Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Metodi di calcolo numerico per la valutazione degli investimenti

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Degli Esposti Mirko

Co-Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ritelli Daniele

Presentata da:
Falchi Lora Marina

III
2008/2009

Metodi di calcolo numerico per la valutazione degli investimenti

Lora Marina Falchi

Ai miei figli
Alessandro, Andrea e Oscar
e a tutti coloro che hanno creduto in me

*L*o spirito
in ognuno di noi
si manifesta negli occhi,
nell'espressione e in tutti i
movimenti e i gesti del corpo.
Il nostro aspetto, le nostre parole,
le nostre azioni non sono mai
più grandi di noi stessi.
Giacché è l'anima
la nostra dimora,
gli occhi
ne sono
le finestre
e
le parole
i messaggeri.
(Kahlil Gibran)

Ringraziamenti

Osservando da un datario il tempo intercorso dall'immatricolazione alla laurea, mi rendo conto che un ringraziamento particolare è da riservare alla persone che da sempre mi hanno insegnato, e spronato, ad andare avanti, indipendentemente dagli eventi, traendo un beneficio da quelli positivi, e una lezione di vita da quelli negativi: grazie mamma per aver sempre creduto in me; grazie papà per aver sempre compreso da un semplice sguardo, o un gesto distratto, le difficoltà che ho incontrato nel voler affrontare, da sola, imprese azzardate e oltre le mie capacità. Vi amo.
Non posso esimermi dal ringraziare le mie sorelle, Catia e Antonella, la mie 'sister's', preziose come il sole per il sole per un fiore, sempre presenti nella mia vita, anche nelle mie prolungate assenze, accompagnando ogni lacrima con una carezza e condividendo ogni gioia con il sorriso. Vi voglio un mondo di bene.
E poi, non in ordine di importanza, voglio ringraziare mio marito, uomo soprendentemente straordinario nella sua semplicià che ha avuto il coraggio e la forza di sopportare ogni mio sbalzo di umore, soprattutto in questo ultimo perido di 'pressing-tesi', e ,ad oggi, amare ogni difetto con la stessa intensità riservata ai pregi, contrapponendo ad ogni capriccio un sorriso. Un uomo con il quale spero di percorrere il lungo cammina della vita e condividere le sorti di una bizzarra vecchiaia e una splendita realtà, i nostri figli Alessandro, Andrea, e Oscar, i miei piccoli teremoti.

Introduzione

Nei primi secoli della sua vita, la Matematica Finanziaria fu considerata solamente come un'aritmetica commerciale, e quindi le sue tappe salienti vanno rintracciate nella storia dell'aritmetica.
Successivamente il progresso della scienza economica e della tecnica bancaria, unitamente all'introduzione di nuovi strumenti matematici, hanno consentito di assegnarle un ruolo specifico, ossia l'analisi degli aspetti matematici delle operazioni finanziarie, intese come operazioni di credito.
Già gli antichi Babilonesi risolvevano problemi finanziari che implicavano il calcolo dell'interesse composto: se ne trova un esempio in una tavola del 1700 a.C., conservata presso la collezione del Louvre (problema babilonese del 1700 a.C.).
Nel corso dei secoli successivi non ci furono evoluzioni matematiche significative e i problemi finanziari venivano risolti per approssimazione a causa della grossolanità degli strumenti aritmetici allora conosciuti. Occorre anche considerare che i sistemi di numerazione in uso per molti secoli in Occidente, ossia il greco e il romano, non permettevano l'applicazione di algoritmi per la risoluzione effettiva dei problemi.
Ci fu quindi un continuo sviluppo dell'aritmetica commerciale fino a che le banche, che si andavano via via ingrandendo, si accorsero della necessità di avere delle tavole numeriche per il calcolo dell'interesse composto (le prime furono quelle di Balducci-Pegolotti, del 1350 circa), tavole che però ciascuna banca custodiva gelosamente come 'segreti dell'arte', rallentandone così la diffusione. Tale segretezza, unitamente alla mancanza dei logaritmi e alla tendenza ad ignorare nelle nazioni protestanti gli studi dei cattolici e viceversa, fecero sì che solo pochi esperti erano in grado di risolvere i problemi legati al calcolo dell'interesse composto, generalmente applicati ai prestiti. Si ricordino inoltre le questioni legate all'usura (i prestiti che richiedevano il pagamento di un interesse per molto tempo vennero considerati peccato), che di certo non facilitarono la divulgazione del calcolo dell'interesse.
Nel 1478 venne pubblicato il primo libro di matematica stampato: *Larte de labbacho*, comunemente conosciuto come l'Aritmetica di Treviso, di autore ignoto. È un manuale ad impostazione didattica dedicato 'a ciascheduno che vuole usare larte de la merchandantia chiamata volgarmente larte de labbacho'. In esso la presentazione delle operazioni aritmetiche può essere considerata un'introduzione al problem solving commerciale (Swetz, 1987).
Nel 1482 anche Piero Della Francesca, sommo pittore, pubblicò un trattato d'abaco, in cui sono presenti numerosi problemi commerciali risolti per

mezzo della geometria e dell'algebra, impostando equazioni di IV grado ed in alcuni casi persino di VI grado.
Nel 1494 Luca Pacioli pubblicò *la Summa de Aritmetica Proporzioni et Proporzionalit*à, un'opera che tratta di aritmetica, algebra e contabilità, con una parte dedicata alla matematica finanziaria, in cui fu presentato il metodo della partita doppia.
Nello stesso periodo alcuni matematici contribuirono alla risoluzione di problemi particolari, che riguardavano per esempio il calcolo di tassi effettivi in contrapposizione a quelli nominali.
Le prime tavole dell'interesse composto rese pubbliche in Europa furono quelle costruite da Trenchant a Lione nel 1558 per la risoluzione di un problema per Re Enrico.
All'inizio del $XVII$ secolo ci fu l'invenzione dei logaritmi ad opera di Napier, grazie a cui vennero costruite tavole per il calcolo dei montanti di capitali in regime di capitalizzazione composta; pochi anni dopo Burgi pubblicò le *Tavole delle progressioni aritmetiche e geometriche*, che rendevano i calcoli più semplici attraverso l'uso della moltiplicazione logaritmica. Queste tavole, oltre ad essere utili per i calcoli astronomici, semplificavano l'utilizzo delle tavole dell'interesse composto costruite da Stevin.
Nello stesso periodo si ebbe l'introduzione della geometria cartesiana che, unitamente all'invenzione dei logaritmi, aprì la strada a nuove metodologie di calcolo per la matematica finanziaria
Nella storia l'economia, punto fondamentale della vita sociale di un paese, ha avuto dalla matematica un valido aiuto per la soluzione di problemi sia a livello microeconomico sia di carattere macroeconomico. Per tale ragione la Matematica Finanziaria oggi si può considerare la parte della matematica che ha maggior impatto con la realtà.
Paradossalmente, però, la Matematica Finanziaria non trova largo spazio all'interno del palcoscenico matematico, che privilegia argomentazioni più astratte e di carattere pratico apparentemente minore; forse perché la formazione matematica è mirata alla conoscenza di argomenti di carattere algebrico o geometrico o forse perché la Matematica Finanziaria risolve problemi tecnici dando una maggiore attenzione al risultato a scapito del metodo risolutivo.
La matematica finanziaria si occupa di quelle operazioni di scambio che hanno per oggetto soltanto importi di denaro, e che pertanto si chiamano finanziarie. [B. DeFinetti, Lezioni di Matematica Finanziaria, Roma, Edizioni Ricerche, 1968.]
Facendo un riscontro con la realtà, la Matematica Finanziaria occupa indubbiamente una posizione privilegiata rispetto all'analisi o a qualsiasi altra parte della matematica, forse perchè, negli ultimi anni, la scienza matematica ha assunto un carattere troppo astratto e poco identificabile con la realtà. Forse il modo meccanico di operare mediante formule e prontuari hanno ridotto la Matematica Finanziaria ad appendice dell'economia e della tecnica commerciale, ma sebbene sottovalutata, la Matematica Finanziaria offre una

tangibile risposta a chi, profanamente, si interroga sull'utilità della matematica in generale nella vita quotidiana.
Questo lavoro di tesi rappresenta per me la maturazione di un periodo di formazione culturale, iniziato con materie di natura economica, studiate nel periodo pre-universitario, e concluso con lo studio della matematica, la quale nella sua parvente rigidità, trova larga applicazione in diversi ambiti fra i quali quello finanziario. Il mio scopo è dunque quello unire alcune importanti teorie alla base della valutazione degli investimenti, evidenziando in che modo gli strumenti matematici sono applicati al fine di valutare, approssimare, e ottimizzare problemi semplici o complessi, nella loro formulazione, che possono riguardare il confronto o la scelta fra progetti economici di diversa natura.
Oltre il calcolo in sé, viene considerato nell'ambito espositivo, una delle possibili applicazioni di natura informatica che possiamo ad oggi usare nell'analisi dei progetti finanziari, ossia il foglio elettronico EXCEL fornito dalla Microsoft, con le sue molteplici funzioni finanziarie.
A tal scopo la tesi è stata strutturata nel seguente modo:

- Nel Capitolo 1 , intitolato *Fondamenti di matematica discreta e analisi*, saranno trattati alcuni degli strumenti matematici usati nei capitoli successivi, al fine di esporre una 'elaborazione costruttiva delle teorie sulle quali poggiano i criteri applicate nella valutazione degli investimenti;
- Nel Capitolo 2, intitolato *Matematica Finanziaria*, dopo una breve introduzione dei concetti fondamentali di matematica finanziaria, verranno esaminate in modo analitico le leggi di capitalizzazione e attualizzazione, che regolano l'evoluzione temporale dei capitali, e i relativi regimi finanziari. Il capitolo comprende anche un numero adeguato di esempi che consentono di intendere in modo adeguato gli argomenti esposti.
- Nel Capitolo 3, intitolato *Matematica applicata alle rendite finanziarie*, si caratterizzano le rendite in funzione del tempo in cui si realizzano e dell'importo delle rate. Viene introdotto inoltre il processo di costituzione di un capitale. Anche in questo capitolo un considerevole numero di esempi serve per porre il lettore in condizione di valutare le possibili applicazioni teoriche. Inoltre diversi esempi sono svolti anche con l'ausilio del foglio elettronico EXCEL.
- Nel Capitolo 4, intitolato *Metodi matematici applicati alla valutazione degli investimenti* vengono esposte le teorie sulle quali si basano i criteri di valutazione degli investimenti, tra i quali ricordiamo il criterio del VAN (noto anche come il criterio del REA), del TIR, del TRM. Vengono infine affrontati il Teorema di Norstrom, per una sufficiente condizione dell'esistenza di un unico tasso interno di rendimento non negativo, e i progetti di C.S. Soper. Anche in questo capitolo sono svolti diversi esempi al fine di una adeguata

comprensione dei metodi di valutazione, sia attraverso il metodo analitico che con l'ausilio del folgio elettronico EXCEL.

- Infine la tesi si conclude con due appendici: la prima intitolata *Applicazioni matematiche ai problemi finanziari in EXCEL*, ha lo scopo di fornire una breve guida all'uso del foglio elettronico EXCEL, per la risoluzione dei problemi affrontati negli ultimi due capitoli, ed affini; il secondo appendice vuole essere una sorta di tabella riassuntiva delle principali formule finanziarie esaminate.

CAPITOLO 1

Fondamenti di calcolo: Matematica Discreta e Analisi

1. Postulato o Principio di induzione

Il postulato o principio di induzione è un assioma fondamentale della matematica, sia a livello concettuale che operativo e viene utilizzato per dimostratre proprietà o formule che dipendono da un numero naturale. Fu formulato da Peano nella costruzione assiomatica dei numeri naturali, teoria basata su 5 assiomi, che definiscono l'ordinamento, le operazioni aritmetiche e verificano la validità delle regole di calcolo:

(1) Lo *zero* è un numero.
(2) Per ogni numero n esiste un numero univocamente determinato, detto successore di n
(3) Lo *zero* non è successore di alcun numero.
(4) Numeri diversi hanno successori diversi.
(5) ***Assioma: Principio di induzione***
Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che:
- $1 \in S$;
- $s \in S \qquad implica \qquad s+1 \in S$.

Allora S=$\mathbb{N}$. In tal caso si dirá che S è un insieme *induttivo*.

Per comprendere al meglio l'importanza dell'assioma, ne esponiamo alcune applicazione, a risultati altreattanto validi.

TEOREMA 1.1. ***Disuguaglianza di Bernoulli(1689)*** *Sia* $x \geq (-1)$ *un numero reale. Allora* $\forall n \in \mathbb{N}$ *vale:*

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{1.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo la tesi immediata per $x=0$ e $x=(-1)$, in quanto la (1.3) si riduce, nel primo caso all'uguaglianza $1=1$, nel secondo caso $0 \leq 1-n$ è soddisfato da tutti gli interi positivi, consideriamo $x \notin \{0,-1\}$.
Sia ora $x \neq 0$, e consideiamo il caso: $n=1$.
In questo caso la (1.3) si riduce all'identità:

$$(1+x)^1 = 1+1x$$

Ammettiamo ora che esiste $s \in \mathbb{N}$ per cui vale la (1.3).
Se $x > (-1)$, e quindi $x+1 > 0$, abbiamo che:

$$\begin{aligned}(1+x)^{s+1} = (1+x)(1+x)^s &\geq (1+sx)(1+x)\\ &= 1+(1+s)x+sx^2\end{aligned}$$

Ora essendo sx^2 strettamente positivo, si ha dunque:

$$(1+x)^{s+1} \geq 1+(1+s)x$$

ottenendo l'induttività di (1.3). E la dimostrazione è completata.

□

Dimostriamo ora una formula che si rivela utile nella matematica finanziaria, per esempio, nella valutazione di flussi di cassa che variano con una certa regolarità.

TEOREMA 1.2. *Sia $n \in \mathbb{N}$. Per $a \neq 0$ vale:*

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k = a\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2} \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $n = 1$ abbiamo che (1.2) è vera. Infatti, sostituendo $n = 1$ si ottiene:

$$a = a\frac{1-2a+a^2}{(1-a)^2} = a$$

Ammettiamo ora che esiste un $n \geq 0$ per cui valga (1.2), avremo allora che

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} ka^k &= \sum_{k=1}^{n} ka^k + (n+1)a^{n+1}\\ &= a\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2} + (n+1)a^{n+1}\\ &= a\frac{1-(n+2)a^{n+1}+(n+1)a^{n+2}}{(1-a)^2}\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{n+1} ka^k = a\frac{1-(n+2)a^{n+1}+(n+1)a^{n+2}}{(1-a)^2}$$

□

La formula è pertanto vera per ogni $n \geq 1$.
Per mostrare al meglio l'efficacia del metodo induttivo, effettuiamo nuovamente la dimostrazione di questo teorema senza l'ausilio del postulato: Poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k = a+2a^2+\ldots+na^n$$

e moltiplichiamo ambo i menmbri per a ottenendo:

$$aS_n = a^2+2a^3+\ldots+na^{n+1}$$

Ora, sottraendo le due formule appena considerate, e usando le progressioni geometriche $\sum_{k=1}^{n} a^k = a\frac{1-a^n}{1-a}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} S_n - a \cdot S_n = (1-a)S_n &= a + a^2 + \ldots + a^n - na^{n+1} \\ &= a\frac{1-a^n}{1-a} - na^{n+1} \end{aligned}$$

Dividendo per (1 - a) si dimostra che $\sum_{k=1}^{n} ka^k = a\frac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2}$.

1.1. Disuguaglianza di Bernoulli. Un importante risultato dimostrabile attraverso il metodo induttivo, è la disuguaglianza di Bernoulli (1689).

TEOREMA 1.3. *(Teorema di Bernoulli) Sia $x \geq (-1)$ un numero reale. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente disuguaglianza:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{1.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $x = 0$ la dimostrazione è banale, in quanto la disuguaglianza (1.3) si riduce all'uguaglianza $1 = 1$; mentre per $x = (-1)$ la dimostrazione è immediata in quanto $0 \geq 1 - n$.
Consiederiamo dunque $x \notin \{0, -1\}$.
Per $n = 1$ abbiamo che la (1.3) si riduce ad una uguaglianza: $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot c)$. Ammettiamo ora che esiste un $s \in \mathbb{N}$ per cui vale la (1.3). Se $x \geq (-1)$, e quindi $(1+x) \geq 0$, vediamo che:

$$(1+x)^{s+1} = (1+x)^s(1+x) \geq (1+sx)(1+x) = 1 + (1+s)x + sx^2$$

Essendo l'ultimo termine, sx^2, strettamente positivo, otteniamo che:

$$(1+x)^{s+1} \geq 1 + (1+s)x$$

da cui l'induttività di (1.3). La dimostrazione è dunque completata. □

2. Successioni Numeriche

Una funzione reale f di una variabile reale, di dominio A, è una legge che ad ogni $x \in A$ associa un numero reale che denotiamo con $f(x)$. Ossia:

$$f : A \Rightarrow \mathbb{R}, \text{ tale che } \forall x \in A,\ f(x) \in \mathbb{R}$$

Se $A = \mathbb{N}$, la f è detta successione di numeri reali.

DEFINIZIONE 2.1. (Successione numerica)
Una successione di numeri reali è una funzione a valori reali il cui dominio è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

Se con n si denota la variabile che descrive l'insieme $\mathbb{N}$, allora l'immagine di n tramite la f, cioè $f(n)$, si denota con a_n:

$$f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}, \text{ tale che} \forall n \in A,\ f(n) = a_n \in \mathbb{R}$$

Per indicare una successione si usa la notazione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

dove

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

rappresentano i termini della successione, e a_n, indica il termine generale della successione.

Caratterizzazione delle successioni:

- **Successione stazionaria:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è stazionaria se:

$$\exists k \in \mathbb{R} : \ a_n = k, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Successione crescente:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è crescente se:

$$a_n \ \leq \ a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Successione strettamente crescente:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è strettamente crescente se:

$$a_n \ < \ a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO 2.1. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{n-1}{n})$ è strettamente crescente.

Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$$

essendo $n^2 - 1 < n^2$.

- **Successione decrescente:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è decrescente se

$$a_n \ \geq \ a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Successione strettamente decrescente:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è strettamente decrescente se:

$$a_n \ > \ a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

ESEMPIO 2.2. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})$ è strettamente decrescente. Infatti per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

- **Successione limitata inferiormente:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è limitata inferiormente se:

$$\exists \ \alpha \text{ tale che } \alpha \leq a_n$$

- **Successione limitata superiormente:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è limitata superiormente se:

$$\exists \ \alpha \qquad \text{tale che} \qquad \alpha \geq a_n$$

- **Successione limitata:** Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è limitata se:

$$\exists \ \alpha, \ \beta \qquad \text{tale che} \qquad \alpha \leq a_n \leq \beta$$

ESEMPIO 2.3. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n$ è limitata, dato che il suo codominio $\{-1,1\}$ è un insieme limitato.

Data la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si studia il comportamento all'aumentare del valore dell'indice $n \in \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 2.2. (Successione convergente)
Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al numero reale a, se:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N}\ \text{ con }\ n \geq n(\varepsilon),\ \text{ si ha }\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Per indicare che la successione $(a_n)_n$ converge ad a useremo una delle notazioni:

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \qquad a_n \to a \quad \text{per } n \to \infty$$

OSSERVAZIONE 2.1. Per stabilire se una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad a occorre, fissato $\varepsilon > 0$, risolvere la disequazione

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Se l'insieme delle soluzioni di tale disequazione, per ogni $\varepsilon > 0$, contiene tutti i numeri naturali maggiori di un opportuno numero naturale $n(\varepsilon)$, allora la successione $a_n \to a$, in caso contrario non corvenge ad a.

ESEMPIO 2.4. Dimostriamo che la successione

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{n+1}{n})$$

converge a 1.
Fissato $\varepsilon > 0$, risulta che:

$$|\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Basta scegliere $n(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, affinché sia verificato il limite.

TEOREMA 2.1. *(Successione convergenti limitate)*
Ogni successione $(a_n)_n$ convergente è *limitata.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che la successione $(a_n)_n$ converge ad a. Fissato $\varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \geq n(\varepsilon)\ |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \ \ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Siano

$$\tilde{n} = min\{n : a - \varepsilon < a_n\}, \qquad \bar{n} = max\{n : a_n < a + \varepsilon\}$$

Avremo dunque che esistono un minorante e un maggiorante per la successione:

$$a_{\tilde{n}} < a_n < a_{\bar{n}}$$

e la successione risulta essere limitata. □

Può accadere che, una successione assuma al crescere di $n \in \mathbb{N}$ valori sempre più grandi, anziché convergere ad un valore. Tali successioni sono dette divergenti.

DEFINIZIONE 2.3. (Successioni divergenti)
Data la successione $(a_n)_n$, si dice:

- La successione diverge positivamente se fissato arbitrariamente $K \in \mathbb{R}$ si ha che:
$$\exists n_K \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_K \qquad a_n > K$$
In questo caso si usa la seguente notazione:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ oppure } a_n \to +\infty$$
- La successione diverge negativamente se fissato arbitrariamente $K \in \mathbb{R}$ si ha che:
$$\exists n_K \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_K \qquad a_n < K$$
In questo caso si usa la seguente notazione:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ oppure } a_n \to -\infty$$
- La successione diverge se fissato arbitrariamente $K \in \mathbb{R}0$ si ha che:
$$\exists n_K \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_K \qquad |a_n| > K$$
In questo caso si usa la seguente notazione:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ oppure } a_n \to \infty$$

OSSERVAZIONE 2.2. Per stabilire se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge positivamente (negativamente) occorre risolvere la disequazione
$$a_n > K \ \ (a_n < K)$$
se l'insieme delle soluzioni di tale disequazione contiene, per ogni k, tutti i numeri naturali maggiori di un opportuno $n(k)$ allora la successione considerata diverge positivamente (negativamente).
In caso contrario la successione non diverge.

ESEMPIO 2.5. La successione
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sqrt{n}$$
diverge positivamente.
Risolviamo la disequazione $\sqrt{n} > K,\ K \in \mathbb{R}$:
$$n \text{ è soluzione } \Leftrightarrow n > K^2 = n(K)$$
Scelto $n(K)$ nel modo indicato avremo che $\sqrt{n} > K, \forall n \geq n(K)$, e per definizione la successione diverge positivamente.

DEFINIZIONE 2.4. (Successione geometrica)
Definiamo suggessione geometrica,la successione avente come termine generale $a_n = r^n$

Studiamo il comportamento al limite, al variare di $r \in \mathbb{R}$, della successione geometrica di termine generale $a_n = r^n$.

- $r = 1$ La successione
$$a_n = 1^n$$
è stazionaria.
- $r > 1$ Esiste un numero reale positivo $p > 0$, tale per cui $r = 1 + p$:
$$a_n = r^n = (1+p)^n \geq 1+np \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\infty} a_n = +\infty$$
- $-1 \leq r \leq 1$ Distinguiamo i seguenti casi:
  - $r = 0$ la successione è stazionaria.
  - $0 < r < 1$ esite allora $q \in \mathbb{R}$, con $q > 1$ tale che $r = \frac{1}{q}$.
  Essendo
  $$a_n = r^n = (\frac{1}{q})^n$$
  abbiamo che
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
  - Per $(-1) < r < 0$ poniamo $r = -s$ con $0 < s < 1$, ottenendo
  $$a_n = (-1)^n s^n$$
  da cui
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
- $r \leq -1$ Distinguiamo i seguenti casi:
  - $r = -1$, allora abbiamo che $a_n = (-1)^n$. Questa successione oscilla indefinitivamente fra i due valori 1 e -1.
  - $r < -1$, ponendo $r = -s$, con $s > 1$, possiamo scrivere
  $$a_n = (-1)^n s^n$$
  e, per il caso precedentemente esaminato otteniamo che
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

I casi esaminati sono riassunti dal seguente teorema.

TEOREMA 2.2. *(Limite di una successione geometrica)*
$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & se\ r > 1 \\ 1 & se\ r = 1 \\ 0 & se\ -1 < r < 1 \\ non\ esiste & se\ r = 1 \\ \infty & se\ r < -1 \end{cases}$$

ESEMPIO 2.6. Consideriamo l'evoluzione delle successioni geometriche distinguendole in funzione della base.

n	2^n	$(0,5)^n$	$(-2)^n$	$(-0,5)^n$
0	1	1	$+1$	$+1$
1	2	$(0,5)$	(-2)	$(-0,5)$
2	4	$0,25$	$+4$	$+0,25$
3	8	$0,125$	-8	$-0,125$
...	...	...	...	...
10	1024	$0,00097656$	1024	$0,00097656$
11	2048	$0,00048828$	-2048	$-0,00048828$

TABELLA 1. Esempio di limite di successioni geometriche

In base al loro andamento , andiamo a descrivere le successioni monotòne, ossia successioni o sempre crescenti o sempre decrescenti nel loro complesso. Queste successioni ammettono sempre limitefinito o infinito. La monotonia di una successione, se unita alla limitatezza ne assicura la convergenza.

TEOREMA 2.3. *(Convergenza successioni monotòne)*
Se $(a_n)_n$ è *crescente e superiormente limitata, essa converge e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = sup\ a_n : \qquad n \in \mathbb{N}$$

TEOREMA 2.4. *(Convergenza successioni monotòne) Se* $(a_n)_n$ è *decrescente e inferiormente limitata essa converge e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = inf\ a_n : \qquad n \in \mathbb{N}$$

TEOREMA 2.5. *(Divergenza di successioni monotòne)*
Se $(a_n)_n$ è *una successione crescente e non limitata superiormente, allora essa diverge positivamente. Se invece* $(a_n)_n$ è *decrescente e non limitata inferiormente, allora essa diverge negativamente.*

DEFINIZIONE 2.5. (Progressioni aritmetiche)
Si definisce *progressione aritmetica* una successione di numeri

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

tale che sia costante la differenza fra un qualsiasi numero e il precedente. La differenza costante,che indichiamo con q, si chiama *ragione* della progressione aritmetica, mentre a_1 è il *primo termine*.
Noti il primo termine e la ragione, una progressione aritmetica può essere definita nel seguente modo:

$$a_n = a_1 + (n - 1)q, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

ma anche in forma generale nel seguente modo:

$$a_n = a_{n-1} + q, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

OSSERVAZIONE 2.3. Nel caso in cui la ragione della progressione è nulla, la progressione aritmetica si riduce alla successione stazionaria.

DEFINIZIONE 2.6. (Progressioni geometriche)
Si definisce *progressione geometrica* una successione di numeri

$$a_1, \ldots, a_n, ..$$

tale che sia costante il quoziente fra un qualsiasi numero e il precedente. Il quoziente costante,che indichiamo con q, si chiama *ragione* della progressione geometrica, mentre a_1 è il *primo termine*. Noti il primo termine e la ragione, una progressione geometrica può essere definita nel seguente modo:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.6}$$

ma anche in forma generale nel seguente modo:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.7}$$

3. Serie

Consideriamo il numero reale (razionale) $a = 2,345$; questo puÃš essere scritto nella forma:

$$a = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}$$

Lo stesso procedimento, applicato al numero $b = 1,232323232\ldots$ porta alla seguente annotazione:

$$b = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \ldots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \frac{3}{10^{2n}} + \cdots$$

che ha l'aspetto di una somma di infiniti addendi.
Come si può estendere il significato di addizione al caso di infiniti addendi, assegnati come termini di una successione?
Il semplice procedimento aritmetico non è sufficiente, dato che questo insegna a sommare solo un numero finito di termini.
È perciò necessaria una qualche forma di passaggio al limite.
Se si devono sommare n addendi, si sommano i primi due, poi al risultato trovato si aggiunge il terzo, poi il quarto.... E se gli addendi sono infiniti?
L'idea precedente ci porta a sommare i primi 2 addendi, ad aggiungere al risultato il terzo, poi il quarto, $\cdots$, poi l'$n - simo$, poi $\cdots$.
Così facendo, si ottiene una successione di somme parziali di cui possiamo cercare il limite per n che tende a infinito.

