] = -\lambda E\left[\frac{1}{(1+r)^N}\right] E[L] = -\lambda \frac{1}{(1+r)^N} \end{aligned}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} E[L] &= E\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\nu_N} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-\nu_N}\right] \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \left(\frac{q}{p}\right)^k \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-k} = 1 \end{aligned}$$

Ora determino la strategia ottimale come strategia di copertura del derivato \bar{V}_N . Impongo la condizione di replicazione per l'ultimo periodo

$$\alpha_N S_N + \beta_N B_N = \bar{V}_N$$

3.1 Utilità finale nel modello binomiale con il metodo martingala 41

supposto $S_{N-1} = S_0 u^k d^{N-1-k}$, allora:

$$\begin{cases} \alpha_N u S_{N-1} + \beta_N B_N = \log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - (k+1) \log \left(\frac{q}{p} \right) - (N-k-1) \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right), \\ \alpha_N d S_{N-1} + \beta_N B_N = \log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - k \log \left(\frac{q}{p} \right) - (N-k) \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right). \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \frac{\log \left(\frac{q}{p} \right) \left(\frac{1-q}{1-p} \right)}{(u-d) S_{N-1}} \\ \beta_N &= \frac{\log \left(\frac{q}{p} \right)^{k+\frac{d}{u-d}} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{(N-k)+\frac{d}{u-d}} \frac{\lambda}{(1+r)^N}}{B_N} \end{aligned}$$

Per calcolare la strategia nel periodo n -esimo occorre determinare \bar{V}_n , posto

$$L_n := E[L | \mathcal{F}_n] = \left(\frac{q}{p} \right)^{\nu_n} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{n-\nu_n}$$

Quindi vale

$$\begin{aligned} \bar{V}_n &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E[\bar{V}_N | \mathcal{F}_n] = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E \left[-\log \frac{\lambda L}{(1+r)^N} \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E \left[\log \frac{(1+r)^N}{\lambda L} \right] = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E \left[\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - \log L \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \left(E \left[\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} \right] - E[\log L] \right) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - E[\log L] \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - E \left[\log \left(\frac{q}{p} \right)^{\nu_n} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{n-\nu_n} \right] \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - E[\nu_n] \log \left(\frac{q}{p} \right) + (n - E[\nu_n]) \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - np \log \left(\frac{q}{p} \right) + n(1-p) \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right) \right) \end{aligned}$$

Applico quindi la condizione di replicazione

$$\alpha_n S_n + \beta_n B_n = \bar{V}_n$$

che, posto la variabile aleatoria che conta il numero di crescite $\nu_{n-1} = k$, equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha_n u S_{n-1} + \beta_n B_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - \log \left(\frac{q}{p} \right)^{(k+1)} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{(N-k-1)} \right) \\ \alpha_n d S_{n-1} + \beta_n B_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} - \log \left(\frac{q}{p} \right)^k - \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{(N-k)} \right) \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$\alpha_n = \frac{\log \left(\frac{p}{q} \right) \left(\frac{1-q}{1-p} \right)}{S_{n-1} (u-d) (1+r)^{N-n}}$$

$$\beta_n = \frac{1}{(1+r)^N} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} \left(\frac{q}{p} \right)^{\left(\frac{d}{u-d} - k \right)} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{\left(k - N - \frac{d}{u-d} \right)} \right)$$

La proporzione investita nel titolo rischioso è data da:

$$\pi_n = \frac{\alpha S_{n-1}}{\bar{V}_{n-1}} = \frac{\log \left(\frac{p}{q} \right) \left(\frac{1-q}{1-p} \right)}{\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} \left(\frac{q}{p} \right)^{-\nu_n} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{N-\nu_n} (1+r)^{N-n}}$$

3.2 Consumo intermedio nel modello binomiale con il metodo martingala

Utilizzo il metodo martingala per risolvere il problema della massimizzazione dell'utilità attesa da consumo intermedio nel caso dell'utilità esponenziale in un modello binomiale. Per il teorema (2.3.1) il processo di consumo ottimale è dato da

$$\bar{C}_n = \mathcal{I}_n(\lambda \tilde{L}_n) = -\log(\lambda \tilde{L}_n). \quad (3.1)$$

Intanto so che

$$\tilde{L}_n = \frac{L_n}{(1+r)^n},$$

dove

$$L_n = \left(\frac{q}{p} \right)^{\nu_n} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{n-\nu_n}.$$

Da cui ricavo

$$\begin{aligned}\bar{C}_n &= \log \frac{(1+r)^n}{\lambda} - \nu_n \log \left(\frac{q}{p} \right) - (n - \nu_n) \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right) \\ &= \log \frac{(1+r)^n}{\lambda} - np \log \left(\frac{q}{p} \right) - n(1-p) \log \left(\frac{1-q}{1-p} \right)\end{aligned}$$

Ora calcolo il valore ottimale dell'utilità attesa:

$$\begin{aligned}E \left[\sum_{n=0}^N u(C_n) \right] &= E \left[\sum_{n=0}^N -e^{-C_n} \right] = E \left[\sum_{n=0}^N -e^{\log(\lambda \tilde{L}_n)} \right] = E \left[\sum_{n=0}^N -\lambda \tilde{L}_n \right] \\ &= E \left[-\lambda \sum_{n=0}^N \frac{1}{(1+r)^n} L_n \right] = -\lambda \sum_{n=0}^N E \left[\frac{1}{(1+r)^n} L_n \right] \\ &= -\lambda \sum_{n=0}^N E \left[\frac{1}{(1+r)^n} \right] E[L_n] = -\lambda \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{(1+r)^n} \right) = -\lambda \frac{(r+1)^{N+1} - 1}{r(r+1)^N}\end{aligned}$$

Infatti:

$$\begin{aligned}E[L_n] &= E \left[\left(\frac{q}{p} \right)^{\nu_n} \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{n-\nu_n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{q}{p} \right)^k \left(\frac{1-q}{1-p} \right)^{n-k} = 1\end{aligned}$$

L'ultimo passo consiste nel determinare la strategia di investimento ottimale. Impongo la condizione di replicazione per l'ultimo periodo

$$\alpha_N S_N + \beta_N B_N = \bar{C}_N$$

equivalente al sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha_N u S_{N-1} + \beta_N B_N = \log \left(\frac{(1+r)^N}{\lambda} \right) + (\nu_{N-1} + 1) \log \left(\frac{p}{q} \right) \\ \quad \quad \quad + (N - 1 - \nu_{N-1}) \log \left(\frac{1-p}{1-q} \right) \\ \alpha_N d S_{N-1} + \beta_N B_N = \log \left(\frac{(1+r)^N}{\lambda} \right) + (\nu_{N-1}) \log \left(\frac{p}{q} \right) + (N - \nu_{N-1}) \log \left(\frac{1-p}{1-q} \right) \end{cases}$$

Da cui si ricava

$$\begin{aligned}\alpha_N &= \frac{\log \left(\frac{p}{q} \right) \left(\frac{1-q}{1-p} \right)}{(u-d)S_{N-1}} \\ \beta_N &= \frac{1}{(1+r)^N} \left(\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} \left(\frac{q}{p} \right)^{k+\frac{d}{u-d}} \left(\frac{1-q}{p} \right)^{N-k-\frac{d}{u-d}} \right)\end{aligned}$$