DEFINIZIONE 3.1. (Successione delle somme parziali o ridote)
Data una successione $(a_n)_n$ di numeri reali, si definisce una nuova successione $(S_n)_n$ ponendo:

$$
\begin{aligned}
&S_0 := a_0;\\
&S_1 := a_0 + a_1;\\
&S_2 := a_0 + a_1 + a_2;\\
&\dots\dots\\
&S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \quad + a_n;\\
&\dots\dots
\end{aligned}
$$

Attraverso opportune sostituzioni andiamo a definire la successione delle somme parziali o delle ridotte nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
&S_0 := a_0;\\
&S_1 := S_0 + a_1;\\
&S_2 := S_1 + a_2;\\
&\dots\dots\\
&S_n := S_{n-1} + a_n;\\
&\dots\dots
\end{aligned}
$$

DEFINIZIONE 3.2. (Serie)
Si definisce serie di numeri reali, la successione $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di termini generali:

$$S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Caratterizziamo la serie generata da $(a_n)_n$, nel seguente modo:

- La serie è convergente, se è convergente la successione delle somme parziali $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In questo caso esiste un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to\infty} S_n = \lambda$. in questo caso il limite si indica nel seguente modo
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
- La serie è divergente, se è divergente la successione delle somme parziali $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

  ESEMPIO 3.1. La serie
  $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot k = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$
  diverge a ∞; infatti la successione delle ridotte è data da:
  $$1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$
- La serie è oscillante se non esiste il limite della successione delle somme parziali $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ESEMPIO 3.2. La serie $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = 1-1+1-1+1-1+\dots$ è indeterminata; infatti le ridotte di indice pari $(n \geq 0)$ valgono tutte 1, mentre quelle di indice dispari valgono tutte 0; non esiste perciò il limite di $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEFINIZIONE 3.3. (Serie geometrica)
Definiamo serie geometriche le serie del tipo:

$$a+ak+ak^2+ak^3+ak^4+\dots+ak^n+\dots, \qquad \text{con } a \neq 0,$$

dove il numero reale k è detto la *ragione* della serie geometrica.
Caratterizziamo la serie geometrica in funzione della ragione:

- Per $k=1$, si ha che la serie $a+a+a+a+\dots$ è divergente, essendo $a \neq 0$.
- Per $k=-1$, si ha che la serie $a-a+a-a+\dots$ è indeterminata, essendo $a \neq 0$.
- Per $|k| \neq 1$,e consideriamo la somma ridotta, per studiare in funzione di essa il comportamento della serie:

$$S(k) = \sum_{i=1}^{n} ak^i = a \cdot \frac{1-k^{n+1}}{1-k}$$

  - Per $|k| < 1$, la serie è convergente al limite detto *somma* $S(k)$ dato da:

$$S(k) = a \cdot \frac{1}{1-k}$$

  - Per $|k| > 1$, la serie è divergente nel seguente modo:

$$S(k) = \begin{cases} \infty & se\ k < -1 \\ +\infty & se\ k > 1 e a > 0 \\ -\infty & se\ k > 1 e a < 0 \end{cases}$$

TEOREMA 3.1. *Assegnata la serie:*

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot k^{i-1} = 1+2k+3k^2+\cdots, \qquad k \in \mathbb{R}$$

essa è*:*

- *Convergente per $|k| < 1$. In tal caso la somma $S(k)$* è*:*

$$S(k) = \frac{1}{(1-k)^2}$$

- *Divergente per $k \geq 1$*
- *Oscillante per $k \leq 1$*

Se la somma, invece di partire da $n=1$ parte da altri indici, ad esempio per $s \in N$ è *, il limite somma* è *definito nel seguente modo:*

$$\sum_{n=s}^{\infty} n \cdot k^{n-1} = \frac{[s-(s-1)k]k^{s-1}}{1-s}$$

ESEMPIO 3.3. Calcolare, per i valori ammmissibili di k la somma $S(k)$ della serie

$$\sum_{i=1}^{n} 1(1+k)^{-(i+1)}$$

Il dominio di convergenza della serie coincide con quello della serie geometrica associata:

$$\sum_{i=1}^{n} n \cdot \lambda^{i+1}, \qquad \text{per} \qquad \lambda = \frac{1}{1+k}$$

essendo la serie geometrica associata convergente per $|\lambda| < 1$, si a che:

$$|\frac{1}{1+k}| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{1+k} < 1 \Rightarrow k < (-2) \vee k > 0$$

Per questi valori di k la somma della serie è

$$S(k) = \frac{1}{k^2}$$

TEOREMA 3.2. *(Convergenza delle serie)*
Se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora il suo termine generale a_n tende a 0*, al tendere di n a ∞.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Per $a_{n-1} = S_{n+1} - S_n$ è dimostrata la tesi, essendo sia S_{n+1} che S_n convergenti ad S. □

OSSERVAZIONE 3.1. Non sussiste l'implicazione opposta di questo Teorema. Se il termine generale di una serie tende a 0, non è detto che la serie sia convergente. Un controesempio è fornito dalla serie armonica.

DEFINIZIONE 3.4. (Serie armonica)
Una serie è armonica quando risulta dalla somma dei reciproci dei numeri naturali positivi. Si indica nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Questa serie diverge per $n \to \infty$, mentre il suo termine generale tende a zero.

Una condizione necessaria e sufficente per la convergenza di una serie è data dal Teorema di Cauchy.

TEOREMA 3.3. *(Teorema di Cauchy)*
Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se è *verificata la seguente condizione:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > n(\varepsilon), \qquad |\sum_{s=n+1}^{n+p} a_s| < \varepsilon, \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

4. Fondamenti di calcolo differenziale

Ci limiteremo a richiamare brevemente alcune nozioni di Analisi Matematica che sfrutteremo nel seguito.

4.1. Teorema del valore medio. Molte proprietà importanti delle funzioni (crescenza, decrescenza, iniettività, ecc.) si esprimono tramite proprietà del rapporto incrementale (positività, negatività, non annullarsi, ecc.), e quindi si riflettono su proprietà della derivata. Il seguente teorema ci permette di dedurre da proprietà della derivata alcune proprietà del rapporto incrementale.

TEOREMA 4.1. *(Teorema del valor medio, o di Lagrange)*
Sia $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2). Allora esiste almeno un punto $x \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Il significato geometrico del teorema è il seguente:
dato che $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ è la pendenza della secante al grafico di f per i punti del grafico relativi a x_1, x_2 e $f'(x)$ è la pendenza della tangente al grafico in x, il teorema afferma che esiste un punto x in cui la pendenza della retta tangente è il valor medio della pendenza del grafico di f tra x_1 e x_2, ossia che esiste un punto x in cui la tangente al graico è parallela alla secante al grafico per i punti estremi.

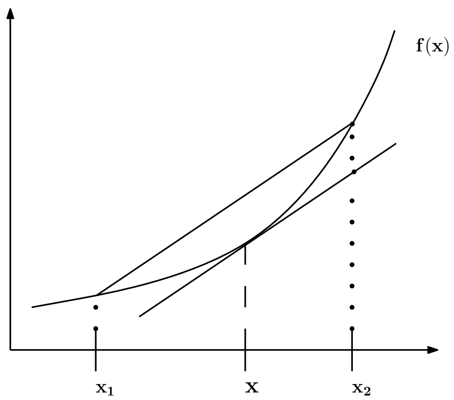


FIGURA 1. Interpretazione grafica del Teorema del valor medio

OSSERVAZIONE 4.1. Vediamo che nessuna delle ipotesi del teorema può essere omessa:

(1) La funzione f deve essere continua in $[x_1, x_2]$, altrimenti può non esserci alcuna relazione tra il rapporto incrementale agli estremi e la derivata all'interno di $[x_1, x_2]$.
Per esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 0 \\ x & se\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

La funzione è discontinua in 0. Si ha che

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \qquad f'(x)=1 \qquad \forall x \in (x_1,x_2)$$

e quindi la tesi del teorema è falsa.

(2) La funzione f deve essere derivabile in ogni punto di (x_1,x_2). Consideriamo la funzione $f(x)=|x|$ e consideriamo $x_1=-1$ e $x_2=1$.
La funzione f è derivabile dapperttutto tranne che in 0. Questo basta per far fallire il teorema:

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1-1}{2}=0 \qquad f'(x)=\pm 1$$

(3) Il dominio deve essere un intervallo.
Se consideriamo la funzione $\frac{1}{x}$, definita per $x\neq 0$, si ha che :

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1+1}{2}=1 \qquad f'(x)=\frac{1}{-x^2}<0\forall x\in\mathbb{R}$$

Quindi la tesi del teorema non è verificata.

Nel caso particolare in cui $f(x_1)=f(x_2)$ allora la tesi diventa che esiste un punto $x\in(x_1,x_2)$ tale che $f'(x)=0$. Questo particolare del teorema di Lagrange viene a volte chiamato Teorema di Rolle.

Enunciamo e dimostriamo una generalizzazione del teorema del valor medio di Lagrange.

TEOREMA 4.2. *(Teorema di Lagrange generalizzato)*
Sia $f:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.
Esiste allora un elemento $c\in]x_1,x_2[$ tale che:

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+f''(c)\frac{(x_2-x_1)^2}{2}$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo:

$$A=\frac{f(x_2)-f(x_1)-f'(x_1)(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2}$$

Se $x\in[x_1,x_2]$, deiniamo la funzione:

$$\varphi(x)=f(x)-[f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+A(x-x_1)^2]$$

si ha:

$$\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1)+f'(x_1)-2A(x-x_1)$$

e derivanto per la seconda volta si ottiene:

$$\varphi''(x)=f''(x)-2A$$

La tesi è provata facendo vedere che esiste un punto dell'intervallo $]x_1,x_2[$ che annulla la derivata seconda $\varphi''(x)$. Ora siccome per costruzione abbiamo che:

$$\varphi(x_1)=\varphi'(x_1)=\varphi(x_2)=0$$

Il teorema di Rolle assicura che esiste un punto $d \in]x_1, x_2[$ tale per cui $\varphi'(d) = 0$. Applichiamo il teorema di Rolle alla funzione $\varphi'(x)$ nell'intervallo $[x_1, d]$ e concludere che esiste un punto $c \in [x_1, d]$, per cui $\varphi''(c) = 0$ e in questo modo abbiamo ottenuto la tesi. □

Per capire quale sarà l'utilità del teorema ora per i nostri scopi futuri facciamo un esempio pratico, dimostrando che vale la disuguaglianza:

$$e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando il teorema appena dimostrato vediamo che nell'intervallo $[0, x]$ vale:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c$$

per un valore $c \in]0, x[$. Essendo il termine $\frac{x^2}{2}$ sempre positivo, abbiamo dimostrato la validità della nostra affermazione. Questa disuguaglianza sarà utile quando confronteremo il regime di capitalizzazione semplice con quello composto.

5. Sviluppi di Taylor

Gli sviluppi di Taylor sono un procedimento matematico che permette di esprimere molte funzioni di vario tipo (esponenziali, trigonometriche, ecc) sotto forma di funzioni razionali fratte.
Il polinomio di Taylor di ordine n è un polinomio che approssima, nell'intorno di un punto x_0, una funzione $f(x)$. Ci poniamo ora il problema di approssimare localmente una funzione con polinomi di grado n arbitrario, cercando una stima opportuna dell'errore commesso. Affrontiamo dapprima il problema della ricerca del polinomio approssimante.
Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un intervallo I e x_0 un punto di I. Diremo $n-esimo$ polinomio di Taylor generato da $f(x)$ in x_0 il polinomio di grado n:

$$P_n(f(x), x_0) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Da cui segue la formula ridotta:

$$P(f(x), x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \tag{1.8}$$

La principale caratteristica del polinomio di Taylor è che le sue prime n derivate, calcolate in x_0, coincidono con quelle della funzione $f(x)$ che lo ha generato. Quindi fra le curve

$$y = f(x) \qquad \text{e} \qquad y = P_n(f(x), x_0)$$

c'è un punto di contatto di ordine n; ne segue che il polinomio di Taylor è una curva osculatrice.
La questione principale da affrontare, connessa allo studio dei polinomi osculatori, è che dal momento che il polinomio osculatore $P_n(f(x), x_0)$ e

la funzione assegnata $f(x)$ nel punto x_0, hanno un contatto di ordine n, occorre capire in quale modo $P_n(f(x),x_0)$ approssimi $f(x)$ e, dunque, occorre studiare il comportamento di quello che viene chiamato *resto* di ordine n:

$$R_n(f(x),x_0) = f(x) - P_n(f(x),x_0)$$

Il polinomio osculatore di una funzione, essendo per natura una approssimazione della stessa può essere usato al posto della stessa, ad esempio nel calcolo di limiti o nella risoluzione di disequazioni. A tale scopo l'analisi del comportamento asintotico del resto data da Peano nel 1897 si rivela molto utile.

TEOREMA 5.1. *(Teorema di Peano)*
Sia $f(x)$ una funzione n volte derivabile nell'intervallo I e sia $x_0 \in I$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(f(x),x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $R_n(x) = R_n(f(x),x_0)$. Per $R_n(x_0) = 0$, e $R_n^k(x_0) = 0$ con $k = 1,\dots,n$, otteniamo che :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

□

TEOREMA 5.2. *(Resto in forma di Lagrange)*
Sia $f(x)$ un afunzione $n+1$ volte derivabile nell'intervallo e sia $x_0 \in I$. Allora per ogni $x \in I$, esiste un punto ξ nell'intervallo $[x_0,x]$ tale che:

$$R_n(f(x),x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Si parla di rappresentazione del resto nella forma di Lagrange.

Il teorema ora mostrato non calcola esplicitamente il resto, ma, usando stime sulla derivata $n+1-esima$ di $f(x)$ possiamo valutare la accuratezza con cui il polinomio osculatore $P_n(f(x),x_0)$ approssima $f(x)$.

ESEMPIO 5.1. Ad esempio se $f(x) = sinx$ con $x_0 = 0$ e $x \in I = [0,1]$ prendiamo $n = 5$, allora avremo che una approssimazione della funzione è data da:

$$sinx = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - sin\xi \frac{x^6}{720}$$

Ora, sebbene di ξ si sappia solamente che è un elemento dell'intervallo I, possiamo osservare che, se $x \in I$:

$$|R_5(sinx,0)| = |sin\xi \frac{x^6}{720}| \leq \frac{1}{720} \approx 0,00138889$$

Questo significa se $x \in I$ che le prime due cifre decimali del polinomio osculatore:

$$P_5(sinx,0) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

coincidono con le prime due cifre decimali della funzione $f(x) = sinx$.
Per esempio se $x = \frac{1}{2}$ siamo certi del fatto che le prime due cifre decimali di:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{120}(\frac{1}{2})^5 = \frac{1841}{3840}$$

sono le stesse di $sin\frac{1}{2}$.

6. Il metodo di Newton

Consideriamo il seguente problema:

$$f(x) = 0$$

Ricordiamo che non sempre è possibile risolvere analiticamente un'equazione non lineare come ad esempio:

$$f(x) = e^x - 2x^2$$

In queste situazioni, si rende allora necessario l'utilizzo di un metodo numerico in grado di restituire un valore approssimato delle radici dell'equazione assegnata (indipendentemente dalla complessità della funzione f). I metodi numerici per il calcolo delle radici di un'equazione non lineare sono di tipo iterativo: a partire da un valore x_0 si determina una successione di valori $\{x_n\}$ che, sotto opportune condizioni, converge ad una radice α dell'equazione assegnata. La convergenza talvolta dipende dalla scelta del valore x_0: se x_0 è vicino ad α ed f è sufficientemente regolare, allora $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Pertanto, è importante partire da un valore iniziale x_0 che risulti una prima approssimazione della radice α.

Consideriamo la funzione

$$f : [a,b] \to R$$

che assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a,b]$. Se f è continua esiste almeno un elemento $r \in]a,b[$ per cui $f(r) = 0$. Se ammettiamo che f sia derivabile con derivata di segno costante in $]a,b[$ tale elemento r è unico. Sia

$$f(a) < 0, f(b) > 0 \text{ e } f'(x) > 0$$

per ogni $x \in]a,b[$.

Fissiamo un punto $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) > 0$ e consideriamo la retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$. Tale retta ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Calcoliamo ora l'ascissa x_1 in cui la retta tangente taglia l'asse delle x. Ponendo $y = 0$ ed eseguendo il calcolo, vediamo che:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

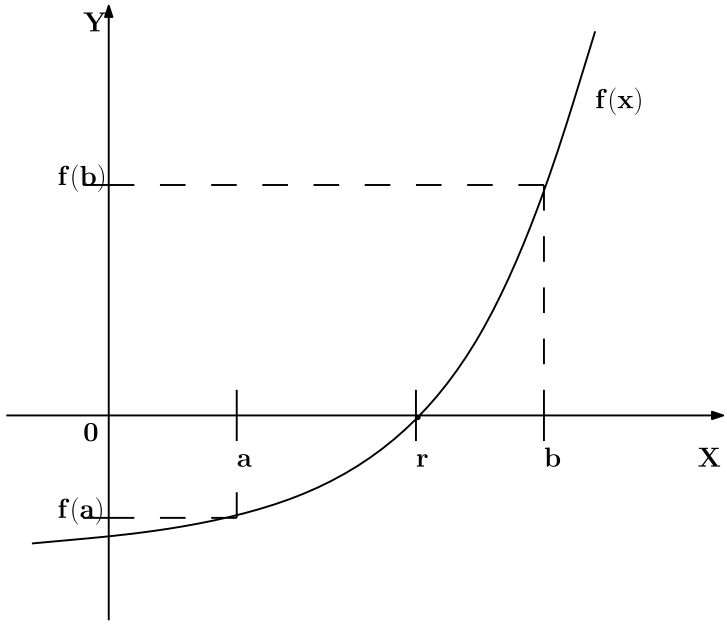


FIGURA 2. Condizione di Newton

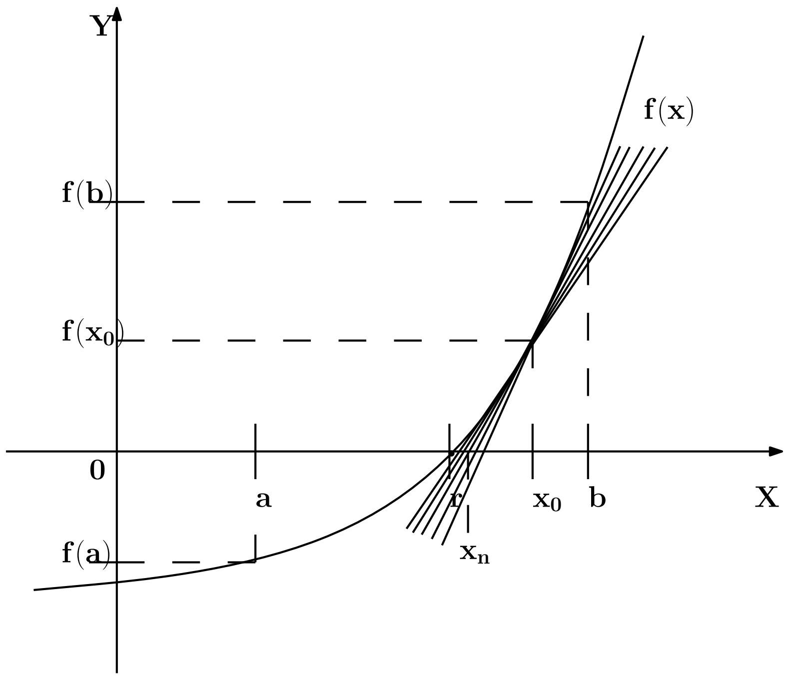


FIGURA 3. Metodo di Newton

La figura sopra mostra graficamente il procedimento per determinare il punto x_1. Facciamo anche notare che è l'ipotesi $f'(x) > 0$ che permette di ricavare l'ascissa x_1 senza dividere per zero. A questo punto calcoliamo $f(x_1)$. Se $f(x_1) = 0$, allora $x_1 = r$ e la ricerca è terminata.

Se, invece,$f(x_1) \neq 0$, ragionando esattamente come prima, scriviamo l'equazione della retta tangente a $y = f(x)$ nel punto $(x_1, f(x_1))$, ottenendo

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

in modo che possiamo ricavare il punto x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ora si calcola $f(x_2)$. Se f si annulla il processo termina.
Se invece $f(x_2) \neq 0$ il processo riparte per determinare l'elemento x_3.
In pratica abbiamo identificato un processo iterativo nel modo seguente:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} & \text{tale che } f(x_0) \neq 0, \\ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} & \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1.9}$$

Questo metodo non può che finire con l'approssimare la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$.

ESEMPIO 6.1. Consideriamo la seguente equazione:

$$f(x) = 7 + 6x - 3x^2 + x^3 = 0$$

Per prima cosa osserviamo che, essendo

$$f'(x) = 6 - 6x + 3x^2$$

abbiamo $f'(x) \neq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, in quanto il discriminante del polinomio di secondo grado è negativo.
Applichiamo il metodo delle tangenti all'equazione assegnata, attivando il procedimento di iterazione (1.9). Il comportamento della derivata prima ci assicura che l'equazione ammette una radice che è unica.
La funzione iterativa F(x) è :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{7 + 6x - 3x^2 + x^3}{6 - 6x + 3x^2}$$

Il metodo iterativo può essere descritto semplicemente da $x_n = F(x_{n-1})$.
Valutando $F(x)$ a partire da $x_0 = 0$ e iterando la seguente formula:

$$x_n = F(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{7 + 6x_{n-1} - 3x_{n-1}^2 + x_{n-1}^3}{6 - 6x_{n-1} + 3x_{n-1}^2}$$

Metodo di Newton	
$\mathbf{x_n = F(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{7+6x_{n-1}-3x_{n-1}^2+x_{n-1}^3}{6-6x_{n-1}+3x_{n-1}^2}}$	
$\mathbf{x_1 = F(x_0) = -\frac{7}{6} = -1,1\bar{6}}$ $\mathbf{x_3 = F(x_2) \approx -0,782790}$ $\mathbf{x_5 = F(x_4) \approx -0,781618}$	$\mathbf{x_2 = F(x_1) \approx -0,834688}$ $\mathbf{x_4 = F(x_3) \approx -0,781619}$ $\mathbf{x_6 = F(x_5) \approx -0,781618}$

TABELLA 2. Metodo iterativo di Newton

Il passaggio da x_5 a x_6 non altera più le cifre significative della soluzione approssimata, dunque tutte e sei le cifre indicate sono affidabili, e individuano una approssimazione della soluzione.
Molto interessante è anche la valutazione del polinomio $f(x)$ in corrispondenza di x_5; si ha $f(x_5) = 6,0245 \cdot 10^{-7}$.
Questo rende bene l'idea della validità dell'approssimazione ottenuta.

ESEMPIO 6.2. Calcoliamo le radici dell'equazione:

$$\frac{1-(1+x)^{-5}}{x} = 4$$

Per prima cosa assicuriamoci che l'equazione in questione abbia soluzione.
Osserviamo che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^{-5}}{x} = 5, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1-(1+x)^{-5}}{x} = 0$$

Dallo studio del limite segue che l'equazione ammette una soluzione positiva.
Posto:

$$g(x) = \frac{1-(1+x)^{-5}}{x} - 4 = f(x) - 4 = 0$$

andiamo a calcolare le radici della funzione $f(x)$.
Vediamo che:

$$f'(x) = -\frac{15+20x+15x^2+6x^3+x^4}{(1+x)^6}$$

da cui si deduce che $f'(x) < 0$ per ogni x positivo.
Le condizioni di applicazione del metodo di Newton sono soddisfatte.
La funzione da iterare è :

$$F(x) = x\frac{f(x)-4}{f'(x)} = \frac{1+6x-20x^2-50x^3-48x^4-22x^5-4x^6}{15+20x+15x^2+6x^3+x^4}$$

Metodo di Newton	
$\mathbf{x_n = F(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{1+6x_{n-1}-20x_{n-1}^2-50x_{n-1}^3-48x_{n-1}^4-22x_{n-1}^5-4x_{n-1}^6}{15+20x_{n-1}+15x_{n-1}^2+6x_{n-1}^3+x_{n-1}^4}}$	
$\mathbf{x_1 = F(x_0) \approx 0,0666667}$ $\mathbf{x_3 = F(x_2) \approx 0,0793080}$ $\mathbf{x_5 = F(x_4) \approx 0,0793083}$	$\mathbf{x_2 = F(x_1) \approx 0,0789742}$ $\mathbf{x_4 = F(x_3) \approx 0,0793083}$ $\mathbf{x_6 = F(x_5) \approx 0,0793083}$

TABELLA 3. Metodo iterativo di Newton

Essendo $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 5$, iteriamo $F(x)$ a partire da x_0:

Possiamo affermare allora che, con approssimazione fino alle prime sette cifre decimali, la soluzione dell'equazione $g(x) = f(x) - 4 = 0,0793083$.

6.1. Tangenti e convessità. Vogliamo analizzare il comportamento dell'algoritmo di Newton, applicato alle funzioni convesse.

DEFINIZIONE 6.1. (Funzioni convesse) Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : IR$ si dice:

- Convessa se per ogni $x, y \in I$, ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:
$$f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$
- Strettamente convessa se per ogni $x, y \in I, x \neq y$, ed ogni $\alpha \in]0,1[$ si ha:
$$f((1-\alpha)x + \alpha y) < (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

La convessità è legata al segno della derivata seconda.

TEOREMA 6.1. *(Condizione di convessità)*
La funzione $f : I \to R$ di classe $C^2(I)$ è *strettamente convessa se e solo se $f^2(x) > 0$ per ogni $x \in I$.*

TEOREMA 6.2. *(Newton e convessità)*
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, strettamente crescente e convessa e tale che $f(a) < 0, f(b) > 0$. Allora la successione:

$$\begin{cases} x_0 &= b \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

converge decrescendo all'unico zero di $f(x)$ in $[a,b]$.

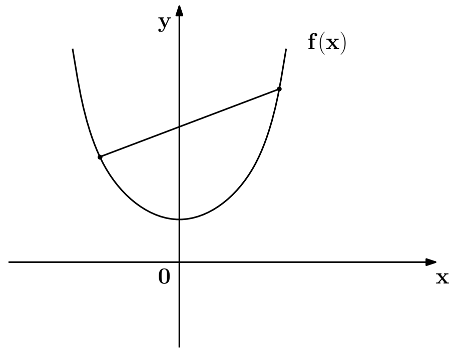


FIGURA 4. Funzione convessa

DIMOSTRAZIONE. La convessit*à* di $f(x)$ implica $f(x_n) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\geq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \\ &= f(x_n) + f'(x_n)(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - x_n}) \\ &= f(x_n) + f'(x_n) = 0 \end{aligned}$$

Per $f(x_n) \geq 0$ e per $f(x)$ crescente, abbiamo che, indicando con x^* lo zero di $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$, si ha che $x_n \geq x^*$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo dimostra che la successione iterativa di Newton è limitata inferiormente e anche decrescente, essendo:

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq 0$$

Questo implica che la successione è convergente ad un elemento $\bar{x} \in [a,b]$ e dalla relazione:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

passando al limite, ricordando la continuità di $f(x)$, si trova:

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

Dunque $f(\bar{x}) = 0$, quindi per iniettivit*à* abbiamo $\bar{x} = x^*$. □

CAPITOLO 2

Matematica Finanziario: Capitalizzazione e attualizzazione

Introduzione alla Matematica Finanziaria

La matematica finanziaria si occupa di quelle operazioni di scambio che hanno per oggetto soltanto importi di denaro, e che pertanto si chiamano finanziarie.[B. De Finetti, Lezioni di Matematica Finanziaria, Roma, Edizioni Ricerche, 1968].
Di solito si presume che, quando si impiega un capitale, l'ammontare di questo non rimanga costante al passare del tempo. Pertanto si presenta il problema di confrontare tra loro capitali che si rendono disponibili a scadenze diverse. (...) Questo è il problema fondamentale della matematica finanziaria, dove, si badi bene, quello che interessa è solo il numero delle unitá monetarie che costituiscono il capitale e non questioni di carattere economico, quali la svalutazione delle moneta, le variazioni del suo potere di acquisto e simili.[C.F. Manara, P. Canetta, Elementi di matematica finanziaria, Milano, Vita e Pensiero, 1992].
Alla base della matematica finanziaria vi sono le operazioni di prestito e di sconto.
Nelle operazioni di *prestito* una persona o un ente finanziatio (*creditore*), cede in uso, per un prefissato periodo di tempo(*durata del prestito*) un *capitale C*, ad un'altro soggetto(*debitore*), il quale a sua volta, si impegna a restituire all'epoca stabilita, un capitale M, detto *montante*, comprensivo di un compenso I detto *interesse*, valutato attraverso il *tasso di interesse*. Il montante è dato dunque dalla somma del capitale iniziale, concesso in prestito, e l'interesse, spettante al creditore per aver reso disponibile una determinata quantit à di denaro in un lasso di tempo prefissato: $M = C + I$. Il tasso di interesse può essere quindi pensato come il tasso di crescita della somma monetaria concessa in prestito. Le operazioni di *sconto*, invece, riguardano il pagamento anticipato di un capitale scadente in futuro, o l'estinzione anticipata di un debito.
Il soggetto che ha diritto a riscuotere un capitale M(*valore nominale del credito*), scadente in un'epoca futura, cede tale diritto in cambio di un capitale minore C(*valore attuale*) esigibile subito. Si definisce **sconto** la differenza fra il valore nominale e quello attuale. E, analogamente all'interesse, lo sconto rappresenta il compenso richiesto da chi anticipa un capitale prima della sua scadenza.
Dalle considerazioni precedenti si evince una cartteristica importante delle

operazioni finanziarie:
ogni capitale ha un valore diverso in funzione del tempo in cui esso è *disponibile*.
È dunque evidente che, nella matematica finanziaria, assumono un ruolo rilevante i concetti di *capitalizzazione*(per il calcolo della somma finale a partire dal capitale e dal tasso di interesse), e di *attualizzazione*(che calcola l'equivalente finanziario odierno di una cifra futura), i quali regolano l'evoluzione temporale dei capitali, e di cui daremo ora una trattazione analitica.