Nel generico periodo n impongo la condizione di replicazione:

$$\alpha_n S_n + \beta_n B_n = \bar{V}_n$$

Devo quindi ricavare \bar{V}_n utilizzando la formula

$$\begin{aligned} \bar{V}_n &= \frac{1}{(1+r)^n} E[V_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \bar{C}_n \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} \left(\log\left(\frac{1+r}{\lambda}\right) + ((1+r)^n + 1) \bar{C}_n \right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} \left(\log\left(\frac{1+r}{\lambda}\right) + ((1+r)^n + 1) \left(n \log\left(\frac{(1+r)^n}{\lambda}\right) - np \log\left(\frac{q}{p}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n(1-p) \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

che equivale al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n u S_{n-1} + \beta_n B_n = \frac{1}{(1+r)^n} \left(\log\left(\frac{1+r}{\lambda}\right) + ((1+r)^n + 1) \left(n \log\left(\frac{(1+r)^n}{\lambda}\right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - (k+1) \log\left(\frac{q}{p}\right) - (N-1-k) \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right) \right) \\ \alpha_n d S_{n-1} + \beta_n B_n = \frac{1}{(1+r)^n} \left(\log\left(\frac{1+r}{\lambda}\right) + ((1+r)^n + 1) \left(n \log\left(\frac{(1+r)^n}{\lambda}\right) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - k \log\left(\frac{q}{p}\right) - (N-k) \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right) \right) \end{array} \right.$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{((1+r)^n + 1)}{(u-d)S_{n-1}(1+r)^n} \left(\log\left(\frac{q}{p}\right) \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right) \\ \beta_n &= \left(\frac{1}{(1+r)^n} \left(\log\left(\frac{1+r}{\lambda}\right) + ((1+r)^n + 1) \left(n \log\left(\frac{(1+r)^n}{\lambda}\right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k \log\left(\frac{q}{p}\right) - (N-k) \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right) \right) \\ &\quad \left. - \frac{d}{u-d} \frac{((1+r)^n + 1)}{(1+r)^n} \left(\log\left(\frac{q}{p}\right) \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right) \right) (1+r)^{-n} \end{aligned}$$

La proporzione investita nel titolo rischioso è pari a

$$\pi_n = \frac{\alpha_n S_{n-1}}{\bar{V}_{n-1}} = \frac{\left((1+r)^n + 1 \right)}{u-d} \left(\log\left(\frac{q}{p}\right) \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right) \left(\log\left(\frac{1+r}{\lambda}\right) + \left((1+r)^n + 1 \right) \bar{C}_n \right)$$

3.3 Utilità finale nel modello binomiale con il metodo della Programmazione Dinamica

Ora risolvo il problema della massimizzazione dell'utilità attesa della ricchezza finale nel caso dell'utilità esponenziale in un modello binomiale a N periodi, con tassi di crescita u , di decrescita d e tasso privo di rischio r utilizzando il metodo della Programmazione Dinamica. Indico con p la probabilità di crescita.

La dinamica del valore del portafoglio è data da

$$V_n = G(V_{n-1}, \mu_n; \pi_n) = \begin{cases} V_{n-1}(1+r + \pi_n(u-1-r)) & \mu_n = u-1 \\ V_{n-1}(1+r + \pi_n(d-1-r)) & \mu_n = d-1 \end{cases}$$

dove π (che indica la proporzione di titolo rischioso nel portafoglio) costituisce il processo di controllo. A partire da $V_{n-1} > 0$ si ha che

$$V_n > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+r + \pi_n(u-1-r) > 0 \\ 1+r + \pi_n(d-1-r) > 0 \end{cases}$$

In base all'algoritmo:

$$\begin{cases} W_N(v) = u(v) \\ W_{n-1} = \sup_{\bar{\pi}_n} E[W_n(G_n(v, \mu_n; \bar{\pi}_n))] \end{cases}$$

per $v > 0$ vale

$$W_N(v) = -e^{-v} \\ W_{N-1}(v) = \max_{\bar{\pi}_N \in D} E[-e^{G_N(v, \mu_N; \bar{\pi}_N)}] = \max_D f$$

dove

$$f(\pi) = -pe^{(1+r+\pi(u-1-r))} - (1-p)e^{(1+r+\pi(d-1-r))}$$

Sia $\bar{\pi}$ il punto di massimo globale per f e definisce la strategia ottimale $\pi_N^{max}(v) \equiv \bar{\pi}, v \in \mathbb{R}_+$.

Al passo successivo si ha

$$W_{N-2}(v) = \max_{\bar{\pi}_{N-1} \in D} E[-e^{-G_{N-1}(v, \mu_{N-1}; \bar{\pi}_{N-1})}] + \max_D f = 2f(\bar{\pi})$$

e una formula analoga vale al generico passo n , ossia

$$W_{N-n}(v) = nf(\bar{\pi}).$$

In definitiva il valore ottimale dell'utilità attesa a partire da un capitale iniziale $v > 0$ è uguale a

$$W_0(v) = Nf(\bar{\pi})$$

e la corrispondente strategia ottimale è pari a $\pi_n^{max}(v) = \bar{\pi}, v \in \mathbb{R}_+, n = 1, \dots, N$.

3.4 Consumo intermedio nel modello binomiale con il metodo della Programmazione Dinamica

Considero il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dal consumo intermedio nel caso dell'utilità esponenziale in un modello binomiale a N periodi, con tassi di crescita u , di decrescita d , tasso privo di rischio r e con probabilità p di crescita.

La dinamica del valore del portafoglio è data da

$$\begin{aligned} V_n &= G_n(V_{n-1}, \mu_n; C_{n-1}) \\ &= (V_{n-1} - C_{n-1})(1+r) + V_{n-1}\pi_n(\mu_n - r) \\ &= (V_{n-1} - C_{n-1})(1+r) + \begin{cases} V_{n-1}\pi_n(u-1-r) \\ V_{n-1}\pi_n(d-1-r) \end{cases} \end{aligned}$$

dove π indica la proporzione di titolo rischioso nel portafoglio e C è il processo di consumo. Scegliendo le funzioni di utilità

$$u_n(C) = -e^{-c} \text{ per } n = 0, \dots, N \text{ e } u(C) \equiv 0$$

in base all'algoritmo di Programmazione Dinamica:

$$\begin{cases} W_N = \sup_{\bar{C}_N \leq v} (u_N(\bar{C}_N) + u(v - \bar{C}_N)) \\ W_{n-1} = \sup_{\bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}} (u_{n-1}(\bar{C}_{n-1}) + E[W_n(G_n(v, \mu_n; \bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}))]) \end{cases}$$

Posso così ricavare

$$\begin{aligned} W_N(v) &= \max_{\bar{C}_N \leq v} u_N(\bar{C}_N) = -e^{-v} \\ W_{n-1}(v) &= \max_{\bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}} (-e^{-\bar{C}_{n-1}} + E[W_n(G_n(v, \mu_n; \bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}))]) \\ &= \max_{\bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}} f_{n,v}(\bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}) \end{aligned}$$

dove

$$f_{n,v}(\pi, C) = pW_n((v - C)(1 + r) + \pi v(u - 1 - r)) + (1 - p)W_n((v - C)(1 + r) + \pi v(d - 1 - r)).$$

Supponendo che $f_{n,v}$ ammetta massimo globale nel punto $(\bar{\pi}_{n,v}, \bar{C}_{n-1,v})$, questo definisce la strategia ottimale:

$$\pi_n^{max}(v) = \bar{\pi}_{n,v}, \quad C_{n-1}^{max}(v) = \bar{C}_{n-1,v}, \quad v \in \mathbb{R}_+, n = 1, \dots, N.$$

Bibliografia

- [1] A. Pascucci, W. J. Runggaldier, 'Finanza Matematica', Springer-Verlag, Milano, 2009;
- [2] A. Pascucci, 'Calcolo stocastico per la finanza', Springer-Verlag, Milano, 2007;
- [3] E. Rosazza Gianin, C. Sgarra, 'Esercizi di finanza matematica', Springer-Verlag, Milano, 2007.