TABELLA 1. Evoluzione temporale delle leggi di Capitalizzazione e Attualizzazione

1. Capitalizzazione

DEFINIZIONE 1.1. (Prestazioni e Controprestazioni)
Siano E e B due soggetti economici. Supponiamo che al tempo t_0, il soggetto E affida il capitale C_0 a B, il quale si impegna a restituire un capitale C_1, al tempo $t_1 > t_0$.
Si definisce *prestazione* la transizione $E \longrightarrow B$.
Si definisce *controprestazione* la transizione $B \longrightarrow E$.
La coppia (t_i, C_i) indica la situazione finanziaria all'istante $t \in \mathbb{N}$.

Durante una transizione finanziaria, sia essa una prestazione o una controprestazione, sono i soggetti E e B a concordare un criterio con cui regolamentare lo scambio di partite monetarie distinte in tempi diversi.

OSSERVAZIONE 1.1. Le situazioni finanziarie (t_0, C_0), e (t_1, C_1), sono definite equivalenti(o indifferenti), in un dato regime finanziario, se si ritiene equo lo scambio del capitale C_0, all'epoca t_0, con il capitale C_1, all'epoca t_1.
Il metodo corretto per valutare l'equivalenza tra due situazioni finanziarie (t_0, C_0), e (t_1, C_1), è quello di fissare un legame funzionale tra la situazione finanziaria iniziale e quella finale. Occorre dunque definire una funzione a tre variabili $m(t_0, t_2, C_0)$ tale che $C_1 = m(t_0, t_2, C_0)$.
La funzione $m(t_0, t_1, C_0)$ è detta *legge di capitalizzazione* .

DEFINIZIONE 1.2. (Legge di capitalizzazione o fattore montante)
Si definisce *legge di capitalizzazione* o *funzione montante*, ogni funzione

$$m : [0, \infty[\ x \ [0 \ , \infty[\ x \ [0, \infty[\to \mathbb{R}$$

continua e non negativa, tale che:

(1) per ogni $t_0 \leq t_1$, e per ogni $C, D \leq 0$:

$$m(t_0, t_1, C + D) \ = \ m(t_0, t_1, C) \ + \ m(t_0, t_1, D);$$

(2) per ogni $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, e per ogni $C \leq 0$:

$$m(t_0, t_1, C) \ < \ m(t_0, t_2, C);$$

(3) per ogni $t \geq 0$ ed ogni $C \geq 0$ vale:

$$m(t, t, C) \ = \ 0.$$

OSSERVAZIONE 1.2. La proprietà (1) sta a indicare che il capitale di un investimento può essere frazionato senza alterare il risultato della capitalizzazione. Questo aspetto della funzione montante non è molto coerente con la realtà, in quanto nel mondo deli affari a grandi investimenti corrispondono talora migliori trattamenti rispetto a quelli piccoli.
La proprietá (2) mostra che più duraturo è un investimento, tanto maggiore sarà la sua capitalizzazione.
La durata dell'investimento è data dalle quantità

$$\Delta_1 = (t_1 - t_0) \qquad \text{e} \qquad \Delta_2 = t_2 - t_0$$

La proprietà (3) indica che un capitale non aumenta se non viene investito, e in termini di capitalizzazione coincide con una durata nulla dell'investimento.

Nella pratica, si suppone che identiche durate temporali di un investimento collocate in diversi istanti temporali, generino le stesse capitalizzazioni. Fissando l'istante iniziale dell'investimento al tempo $t_0 = 0$, è possibile considerare la legge di capitalizzazione in funzione di due variabili, ossia t che è la durata dell'investimento, e C, che è il capitale investito, ottenendo una funzione montante del tipo $m(0,t,C) = m(t,C)$.

DEFINIZIONE 1.3. (Funzione di capitalizzazione)
Si definisce *legge di capitalizzazione* o *funzione montante*, ogni funzione

$$m : [0,\infty[\; x \; [0,\infty[\to \mathbb{R}$$

continua e non negativa, tale che:

(1) per ogni $t \geq 0$, e per ogni $C,D \geq 0$:

$$m(t,C+D) = m(t,C) + m(t,D);$$

(2) per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2$, e per ogni $C \geq 0$:

$$m(t_1,C) < m(t_2,C);$$

per ogni $C \geq 0$ vale:

$$m(0,C) = 0.$$

TEOREMA 1.1. *(Monotonia della funzione di capitalizzazione)*
Siano $C,C_1,C_2 > 0$ *con* $C_1 < C_2$*,* $t > 0$*, allora:*

$$C < m(t,C) \tag{2.1}$$

$$m(t,C_1) < m(t,C_2) \tag{2.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Che $C < m(t,C)$, segue dai punti (2) e (3) della definizione (1.3), in quanto:

$$C = m(0,C) < m(t,C).$$

Per quanto riguarda $m(t,C_1) < m(t,C_2)$, basta osservare che :

$$m(t,C_2) = m(t,C_2 - C_1 + C_2) = m(t,C_2 - C_1) + m(t,C_1)$$

per

$$m(t,C_2 - C_1) > 0$$

segue la tesi. □

DEFINIZIONE 1.4. (Situazioni finanziarie equivalenti)
Due situazioni finanziarie (t_0,C_0), e (t_1,C_1) si dicono equivalenti se vale:

$$C_1 = m(t_0,t_2,C_0)$$

per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2$, e per ogni $C \geq 0$:

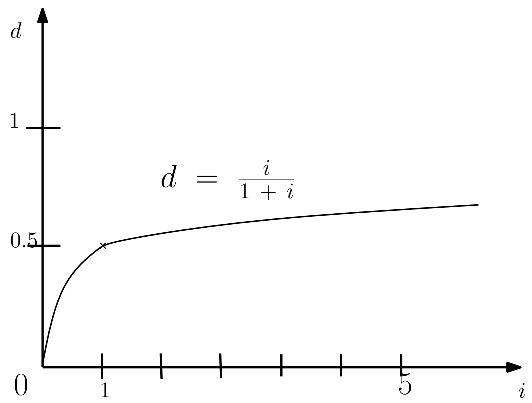
$$m(t_1,C) < m(t_2,C)$$

DEFINIZIONE 1.5. (Valore attuale, Montante...)
Siano (t_0, C_0), e (t_1, C_1) due situazioni finanziarie equivalenti.
Definiamo:

- **Valore attuale:** C_0 è il valore attuale di C_1, e si indica con V;
- **Montante o capitale finale:** C_1 è il montante o capitale finale di C_0 al tempo t_1, e si indica con M;
- **Interesse:** La differenza $C_1 - C_0$ determina l'interesse, e si indica con I;
- **Tasso d'interesse:** Questo tasso è l'interesse riferito ad una unitá di capitale iniziale relativo a $[t_0, t_1]$, ed è dato da $i = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$.
  Per $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, abbiamo il tasso unitario d'interesse (tui);
- **Sconto:** Lo sconto è dato dalla differenza tra il il montante e il valore attuale, ossia $M - V$, e si indica con S;
- **Tasso di sconto:** Questo tasso, è lo sconto riferito ad una unitá di capitale finale relativo a $[t_0, t_1]$, ed è dato da $d = \frac{C_1 - C_0}{C_1}$.
  Per $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, abbiamo il tasso unitario di sconto.

OSSERVAZIONE 1.3. (Relazione tra i e d)
Il tasso d'interesse e quello di sconto, sono messi in relazione dalla seguente formula: $d = \frac{i}{i+1}$. Infatti:

$$\frac{d}{i} = \frac{C_0}{C_1} = \frac{1}{\frac{C_1}{C_0}} = \frac{1}{\frac{C_1 - C_0 + C_0}{C_0}} = \frac{1}{\frac{C_1 - C_0}{C_0} + 1} = \frac{1}{1+i}$$



Si noti che per ogni operazione finanziaria, in un medesimo periodo di riferimento, il tasso di interesse i è sempre maggiore del tasso di sconto d corrispondente, e d è funzione crescente di i.

DEFINIZIONE 1.6. (Funzione additiva $\mathbb{R}$, di Cauchy)
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è addittiva se per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{2.3}$$

Questa proprietà, sta ad indicare che una funzione può essere additivamente scindibile.

Mostreremo che, sotto opportune ipotesi, esiste una unica struttura che la verifica, ed è la funzione $f(x) = \lambda\, x$, per $\lambda \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 1.2. *(Cauchy, 1821)*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e additiva. Allora:

$$f(x) = f(1)\, x \tag{2.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo f continua e addittiva. Ne segue dalla definizione(1.6) che $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$ Ponendo

$$f(x) = \int_0^1 f(x)dy$$

e usando l'additività, otteniamo che:

$$f(x) = \int_0^1 f(x)dy = \int_0^1 [f(x) + f(y) - f(y)]dy = \int_0^1 [f(x+y) - f(y)]dy$$

Applicando un cambio variabile per $u = x + y$, a cui consegue una variazione dell'intervallo di integrazione $[0,1] \overset{u=x+y}{\to} [x, x+1]$, otteniamo che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(u)du - \int_0^1 f(y)dy$$

e derivando f rispetto x:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= f(x) + f(1) - f(x) \\ &= f(1) \end{aligned}$$

da cui l'ugualianza

$$f'(x) = f(1)$$

e quindi:

$$\int_0^x f'(\xi)d\xi = \int_0^x f(1)d\xi$$
$$f(x) - f(0) = f(1)x$$

da cui la tesi. □

Dal teorema (1.2) segue la proprietà della scindibilità moltiplicativa di funzioni che verificano la seguente identità:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{2.5}$$

TEOREMA 1.3. *(Cauchy)*
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non identicamente nulla tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ valga (2.5). Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale:

$$f(x) = e^{\lambda\, x}$$

DIMOSTRAZIONE. Prima di dimostrare il teorema di Cauchy, supponiamo che f sia soluzione dell'equazione (2.5), e distinguiamo i seguenti casi:

- Se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R} : f(\bar{x}) = 0$, allora f è identicamente nulla ed è una soluzione banale di (2.5):

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\bar{x} + x - \bar{x}) = f(\bar{x} - x)f(\bar{x}) = 0;$$

- Se invece $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$, allora la funzione è strettamente positiva:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x + x) = f(x)f(x) = |f(x)|^2 > 0.$$

Sia f una soluzione non banale di (2.5), allora in base alle considerazioni appena fatte, abbiamo che: $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)f(y) \\ \Rightarrow \ln[f(x+y)] &= \ln[f(x)f(y)] = \ln f(x) + \ln f(y) \end{aligned}$$

Indico con $g(x) = \ln f(x)$ soluzione di una funzione additiva, allora abbiamo che posto $\delta = g(1) = \ln f(1)$ otteniamo che:

$$\ln f(x) = \delta x$$

Passando all'esponenziale, e ponendo $\lambda := e^{\delta}$ otteniamo la tesi. □

TEOREMA 1.4. *(Teorema di rappresentazione)*
Le funzioni di capitalizzazione in due variabili sono tutte e solo quelle nella forma:

$$m(t,s,C) = Cf(t,s) \tag{2.6}$$

dove $f(t,s)$ è *il fattore montante o fattore di capitalizzazione.*

DIMOSTRAZIONE. Fissata la coppia (t, s), per la proprietá additiva di f, abbiamo che:

$$\forall\, C, D > 0,\ m(t,s,C + D) = m(t,s,C) + m(t,s,D)$$

La tesi segue dal fatto che, il teorema (1.3) assicura l'esistenza di uno scalare $f(t,s)$ per cui $m(t,s,C) = Cf(s,t)$. □

OSSERVAZIONE 1.4. Nel caso di una variabile, si ha che

$$m(t,C) = Cf(t).$$

DEFINIZIONE 1.7. (Fattore montante)
Una funzione $f(t)$ è un fattore montante per la legge di capitalizzazione $m(t,C)$, se verifica le seguenti proprietá:

(1) $f(t)$ definita per $0 \leq t < T$;
(2) per $t = 0, f(0) = 1$;
(3) $f(t)$ è non decrescente:
  - se $0 \leq t_1 \leq t_2$, allora $f(t_1) \leq f(t_2)$;
  - se f è differenziabile, allora $f'(t) \leq 0$.

ESEMPIO 1.1. La funzione

$$f(t) = \frac{2 + e^t}{3}, \quad t \geq 0,$$

è un fattore di capitalizzazione o fattore montante:

(1) $f(t) \geq 0$;
(2) $f(0) = 1$;
(3) $f(t)$ è non decrescente[1].

ESEMPIO 1.2. Data la funzione

$$f(t) = \frac{2}{1 + e^{kt}}$$

determiniamo per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, la funzione è un fattore montante.

(1) Il denominatore è non nullo $\forall t \geq 0$ e $\forall k \in \mathbb{R}$;
(2) $f(0) = 1$;
(3) La funzione è non decrescente se la derivata prima $f'(t) = -\frac{2ke^{kt}}{(1 + e^{kt})^2}$ è non negativa: $f'(t) > 0$ per ogni $k < 0$.

La funzione f è quindi un fattore montante $\forall\ k < 0$.

DEFINIZIONE 1.8. (Intensità d'interesse)
Consideriamo l'interesse $I(t_1,t_2)$ prodotto dal capitale C, nell'intervallo di tempo (t_1,t_2). Il tasso di interesse sarà allora:

$$\begin{aligned} i(t_1,t_2) &= \frac{m(t_2,C) - m(t_1,C)}{m(t_1,C)} = \frac{Cf(t_2) - Cf(t_1)}{Cf(t_1)} \\ &= \frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_1)} \end{aligned}$$

Posto $\Delta t = t_2 - t_1$, definiamo *intensità d'interesse*, il rapporto:

$$\frac{i(t_1,t_2)}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\Delta t}\frac{1}{f(t_1)}$$

DEFINIZIONE 1.9. (Tasso istantaneo di interesse o forza d'interesse)
Sia $f(t)$ una funzione differenziabile. Definiamo *tasso istantaneo d'interesse* o *forza d'interesse* la funzione:

$$\delta t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{i(t_1,t_2)}{\Delta t} = \frac{f'(t)}{f(t)} \tag{2.7}$$

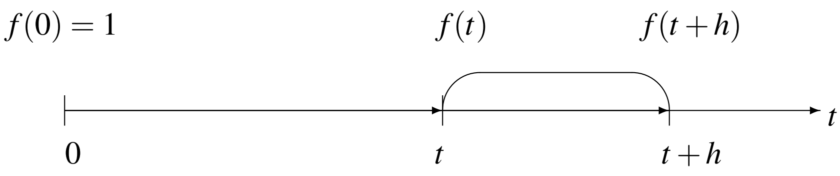
Questa uguaglianza deriva dal fatto che, essendo f differenziabile abbiamo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{i(t_1,t_2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{\Delta t}\frac{1}{f(t_1)} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

[1]Abbiamo che $f(t)$ è non decrescente,in quanto la sua derivata prima è non negativa:

$$f'(t) = \frac{e^t}{3} \geq 0, \forall t \geq 0$$

La forza d'interesse individua univocamente la legge di capitalizzazione corrispondente.
Consideriamo una fattore montante $f(t)$ definito in un intervallo temporale $(t,t+h), h \geq 0$, e mostriamo come esso è defterminato dalla forza d'interesse $\delta(t)$.



Montante in t

Effetto del reimpiego degli interessi maturati istante per istante

$$f(t+h) \; = \; f(t) \; + \; \underbrace{f(t)\delta(t)h + (o(h))}_{interessi\ maturati\ da\ t\ a\ t+h}$$

Montante in $t+h$ di un'unità di capitale investito in $t = 0$

TABELLA 2. Relazione tra fattore montante e forza d'interesse

$$\begin{aligned} f(t+h) &= f(t) \; + \; f(t)\delta(t)h + (o(h)) \\ f(t+h) \; - \; f(t) &= f(t)\delta(t)h + (o(h)) \\ \frac{f(t+h) \; - \; f(t)}{h} &= f(t)\delta(t) + \frac{(o(h))}{h} \end{aligned}$$

Per $\lim_{h \to 0} \frac{(o(h))}{h} \; = \; 0$, otteniamo che:

$$f'(t) \; = \; f(t)\delta(t) \quad \equiv \quad \frac{f'(t)}{f(t)} \; = \; \frac{d \ln f(t)}{dt} \; = \; \delta(t)$$

$$f(t) \; = \; e^{\int_0^t \delta(t)} \quad per \quad \delta(t) = \delta = costante \quad \Rightarrow f(t) \; = \; e^{\delta}$$

Andiamo ora a caratterizzare i regimi di capitalizzazione.

1.1. Regime a capitalizzazione composta.

DEFINIZIONE 1.10. (Fattore montante scindibile)
Un fattore montante f è scindibile se, per ogni $t_1, t_2 > 0$ si ha:

$$f(t_1 \; + \; t_2) \; = \; f(t_1) f(t_2) \tag{2.8}$$

In termini pratici, sta a significare che il capitale finale impiegato per il tempo $t_1 \; + \; t_2$ non varia, se dopo aver investito il capitale iniziale per il

tempo t_1 lo si reinveste per un tempo t_2.
Per la legge di capitalizzazione vale dunque la seguente ugualianza:

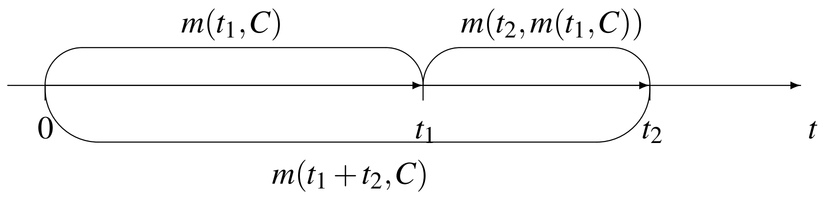


TABELLA 3. Fattore montante scindibile

$$m(t_1 + t_2,C) = m(t_2,m(t_1,C))$$

TEOREMA 1.5. *(Capitalizzazione composta in forma esponenziale) Le leggi di capitalizzazioni scindibili e definibili su su tutto l'asse reale, sono formulate solo nel seguente modo:*

$$m(t,C) = Ce^{\delta(t)} \tag{2.9}$$

dove δ è *la forza d'interesse, e la funzione (2.9)* è *la legge di capitalizzazione composta, nota anche come capitalizzazione esponenziale.*

ESEMPIO 1.3. Consideriamo la funazione

$$f(t) = \frac{2 + e^{kt}}{3}, \quad t \geq 0,$$

e fissiamo k, di modo che, dopo 3 periodi il montante di un euro sia $1,5$;

$$m(3,1) = 1,5$$

Determiniamo la forza di interesse associata e stabiliamo se la legge individuata è scindibile.
Fissiamo k:

$$m(t,C) = Cf(t) \Rightarrow 1,5 = \frac{2 + e^{3k}}{3} \Rightarrow k = 0,30543$$

In base all'esempio(1.1) il valore di k è accettabile.
Determiniamo ora la forza d'interesse:

$$f'(t) = k\frac{e^{kt}}{3}$$

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{k\frac{e^{kt}}{3}}{\frac{2 + e^{kt}}{3}}$$

$$\delta(t) = \frac{0.30543e^{0.30543t}}{2 + e^{0.30543t}}$$

In base alla definizione(1.10), la funzione f non è scindibile:

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 1,5 \\
f(2)f(1) &= (\frac{2 + e^{2(0.30543)}}{3})(\frac{2 + e^{0,30543}}{3}) = 1,4332 \\
\Rightarrow f(3) &\neq f(2)f(1)
\end{aligned}
$$

TEOREMA 1.6. *(Capitalizzazione composta)*
La capitalizzazione composta di un capitale C al tasso d'interesse i, per un periodo t, è *definito nel seguente modo:*

$$m(t,C) = C(1 + i)^t \tag{2.10}$$

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con M_t e I_t, il montante e l'interesse in funzione di t. Fissato un capitale $C > 0$, si ha che:

$$I_t = M_t - C = Ce^{\delta t} - C = C(e^{\delta t} - 1)$$

pertanto possiamo determinare la forza d'interesse in funzione dell'interesse per unità di capitale è e considerando per $t = 1$, il tasso unitario d'interesse:

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{I_1}{C} = e^{\delta} - 1 \\
e^{\delta} &= (i + 1) \\
\delta &= \ln(i + 1) \\
\Rightarrow m(t,C) &= Ce^{t\ln(i + 1)} = C(i + 1)^t
\end{aligned}
$$

Da cui la tesi(2.10). □

Si parla dunque di regime a capitalizzazione composta, quando il tempo di impiego di un capitale è suddiviso in più periodi e, alla fine di ognuno di essi, l'interesse prodotto si aggiunge al capitale stesso e, insieme ad esso, produce interesse nei periodi successivi.
La legge di formazione dei montanti, alla fine di ciascun periodo, può essere rappresentata nel seguente modo:

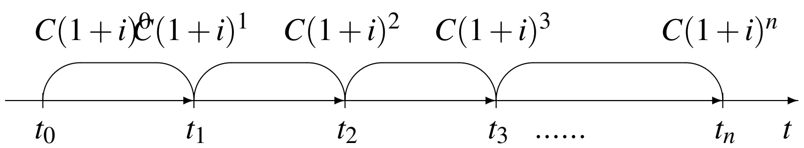


TABELLA 4. Formazione dei montanti in capitalizzazione composta

dove C è il capitale iniziale impiegato ad un tasso periodale i.
Se indichiamo con $M_1 = m(C,1)$ il montante alla fine del primo periodo di

capitalizzazione, con $M_2 = m(C,t)$, il montante relaitvo al secondo periodo, abbiamo che:

$$\begin{aligned}
M_1 &= C(1+i) \\
M_2 &= M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2 \\
M_3 &= M_2(1+i) = C(1+i)(1+i)(1+i) = C(1+i)^3 \\
&\ldots\ldots \\
M_n &= M_{n-1}(1+i) = C(1+i)(1+i)\ldots(1+i) = C(1+i)^n
\end{aligned}$$

Possiamo concludere dunque che il capitale C e i montanti M_t sono i termini di una progressione geometrica di ragione $(1+i)$.

ESEMPIO 1.4. Nel 2003 tizio versa presso una banca la somma di 3500 €. Dopo tre anni e mezzo versa una certa somma x.
Il montante complessivo che egli ritira nel 2009, calcolato al tasso annuo composto del $9,75\%$ è di $9440,13$ €.
Calcoliamo l'importo del secondo versamento.
Il montante ottenuto oggi è dato dalla somma dei due importi versati, capitalizzati fino ad oggi:

$$\begin{cases} M = & 3500(1+0,0975)^6 + x(1+0,0975)^{\frac{42}{12}} \\ M = & 9440,13 \end{cases}$$

imponendo l'uguaglianza si ricava l'importo x:

$$x = \frac{9940,13 - 3500(1 + 0,0975)^6}{(1 + 0,0975)^{\frac{42}{12}}} = 2760.94$$

ESEMPIO 1.5. Al tasso unitario di interesse del 6% quanto tempo è necessario per raddoppiare il capitale investito in un regime di interesse composto?
Per

$$m(t,C) = C(1 + i)^t \Rightarrow 2C = C(1 + i)^t \Rightarrow 2 = (1 + i)^t$$

Per determinare il tempo applichiamo la funzione logaritmica all'ultima uguaglianza e otteniamo

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= t\ln(1 + 10) \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)} \\
t &= \frac{\ln 2}{\ln(1 + \frac{6}{100})} = \frac{\ln 2}{\ln(\frac{106}{100})} = \frac{\ln 2}{\ln(\frac{53}{50})} \\
t &= \frac{\ln 2}{\ln 53 - \ln 50} \cong 11,89566
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque che il tempo necessario a raddoppiare il capitale è 11 anni e 11 mesi circa[2].

OSSERVAZIONE 1.5. Dall'esempio precedente otteniamo una formula risolutiva per un problema in cui si chiede di determinare il tempo t_λ necessario per generare il capitale λC:

$$t_\lambda = \frac{\ln \lambda}{\ln(1+i)} \tag{2.11}$$

1.2. Capitalizzazione semplice.

DEFINIZIONE 1.11. (Fattore di capitalizzazione ad interessi additivi)
Un fattore di capitalizzazione $f(t)$ si dice ad interessi additivi se $\forall t_1, t_2 > 0$ si ha:

$$f(t_1) + f(t_2) = f(t_1 + t_2) + 1 \tag{2.12}$$

L'idea della definizione è facilmente deducibile se scriviamo la condizione(2.12)nel seguente modo:

$$f(t_1) + 1 - 1 + f(t_2) = f(t_1 + t_2) + 1$$
$$(f(t_1) - 1) + (f(t_2) - 1) = f(t_1 + t_2) - 1$$

Essendo l'interesse per unità di capitale definito come:

$$I_t = \frac{Cf(t) - C}{C} = f(t) - 1$$

abbiamo che per caratterizzare la legge di capitalizzazione ad interressi additivi occorre risolvere l'equazione funzionale (2.12).

TEOREMA 1.7. *(Fattore di capitalizzazione a interessi additivi)*
I fattori di capitalizzazione a interessi additivi hanno la forma:

$$f(t) = 1 + \alpha t \tag{2.13}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la relazione (2.12).
Posto $g(t) = f(t) - 1$, otteniamo che:

$$g(t_1) + g(t_2) = g(t_1 + t_2)$$

e, per il teorema (1.2), esiste un $\alpha > 0$ tale che per ogni $t > 0$,si ha:

$$g(t) = \alpha t \Rightarrow f(t) - 1 = \alpha t$$

da cui la tesi. □

DEFINIZIONE 1.12. (Capitalizzazione semplice)
Definiamo legge di capitalizzazione semplice o lineare ogni legge di capitalizzazione il cui fattore montante è a interessi addittivi.

[2]Se consideriamo il risultato $t = [t] + \{t\}$ abbiamo che la parte intera indica il numero degli anni, mentre se moltiplichiamo la parte frazionaria per i dodici mesi dell'anno otteniamo una approssimazione del numero dei mesi.

La legge di capitalizzazione semplice è definita dalla formula:

$$m(t,C) = C(1 + \alpha i) \tag{2.14}$$

La caratteristica principale del regime finanziario dell'interesse semplice è che l'interesse è proporzionale al capitale iniziale e al tempo dell'impiego:

$$I_t = m(t,C) - C = Cf(t) - C = C(f(t) - 1) = C\alpha t$$

dove α è il tasso unitario di interesse.Di fatti:

$$i = \frac{I_1}{C} = \alpha$$

La capitalizzazione semplice non è scindibile: il fattore di capitalizzazione è tale che

$$f(t_1 + t_2) < f(t_1)f(t_2)$$

1.3. Capitalizzazione mista.

DEFINIZIONE 1.13. La legge di capitalizzazione mista è data dalla combinazione dei regimi di capitalizzazione composta e semplice, ed è così definita:

$$m(t,C) = C(1 + i)^{[t]}(1 + (t - [t]\,i) \tag{2.15}$$

in cui $t \; =:= \; max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$ è la parte intera di t.

Il regime a capitalizzazione mista, è applicato quando la durata dell'impiego non è un multiplo del periodo di capitalizzazione.
Se t è la durata dell'impiego, allora lo si può scomporre in

$$t = [t] + \{t\}$$

dove $[t]$ indica il numero intero di periodi, mentre $\{t\}$ è la parte frazionaria, con $0 \leq \{t\} \leq 1$.
In questi casi per il calcolo del montante si applica il regime a capitalizzazione composta per il numero intero, e quello di capitalizzazione semplice per la parte frazionaria.

ESEMPIO 1.6. Calcolare il montante prodotto dal capitale di €8000 impiegato per 6 anni e 3 mesi, al tasso annuo di 10%. Applichiamo la capitalizzazione mista:

$$m(6 + \frac{3}{12}) = 8000(1 + 0,10)^6(1 + 0,10\,\frac{1}{4}) = 14527,8$$

Il montante è dunque di €14527,8.

ESEMPIO 1.7. Il capitale di €5000 ha maturato al tasso annuo di $i = 0,025$, il montante di €8500.
Determiniamo il tempo di capitalizzazione in regime misto.
Per trovare il numero intero degli anni, risolviamo il problema come se fossimo in regime composto:

$$8500 = 5000(1 + 0,025)^t \Rightarrow t = 21,4894 \Rightarrow [t] = 21$$

Sostituendo questo valore nella (2.15), otteniamo che:

$$8500 = 5000(1+i)^{21}(1+0,025\{t\})$$

da cui

$$\{t\} = 0,486267 \Rightarrow 360\,x\,0,486267 = 175,056$$

dove 175 giorni equivalgono a 5 mesi e 25 giorni.[3]

OSSERVAZIONE 1.6. (Liquidazione degli interessi in regime semplice) Nel regime finanziario ad interesse semplice, l'interesse viene liquidato solo al termine del tempo di impiego del capitale. Ad esempio, se un agente economico impiega un capitale C, al tasso annuo i, egli potrà riscuotere gli interessi solo al termine dell'anno. Qualora decidesse di non incassarli, e prolungare la durata dell'impiego, al termine del secondo anno la capitalizzazione darebbe un montante pari a $M = C(1+i)^2$. Dopo un numero intero n di anni, il montante ottenuto tramite la legge di capitalizzazione semplice va a coincidere con quello ottenuto dalla legge di capitalizzazione composta:

$$m(n,C) = C\underbrace{(1+i)(1+i)\ldots(1+i)(1+i)}_{n\ volte} = C(1+i)^n$$

Da queste considerazione, deriva la ragione dell'adozione del regime di capitalizzazione mista.

OSSERVAZIONE 1.7. (Capitalizzazione frazionata e tassi equivalenti) La legge di capitalizzazione ad interesse composto vale sia che il tasso è anuo, sia che il tasso è relativo ad un periodo di tempo che è una frazione di anno, purché il tempo sia calcolato assumendo come unità di misura il periodo di capitalizzazione.
Indichiamo con i_k il tasso relativo ad $\frac{1}{k}$ di anno. Si presenta ora il problema di definire la relazione che lega i due tassi i e i_k al fine d'essere equivalenti. Assumiamo come capitale €1, e come durata $t = 1 anno$, e imponiamo l'equivalenza tra i montanti:

$$(1+i) = (1+i_k)^k \tag{2.16}$$

In base a questa relazione segue che noto il tasso i_k, si può ricavare il tasso annuo equivalente:

$$i = (1+i_k)^k - 1$$

Viceversa, noto il tasso annuo, si può ricavare il tasso frazionario equivalente:

$$i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

[3]Nel computo dei giorni, in matematica finanziaria si considera l'anno commerciale, che a differenza di quello solare è formato da 360 giorni. In riferimento all'esempio, avremo che:

$$Mesi := \frac{175}{30} = 5,8, \quad Giorni := 175 - (5)30 = 25$$

Sviluppando la relazione di equivalenza mediante il binomio di Newton:

$$1 + i = (1 + i)^k = 1 + ki_k + \binom{k}{2} i_k^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

si deduce che:[4]

$$i > ki_k$$

dove il prodotto ki_k è il *tasso nominale annuo convertibile k volte*, e si indica con:

$$J_k = ki_k$$

mentre il tasso i è detto tasso effettivo annuo.
Nel caso del regime ad interessi semplici, l'equivalenza è presto deducibile:

$$1 + i = 1 + kj_k \Rightarrow j_k = \frac{i}{k} \tag{2.17}$$

Possiamo notare che il tasso nominale convertibile nel regime di interesse composto corrisponde all'equivalenza appena espressa tra il tasso annuo e il tasso periodale in regime di interesse semplice.
Il tasso nominale convertibile k volte nell'anno rappresenta la somma degli interessi che vengono corrisposti durante un anno per l'investimento di un capitale unitario $C = 1$, quando si conviene che l'interese sia pagato al termine di ogni k-esimo di anno.

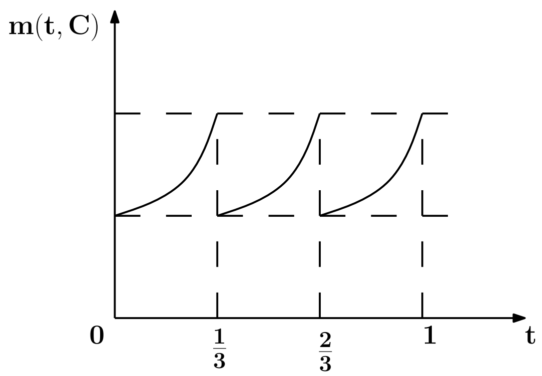


FIGURA 1. Montante al tasso nominale convertibile k volte

Essendo il tasso nominale J_k sempre minore del tasso effettivo annuo i, quando si stabiliscono le condizioni di un finanziamento, occorre prestare attenzione se il tasso di interessse proposto è quello effettivo o nominale.

ESEMPIO 1.8. Un istituto di credito prevede un rimborso attraverso rate mensili, ed enuncia un tasso nominale $J_{12} = 10\%$. Determinare il tasso

[4]Di fatti, per la disuguaglianza di Bernoulli otteniamo che:

$$(1 + j_k)^k > 1 + kj_k \Rightarrow (1 + j_k)^k - 1 > kj_k = i$$

effettivo annuo equivalente.
Per:

$$i = (1 + \frac{J_k}{k})^k - 1 \Rightarrow i = (1 + \frac{0,1}{12})^{12} - 1 = 10,47\%$$

ESEMPIO 1.9. Ipotizzaimo di investire €4500 per 2 anni e 3 mesi in una operazione finanziaria che frutta un tasso del 6% annuo.
Il montante realizzato è equivalente a quello che si otterrebbe con un tasso dello 0,5% mensile?
Esaminiamo questo problema nelle due capitalizzazioni semplice e composto e verifichiamo l'equivalenza fra i due tassi indicati:

(1) Capitalizzazione semplice.
Per $t = 2,25 anni$ e un tasso $i = 0,06$, calcoliamo il relativo montante:

$$m(2,25,\ 4500) = 4500(1+0,06\cdot 2,25) = 5107,5€$$

Ora calcoliamo il montante relativo al tasso 0,5% per il periodo indicato, ossia $t = 27 mesi$:

$$m(27,\ 4500) = 4500(1 + 0,005\cdot 27) = 5107,5€.$$

(2) Capitalizzazione composto.
Per $t = 2,25$ anni e un tasso $i = 0,06$, abbiamo che il montante corrrispondente è :

$$m(2,25,\ 4500) = 4500(1+0,06)^{2,25} = 5130,40€$$

Mentre il montante relativo al tasso del 0,5%, è:

$$m(27,\ 4500) = 4500(1 + 0,005)^{27} = 5148,69€$$

Si vede che i due tassi non sono equivalenti, visto che a parità di capitale e di tempo, non danno lo stesso montante.

OSSERVAZIONE 1.8. (forza istantanea d'interesse)
Riprendiamo la definizione(1.9), per caratterizzare la forza d'interesse nei regimi appena esaminati.

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt}\ln f(t)$$

In analisi matematica la forza d'interesse coincide con la derivata logaritmica del fattore montante.
Un aspetto perculiare del regime composto, è che la forza istantanea di interesse è costante nel tempo. Di fatti se consideriamo il fattore montante $f(t)$ relativo al regime composto e consideriamo la sua derivata lgaritmica

otteniamo che[5]:

$$f(t) = (1 + i)^t \Rightarrow \delta(t) = \frac{(1 + i)^t \ln(1+i)}{(1 + i)^t}$$
$$\Rightarrow \delta(t) = \ln(1 + i)$$

Mentre nel regime semplice, per $f(t) = (1 + it)$ abbiamo che:

$$\delta(t) = \frac{i}{1 + it}$$

Quando la forza d'interesse è indipendente dal tempo, si ha un regime di capitalizzazione scindibile. Dai risultati appena osservati, concludiamo che l'unico regime scindibile è quello composto.
Consideriamo il caso di un problema in cui viene richiesto di determinare il regime di capitalizzazione con forza d'interesse costante, uguale a $\delta > 0$. Occorre in questo caso risolvere un'equazione differenziale separabile:

$$\begin{cases} f'(t) = & \delta f(t) \\ f(0) = & 1 \end{cases}$$

da cui:

$$\int_1^f \frac{z}{dz} = \int_0^t \delta dt \Rightarrow \ln f = \delta t \Rightarrow f(t) = e^{\delta t}$$

Nel caso generale in cui la forza istantanea è una funzione $\delta(t)$, allora il fattore montante è determinato nel seguente modo:

$$f(t) = e^{\int_0^t \delta(s)ds}$$

ESEMPIO 1.10. Consideriamo un invesimento di €1250 per un anno e due mesi. Calcoliamo il fattore montante nei seguenti casi:

(1) $\delta(t) = 0.1$
(2)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.08 & primo\ anno \\ 0.12 & restante\ periodo \end{cases}$$

(3) $\delta(t) = 1 - e^{-t}$

In tutti i casii consideriamo l'anno come tempo di riferimento.
Nel primo caso, abbiamo una forza d'interesse costante, il che significa che dobbiamo determinare un fattore montante di regime composto. Innanzittutto f()= indichiamo il tempo $t = 1 + \frac{2}{12}$, e in secondo luogo applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^t \delta dt = \int_0^t 0.1 dt = [0.1t]_0^t$$

da cui otteniamo che:

$$f(t) = e^{0.1t}$$

[5]Ricordiamo che $\frac{d(1+i)^t}{dt} = (1+i)^t \ln(1+i)$, per $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$.

Calcoliamo il montante:

$$m(t,C) \;=\; Cf(t) \;\Rightarrow m(1+\frac{1}{6},1250) \;=\; 1250e^{\frac{7}{60}} \;=\; 1404.68$$

Nel secondo caso, abbiamo una funzione definita a tratti, tramite due funzioni costanti. Occorre in questo caso, procedere come nel punto (1), dividendo l'integrale in due addendi, ognuno per il periodo di riferimento. Essendo il tempo espresso in anni, la forza d'interesse è data da:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.08 & pert \in [0,1] \\ 0.12 & pert \in [1,\frac{7}{6}] \end{cases}$$

Avremo dunque che:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{7}{6}} \delta ds \;&=\; \int_0^1 \delta ds \;+\; \int_1^{\frac{7}{6}} \delta ds \\ &=\; \int_0^1 0.08 ds \;+\; \int_1^{\frac{7}{6}} 0.12 ds \;=\; [0.08s]_0^1 \;+\; [0.12s]_1^{\frac{7}{6}} \\ &=\; (0.08 \;-\; 0) \;+\; (0.12 \cdot \frac{7}{6} \;-\; 0.12) \;=\; 0.1 \end{aligned}$$

Calcoliamo il montante:

$$m(1+\frac{1}{6},1250) \;=\; 1250e^{\frac{1}{10}} \;=\; 1381.46$$

Nel terzo caso abbiamo che la forza d'interesse è espressa mediante una funzione. Occorre dunque trovare una primitiva. A tal scopo dividiamo la funzione da integrare in due addendi: 1 e e^{-t}:

$$\delta(t) \;=\; \delta_1 \;+\; \delta_2, con \delta_1 \;=\; 1], e \delta_2 \;=\; e^{-t}$$

Una primitiva di δ_1 è $F_1 \;=\; t$, mentre quella di δ_2 è $F_2 \;=\; -e^{-t}$. Abbiamo dunque che una primitica di $\delta(t)$ è

$$F(t) \;=\; F_1 - F_2 \;=\; t \;+\; e^{-t}$$

Applichiamo ora il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta(s) ds \;&=\; \int_0^1 (1 \;-\; e^{-s}) ds \;=\; [s \;+\; e^{-s}]_0^t \\ &=\; (t \;+\; e^{-t}) \;-\; (0 \;+\; e^0) \;=\; t \;+\; e^{-t} \;-1 \end{aligned}$$

Il fattore montante è dato da:

$$f(t) \;=\; e^{\,t \;+\; e^{-t} \;-1}$$

Calcoliamo il montante:

$$m(1+\frac{1}{6},1250) \;=\; 1250e^{\frac{7}{6} \;+\; e^{-\frac{7}{6}} \;-1} \;=\; 2016.2$$

1.4. Rappresentazione grafica e confronto fra le capitalizzazioni. Nella capitalizzazione composta, Il montante $m(t,C) = C(1+i)^t$, è rappresentato sul piano $\mathbb{R}^2$ da una funzione di tipo esponenziale, uscente dal punto $(0,C)$.

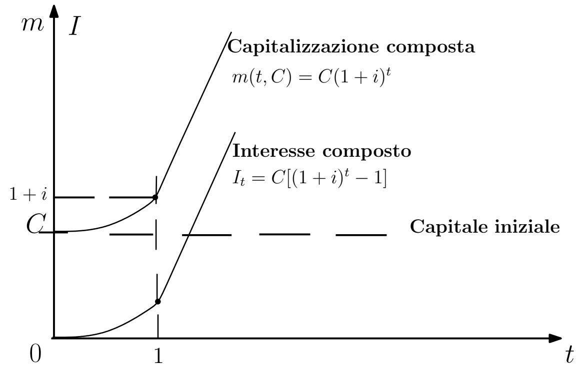
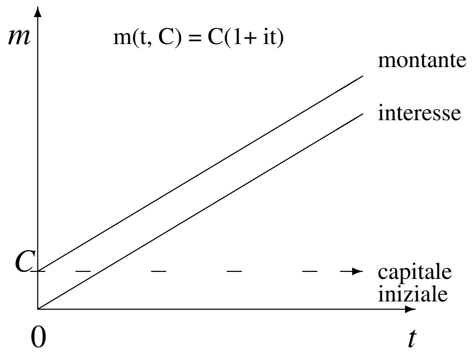


FIGURA 2. Rapprensentazione grafica Capitalizzazione Composta

Nella capitalizzazione semplice il montane $m(t,C) = (1+it)$ è una funzione lineare del tempo, rappresentata sul piano $\mathbb{R}^2$da una retta uscente dal punto $(0,C)$, e caratterizzata da una pendenza espressa dal coefficente angolare non negativo i. Comparando i grafici dei regimi appena considerati,



Le due funzioni $I_t = it$ e $m(t,C)(1+it)$, avendo lo stesso coefficente angolare i, rappresentano per $t \geq 0$ due rette parallele.

TABELLA 5. Rappresentazione grafica Capitalizzazione Semplice

si deducono le seguenti conclusioni:

- Per $0 < t < 1$, il montante della capitalizzazione semplice è maggiore rispetto a quello relativo alla capitalizzazione composta;
- Per $t > 0$, è il montante della capitalezzazione composta ad essere maggiore;
- Per $t = 1$, i due montanti coincidono.

TEOREMA 1.8. *(Confronto fra le capitalizzazioni)*
Siano $f_L(t)$ e $f_E(t)$ rispettivamente i fattori di capitalizzazione lineare ed

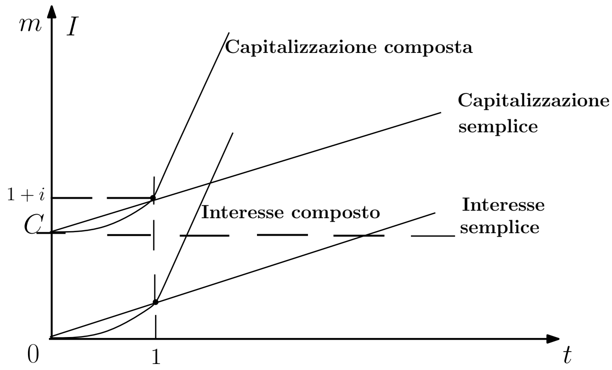


FIGURA 3. Confronto grafico Capitalizzazione Semplice e Capitalizzazione Composta

esponenziale, espressi in funzione dei tassi unitari di interesse nel seguente modo:

$$f_L(t) = 1 + it \quad e \quad f_E(t) = (1+i)^t$$

Valgono le seguenti affermazioni:

(1) *Se* $0 < t < 1$, *allora* $f_L(t) > f_E(t)$ *;*
(2) *Se* $t > 1$, *allora* $f_L(t) < f_E(t)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 < t < 1$, fissato $i > 0$ esiste $0 < \xi < i$ tale che:

$$\begin{aligned} f(i) &= f(0) + f'(0)i + \frac{1}{2}f''(\xi)i^2 \\ (1+i)^t &= 1 + it + \frac{1}{2}t(t-1)(1+\xi)^{t-2}i^2 \\ 0 < t < 1 &\Rightarrow \frac{1}{2}t(t-1)(1+\xi)^{t-2}i^2 < 0 \\ &\Rightarrow (1+i)^t < (1+it) \end{aligned}$$

abbiamo dimostrato la prima affermazione.
La seconda segue immediatamente per

$$t > 1 \Rightarrow \frac{1}{2}t(t-1)(1+\xi)^{t-2}i^2 > 0.$$

□

Nella pratica commerciale il regime finanziario più diffuso è quello dell'interesse composto, applicato praticamente in tutti gil ambiti finanziari.

2. Attualizzazione o sconto

ESEMPIO 2.1. In data 25 gennaio 2010, a causa di una improvvisa urgenza di liquidità, il sig. Rossi presenta allo sconto una cambiale di importo €3500, al tasso di interesse del 3% trimestrale, che scadrà il 12 dicembre 2011. Quale sarà l'importo disponibile?
L'operazione si può scematizzare nel seguente modo:

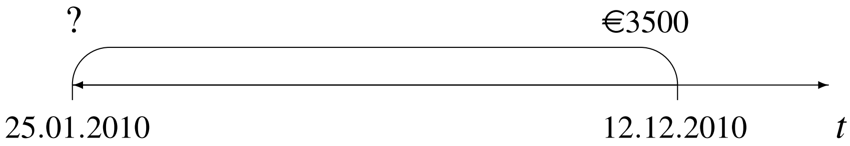


TABELLA 6. Schema dell'Attualizzazione

L'attualizzazione consente di stabilire oggi il valore attuale di un capitale con scadenza futura.
Se un soggetto possiede un credito M esigibile nel futuro e decide di cedere tale credito, in modo da avere subito disponibile il capitale $C_a < M$, compie una operazione di *sconto* o di *attualizzazione*.

DEFINIZIONE 2.1. (Legge di attualizzazione o di sconto)
Si definisce lgge di attualizzazione associata alla legge di capitalizzazione $m(t,C)$, la funzione

$$\alpha : [0,\infty[x[0,\infty[\to [0,\infty[$$

tale che, per ogni $(t,C) \in [0,\infty[x[0,\infty[$, si ha:

$$m(t,\alpha(t,C)) = m(t,C) = M \tag{2.18}$$

Dalla (2.18) deduciamo la sefuente equivalenza:

$$M = m(t,\alpha(t,C)) = \alpha(t,C)f(t) \Rightarrow \alpha = M\frac{1}{f(t)} = M\varphi(t)$$

dove $\varphi(t) = \frac{1}{f(t)}$ è il *fattore* di *attualizzazione* coniugato al fattore di capitalizzazione.

OSSERVAZIONE 2.1. La funzione di attualizzazione è univocamente determinata dalla funzione di capitalizzazione cui fa riferimento. E il fattore di attualizzazione è ben definito in forza del fatto che $f(t) > 0$.
Il valore attuale di un capitale disponibile ad una data futura deve essere tale che, capitalizzato fornisca alla stessa scadenza lo stesso importo. Se il capitale iniziale di un montante m(t, C), ottenuto con una legge di capitalizzazione, coincide con il valore attuale dello stesso montante calcolato con una legge di sconto, le due leggi si dicono *coniugate*.
I fattori di attualizzazione coniugati rispettivamente alle leggi lineare ed esponenziale sono:

$$\varphi_L(t) = \frac{1}{1 + it}, \quad \varphi_E(t) = \frac{1}{(1 + i)^t}$$

dove i denota il tasso unitario d'interesse.

PROPOSIZIONE 2.1. *(proprietà del fattore di sconto)*
Poiché $\varphi(t) = \frac{1}{f(t)}$, le proprietà del fattore di sconto si deducono immediatamente dalle proprietà di $f(t)$:

(1) $\varphi(t)$ è *continua;*
(2) $\varphi(t)$ è *non crescente (nel caso in cui* è *derivabile* $\Rightarrow \varphi'(t) < 0$*);*
(3) $\varphi(0) = 1$*;*
(4) $\varphi(t) > 0, \ \forall t > 0$.

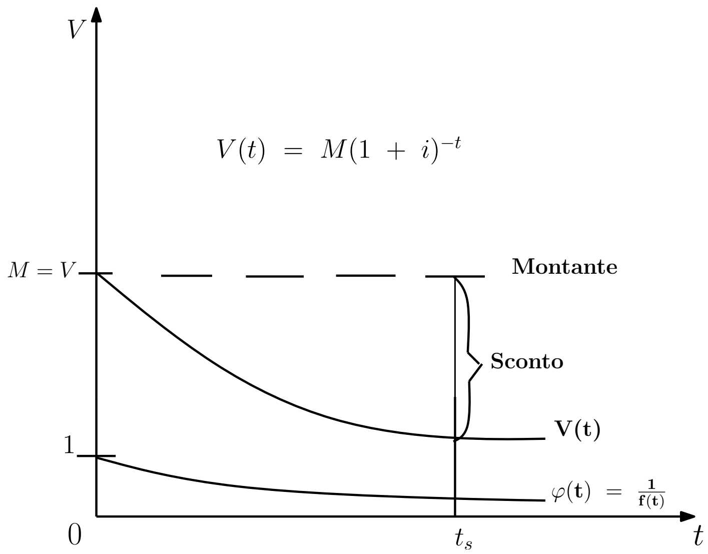


FIGURA 4. Rappresentazione del fattore di sconto e del Valore Attuale

OSSERVAZIONE 2.2. Quando consideriamo il valore attuale $V(t) = C$, ad esempio in regime di capitalizzazione semplice:

$$C = \frac{M}{1 + it}$$

il capitale M è il *valore nominale* del credito, o del debito esigibile nel tempo t , mentre il capitale C è anche detto *valore scontato*. Tra le due locuzioni, valore attuale e somma scontata, vi è una ben precisa differenza: si parla di somma scontata quando è riferito alla cessione di un credito o al pagamento anticipato di un debito (cambiale), mentre il valore attuale è riferito alla valutazione di un capitale M al tempo t.

ESEMPIO 2.2. Il signor Bianchi dispone che alla sua morte €100.000 del suo patrimonio vanno a costituire un fondo da dividere equamente fra le sue tre figlie, ciascuna delle quali ne prenderà possesso al compimento del $21 - esimo$ anno di età.
Ill Sig. Bianche muore quando le figlie hanno rispettivamente 19, 15 e 13 anni. Quanto erediterà ciascuna di esse, considerando che il fondo rende il 2% annuo in regime di interesse composto? Occorre determinare il valore attuale delle somme che andranno ad ereditare le tre figlie al compimento

del loro $21-esimo$ anno di età:

$$Ifiglia : V(21-19) = V(2) = (1+0.02)^{-2} = 0.9612$$
$$IIfiglia : V(21-15) = V(6) = (1+0.02)^{-6} = 0.8880$$
$$IIIfiglia : V(21-13) = V(8) = (1+0.02)^{-8} = 0.8535$$

Per determinare le quote richieste, occorre risolvere la seguente equazione:

$$V = K(0.9612 + 0.8880 + 0.8535) \text{con} V = 100.000€$$

$$\Rightarrow K = \frac{100.000}{2,7027} = 37.000€$$

$$Ifiglia : V(2) = 0.9612 \cdot 37.000 = 35.564€$$
$$IIfiglia : V(6) = 0.8880 \cdot 37.000 = 32.856€$$
$$IIIfiglia : V(8) = 0.8535 \cdot 37.000 = 31.580€$$

2.1. Sconto commerciale. Questo tipo di regime è molto usato prevalentemente nello sconto delle cambiali finanziarie.
Sia M il valore nominale del credito o del debito disponibilie dopo un tempo t, e sia d il tasso di sconto. Lo *sconto commerciale* è proporzionale al valore nominale M e al tempo di anticipo t, ed è dato da:

$$S_c = M \cdot d \cdot t$$

La relativa formula matematica del valore attuale o somma scontata è data da:

$$V(t,M,d) = M - S_c = M(1 - dt) = M\nu(t)$$

dove $\nu(t) = (1 - dt)$ è il *fattore di sconto*. Affinché lo sconto non risulti superiore al valore nominale, occorre che:

$$(1 - dt) > 0 \Rightarrow t < \frac{1}{d}$$

Graficamente, la somma scontata si rappresenta con una retta, essendo, una volta assegnati C e d, funzione lineare del tempo di anticipo t.

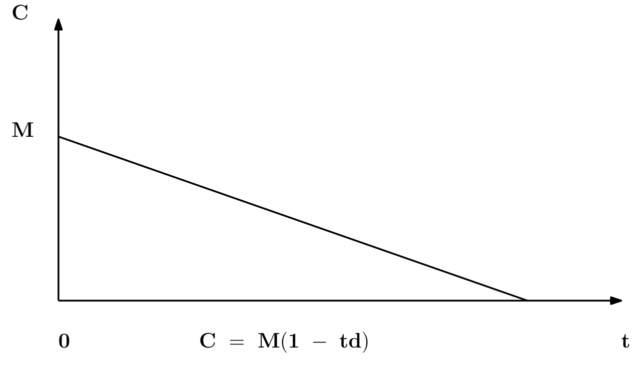


FIGURA 5. Grafico del valore attuale o somma scontata

Il regime di capitalizzazione coniugato del regime di sconto commerciale è dato da:

$$\upsilon(t) = \frac{1}{1 - dt} \qquad M(t,d) = C \cdot \frac{1}{1 - dt}$$

dove M è il montante del capitale C impiegato per un tempo t ad un tasso di sconto d che in questo caso è definibile come tasso di interesse anticipato. L'importo del corrispondente interesse anticipato è dato:

$$I = M - C = \frac{1}{1 - dt} - C = \frac{Cdt}{1 - dt} = Mdt$$

L'interesse anticipato prodotto dal capitale C è uguale allo sconto commerciale applicato al montante M, allo stesso tasso d, e per lo stesso tempo t. Fissato un tasso d, il montante M è funzione di t e si rappresenta con un arco di iperbole equilatera nell'intervallo $0 \leq t < \frac{1}{d}$, avente un asintoto verticale in $t = \frac{1}{d}$.

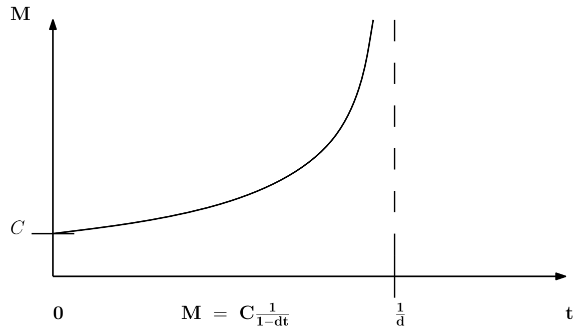
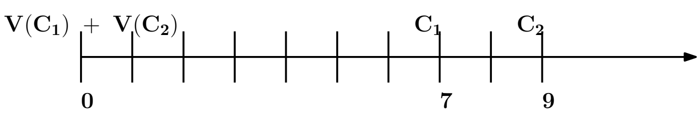


FIGURA 6. Grafico del montante

ESEMPIO 2.3. Il sig. Giacometti ha diritto ad incassare un certo capitale fra 7 mesi e un capitale pari ai $\frac{2}{3}$ del primo fra 9 mesi. Il valore attuale complessivo di questi capitali, calcolato con uno sconto commerciale al tasso del 9% è di 47.075€. Determinare l'importo di ciascun capitale.



$$d = 9\% \qquad t_1 = 7\text{mesi} \qquad t_2 = 9\text{mesi}$$

$$V(C_1) + V(C_2) = 47.075€ \qquad C_1 = ? \qquad C_2 = ?$$

Applichiamo la definizione di valore attuale in regime di sconto commerciale

$$V(C) = C(1 - dt)$$

e impostiamo la seguente equazione:

$$V(C_1) + V(C_2) = C_1(1 - 0{,}09 \cdot \frac{7}{12}) + C_2(1 - 0{,}09 \cdot \frac{9}{12})$$
$$47.075 = C_1(0{,}9475) + C_2(0{,}9325)$$

e risolviamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 47.075 = C_1(0{,}9475) + C_2(0{,}9325) \\ C_2 = \frac{2}{3}C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 47.075 = C_1(0{,}9475) + \frac{2}{3}(0{,}9325) \\ C_2 = \frac{2}{3}C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{47.075}{1{,}5691667} = 30.000€ \\ C_2 = \frac{2}{3}30.000 = 20.000€ \end{cases}$$

ESEMPIO 2.4. Il sig. Beige cede oggi un credito di €20.000, che scade tra quattro mesi, da oggi, in cambio del suo valore attuale, calcolato sottraendo da C il suo sconto commerciale al tasso di sconto del 20% annuo. Reimpiegando subito V per i prossimi quattro mesi in capitalizzazione semplice, al tasso di interesse del 21% annuo, alla fine il sig. Beige ottiene un montante M inferiore a C. Calcolare M, e calcolare quanto dovrebbe essere i per ottenere $M = C$.
Calcoliamo innanzittutto il valore attuale del credito ceduto:

$$V(20.000) = 20.000(1 - 0{,}2 \cdot \frac{4}{12}) = 18.666€$$

Capitalizzando questo valore per lo steso periodo con fattore di capitalizzazione semplice al 21% si ricava il montante M:

$$M = 18.666(1 + 0{,}21 \cdot \frac{4}{12}) = 19.973€$$

Determiniamo ora il valore del tasso i che consentirebbe di eguagliare il montante con il capitale ceduto, il che equivale a risolvere l'equazione $M(i) = C$:

$$18.666(1 + i \cdot \frac{4}{12}) = 20.000 \qquad \Rightarrow \qquad i = \frac{20.000 - 18.666}{18.666} \cdot 3$$

da cui $i \cong 0{,}214286$.

2.2. Sconto razionale e sconto commerciale. Poniamo a confronto lo sconto razionale, ossia il valore attuale in regime semplice, con lo sconto commerciale appena trattato. Siano dunque:

$$S_r = \frac{Mit}{1 + it} = \frac{Mdt}{1 + (t - 1)d}$$
$$S_c = Mdt$$

Dal grafico delle due funzioni si evince quanto segue:

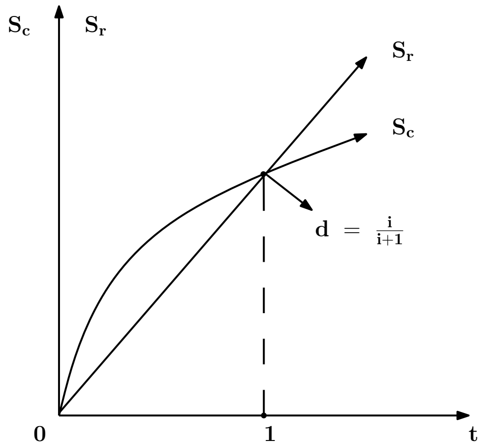


FIGURA 7. Grafico dello sconto razionale e commerciale

- Per $t < 1$, abbiamo che $S_r > S_c$;
- per $t = 1$, abbiamo che $S_r = S_c$;
- per $t > 1$, abbiamo che $S_r < S_c$.

CAPITOLO 3

Matematica applicata alle rendite finanziarie

Molte operazioni finanziarie comportano la valutazione di capitali esigibili in epoche diverse.
In matematica finanziaria il concetto di rendita è associato ad una succesione di capitali $R_1, R_2, \dots, R_n$ disponibili (esigibili o da pagare) a scadenze prefissate $t_1, t_2, \dots, t_n$(es. rate del mutuo).
L'importo R_k è detta *rata*, mentre l'epoca t_k in cui è disponibile la rata è detta *scandenza* k-esima.
La valutazione dei capitali viene fatta secondo le leggi di capitalizzazione e sconto trattate nel capitolo precedente.
Ogni intervallo $[t_k - t_{k-1}]$, si chiama *periodo di competenza*, e per $k = 1$ abbiamo il primo periodo di competenza.
Sia T il periodo di durata della rendita e supponiamo che la distanza temporale fra due versamenti o riscossioni successivi sia costante ed uguale all'unitaà di tempo secondo la quale è diviso l'intervallo $[0, T]$.
In funzione del periodo di copmpetenza, le rendite possono essere distinte e rappresentante nel seguente modo:

- Rendita anticipata, se la rata è esigibile alla fine del periodo di competenza;
- Rendita posticipata, se la rata è esigibile all'inizio del periodo di competenza;
- Rendita immediata, quando la prima rata della rendita è disponibile nel primo periodo di competenza;

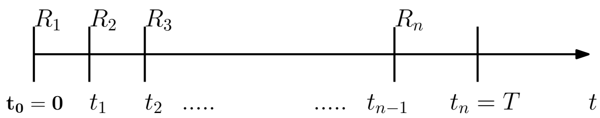


FIGURA 1. Rendita immediata anticipata

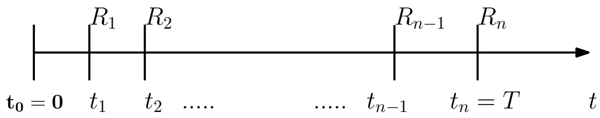


FIGURA 2. Rendita immediata posticipata

- Rendite differite di k periodi, quando la prima rata della rendita è disponibile nel k-esimo periodo;

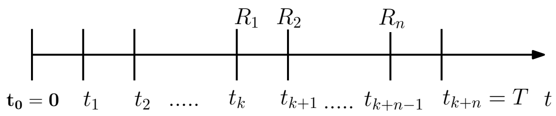


FIGURA 3. Rendita differita anticipata

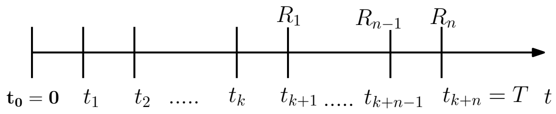


FIGURA 4. Rendita differita posticipata

Se le scadenze, ossia le epoche alle quali si riscuoteranno o si pagheranno le rate, sono equidistanti, a cadenza fisse (settimanali, mensili, annui..), allora le rendite sono dette periodiche. Infine in funzione della rata distinguiamo:

- Se $R_k = R, \ \forall k \in \mathbb{N}$, la rendita si dice costante;
- Se $R_k = 1, , \ \forall k \in \mathbb{N}$, la rendita si dice unitaria;
- Se il numero delle rate è finito, la rendita si dice temporanea(mutuo);
- Se il numero delle rate non è finito, la rendita si dice perpetua(titoli di stato).

Infine l'importo della rata di una rendita dipende dall'epoca in cui viene valutata, e in funzione del tempo distinguiamo:

- Valore attuale di una rendita, se la valutazione viene effettuata in un epoca che precede tutte le scadenze delle rate o coincide con la prima, ed è uguale alla somma dei valori attuali delle rate;

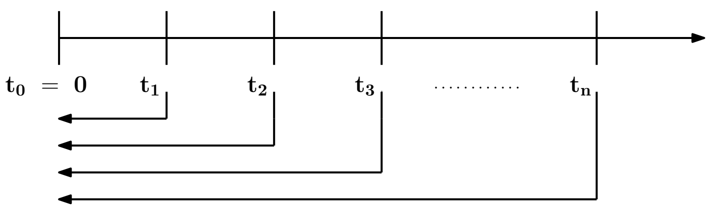


FIGURA 5. Valore attuale di una rendita

- Montante di una rendita, se la valutazione viene fatta in un epoca successiva alla scadenza di tutte le rate o coincide con l'ultima, ed èuguale alla somma dei montanti delle rate.

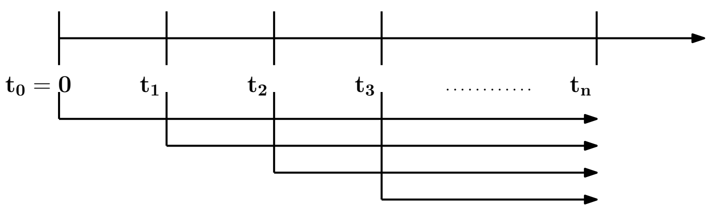


FIGURA 6. Montante di una rendita

1. Rendite temporanee

DEFINIZIONE 1.1. (Rendite temporanee)
Sia $n \in \mathbb{N}$. Si definisce rendita temporanea l'insieme finito di capitali $C_1, C_2, \ldots, C_s$, disponibili ai tempi t_s, per $s = 1, 2, \ldots, n$.
Il capitale C_s è detto *rata* s-esima, mentre t_s è detta valuta s-esima. Si usa scrivere:

$$R = (t_s, C_s)$$

La situazione finanziaria appena descritta può essere rappresentata sull'asse del tempo, nel seguente modo:

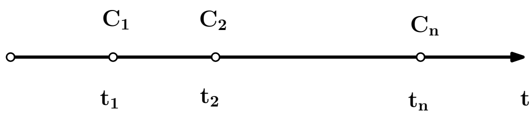


FIGURA 7. Rendita sull'asse temporale

Se per ogni $s \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, si ha che $t_s - t_{s-1} = \tilde{t}$, la rendita è detta $\tilde{t}$- periodica; per $\tilde{t} = 1$ la rendita è detta periodica.

DEFINIZIONE 1.2. (Montante di una rendita) Assegnata una rendita $R = (t_s, C_s)$, sia $f(t)$ un fattore montante.

$$M(R, t_n) = \sum_{k=1}^{n} C_k f(t_n - t_k)$$

è il montante di una rendita in t_n. In base al regime di capitalizzazione distinguiamo:

- Montante di una rendita in regime composto:

$$M(R, t_n) = \sum_{k=1}^{n} C_k (1 + i)^{t_n - t_k}$$

- Montante di una rendita in regime semplice:

$$M(R, t_n) = \sum_{k=1}^{n} C_k (1 + i(t_n - t_k))$$

Cominciamo a calcolare il valore di una *rendita unitaria temporanea di n rate posticipate* all'atto dell'ultimo versamento, ad un tasso di valutazione i relativo al periodo della rendita, in regime di capitalizzazione composta.
Rappresentiamo la rendita con il seguente schema temporale:
Applicando la definizione di montante risulta che il primo euro versato al tempo 1 è capitalizzato per $n-1$ periodi, il secondo, versato al tempo 2, è capitalizzato per $n-2$ periodi, e così via, fino all'ultima rata. Abbiamo dunque che il montante della rendita è uguale alla somma dei montanti delle

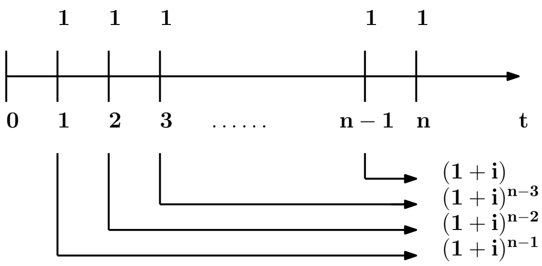


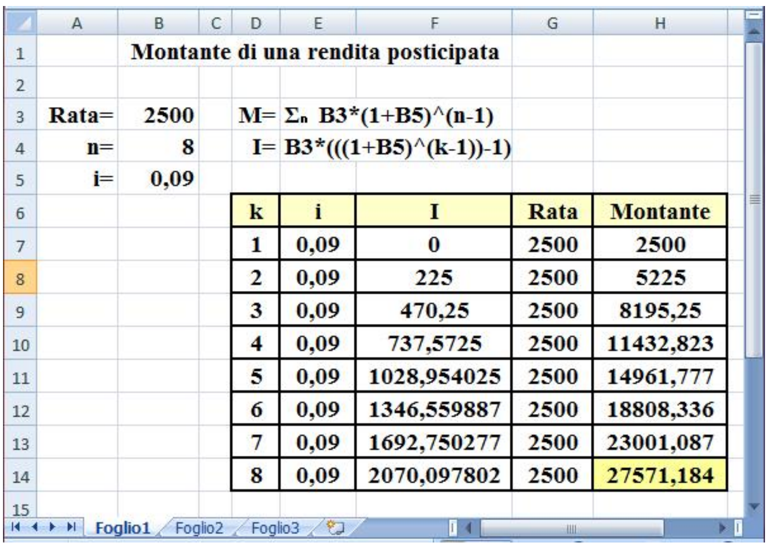
FIGURA 8. Rendita unitaria temporanea di n rate posticipate

singole rendite, da cui:

$$\begin{aligned}
M(R,t_n) &= (1\,+\,i)^{n-1} + (1\,+\,i)^{n-2} + \ldots + (1\,+\,i) + 1\\
&= 1 + (1\,+\,i) + \ldots + (1\,+\,i)^{n-2} + (1\,+\,i)^{n-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(1+i)^{k-1} = \frac{1\,-\,(1\,+\,i)^n}{1\,-\,(1\,+\,i)}\\
&= \frac{(1\,+\,i)^n\,-\,1}{i}
\end{aligned}$$

ESEMPIO 1.1. Una rendita è costituita da 8 rate annue di €2500. Calcolare il montante della rendita al tasso annuo del 9%, all'atto dell'ultimo versamento.

$$\begin{aligned}
M(R,8) &= \sum_{k=1}^{8} 2500(1+0,09)^{k-1} = 2500\frac{(1+0,09)^8\,-\,1}{0,09}\\
&= 2500\cdot 11.0284738 = 27.571,184€
\end{aligned}$$



Montante di una rendita posticipata

Rata=	2500	M=	Σₙ B3*(1+B5)^(n-1)
n=	8	I=	B3*(((1+B5)^(k-1))-1)
i=	0,09		

k	i	I	Rata	Montante
1	0,09	0	2500	2500
2	0,09	225	2500	5225
3	0,09	470,25	2500	8195,25
4	0,09	737,5725	2500	11432,823
5	0,09	1028,954025	2500	14961,777
6	0,09	1346,559887	2500	18808,336
7	0,09	1692,750277	2500	23001,087
8	0,09	2070,097802	2500	27571,184

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 9. Montante di una rendita posticipata, esempio(1.1).

Se si vuole calcolare il montante in una epoca posteriore alla scadenza dell'ultima rata, indicando con k l'intervallo di tempo che decorre dalla scadenza dell'ultima rata all'epoca della valutazine, occorre capitalizzare il montante trovato, per il tempo k:

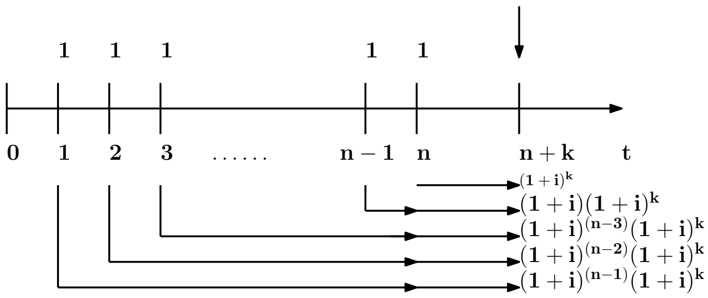


FIGURA 10. Montante di una RTP, calcolata in una epoca k dopo la scadenza dell'ultima rata.

$$M(R, t_{n+k}) = M(R, t_n)(1 + i)^k$$

Se $k = 1$ allora si ha che il montante è valutato un periodo dopo l'ultimo versamento, e in queso caso avremo il *montante di una rendita anticipata*. La distinzione fondamentale tra montante di rendite posticipate e anticipate è

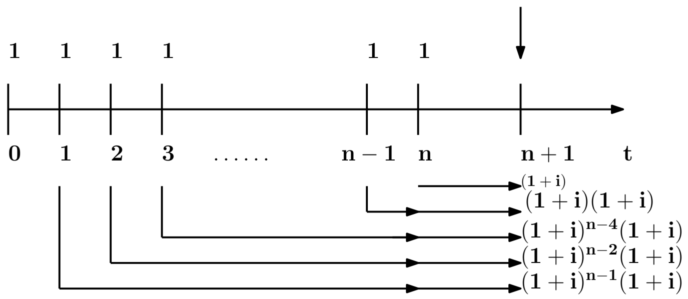


FIGURA 11. Montante di una rendita anticipata

dato solo dal fatto che nel primo caso la valutazione è fatta all'atto dell'ultimo versamento, mentre nel secondo caso la valutazione è fatta un periodo dopo la scadenza dell'ultimo versamento.

ESEMPIO 1.2. Consideriamo l'esempio (1.1) e calcoliamo il montante dopo 3 anni e 2 mesi dall'ultimo versamento.
Essendo il tasso annuo, avremo che $k = 3 + \frac{2}{12}$. Basta ora capitalizzare il montante determinato in (1.1):

$$\begin{aligned} M(R, 8 + (3 + \frac{2}{12})) &= 25.571 \cdot (1 + 0{,}09)^{3 + \frac{2}{12}} \\ &= 25.571 \cdot 1{,}313763656 \\ &= 33.594€ \end{aligned}$$

Come per il montante è possibile calcolare il *valore attuale di una rendita unitaria temporanea*.

DEFINIZIONE 1.3. (Valore attuale della rendita)

Assegnata la rendita $R = (t_s, C_s)$, sia $\varphi(t)$ un fattore di sconto.

$$V(0,R) \; = \; \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi(t_k)$$

è il valore attuale della rendita. In base alle capitalizzazioni distinguiamo:

- Valore attuale di una rendita in regime composto:

$$V(0,R) \; = \; \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1 \, + \, i)^{t_k}}$$

- Valore attuale di una rendita in regime semplice:

$$V(0,R) \; = \; \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1 \, + \, it_k)}$$

- Valore attuale di una rendita in regime di sconto commerciale:

$$V(0,R) \; = \; \sum_{k=1}^{n} C_k (1 \, - \, dt_k), \qquad \text{per} \qquad t_k < \frac{1}{d}$$

Consideriamo il *valore attuale di una rendita unitaria temporanea di n rate posticipate*, e diamone innanzittutto una rappresentazione temporale:

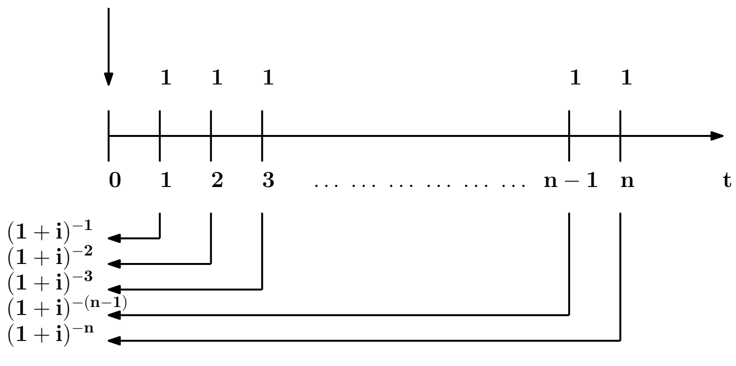


FIGURA 12. Valore attuale di una rendita unitaria posticipata

In regime di capitalizzazione composta, definiamo il valore attuale di una rendita unitaria valutata un periodo antecedente alla prima rata di scandenza, nel seguente modo :

$$\begin{aligned} V(R,0) &= (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \ldots + (1+i)^{-n} \\ &= (1+i)^{-1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} \\ &= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ &= \frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}} \end{aligned}$$

La valutazione delle rendite dipende, oltre dalle rate e dalle valute, anche dal tempo di riferimento. Infatti abbiamo visto che il montante di una rendita viene valutato al tempo t_n, mentre il valore attuale al tempo t_0. Si pone ora il problema di valutare una rendita in una epoca intermedia, ossia in $\tilde{t} \in [t_0, t_n]$:

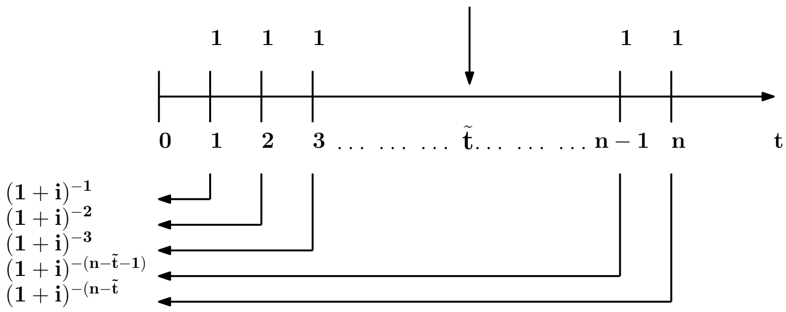


FIGURA 13. Valore di una rendita in epoca intermedia $\tilde{t} \in]t_0, t_n[$.

Se $\tilde{t}$ è un istante intermedio, come nella rappresentazione, allora ha senso valutare i montanti delle valute precedenti $\tilde{t}$ e i valori attuali di quelle seguenti. Supponiamo $t_{k-1} \leq \tilde{t} < t_k$. Il valore della rendita $R = (t_k, C_k)$ è dato da :

$$R(\tilde{t}, C_s) = \sum_{s=1}^{k-1} C_s f(\tilde{t} - t_s) + \sum_{s=k}^{n} C_s \varphi(t_s - \tilde{t})$$

Anche in questo caso evidenziamo la valutazione della rendita nei due regimi finanziari principali:

- Rendita nel regime esponenziale (complesso):

$$\begin{aligned} R(\tilde{t}, C_s) &= \sum_{s=1}^{k-1} C_s (1+i)^{(\tilde{t} - t_s)} + \sum_{s=k}^{n} C_s (1+i)^{-(t_s - \tilde{t})} \\ &= \sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{(\tilde{t} - t_s)} \end{aligned}$$

- Rendita nel regime lineare (semplice):

$$R(\tilde{t}, C_s) = \sum_{s=1}^{k-1} C_s (1 + i(\tilde{t} - t_s) + \sum_{s=k}^{n} C_s \frac{1}{(1+i)(t_s - \tilde{t})}$$

In entrambi i casi appena evidenziati per $t = t_n$, avremo il montante, mentre per $t = t_0$, avremo il valore attuale della rendita nella capitalizzazione attinente.
Inoltre per la proprietà di scindibilità della capitalizzazione composta si può ricavare la seguente relazione fra il valore attuale e il montante:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k(1 + i)^{t_k}}_{Montante} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1 + i)^{t_k}}}_{Valore\ attuale} \cdot (1+i)^n$$

da cui si deduce che capitalizzando il valore attuale, si ottiene il montante; analogamente, scontando il montante si ottiene il valore attuale.

ESEMPIO 1.3. Consideriamo una rendita $R = (t_s, C_s)$ schematizzata nel seguente modo:

$$C_1 = 800€, \qquad C_2 = 250€, \qquad C_3 = 1500€, \qquad C_4 = 1200€$$

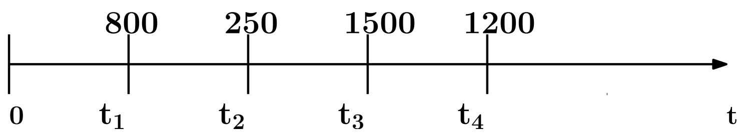


FIGURA 14. Ricostruzione temporale della rendita

$$t_1 = 1 \text{ mese } = \frac{30}{360} \qquad t_2 = 48 \text{ giorni } = \frac{48}{360}$$
$$t_3 = 4 \text{ mesi } = \frac{120}{360} \qquad t_4 = 8 \text{ mesi e } 10 \text{ giorni} = \frac{250}{360}$$

Determinare, in regime lineare, il montante ed il valore attuale al tasso annuo $i = 0,06$.
Calcoliamo il montante:

$$\begin{aligned} M(R, \frac{25}{36}) = {} & 800[1 + 0,06(\frac{25}{36} - \frac{1}{12})] + 250[1 + 0,06(\frac{25}{36} - \frac{2}{15})] \\ & + 1500[1 + 0,06(\frac{25}{36} - \frac{1}{3})] + 1200[1 + 0,06(\frac{25}{36} - \frac{25}{36})] \\ & = 3820,25€ \end{aligned}$$

Calcoliamo il valore attuale:

$$V(R,0) = \frac{800}{[1 + 0,06(\frac{1}{12})]} + \frac{250}{[1 + 0,06(\frac{2}{15})]}$$
$$+ \frac{1500}{[1 + 0,06(\frac{1}{3})]} + \frac{1200}{[1 + 0,06(\frac{25}{36})]} = 3666,62€$$

ESEMPIO 1.4. Consideriamo una rendita $R = (t_s, C_s)$ schematizzata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} C_1 &= 5000€, & C_2 &= 1500€, & C_3 &= 3200€ \\ C_4 &= 10800€, & C_5 &= 4000€ \end{aligned}$$

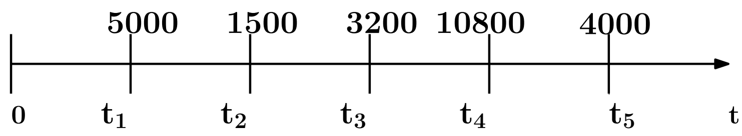


FIGURA 15. Ricostruzione temporale della rendita

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 \text{ anno e } 3 \text{ mesi} = 1 + \frac{3}{12} & t_2 &= 2 \text{ anni} = 2 \\ t_3 &= 4 \text{ anni e } 5 \text{ mesi} = \frac{53}{12} & t_4 &= 8 \text{ anni} = 8 \\ t_5 &= 12 \text{ anni} = 12 \end{aligned}$$

Determinare, in regime esponenziale, il montante e il valore attuale al tasso annuo $i = 0,04$.
Calcoliamo il montante:

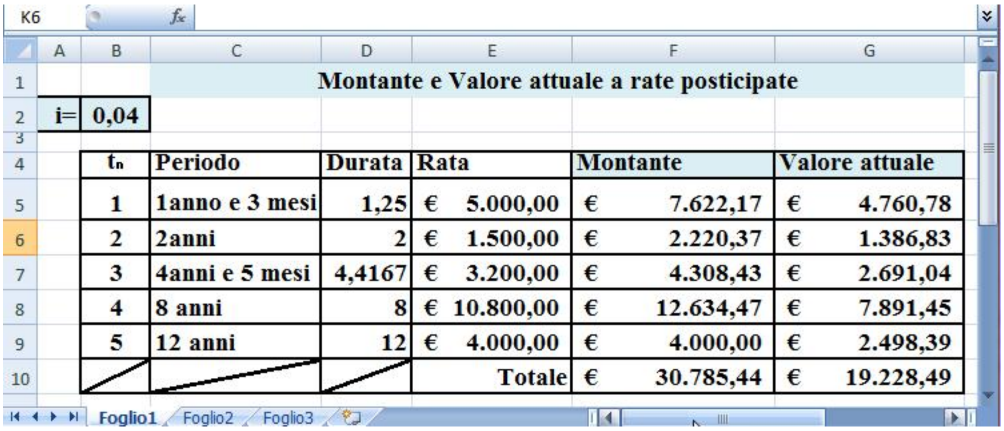
$$\begin{aligned} M(R,12) = {} & 5000(1 + 0,04)^{(12 - (1 + \frac{3}{12}))} + 1500(1 + 0,04)^{(12 - 2)} \\ & + 3200(1 + 0,04)^{(12 - \frac{53}{12})} + 10800(1 + 0,04)^{(12 - 8)} \\ & + 4000(1 + 0,04)^{(12 - 12)} \\ & = 30.785,439€ \end{aligned}$$

Calcoliamo il valore attuale:

$$\begin{aligned} V(R,0) = {} & 5000(1 + 0,04)^{(- \frac{3}{12})} + 1500(1 + 0,04)^{(- 2)} \\ & + 3200(1 + 0,04)^{(- \frac{53}{12})} + 10800(1 + 0,04)^{(- 8)} \\ & + 4000(1 + 0,04)^{(- 12)} \\ & = 19.228,4943€ \end{aligned}$$

Consideriamo lo stesso problema risolto attraverso il foglio elettronico excel, e disponiamo i dati nel seguente modo:

cella E5	$= 5.000$	prima rata
cella E6	$= 1.500$	seconda rata
cella E7	$= 3.200$	terza rata
cella E8	$= 10.800$	quarta rata
cella E9	$= 4.000$	quinta rata
cella B2	$= 0,04$	il tasso di interesse annuo
cella C7	$= -VA(C5;C4;C3;;1)$	la funzione valore attuale
cella F10	$= SOMMA(F5:F9)$	la somma dei montanti
cella G10	$= SOMMA(G5:G9)$	la somma dei valori attuali



Montante e Valore attuale a rate posticipate

i= 0,04

t_n	Periodo	Durata	Rata	Montante	Valore attuale
1	1anno e 3 mesi	1,25	€ 5.000,00	€ 7.622,17	€ 4.760,78
2	2anni	2	€ 1.500,00	€ 2.220,37	€ 1.386,83
3	4anni e 5 mesi	4,4167	€ 3.200,00	€ 4.308,43	€ 2.691,04
4	8 anni	8	€ 10.800,00	€ 12.634,47	€ 7.891,45
5	12 anni	12	€ 4.000,00	€ 4.000,00	€ 2.498,39
			Totale	€ 30.785,44	€ 19.228,49

FIGURA 16. Esempio 1.4

ESEMPIO 1.5. Una rendita è costituita da due termini:

- Al tempo $t_1 = 1$, la rata è di €3;
- Al tempo $t_2 = 3$, la rata è di €4.

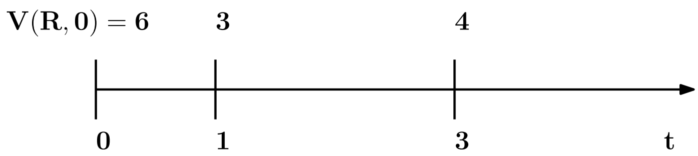


FIGURA 17. Ricostruzione temporale della rendita

Sapendo che il suo valore attuale è di €6 determinare, in regime esponenziale, il tasso unitario di interesse. Questo è un tipico esempio di problema inverso, ed è ben posto in quanto l'ammontare del valore attuale è minore della somma delle rate della rendita. Esso è di fatti il risultante dei due termini scontati.
Impostiamo innanzittutto il problema in base ai dati forniti:

$$\begin{cases} V(R,0) = & 3(1+i)^{-1} + 4(1+i)^{-3} \\ v = & (1\ +\ i)^{-1} \end{cases}$$

da cui otteniamo, ponendo $V(R,0) = 6$, una equazione di terzo grado:

$$4v^3 + 3v - 6 = 0 \tag{3.1}$$

Per determinare il valore di i consideriamo il metodo delle tangenti, e a tal scopo poniamo:

$$f(v) = 4v^3 + 3v - 6$$

Il dominio della funzione è definito in funzione dei valori che i può assumere in ambito finanziario:

$$i \in [0,1] \Rightarrow v = \begin{cases} 1 & \text{per } i = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } i = 1 \end{cases} \Rightarrow v \in [\frac{1}{2}, 1]$$

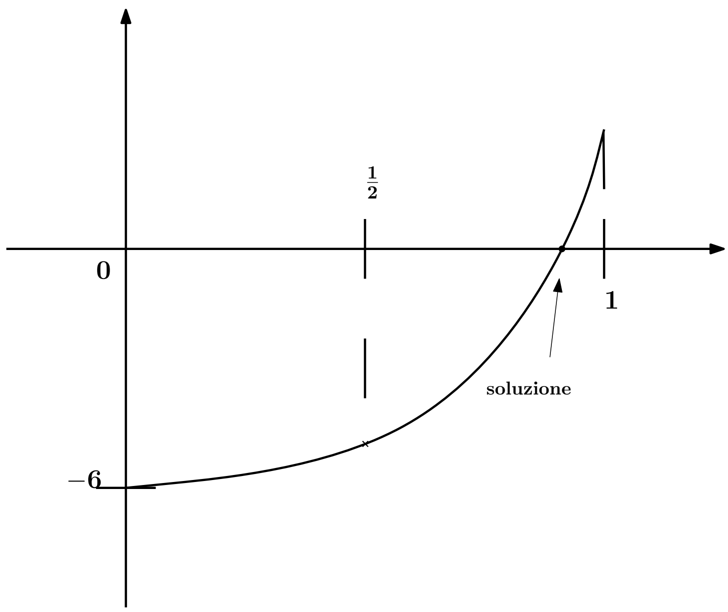


FIGURA 18. $f(v) = 4v^3 + 3v - 6$, con $v \in [\frac{1}{2}, 1]$

Essendo $f'(v) = 12v^2 + 3$ strettamente crescente, abbiamo che nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ esiste una unica soluzione $\tilde{v} \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Applichiamo il metodo di Newton con punto iniziale $v_0 = 1$:

$$\begin{aligned} F(v) &= v - \frac{f(v)}{f'(v)} = v - \frac{4v^3 + 3v - 6}{3(4v^2 + 1)} \\ &= \frac{3v(4v^2 + 1) - 4v^3 - 3v + 6}{3(4v^2 + 1)} \\ &= \frac{2(3 + 4v^3)}{3(4v^2 + 1)} \\ \Rightarrow v_{n+1} &= \frac{2(3 + 4v_n^3)}{3(4v_n^2 + 1)} \end{aligned}$$

otteniamo i seguenti valori:

$$v_1 = F(v_0) \ = \ 0,933333, \qquad v_2 = F(v_1) \ = \ 0,929457$$
$$v_3 = F(v_3) \ = \ 0,929445 \qquad v_4 = F(v_4) \ = \ 0,929445$$

Vediamo che nel passaggio da v_3 a v_4, le ultime sei cifre decimali sono costanti. Possiamo prendere v_3 come soluzione approssimata di (3.1):

$$v_3 = (1 \, + \, i)^{-1} \ \Rightarrow \ i \ = \ \frac{1-v_3}{v_3} \ = \ 0,0759$$

Attraverso il foglio elettronico Excel, la ricerca del tasso avviene tramite lo strumento di *Ricerca obiettivo*. Introduciamo i dati del problema considerando la seguente tabella:

cella B4	$=1$	primo periodo
cella B5	$=2$	secondo periodo
cella B6	$=3$	terzo periodo
cella C4	$=3$	prima rata
cella C5	$=0$	seconda rata
cella C6	$=4$	terza rata
cella C7	$=-VAN(D4;C4;C5;C6)$	la funzione valore attuale
cella D4	$=0,1$	tasso di interesse iniziale

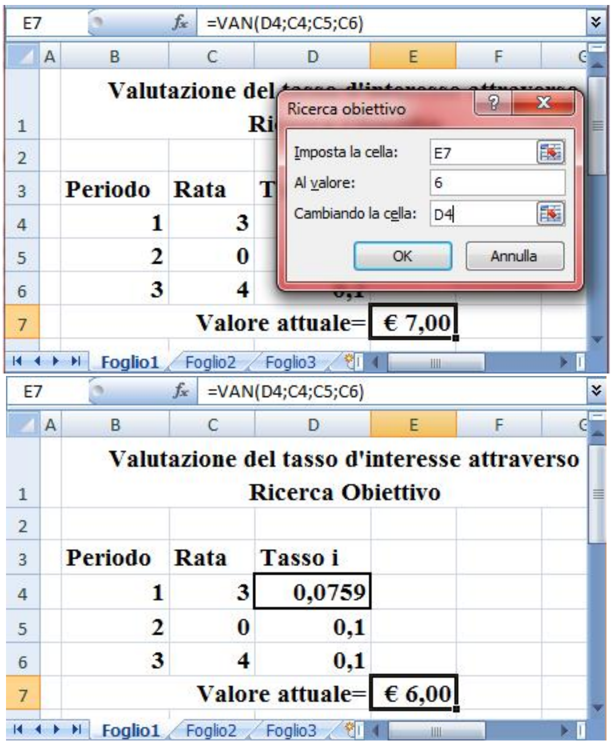
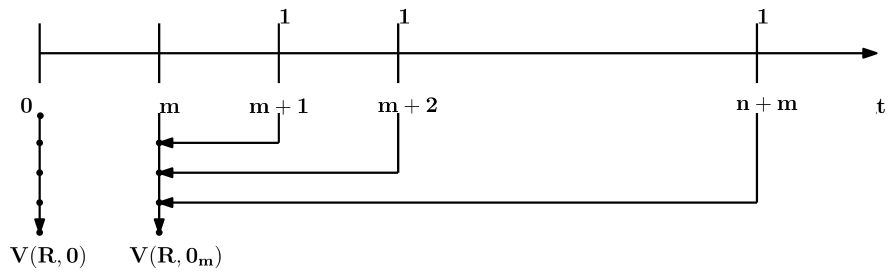


FIGURA 19. Determinare il tasso d'interesse attraverso *Ricerca obiettivo*

Consideriamo ora il caso in cui si vuole calcolare il valore attuale di una rendita in cui l'intervallo intecorrente tra l'epoca di valutazione e la scadenza della prima rata non è esattamente un periodo ma può essere:

- superiore ad un periodo, e in questo caso si parla di rendite differie;
- inferiori al peridodo;
- uguale a zero, e in questo perido si parla di rendite anticipate.

Consideriamo il valore attuale di una rendita unitaria annua posticipata della durata di n anni e differita di $m > 1$ anni.



Come possiamo vedere dal grafico, il valore attuale al tempo m è dato da:

$$V(R,0_m) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi(t_k) \tag{3.2}$$

All'epoca $t = 0$, il valore attuale si ottiene scontando(3.2) per il tempo m. Avremo dunque che il valore attuale di una rendita differita con scadenza della prima rata al tempo $m+1$ è dato da:

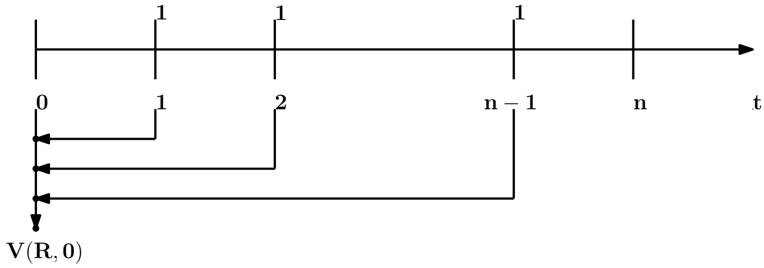
$$V(R,0) = V(R,0_m)(1+i)^{-m} = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi(t_k)(1+i)^{-m} \tag{3.3}$$

ESEMPIO 1.6. Calcoliamo, in regime di interesse composto, il valore attuale di una rendita unitaria annua posticipata, della durata di 7 anni, e differita di 3 anni, al tasso del $3,5\%$. Applichiamo (3.3):

$$\begin{aligned} V(R,0) &= V(R,0_3)(1+0,035)^{-3} \\ &= \frac{1-(1+0,035)^{-7}}{0,035}(1+0,035)^{-3} \\ &= 0.901942705 \cdot 6,11454398 = 5,515€ \end{aligned}$$

Per la proprietà della scindibilità , la stessa relazione si può applicare anche quando $0 \leq m < 1$.
Per $m = 0$, il valore della rendita viene calcolata alla scadenza della prima rata. Abbiamo in questo caso il valore attuale di una rendita unitaria anticipata temporanea per n periodi: $a_{\overline{n}|\, i}$
e applicando la definizione di valore attuale, otteniamo che:

$$V(R,0_0) = (1+i)^0 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)}$$



sommando i termini di questa progressione geometrica di ragione $(1 + i)^{-1}$ e primo termine 1, otteniamo che :

$$\begin{aligned} V(R,0_0) &= \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) \\ &= V(R,0)(1+i) \end{aligned}$$

1.1. Indicatori temporali di una rendita.

1.1.1. **Scadenza media aritmetica.** Consideriamo una successionedi capitali $C_1, C_2, \cdots, C_n$, impiegati per i tempi $t_1, t_2, \cdots, t_n$, al tasso i. La formula del montante di una rendita con legge di capitalizzazione semplice, sulla base di quanto scritto in precedenza, assume il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} M(t_k, C_k) &= \sum_{k=1}^{n} C_k(1 + i(t_n - t_k)) = \sum_{k=1}^{n} C_k + it_n \sum_{k=1}^{n} C_k - i \sum_{k=1}^{n} C_k t_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k(1 + it_n - i\frac{\sum_{k=1}^{n} C_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k}) \end{aligned}$$

Da cui otteniamo che:

$$M(t_k, C_k) = \sum_{k=1}^{n} C_k(1 + i(t_n - \bar{t})), \qquad \text{posto} \qquad \bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k} \tag{3.4}$$

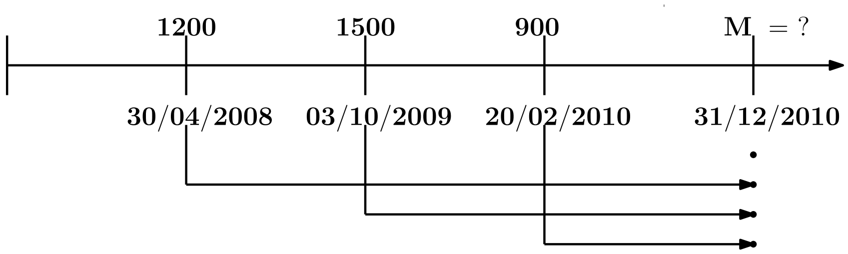
La quantità $\bar{\mathbf{t}}$, cosi̇̀ determinata è ***la media aritmetica ponderata delle scadenze*** t_k, con pesi le rate C_k. L'interpretazione finanziaria della formula è che il montante della rendita è equvalente al montante della somma delle rate concentrate nella scadenza media.
Qualora fossero note le rate con le rispettive scadenze ed il montante all'istante t_k, ma non il tasso di interesse semplice i, sarebbe immediato dedurlo dall'equazione appena descritta:

$$i = \frac{M(t_s, C_s) - \sum_{k=1}^{n} C_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k(t_n - \bar{t}))}$$

ESEMPIO 1.7. Siano assegnate le seguenti rate, esigibili nelle rispettive date indicate:

-prima rata**:** : €1200 esigibile il 30/04/2008;
-seconda rata**:** : €1500 esigibile il 03/10/2009;
-terza rata**:** : €900 esigibili il 20/02/2010.

Calcolare il montante alla data del $31/12/2010$ al tasso di interesse semplice del 10%annuo.



Poichè la data di valutazione non è intermediaria alle date di esigibilità delle singole rate, devono essere calcolate le differenze $t_n - t_k$:

- $30/04/2008 \mapsto 31/12/2010$: $t_4 - t_1 = \frac{976}{365} = 2,674$ *anni*;
- $03/10/2009 \mapsto 31/12/2010$: $t_4 - t_2 = \frac{456}{365} = 1,2466$ *anni*;
- $20/02/2010 \mapsto 31/12/2010$: $t_4 - t_1 = \frac{315}{365} = 0,863$ *anni*.

Calcoliamo il montante con il metodo tradizionale:

$$\begin{aligned} M &= 1200(1 + 0,1 \cdot 2,674) + 1500(1 + 0,1 \cdot 1,2466) \\ &\quad + 900(1 + 0,1 \cdot 0,863) = 1521 + 1687 + 978 = 4186€ \end{aligned}$$

Vogliamo ora determinare il montante applicando la formula (3.4). Si pone il problema di calcolare $\bar{t}$ per determinare la differenza $t_n - \bar{t}$.
Applichiamo la proprietà delle medie: $\overline{t_n - t_k} = t_n - \bar{t_k}$, che equivale a calcolare la media delle differenze $t_n - \bar{t}$ o calcolare la differenza tra la costante $t_n = 2,674$ e la media delle t_k.
In dettaglio i calcoli sono:

$$\begin{aligned} \overline{t_n - t_k} &= \frac{1200 \cdot 2,674 + 1500 \cdot 1,2466 + 900 \cdot 0,863}{1200 + 1500 + 900} \\ &= \frac{3209 + 1870 + 777}{3600} = \frac{5855}{3600} = 1,626484 \end{aligned}$$

Il montante si può calcolare come:

$$\begin{aligned} M(t_k, C_k) &= \sum_{k=1}^{n} C_k(1 + i(t_n - \bar{t})) \\ &= (1200 + 1500 + 900)(1 + 0,1 \cdot 1,626484) \\ &= 3600 \cdot 1,1626484 = 4186€ \end{aligned}$$

È interessante convertire la scadenza media:

$$\bar{t} = 2,674 - 1,626484 = 1,0474886 \text{ anni}$$

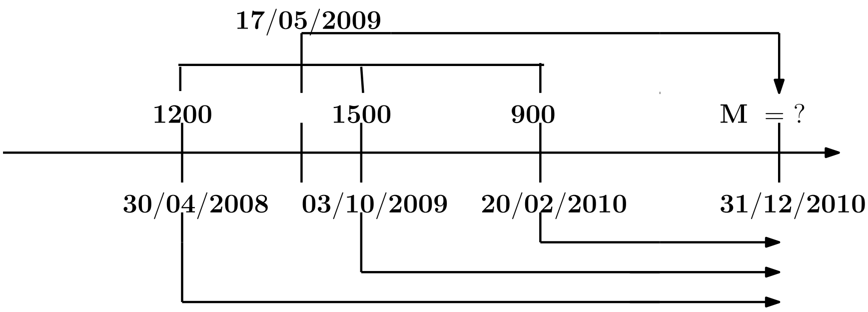
nella corrispondente data di calendario. Occorre, a tal fine, eseguire la seguente moltiplicazione:

$$\text{Numero dei giorni} = 1,0474886 \cdot 365 = 382,\bar{3} \text{ gg}$$

e sommarli alla data di origine:

$$\bar{t} = 30/04/2008 + 382\text{gg} \cong 17/05/2009$$

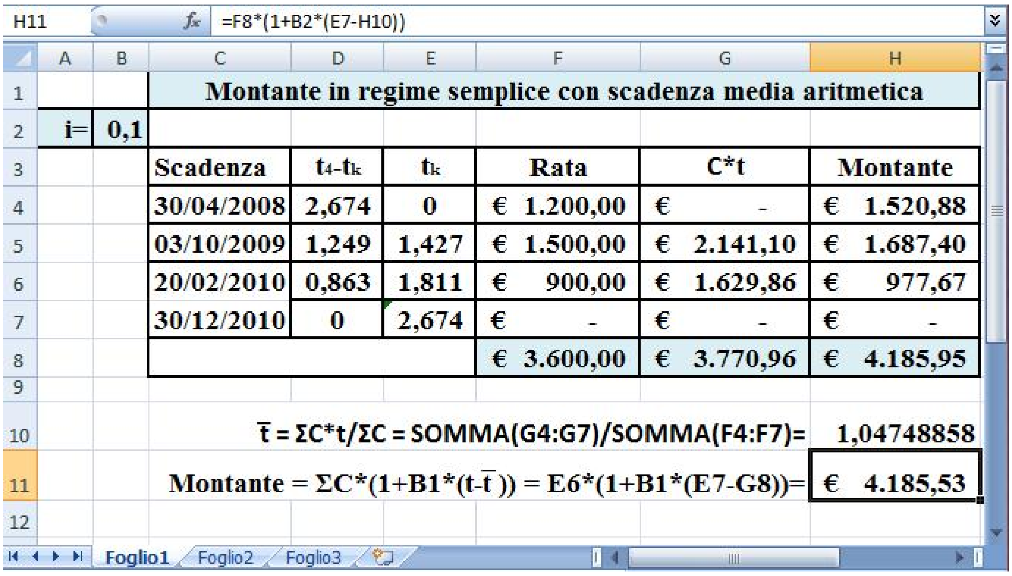
I due metodi possono essere confrontati nel seguente schema:



Nella risoluzione attraverso EXCEL, per determinare la media aritmetica $\bar{t}$, si pone il problema di fissare una data di origine in modo che t_k sia il numero degli anni che intercorrono fra la data di origine e la data di valutazione del montante. Fissiamo nella data 30/04/2008 l'origine temporale, di modo che:

$t_1(= 31/12/2010) = 0$
$t_2(= 20/02/2010) = \frac{521}{365} = 1,4274$
$t_3(= 03/10/2009) = \frac{661}{365} = 1,811$
$t_4(= 30/04/2008) = \frac{976}{365} = 2,674$

Inserimo i dati nel foglio eletronico nel seguente modo:



H11 =F8*(1+B2*(E7-H10))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Montante in regime semplice con scadenza media aritmetica					
2	i=	0,1						
3			Scadenza	t4-tk	tk	Rata	C*t	Montante
4			30/04/2008	2,674	0	€ 1.200,00	€ -	€ 1.520,88
5			03/10/2009	1,249	1,427	€ 1.500,00	€ 2.141,10	€ 1.687,40
6			20/02/2010	0,863	1,811	€ 900,00	€ 1.629,86	€ 977,67
7			30/12/2010	0	2,674	€ -	€ -	€ -
8						€ 3.600,00	€ 3.770,96	€ 4.185,95
9								
10			t̄ = ΣC*t/ΣC = SOMMA(G4:G7)/SOMMA(F4:F7)=					1,04748858
11			Montante = ΣC*(1+B1*(t-t̄)) = E6*(1+B1*(E7-G8))=					€ 4.185,53
12								

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 20. Montante in regime semplice con scadenza aritmetica

Analogamente al montante, possiamo considerare una scadenza media per il valore attuale di una rendita con una legge di capitalizzazione semplice, ed un tasso di sconto d:

$$V(R,0) \;=\; \sum_{k=1}^{n} C_k(1 \;-\; dt_k), \qquad \text{per} \qquad t_n < \frac{1}{d}$$

La limitazione $t_n < \frac{1}{d}$, deriva dal fatto che tutti i fattori di sconto devono essere non negativi, e dunque, dovendo essere il fattore di sconto $(1 \;-\; dt_n) > 0$ per tutti gli indici k, è necessario e sufficiente che ciò avvenga per la scadenza t_n dell'ultima rata. Seguiamo le stesse procedure considerate nel montante:

$$\begin{aligned} V(R,0) = \;& \sum_{k=1}^{n} C_k(1 \;-\; dt_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} C_k \;-\; d\sum_{k=1}^{n} C_k t_k \\ = \;& \sum_{k=1}^{n} C_k(1 \;-\; d\frac{\sum_{k=1}^{n} C_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k}) \\ = \;& \sum_{k=1}^{n} C_k(1 \;-\; d\bar{t}) \qquad \text{posto} \qquad \bar{t} \;=\; \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k} \end{aligned}$$

dove $\mathbf{\bar{t}}$ è ***la media aritmetica ponderata delle scadenze*** t_k, con pesi le rate C_k. L'interpretazione finanziaria della formula trovata è analoga a quella data nel caso del montante: il valore attuale dell'intera rendita è pari al valore attuale della somma delle rate concentrata nella scadenza media.
Qualora fossero note le rate con le rispetive scadenze ed il valore attuale, ma non il tasso d di sconto commerciale, sarebbe immediato dedurlo dall'equazione appena scritta:

$$d \;=\; \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k \;-\; V(R,0)}{\sum_{k=1}^{n} C_k \bar{t}}$$

ESEMPIO 1.8. Siano assegnate le seguenti rate, esigibili nelle rispettive date indicate:

-prima rata**:** : €1200 esigibile il 30/04/2008;
-seconda rata**:** : €1500 esigibile il 03/10/2009;
-terza rata**:** : €900 esigibili il 20/02/2010.

Calcolare il valore attuale alla data del 31/12/2007 al tasso di sconto commerciale del 10%annuo.
Consideriamo la data di valutazione 31/12/2007

- $31/12/2007 \mapsto 30/04/2008$: $t_1 - t_0 \;=\; \frac{120}{365} \;=\; 0,329$ *anni*;
- $31/12/2007 \mapsto 03/10/2009$: $t_2 - t_0 \;=\; \frac{641}{365} \;=\; 1,756$ *anni*;
- $31/12/2007 \mapsto 20/02/2010$: $t_3 - t_0 \;=\; \frac{781}{365} \;=\; 2,140$ *anni*.

Il valore attuale è dunque:

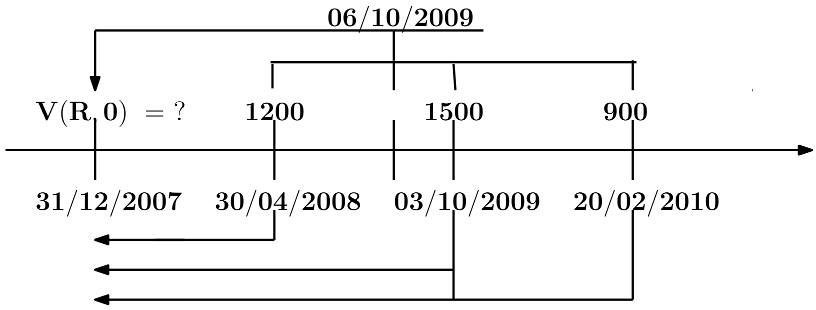
$$\begin{aligned} V(R,0) \;&= 1200(1 \;-\; 0,1 \cdot 0,329) \;+\; 1500) \;+\; 1500(1 \;-\; 0,1 \cdot 1,756) \\ &+\; 900(1 \;-\; 0,1 \cdot 2,140) \;= 3105€ \end{aligned}$$

Applichiamo la formula $V(R,0) = \sum_{k=1}^{n} C_k(1 - d\bar{t})$.
Calcoliamo preliminarmente

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k} = \frac{1200 \cdot 0,329 + 1500 \cdot 1,756 + 900 \cdot 2,140}{1200 + 1500 + 900}$$
$$= \frac{394,52 + 2634,25 + 1925,75}{3600} = \frac{4954,52}{3600} = 1,375$$

Andiamo a sostituire nella formula e otteniamo:

$$V(R,0) = \sum_{k=1}^{n} 3600(1 - 0,1 \cdot 1,376) = 3105€$$



	A	B	C	D	E	F	G
1			Valore attuale in regime semplice con scadenza media aritmet				
2	d=	0,1					
3			Scadenza	tk-t0	Rata	C*t	Valore attuale
4			30/04/2008	0,329	€ 1.200,00	€ 394,52	€ 1.160,55
5			03/10/2009	1,756	€ 1.500,00	€ 2.634,25	€ 1.236,58
6			20/02/2010	2,14	€ 900,00	€ 1.925,75	€ 707,42
7			31/12/2007	0	€ -	€ -	€ -
8					€ 3.600,00	€ 4.954,52	€ 3.104,55
9							
10	$\bar{t}$ = ΣC*t/ΣC = SOMMA(F4:F7)/SOMMA(E4:E7)=						€ 1,38
11	Valore attuale = ΣC (1 - d$\bar{t}$) = E8*(1 - B2*G10)						€ 3.104,55

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 21. valore attuale di una rendita calcolata attraverso la scadenza media aritmetica in EXCEL

Nel calcolo di montante di una rendita in regime di interessi semplici e del valore attuale di una rendita di regime di sconto commerciale si sono trovate due formule eleganti per calcolarli, concentrando la somma aritmetica delle rate nella scandenza media aritmetica $\bar{t}$ delle scadenze delle rate.
Non esistono formule analoghe per calcolare il valore attuale, in regime di interessi semplici, e il montante, in regime di interessi anticipati.

1.1.2. **Scadenza media finanziaria.** Ora ci chiediamo se è possibile trovare nel caso degli interessi composti una formula che permette di calcolare valore attuale o il montante, concentrando la somma delle rate in una opportuna scadenza.
La risposta affermativa deriva dalla scindibilità del regime finanziario. Possiamo dunque esprimere sia il valore attuale sia il montante in funzione della somma delle rate concentrate. Definiamo tale particolare scadenza, come ***scadenza media finanziaria a tasso i*** , e si indica con $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{i})$.

$$\bar{t}(i) = \frac{\ln(\sum_{k=1}^{n} C_k) - \ln(\sum_{k=1}^{n} C_k(1+i)^{-t_k})}{\ln 1 + i}$$

La funzione $\bar{t}(i)$ è una funzione decrescente di i, e ammette i seguenti limiti:

$$\lim_{i\to\infty} \bar{t}(i) = \bar{t}$$
$$\lim_{i\to 0} \bar{t}(i) = \bar{t}$$

che si possono interpretare nel seguente modo:
la funzione $\bar{t}(i)$ è *monotona decrescente, ed* è *compresa fra la scadenza media aritmetica* $\bar{t}$*, e la prima scadenza* t_1*;*
la scadenza media aritmetica corrisponde con la scadenza media finanziaria calcolata a tasso di interesse nullo.

ESEMPIO 1.9. Consideriamo una rendita formata da solo due rate, ossia €1000 e €1500 scadenti rispettivamente alle date $03/12/05$ e $12/10/09$, al tasso di interesse $i = 10\%$ e sia $t_0 = 29/03/2005$ la data assunta come origine dei tempi. Esaminiamo la funzione $\bar{t}(i)$.
Andiamo innanzittutto a calcolare il numero dei gionri intercorrenti fra le due date di scadenza e la data assunta come origine:

- $29/03/2005 \mapsto 03/12/2005, \qquad t_1 = \frac{65}{365} = 0,178$
- $29/03/2005 \mapsto 12/10/2009, \qquad t_2 = \frac{1474}{365} = 4,038$

Calcoliamo preliminarmente l'estremo superiore delle scadenze medie finanziarie, ossia la scadenza media aritmetica ponderata:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} C_k} \Rightarrow \bar{t} = \frac{1000 \cdot 0,178 + 1500 \cdot 4,084}{1000 + 1500} = \frac{6236}{2500} = 2,49425$$

Calcoliamo ora la scadenza media finanziaria:

$$\bar{t}(i) = \frac{\ln(\sum_{k=1}^{n} C_k) - \ln(\sum_{k=1}^{n} C_k(1+i)^{-t_k})}{\ln 1 + i}$$

le cui grandezze valgono:

- $\sum_{k=1}^{n} C_k = 1000 + 1500 = 2500$
- $\sum_{k=1}^{n} C_k(1+i)^{-t_k} = 1000 \cdot 1,1^{-0,178} + 1500 \cdot 1,1^{-4,0384} = 2004$
- $\ln(1,1) = 0,09531$

$$\bar{t}(i) = \frac{\ln(2500) - \ln(2004)}{0,09531} = 2,3205$$

Si può constatare che $\bar{t}(10\%) \; < \; \bar{t}$. Le date corrispondenti a questi due valori sono:

- $\bar{t} : data\ d'origine \; + \; \bar{t} \cdot 365 \; = \; 27/03/2008$
- $\bar{t} : data\ d'origine \; + \; \bar{t}(i) \cdot 365 \; = \; 22/01/2008$

Scadenza media finanziaria e scadenza media aritmetica

i=	0,1					
	k	Scadenze	tk-t0	Rate	C*t	Ck(1+i)^(-tk)
	0	29/03/2005	0	€ -	€ -	€ -
	1	03/12/2005	0,178	€ 1.000,00	€ 178,08	€ 983,17
	2	12/10/2009	4,038	€ 1.500,00	€ 6.057,53	€ 1.020,78
				€ 2.500,00	€ 6.235,62	€ 2.003,95
	LN(ΣC)-LN(Σ k Ck(1+i)^(-tk)=LN(F7)-LN(H7)=					0,22
	t̄ = ΣC*t/ΣC = SOMMA(G4:G6)/SOMMA(F4:F6)=F7/G7=					2,494246575
	t̄ = LN(ΣC)-LN(Σ k Ck(1+i)^(-tk))/LN(1+i) = LN(F7)-LN(H7)/LN(1+B2)= H9/LN(1+B2)=					€ 2,32

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 22. Scadenza media aritmetica e scadenza finanziaria

1.1.3. **Duration.** Un'altra estensione del concetto di scadenza media si effettua considerando nella formula della scadenza nedia aritmetica come pesi, al posto delle rate della rendita, i loro valori attuali a tasso i. In questo modo andiamo a definire un nuovo indice, chiamato ***duration***, che si indica con $D(i)$ e si calcola mediante la seguente formula:

$$D(i) \; = \; \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k V_k (1 \; + \; i)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} V_k (1 \; + \; i)^{-t_k}}$$

Duration e scadenza media finanziaria sono due medie di tipo diverso sugli stessi numeri t_k, scadenze delle rate della rendita, ed hanno in comune alcune proprietà. La duration è una funzione monotona decrescente, e gode delle seguenti proprietà:

- $D(i) \; < \; \bar{t}(i), \; \forall i > 0;$
- $D(0) \; = \; \lim_{i \to 0} \bar{t}(i) \; = \; \bar{t};$
- $\lim_{i \to \infty} D(i) \; = \; \lim_{i \to \infty} \bar{t}(i) \; = \; \bar{t}$

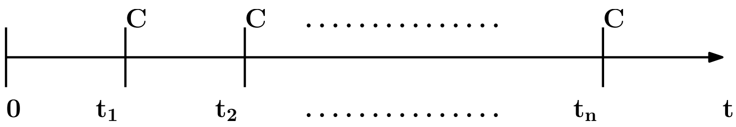
Questo indice misura la vita media di una rendita tenendo conto della distribuzione nel tempo dei flussi di cassa generati dalla rendita. La duration (durata media finanziaria)è una sorta di baricentro delle scadenze opportunamente pesate: è un punto dove si realizza una sorta di equilibrio. Può essere quindi usato per scegliere fra diverse opzioni di investimento. In previsione di una riduzione dei tassi di interesse, saranno preferibili operazioni finanziarie con duration elevata, volendo prolungare la durata delle vecchie operazioni intraprese. Al contrario, in caso di una previsione di aumento dei tassi di interesse, saranno preferibili operazioni con una duration bassa, di modo che le operazioni in essere si concludano prima e si possa reinvestire il capitale in una operazione a tasso più elevato.

OSSERVAZIONE 1.1. La scadenza media aritmetica (3.4), non tiene conto dei tassi di interesse, e dunque del diverso valore di un investimento in funzine di quando esso si verifica. Nel ponderare ogni scadenza con il valore attuale dei capitali, otteniamo con la durata media finanziaria, una misura per la rischiosità di un progetto finanziario.

2. Rendite periodiche costanti

Sia assegnata la rendita periodica a rata costante

$$R(t_k,C) \;=\; \{(t_1,C),(t_2,C),\ldots,(t_n,C))\}$$



In regime di capitalizzazione composto, la struttura della rendita, facilita il calcolo del montante e del valore attuale, attraverso funzioni finanziarie che vengono indicate con i simboli $s_{\overline{n|}i}$ e $a_{\overline{n|}i}$, aventi rispettivamente il seguente significato:

- $s_{\overline{n|}i}$, detto *s-figurato, o temporaneo, n al tasso i*, è il montante di una rendita unitaria, temporanea per n anni, o in genere per n periodi, valutata all'atto dell'ultimo versamento;
- $a_{\overline{n|}i}$, detto *a-figurato, o temporaneo, n al tasso i*, è il valore attuale di una rendita unitaria, temporanea per n anni, o in genere per n periodi, valutata un'anno o un periodo prima della scadenza della prima rata.

Tutte le valutazioni si possono effettuare mediante queste due funzioni, eventualmente moltiplicate per un fattore di capitalizzazione o di attualizzazione (sconto).

Nel caso del montante, applicando la definizione (1.2), per $C \;=\; 1$ abbiamo che:

$$s_{\overline{n|}i} \;=\; 1+\,(1\,+\,i)\,+\,\ldots\,+\,(1\,+\,i)^{n-2}\,+\,(1\,+\,i)^{n-1}$$

Si tratta della somma di n termini di una progressione geometrica di primo termine 1 e ragione $(1\,+\,i)$, che quindi equivale a:

$$s_{\overline{n|}i} \;=\; \frac{1\,-\,(1\,+\,i)^n}{1\,-\,(1\,+\,i)} \;=\; \frac{(1\,+\,i)^n\,-\,1}{i}$$

Il montante della rendita periodica costante C è dato da:

$$M(R,t_n) \;=\; C\cdot s_{\overline{n|}i}$$

Nel caso in cui il montante deve essere calcolato in una epoca posteriore alla scadenza dell'ultima rata, detto k l'intervallo di tempo (riferito al periodo della rendita) che decorre dalla scadenza dell'ultima rata all'epoca della valutazione, occorre capitalizzare il montante trovato, per il tempo k, e in termini di funzione finanziaria, si indica nel seguente modo:

$$M(R,t_n) \;=\; C\cdot s_{\overline{n|}i}\,(1\,+\,i)^k)$$

Se $k \;=\; 1$, abbiamo il montante di una rendita anticipata, che viene indicato con:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} \;=\; C\cdot s_{\overline{n|}i}\,(1\,+\,i)$$

Come per il montante, applichiamo la definizione (1.3), per $C = 1$ abbiamo che:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}$$

Anche in questo caso abbiamo una progressione geometrica, ma avente come primo termine $(1+i)^{-1}$ e ragione $(1+i)^{-1} < 1$, che equivale alla seguente formula:

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Se la rata della rendita è C, allora il valore attuale è dato da:

$$V(R,0) = C \cdot a_{\overline{n}|i}$$

In termini di funzioni finanziarie, la relazione fra montante e valore attuale, conseguente alla scindibilità della capitalizzazione composta, è definita nel seguente modo:

$$a_{\overline{n}|i}(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{i} = s_{\overline{n}|i}$$

ESEMPIO 2.1. Una rendita a rata costante di €$12,91$, ha al tasso $i = 0,065$, il valore attuale di €$92,81$. Determinare il numero delle rate della rendita.
Occore determinare n:

$$\begin{aligned}
V(R,0) &= C \cdot a_{\overline{n}|i} = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\
&\Downarrow \\
(1+i)^{-n} &= 1 - i\frac{V(R,0)}{C} \\
-n\ln(1+i) &= \ln(1 - i\frac{V(R,0)}{C}) \\
n &= -\frac{\ln(1 - i\frac{V(R,0)}{C})}{\ln(1+i)} \\
n &= -\frac{\ln(1 - 0,065\frac{92,81}{12,91})}{\ln(1+0,065) = 10,0003}
\end{aligned}$$

2.1. Studio delle funzioni finanziarie $\mathbf{a_{\overline{n}|i}}$ e $\mathbf{s_{\overline{n}|i}}$. Studiamo il comportamento delle funzioni $a_{\overline{n}|i}$, e $s_{\overline{n}|i}$, al variare di n e i. Fissisamo il numero n di rate e studiamo la funzione $\mathbf{i} \to \mathbf{f(i)} := \mathbf{a_{\overline{n}|i}}$ per $i \to 0^+$, applicando il teorema De l'Hospital:

$$\lim_{i\to 0^+} f(i) = \lim_{i\to 0^+} a_{\overline{n}|i} = \lim_{i\to 0^+} \frac{n(1+i)^{-(n+1)}}{1} = n$$

questo limite rispecchia il fatto pratico che, se il tasso tende a 0, le rate non vengono scontate e il valore attuale va a coincidere con la loro somma

algebrica.
La funzione $f(i)$ è positiva, essendo cosituita da addendi positivi:

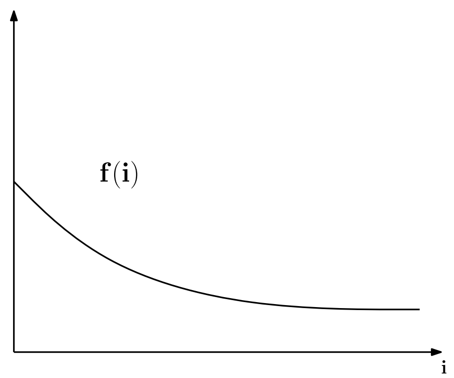
$$f(i) = \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k}, \qquad (1+i)^{-k} > 0 \qquad \forall i$$

La funzione $f(i)$ è strettamente decrescente, di fatti se esaminiamo la deritata prima otteniamo che:

$$f'(i) = \sum_{k=1}^{n} (-k)(1+i)^{-(k+1)}, \qquad (-k)(1+i)^{-(k+1)} < 0 \qquad \forall i$$

Infine, la funzione $f(i)$ è convessa:

$$f''(i) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(1+i)^{-(k+2)}, \qquad k(k+1)(1+i)^{-(k+2)} > 0 \qquad \forall i$$



Si noti che se $0 < \alpha < n$, l'equazione $f(i) = a_{\overline{n}|i} = \alpha$ ha una sola radice positiva i^*. Fissato un tasso i, studiamo al variare del numero di rate n il comportamento della successione $n \to a_{\overline{n}|i}$.
L'analisi del comportamento di $a_{\overline{n}|i}$, è ricondotta allo studio di una serie geometrica di ragione $v = (1+i)^{-1}$, convergente in quanto $0 < v < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{v}{1-v} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{i}$$

Abbiamo così introdotto la nozione di rendita perpetua. Infatti $a_{\overline{\infty}|i}$, rappresenta il valore attuale di una rendita costituita da infinite rate unitarie.

Studiamo ora la funzione $\mathbf{i} \to \mathbf{g}(\mathbf{i}) := \mathbf{s}_{\overline{\mathbf{n}}|\mathbf{i}}$.
Analogamente al caso precedente, esaminiamo il limite per $i \to 0^+$, applicando il teorema De l'Hospital:

$$\lim_{i\to 0^+} g(i) = \lim_{i\to 0^+} s_{\overline{n}|i} = \lim_{i\to 0^+} \frac{n(1+i)^{n-1}}{1} = n$$

Anche per il montante abbiamo che, se il tasso tende a 0, il suo valore equivale alla somma algebrica delle rate.

La funzione $g(i)$ è positiva, essendo risultante di termini positivi;

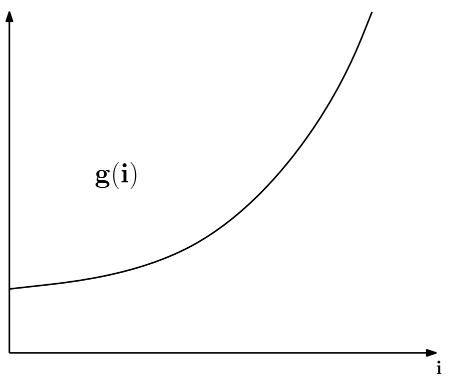
$$g(i) = \sum_{k=1}^{n}(1+i)^k, \qquad \forall(1+i)^k > 0 \qquad \forall i$$

La funzione $g(i)$ è strettamente crescente, essendo positiva la derivata prima:

$$g(i)' = \sum_{k=1}^{n}k(1+i)^{(k-1)}, \qquad \forall k(1+i)^{(k-1)} > 0 \qquad \forall i$$

Infine la funzione $g(i)$ è convessa:

$$g(i)'' = \sum_{k=1}^{n}k(k-1)(1+i)^{(k-2)}, \qquad \forall k(k-1)(1+i)^{(k-2)} > 0$$



Fissato $\sigma > n$, l'equazione $g(i) = s_{\overline{n}|i} = \sigma$, ammette una unica soluzione i^*. Infine:

$$\lim_{i\to\infty} g(i) = \infty$$

3. Rendita perpetua

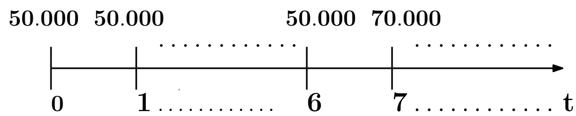
Abbiamo visto che una rendita si dice perpetua quando i versamenti delle rate si succedono a intervalli regolari di tempo, senza avere mai fine, il che corrisponde ad un numero infinito d rate. Sono esempi di rendite perpetue gli interessi goduti dai possessori di titoli del debito pubblico irredimibile. Nel caso delle rendite perpetue è ovvio che non si presenta mai il problema di calcolare il montane, se non per un numero limitato di rate. Quello che si presenta spesso, è il problema di determinare il valore attuale. Dalla definizione di valore attuale di una rendita costante abbiamo visto che il valore attuale è dato da:

$$V(R,0) = Ca_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Per una rendita perpetua $n = \infty$:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

ESEMPIO 3.1. Calcolare il valore di cessione di un terreno al tasso del 10% annuo, sapendo che il terreno rende per i primi 6 anni a partire da oggi €50.000 e successivamente per €70.000 in perpetuo.
Rappresentiamo la rendita con lo schema temporale:



Il valore attuale è dato dalla somma del valore attuale di una rendita anticipata temporanea di 6 rate e di una rendita perpetua differita:

$$V = 50.000\ddot{a}_{\overline{6}|0,1} + \frac{70.000}{0,1}(1,1)^{-5} = 674.184€$$

4. Costituzione di capitale

La costituzione di un capitale consiste in un investimento regolare allo scopo di costruire un capitale. La formazione di un capitale può avvenire in due modi:

(1) con un versamento unico, depositando una somma unica in impiego fruttifero;
(2) con versamenti periodici, che possono essere costanti o variabili.

Trattandosi di impieghi di lunga durata, l'operazione finanziaria avviene nel regime dell'interesse composto. Consideriamo il caso in cui si volgia costruire mediante n versamenti costanti di importi R, ai tempi $t = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, un capitale K disponibile al tempo n.

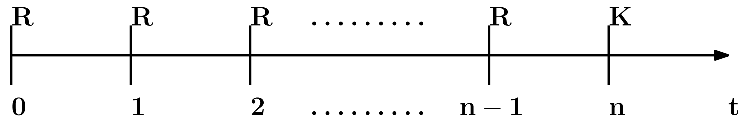


FIGURA 23. Costituzione di un capitale con versamenti anticipati

Consideriamo il montante in capitalizzazione composta, di una rendita anticipata e determiniamo la rata:

$$M(t,R) = \sum_{s=1}^{n} R(1+i)^{n-(s-1)} = R\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{n-s+1)}$$

$$= R(1+i)\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{n-s} = R(1+i)s_{\overline{n}|i}$$

$$\Rightarrow R = \frac{M(t,R)}{(1+i)s_{\overline{n}|i}}$$

Identificando il capitale con il montante, ossia $K = M(t,R)$, abbiamo che:

$$R = \frac{K}{(1+i)s_{\overline{n}|i}} \tag{3.5}$$

La rata R che va a costituire il capitale K deve quindi soddisfare la relazione:

$$R(1+i)s_{\overline{n}|i} = K$$

Generalmente le somme che vengono versate e gli interessi maturati formano *il fondo di costituzione*, mentre il tasso i è definito *tasso di costituzione*. Indicando con F_h il fondo costituito dopo h anni o dopo h periodi, se le rate sono posticipata il valore di F_h si ottiene calcolando il montante di una rendita di h rate, quindi si ha:

$$F_h = Rs_{\overline{n}|i}$$

Se le rate sono anticipate, il fondo costituito dopo h anni, calcolato quindi dopo un anno dopo il versamento della $h - esima$ rata è dato da:

$$F_h = R\ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

ESEMPIO 4.1. Il sig. Blu vuole costituire il capitale di 75.000€con il versamento di 4 rate costanti posticipate al tasso di costituzione del 3%. Andiamo innanzitutto a calcolare la rata, per compilare infine in un foglio elettronico il prospetto di costituzione, dove saranno evidenziate le rate, gli interessi e in che modo il fondo viene costituito nell'arco temporale indicato.
$K \ = \ 75.000€$

$i \ = \ 0,03$
$t \ = \ 4$
$R \ = ?$
$s_{\overline{4}|0,03} \ = \ \frac{(1\,+\,0{,}03)^4}{0{,}03} \ = \ 4,183627$

$$K \ = \ Rs_{\overline{n}|i} \qquad \Rightarrow \qquad R \ = \ \frac{75.000}{s_{\overline{n}|i}} \ = \ \frac{75.000}{4,183627} \ = \ 17927,03€$$

Determinata la rata $R \ = \ 17927,03€$, indichiamo con F_{k-1} il fondo all'inizio dell'anno di riferimento, e con F_k, il fondo alla fine dell'anno, e andiamo a definire il piano di costituzione del capitale:
$-F_1 := 17927,0284€;$
$-F_2 := 17927,0284 + (17927,0284 \cdot 0,02) + 17927,0284 \ = \ 36391,8676€;$
$-I_2 \ = \ (1727,0284 \cdot 0,02) \ = \ 537,811€;$
$-F_3 := 36391,8676 + (36391,8676 \cdot 0,02) + 17927,0284 \ = \ 55410,6520€;$
$-I_3 \ = \ (36391,8676 \cdot 0,02) \ = \ 1091,76€;$
$-F_4 := 55410,6520 \ + (55410,6520 \cdot 0,02) \ + \ 17927,0284 \ = \ 75000€;$
$-I_4 \ = \ (55410,6520 \cdot 0,02) \ = \ 1662,32€;$

Costituzione di un capitale con versamenti posticipati

K=	75000	Rata =	B5/B8	F₁=	E1+F1+G1
i=	0,03	F₂=	E2+F2+G2	I₂ =	E2*D2
t=	4	F₃ =	E3+F3+G3	I₃ =	E3*D3
s (n|i)=	4,184	F₄ =	E4+F4+G4	I₄ =	E4*D4

k	i	F_{k-1}	I_k	Rate	F_k
0	0,03				
1	0,03	0	0	17927,0284	17927,02839
2	0,03	17927,028	537,811	17927,0284	36391,86763
3	0,03	36391,868	1091,76	17927,0284	55410,65205
4	0,03	55410,652	1662,32	17927,0284	75000

Foglio1 Foglio2 Foglio3

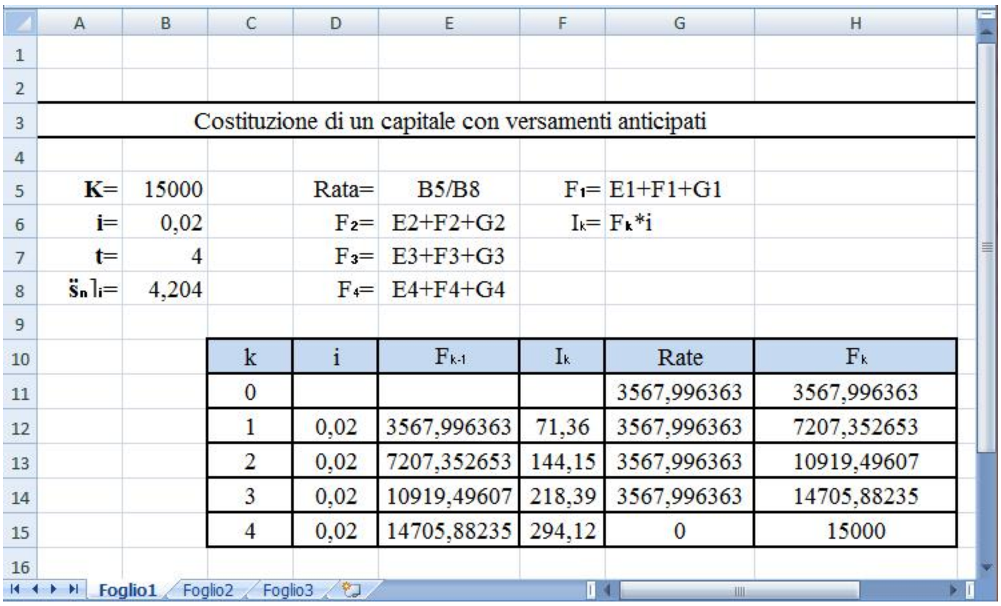
FIGURA 24. Costituzione di un capitale con versamenti posticipati

ESEMPIO 4.2. Il sig. Giallo vuole costituire il capitale di 15000€ con il versamento di 4 rate anticipate al tasso costituzionale del 2%.

Andiamo innazittutto a calcolare la rata della rendita:
$K = 15.000€$
$i = 0,02$
$t = 4$
$R = ?$
$\ddot{s}_{\overline{4}\rceil 0,02} = s_{\overline{4}\rceil 0,02}(1 + 0,02) = \frac{(1 + 0,02)^4}{0,02}(1 + 0,02) = 4,20404016$

$$K = R\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{15.000}{\ddot{s}_{\overline{n}\rceil i}} = \frac{15.000}{4,20404016} = 3568,00€$$

Determinata la rata $R = 3568,00€$, indichiamo con F_{k-1} il fondo all'inizio dell'anno di riferimento, e con F_k, il fondo alla fine dell'anno, e andiamo a definire il piano di costituzione del capitale:
$-F_0 := 3568,00€$;
$-F_1 := 3568,00 + (3568,00 \cdot 0,02) + 3568,00 = 7207,36€$;
$-I_2 = (3568,00 \cdot 0,02) = 71,36€$;
$-F_2 := 7207,36 + (7207,36 \cdot 0,02) + 3568,00 = 10919,50€$;
$-I_3 = (7207,36 \cdot 0,02) = 144,15€$;
$-F_3 := 10919,50 + (10919,50 \cdot 0,02) + 3568,00 = 14705,88€$;
$-I_4 = (10919,50 \cdot 0,02) = 218,39€$;
$-F_4 := 14705,88 + (14705,88 \cdot 0,02) + 3568,00 = 15000€$;
$-I_4 = (10919,50 \cdot 0,02) = 294,12€$.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	Costituzione di un capitale con versamenti anticipati							
4								
5	K=	15000		Rata=	B5/B8	F_1=	E1+F1+G1	
6	i=	0,02		F_2=	E2+F2+G2	I_k=	F_k*i	
7	t=	4		F_3=	E3+F3+G3			
8	$\ddot{s}_{n\rceil i}$=	4,204		F_4=	E4+F4+G4			
9								
10			k	i	F_{k-1}	I_k	Rate	F_k
11			0				3567,996363	3567,996363
12			1	0,02	3567,996363	71,36	3567,996363	7207,352653
13			2	0,02	7207,352653	144,15	3567,996363	10919,49607
14			3	0,02	10919,49607	218,39	3567,996363	14705,88235
15			4	0,02	14705,88235	294,12	0	15000
16								

FIGURA 25. Costituzione di un capitale con versamenti anticipati

Consideriamo adesso un' altro problema inverso: noti K, R, i, determinare $t = n$, nel caso particolare in cui $n \notin \mathbb{N}$.

ESEMPIO 4.3. Il sig. Verde vuole costituire il capitale $K = 20.000$€, con versamenti mensili anticipati di importi $R = 175$€. Se il tasso di costituzione è del $3,8\%$ annuo, quanti sono i versamenti da fare?
Abbiamo visto che la rata R che va a costituire il capitale K, deve soddisfare la relazione:

$$R = \frac{K}{(1+i)s_{\overline{n}|i}} \Rightarrow s_{\overline{n}|i} = \frac{K}{R(1+i)}$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{K}{R(1+i)} \Rightarrow (1+i)^n = \frac{Ki}{R(1+i)} - 1$$

$$n\ln(1+i) = \ln(\frac{Ki}{R(1+i)} + 1)$$

da cui si trae che:

$$n = \frac{\ln(\frac{Ki}{R(1+i)} + 1)}{\ln(1+i)} \tag{3.6}$$

Applichiamo ora la formula (A.7) a questo esempio:
$K = 20.000$€
$i = 0,038$
$R = 175$€
$t = n = ?$
Essendo i versamenti mensili andiamo a convertire il tasso annuo in mensile:

$$1 + i = (1+i_k)^k \Rightarrow 1 + 0,038 = (1+i_{12})^{12} \Rightarrow i_{12} = (1,038)^{\frac{1}{12}} - 1$$

da cui otteniamo che $i_{12} = 0,003112817$.
Andiamo dunque a calcolare n:

$$n = \frac{\ln(\frac{20.000\cdot(0,003112817)}{175(1+0,003112817)} + 1)}{\ln(1+0,003112817)} = \frac{\ln(1,354646451)}{\ln(1,003112817)} = 97,66481191$$

Si pone ora il problema che il numero delle scadenze ottenuto dalla relazione (A.7) non è generalmente intero.Stabiliamo dunque delle convenzioni operative:

(1) Attendere dopo il versamento della $[n] - esima$[1] rata, che il montante raggiunga la somma voluta;

(2) Aumentare la rata in modo che bastino $[n]$ versamenti per ottenere il capitale da costituire;

(3) Diminuire la rata in modo che attraverso il versamento di $[n] + 1$ rate, otteniamo il capitale prefissato;

[1] $[n]$ sta ad indicare la parte intera del numero $n \in \mathbb{R}$.

(4) Effettuare $[n]$ versamenti dell'importo R prefissato e un versamento complementare S in modo da ottenere l'intera somma del capitale da costituire. In base all'epoca distinguiamo i seguenti due casi:

I. Effettuare il versamento della somma S insieme all'ultima rata, al tempo $[n] = 97$;
II. Effettuare il versamento della somma S dopo l'ultima rata, al tempo $[n] + 1 = 98$.

Vediamo ora queste convenzioni operative nel dettaglio:

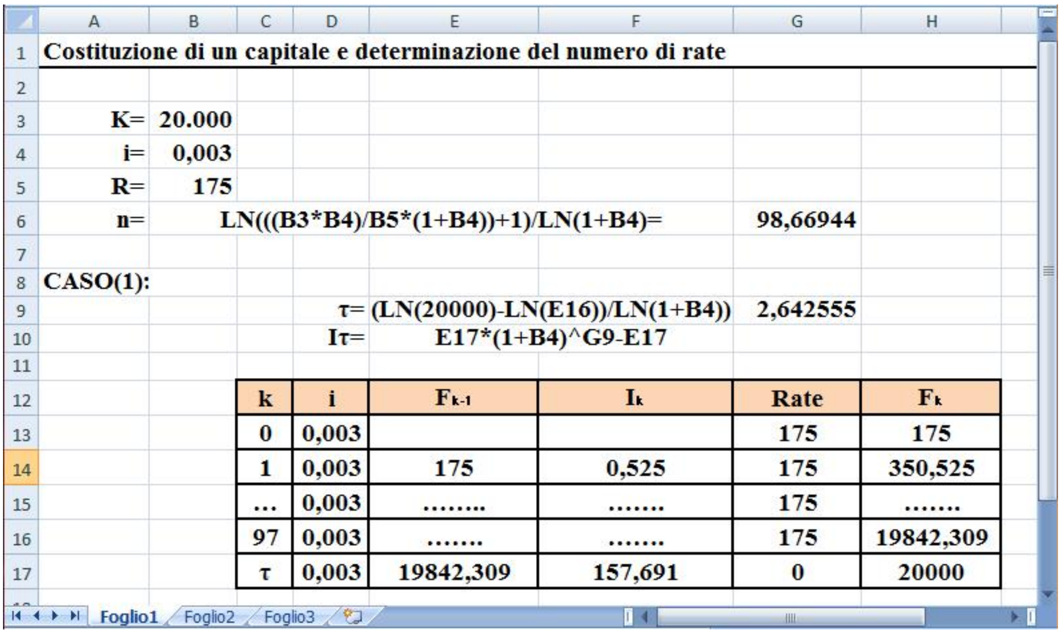
(1) Il montante al tempo $n = 98$, dei 97 versamenti anticipati è dato da:

$$\begin{aligned} M(97,175) &= 175(1 + 0{,}003112817)s_{\overline{97}\rceil 0{,}003112817} \\ &= 175(1{,}003112817)(113{,}0327725) \\ &= 19.842{,}309€ \end{aligned}$$

occorre dunque determinare i tempi di attesa τ, calcolato a partire dalla valuta $98 - esima$:

$$19.842{,}309(1 + 0{,}003112817)^{\tau} = 20.000 \Rightarrow \tau = 2{,}54693$$

Il tempo è espresso in mesi, e dunque $\tau = 2{,}54693$, corrisponde a 2 mesi e 16gg[2].



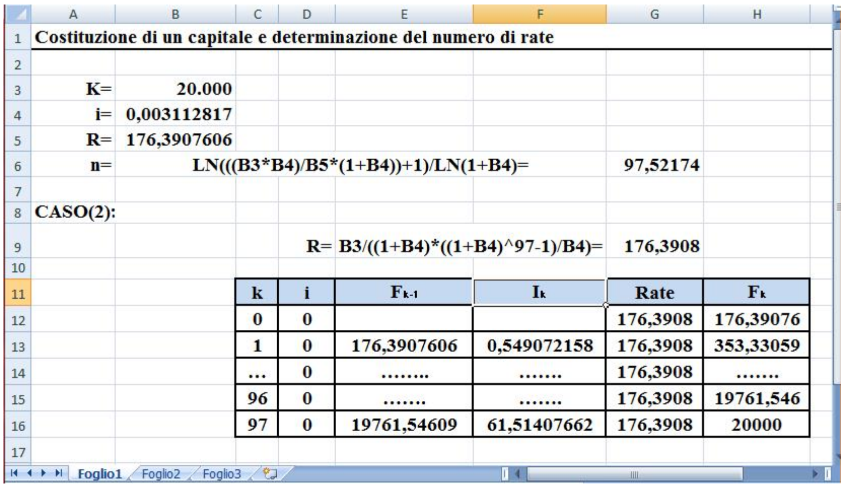
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Costituzione di un capitale e determinazione del numero di rate							
2								
3	K=	20.000						
4	i=	0,003						
5	R=	175						
6	n=		LN(((B3*B4)/B5*(1+B4))+1)/LN(1+B4)=				98,66944	
7								
8	CASO(1):							
9				τ=	(LN(20000)-LN(E16))/LN(1+B4))		2,642555	
10				Iτ=	E17*(1+B4)^G9-E17			
11								
12			k	i	F_{k-1}	I_k	Rate	F_k
13			0	0,003			175	175
14			1	0,003	175	0,525	175	350,525
15			...	0,003	....	....	175	....
16			97	0,003	....	....	175	19842,309
17			τ	0,003	19842,309	157,691	0	20000

FIGURA 26. Costituzione di un capitale con versamenti anticipati

[2]Per $0{,}54693 \cdot 30gg = 16{,}4079gg$ che corrispondono, arrotondando per difetto, a16gg

(2) Se si sceglie di aumentare l'importo per ottenere 97 rate esatte, occorre applicare la formula (3.5), per la costituzione di un capitale $K = 20.000€$, al tasso di costituzione i_{12}, per 97 versamenti:

$$R = \frac{K}{(1 + i_{12})s_{\overline{n}|i_{12}}} = \frac{20.000}{(1 + i_{12})s_{\overline{97}|i_{12}}} = 176,391€$$



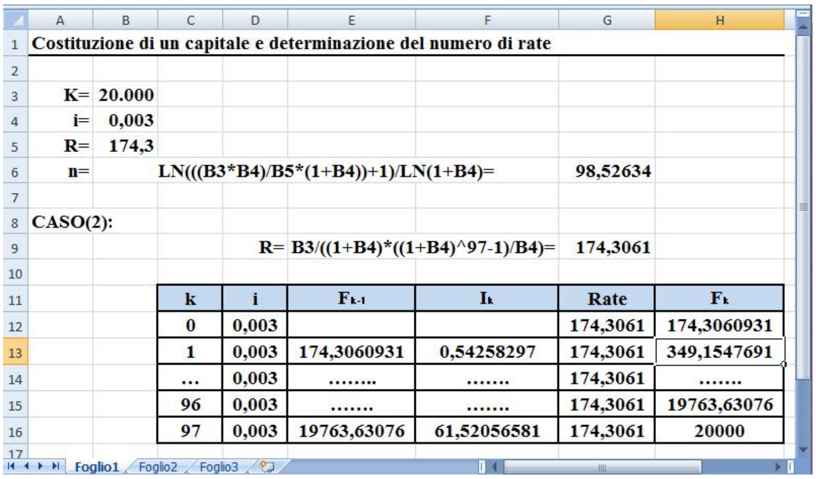
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Costituzione di un capitale e determinazione del numero di rate							
2								
3	K=	20.000						
4	i=	0,003112817						
5	R=	176,3907606						
6	n=		LN(((B3*B4)/B5*(1+B4))+1)/LN(1+B4)=				97,52174	
7								
8	CASO(2):							
9					R= B3/((1+B4)*((1+B4)^97-1)/B4)=		176,3908	
10								
11			k	i	F_{k-1}	I_k	Rate	F_k
12			0	0			176,3908	176,39076
13			1	0	176,3907606	0,549072158	176,3908	353,33059
14			...	0	……..	…….	176,3908	…….
15			96	0	…….	…….	176,3908	19761,546
16			97	0	19761,54609	61,51407662	176,3908	20000
17								

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 27. Costituzione di un capitale con versamenti anticipati

(3) Se si sceglie di diminuire l'importo della rata per ottenere 98 rate, applichiamo sempre l'equazione (3.5), per $n = 98$:

$$R = \frac{K}{(1 + i_{12})s_{\overline{n}|i_{12}}} = \frac{20.000}{(1 + i_{12})s_{\overline{98}|i_{12}}}$$
$$= 174,306€$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Costituzione di un capitale e determinazione del numero di rate							
2								
3	K=	20.000						
4	i=	0,003						
5	R=	174,3						
6	n=		LN(((B3*B4)/B5*(1+B4))+1)/LN(1+B4)=				98,52634	
7								
8	CASO(2):							
9					R= B3/((1+B4)*((1+B4)^97-1)/B4)=		174,3061	
10								
11			k	i	F_{k-1}	I_k	Rate	F_k
12			0	0,003			174,3061	174,3060931
13			1	0,003	174,3060931	0,54258297	174,3061	349,1547691
14			...	0,003	……..	…….	174,3061	…….
15			96	0,003	…….	…….	174,3061	19763,63076
16			97	0,003	19763,63076	61,52056581	174,3061	20000
17								

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 28. Costituzione di un capitale con versamenti anticipati: caso(3)

(4) Esaminiamo i due sotto casi:

I. Consideriamo innanzittutto il montante M maturato in 97 versamenti e per determinare l'importo della somma residua S, occorre risolvere l'equazione:

$$(M + S)(1 + 0,003112817) = 20.000$$
$$\Rightarrow S = 157,202€$$

II. Se si vuole versare 98 rate in modo da costituire il capitale in 99 rate , si deve calcolare il montante in 98 dei 97 versamenti costanti, e risolvere la seguente equazione:

$$175(1 + i_{12})s_{\overline{97}|i_{12}} + S)(1 + i_{12}) = 20.000$$
$$\Rightarrow S = 95,628€$$

OSSERVAZIONE 4.1. (Regime semplice)
Nella capitalizzazione ad interesse semplice, il capitale costituito da n versamenti di R rate, è definito nel seguente modo:

$$K = M(n,R) = \sum_{k=1} nR(1 + i\,(n - k + 1)) = Rn(1 + \frac{n+1}{2}i)$$

Si ha dunque che la rata R, per costituire il capitale K, deve soddisfare la relazione $K = Rn(1 + \frac{n+1}{2}i)$, e quindi:

$$R = \frac{K}{n(1 + \frac{n+1}{2}i)} \qquad (3.7)$$

Se calcoliamo il polinomio di Taylor, rispetto al tasso i, con punto iniziale $i_0 = 0$ delle formule (3.5) e (3.7), relative alla costituzione di capitale in regime composto e semplice, e se ci arrestiamo al primo ordine, troviamo che , al medesimo ordine, i due polinomi coincidono. Posto $R = 1$:
- Nel regime semplice

$$K = \frac{1}{n} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})i + \frac{(n^2 + 2n + 1)i^2}{4n}$$

-Nel regime composto

$$K = \frac{1}{n} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n})i + \frac{(n^2 + 6n + 5)i^2}{12n}$$

Il fatto che la capitalizzazione composta generi un montante maggiore di quello semplice si vede dal fatto che per $n \geq 1$:

$$\frac{(n^2 + 6n + 5)}{12} \leq \frac{(n^2 + 2n + 1)}{4}$$

Dunque la rata costituente la stessa somma è inferiore quando calcolata in regime composto rispetto a quella determinata nel regime semplice.

5. Rendite frazionarie in regime composto

In generale una rendita è detta frazionaria quando il periodo della rendita, quindi l'intervallo di tempo fra due rate successive, è diverso dal periodo relativo al tasso di interese.
Le formule relative al montante e al valore attuale valgono per qualunque periodicità, purché il tasso sia relativo al periodo della rendita. Il calcolo non presenta alcuna difficoltà sia se è assegnato il tasso i_p relativo al periodo della rendita, sia se è assegnato il tasso nominale convertibile k volte all'anno J_p, perchè da esso si ricava:

$$i_p = \frac{J_p}{p} \Rightarrow J_p = pi_p$$

Assegnata una rendita R, definita da $n \in \mathbb{N}$ termini uguali, e fissato $p \in \mathbb{N}$, la rendita R_p, costituita da $(p \cdot n)$ termini ottenuti frazionando ciascuno degli intervalli temporali in p parti di egual ampiezza $\frac{1}{p}$.

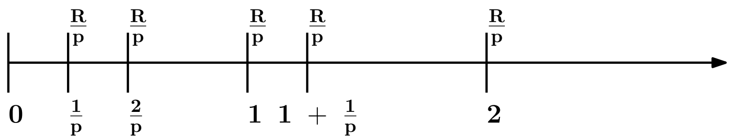


FIGURA 29. Rendita frazionata posticipata

Supponiamo, senza perdita di generalità, che la rendita R sia costituita da termini costanti unitari. Il montante della rendita frazionata R_p è data:

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{p}(1 + i_p)^k = \frac{1}{p} s_{\overline{np}|i_p} \tag{3.8}$$

Calcoliamo il montante della rendita unitaria frazionata in funzione di $s_{\overline{n}|i}$:

$$\begin{aligned} M(np, R_p) &= \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{p}(1 + i_p)^k = \frac{1}{p} s_{\overline{np}|i_p} \\ &= \frac{(1 + i)^{np} - 1}{pi_p} = \frac{((1 + i)^{np} - 1) \cdot i}{pi_p \cdot i} \\ &= \frac{i}{pi_p} s_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

Da cui segue la relazione:

$$s_{\overline{np}|i_p} = \frac{i}{pi_p} s_{\overline{n}|i} \tag{3.9}$$

dove la quantità $\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{pi_p}}$ si chiama *fattore di correzione*.
La relazione (3.9) consente di passare da una rendita frazionata in $p - esimi$ di anno ad una rendita annua. Inoltre il montante di una rendita frazionata

supera quello della rendita annuale. Infatti:

$$\begin{aligned}(1\,+\,i) &= (1\,+\,i_p)^p\\ &\Downarrow\\ i &= (1\,+\,i_p)^p\,-\,1\\ &\Downarrow\\ \frac{i}{pi_p} &= \frac{1}{pi_p}((1\,+\,i_p)^p\,-\,1))\\ &\Downarrow\\ \frac{i}{pi_p} &> \frac{pi_p}{pi_p}\,=\,1\end{aligned}$$

Se, anziché determinare la rendita frazionata, si cerca la rendita sottoperiodale, ottenuta frazionando solo le valute, che abbia lo stesso montante della rendita originale, bisogna sostituire la quantità $\frac{1}{p}$ in (3.8) con una x da determinare in modo che vale la seguente uguaglianza:

$$x\frac{i}{i_p}s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \Rightarrow x = \frac{i_p}{i} \tag{3.10}$$

Sfruttando la disuguaglianza di Bernoulli verifichiamo che $px < 1$. Infatti

$$px = \frac{pi_p}{(1+i_p)-1} < \frac{pi_p}{pi_p} = 1$$

Questo significa che volendo costituire un capitale entro un dato periodo di tempo con versamenti periodici, l'esborso complessivo sarà tanto più piccolo quanto i versamenti saranno più frequenti. Per determinare il montante di una rendita unitaria con versamenti anticipate, si ricava:

$$\ddot{s}_{\overline{np}|i_p} \;=\; \frac{i}{i_p}(1\,+\,i)^{\frac{1}{p}}s_{\overline{n}|i}$$

In modo analogo al montante, si ricava il valore attuale di una rendita unitaria posticipata:

$$V \;=\; \sum_{k=1} np\frac{1}{p}(1\,+i_p)^{-k} \;=\; \frac{a_{\overline{np}|i_p}}{p} \;=\; \frac{i}{pi_p}a_{\overline{n}|i}$$

Per determinare il montante di una rendita unitaria anticipata, si ha:

$$\frac{1}{p}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \;=\; \frac{i}{pi_p}(1\,+\,i)^{\frac{1}{p}}a_{\overline{n}|i}$$

I ragionamenti svolti possono essere ripetuti anche per il valore attuale:

$$\sum_{k=1}^{np}\frac{1}{p}(1+i_o)^{-k} = \frac{a_{\overline{np}|i_p}}{p} = \frac{i}{pi_p}a_{\overline{n}|i}$$

ESEMPIO 5.1. Si consideri una rendita decennale immediata e costante con rate annue di €1.500. Determinare le rendite mensile, bimestrale, trimestrale, quadrimestrale e semestrale ad essa equivalenti al tasso annuo $i = 6\%$. Il termine della rendita è 1.500.
Dati del Problema:
$n = 10$ anni
$i = 0,06$ annuo
$R = 1500€$
Per la risoluzione di questo problema consideriamo la relazione (3.10). I tassi equivalenti e le rate sono elencati nella tabella:

	periodo	i_p	$x = \frac{i_p}{i}$	Rata $R_p = R \cdot x$
mensile	12	$0,004867551$	$0,081125843$	€$121,6887641$
bimestrale	6	$0,009758794$	$0,16264657$	€$243,9698545$
trimestrale	4	$0,014673846$	$0,244564103$	€$366,8461542$
quadrimestrale	3	$0,019612822$	$0,326880374$	€$490,3205606$
semestrale	2	$0,029563014$	$0,492716902$	€$739,0753525$

TABELLA 1. Calcolo delle rate relative ai periodi

Il montante della rendita originale è :

$1500 \cdot s_{\overline{10}|0.06} = 1500 \cdot 13,18079494 = 19771,19241 = 19771,19€$

Le rate determinate e relative ai periodi indicate, vanno a costituire al

	periodo	Rata	$s_{\overline{np}\rceil i}$	Montante $R_p = R \cdot x$
mensile	12	€$121,6887641$	$162,4734424$	€$19771,19241$
bimestrale	6	€$243,9698545$	$81,03948931$	€$19971,19241$
trimestrale	4	€$366,8461542$	$53,89505161$	€$19971,19241$
quadrimestrale	3	€$490,3205606$	$40,32299276$	€$19771,19241$
semestrale	2	€$739,0753525$	$26,75125391$	€$19771,19241$

TABELLA 2. Confronto fra i montanti relativi ai periodi

termine della capitalizzazione, lo stesso montante costituito dalla rendita iniziale.

Attraverso il foglio elettronico basta introdurre i dati come le tabelle sovrastanti, ottenedo il seguente risultato.

Calcolo di una rendita frazionaria

	p	$i_p=((1+i)^\wedge(1/p))-1$	$x= i_p/i$	$R_p= R*x$
mensile	12	0,004867551	0,081125843	121,6887641
bimestrale	6	0,009758794	0,16264657	243,9698545
trimestrale	4	0,014673846	0,244564103	366,8461542
quadrimestrale	3	0,019612822	0,326880374	490,3205606
semestrale	2	0,029563014	0,492716902	739,0753525
i=	0,06			
R=	1500	$M=R*s_{\overline{10}|i}$ =	€ 19.771,19	

Calcolo di una rendita frazionaria

$R_p= R*x$	$s_{\overline{np}|ip}$	Montante	
121,6887641	162,4734424	€ 19.771,19	mensile
243,9698545	81,03948931	€ 19.771,19	bimestrale
366,8461542	53,89505161	€ 19.771,19	trimestrale
490,3205606	40,32299276	€ 19.771,19	quadrimestrale
739,0753525	26,75125391	€ 19.771,19	semestrale
i=	0,06		
R=	1500	$M=R*s_{\overline{10}|i}$ =	€ 19.771,19

FIGURA 30. Calcolo di rendite frazionate

CAPITOLO 4

Metodi matematici applicati alla valutazione degli investimenti

Un generico *problema di investimento* nella matematica finanziaria classica (inerente non solo all'acquisto di titoli, al prestito di un capitale, ma anche all'acquisto di immobili o macchinari...) si può rappresentare come una rendita:

$$R(x_k, t_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

i cui termini x_k, esprimono ora i flussi di cassa (cash flow, è dato dall'insieme delle entrante e delle uscite monetarie di un determinato periodo temporale o contabile) derivanti dall'investimento in esame e possono assumere valori positivi (entrate) e negativi (uscite).
In questo capitolo verranno affrontati i problemi relativi alla valutazione e al confronto degli investimenti, attraverso la descrizione dei criteri che consento di analizzare i flussi di cassa e i progetti finanziari, al fine di stabilirne il grado di convenienza per un soggetto economico.
Nella pratica finanziaria molti sono i criteri utilizzati , ma solo i seguenti saranno trattati in questo capitolo:

- Criterio del VAN, ossia del valore attuale netto, detto anche REA, ossia risultato economico attualizzato;
- Criterio TIR, ossia del tasso interno di rendimento;
- Criterio TRM (Teichroew, Robichek e Montalbano), ossia il criterio del saldo finale a due tassi;
- Criterio di C.S. Soper.

1. Definizioni preliminari

Premettiamo anzitutto alcune definizioni e proprietà che saranno usati nel seguito.

DEFINIZIONE 1.1. (Progetto: Investimento e finanziamento)
Si definisce *progetto* una operazione finanziaria.
Indichiamo un generico progetto con $\mathbf{X} = [\mathbf{x}, \mathbf{t}]$dove :

- x è una sequenza di flussi di cassa, detto vettore $cash\ flow$:

$$\mathbf{x} : x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$$

tali che:

$$\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_n \neq 0 \\ x_s \cdot x_r \ < \ 0, \text{ per almeno una coppia r,s} \end{cases}$$

- t è il vettore delle scadenze,

$$\mathbf{t} : 0, 1, 2, \ldots, n-1, n, \qquad \text{con } n \geq 1$$

ossia delle epoche in cui i flussi di cassa sono disponibili.

Un progetto è un'operazione finanziaria in cui il vettore dei segni dei *cash flow* può avere un numero qualsiasi di cambiamenti di segno.
Il numero dei cambiamenti di segno presenti nel vettore dei cash flow del progetto permette di classificare i progetti in:

- Progetti di *investimento* se:

$$\begin{cases} x_0 < 0 \\ x_k > 0 \quad k = 1, .., n \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_k < 0, & 0 \leq k < s \\ x_s > 0, & k < s \leq n \end{cases}$$

  è quindi caratterizzati da un solo cambio di segno nel vettore dei flussi di cassa, ed in particolare si presentano prima gli esborsi (cash flow con segno negativo) e successivamente le entrate (cask flow con segno positivo);

- Progetti di *finanziamento* se:

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_k < 0 \quad k = 1, .., n \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_k > 0, & 0 \leq k < s \\ x_s < 0, & k < s \leq n \end{cases}$$

  è quindi caratterizzati da un solo cambio di segno nel vettore dei flussi di cassa, in particolare le entrate (cash flow con segno positivo) e precedono le uscite (cash flow con segno negativo);

Questa è la classe dei pogetti i cui flussi di cassa presentano una sola variazione di segno.

DEFINIZIONE 1.2. (Progetto semplice)
Un progetto è detto semplice, quando i suoi flussi di cassa non nulli hanno tutti segno diverso da x_0.

Dato un progetto $X = [x, t]$, indicheremo con

$$V(i) \ = \ \sum_{k=0}^{n} x_k (1 \ + \ i)^{-k}$$

il valore attuale del progetto, mentri il montante, detto anche saldo, sarà indicato con

$$S(i) = \sum k = 0^n x_k (1 \ + \ i)^{n-k}$$

Vale come è noto la relazione:

$$V(i) \ = \ (1 \ + \ i)^{-n} S(i)$$

DEFINIZIONE 1.3. (Sottoprogetto)
Sia $X = [x,t]$, un progetto costituito da flussi di cassa x relative alle epoche t. Si definisce sottoprogetto del progetto X, ogni sequenza di flussi di cassa del tipo:

$$\mathbf{X_j} : x_0, x_1, \ldots, x_j, \qquad \text{con } j \leq n$$

che soddisfi alle condizioni della definizione(1.1).
Indicheremo il valore attuale del sottoprogetto X_j con:

$$V_j(i) \;=\; \sum_{k=0}^{j} x_k \cdot (1+i)^{-k}$$

ed il suo montante (saldo) con:

$$S_j(i) \;=\; \sum_{k=0}^{j} x_k(1 \;+\; i)^{j-k}$$

DEFINIZIONE 1.4. (Puro investimento e puro finanziamento)
Un progetto si dice, al dato tasso i, di puro investimento (di puro finanziamento), quando tutti i suoi sottoprogetti presentano saldi, a quel tasso i, non positivi (non negativi):

$$S_j(i) \;=\; \sum_{k=0}^{j} x_k(1 \;+\; i)^{j-k} \leq 0 \;(\geq 0) \qquad \forall j : 0 \leq j \leq n-1$$

DEFINIZIONE 1.5. (Progetto misto)
Un progetto è misto al dato tasso i, quando almeno uno dei suoi sottoprogetti ppresenta un saldo di segno diverso dagli altri.

Abbiamo dunque che i progetti si distinguono in puri (di investimento o finanziamento a seconda del segno di x_0) per qualunque tasso $i > (-1)$, quando l'ultimo flusso di cassa x_n, ha segno diverso dagli altri. Ove si fosse interessati ai soli valori positivi del tasso i, avremo che un progetto è puro, se la cumulata dei flussi di cassa (saldo dei flussi di cassa a tasso nullo):

$$S(0) = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

ha segno diverso da tutte le altre cumulate o dai saldi parziali

$$X_j = S_j(0) = \sum_{k=0}^{n} x_k, \text{ con } 0 \leq j \leq n-1$$

Se ad un dato tasso i^* consideriamo un progetto misto, allora esiste sempre un valore del tasso i_{min} con :

$$i_{min} > i^*$$

per valori maggiori del quale il progetto è puro.Mentre, se ad un dato tasso i^* un progetto è puro, allora esso rimane puro per qualunque valore di $i > i^*$.

2. Metodo del Valore Attuale Netto o Risultato Economico Attualizzato

Supponiamo fissato un intervallo temporale, che coincide con il periodo di capitalizzazione, e consideriamo un orizzonte temporale costituito da n periodi. Ipotizziamo inoltre che tutti i pagamenti di segno positivo (entrate) o negativo (uscite) siano certi e avvengono alla fine di ciascun periodo. Rappresentiamo il flusso di cassa attraverso il vettore $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Il

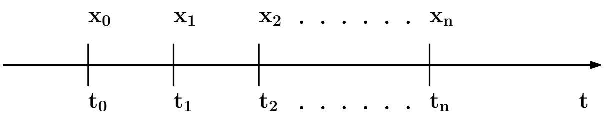


FIGURA 1. Rappresentazione di un flusso di cassa sull'asse temporale

caso a cui faremo riferimento è quello degli investimenti caratterizzato da costi iniziali ($x_i < 0$) e da ricavi ($x_i > 0$).
L'investimento è semplice se

$$x_0 < 0 \ \wedge \ x_i \geq 0, \ \forall i.1 \leq i \leq n$$

Supponiamo infine che il tasso di interesse periodale i sia certo e applicabile sia ai crediti che ai debiti e non vi sono costi o spese di transizione.

DEFINIZIONE 2.1. (Valore attuale netto)
Sia dato un flusso di cassa $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, con valute

$$t_0 = 0, \ t_1 = 1, \dots, \ t_n = n$$

e sia i il tasso periodale.
Il Valore Attuale Netto del flusso di cassa, valutato al tasso i, all'epoca $t = t_0$ è dato da:

$$VAN = x_0 + \frac{x_1}{1+i} + \dots + \frac{x_n}{(1+i)^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{(1+i)^k} \tag{4.1}$$

Il VAN di una somma di flussi di cassa $(X_1, \dots, X_n)$, è dato dalla somma del VAN dei singoli flussi di cassa:

$$VAN\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} VAN(X_k)$$

Si parla di valore attuale *netto*, in quanto in esso sono inclusi anche i costi.

ESEMPIO 2.1. Consideriamo il flusso di cassa $(-2, 1, 1, 1)$, ed un tasso $i = 10\%$. Il valore attuale netto è :

$$VAN = -2 + \frac{1}{1+0,1} + \frac{1}{1+0,1} + \frac{1}{1+0,1} = 0,487$$

Il valore attuale netto può essere interpretato come il pagamento, all'inizio dell'intervallo temporale considerato, equivalente al flusso di cassa. Usare il metodo del valore attuale netto come criterio di scelta significa considerare migliore l'alternativa che ha il VAN più alto. Infatti fissato un tasso di valutazione i, ed assumendo la legge scindibile, è chiaro che al $max(VAN(t_0,i)$, corrisponde il $max(S(t_n,i))$.
Potremmo dunque anche definire, al posto del valore attuale netto, il valore:

$$S(t_n,i) = VAN(t_0,i)(1+i)^{(t_n-t_0)}$$

e chiamare questa alternativa come *criterio del valore finale*, che associa ad un progetto il suo valore finale. Tuttavia, dato che la valutazione e la scelata dei progetti è una operazione che si fa ex-ante, si preferisce optare per il valore attuale.
Ora, nel valutare un generico investimento, abbiamo che il progetto è accettabile solo se il VAN relativo al flusso di cassa è positivo.
Ovviamente il VAN di una operazione finanziaria dipende esclusivamente dal tasso di rendimento i usato. Cambiando il tasso i il confronto può portare a scegliere un progetto diverso.

OSSERVAZIONE 2.1. (Applicazione del VAN)
Consideriamo un soggetto economico avente una quantità di ricchezza iniziale W_0, che vorrebbe effettuare un generico investimento che prevede una uscita di cassa x_0, tale che $W_0 > x_0$.
Siano

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

le entrate monetarie relative ai periodi

$$t_1, \dots, t_n$$

e i il tasso periodale relativo all'invesimento.
Se il soggetto decide di intraprendere l'investimento, avremo che al tempo $t_0 = 0$, egli avrà una ricchezza pari

$$W_0 - x_0$$

mentre alle scadenze $t_1 = 1, \dots, t_n = n$, incasserà i rispettivi flussi temporali reinvestendoli al tasso di rendimento i.
Se indichiamo con T l'orizzonte temporale, avremo che la ricchezza finale W_T è pari a :

$$W_T = (W_0 - x_0)(1+i)^T + x_1(1+i)^{T-t_1} + \dots + x_n(1+i)^{T-t_n} \tag{4.2}$$

Nel caso in cui non si effettui l'investimento, avremo che:

$$W_T = W_0(1+i)^T \tag{4.3}$$

Se l'investimento è conveniente abbiamo che la ricchezza definita da (4.2) deve essere superiore da quella individuata dalla (4.3):

$$\begin{aligned}(W_0 - x_0)(1+i)^T + x_1(1+i)^{T-t_1} + \dots \\ + x_n(1+i)^{T-t_n} > W_0(1+i)^T\end{aligned}$$

e semplificando otteniamo che

$$\begin{aligned}&-x_0(1+i)^T + x_1(1+i)^{T-t_1} + \dots + x_n(1+i)^{T-t_n} > 0 \\ &-x_0 + x_1(1+i)^{-t_1} + \dots + x_n(1+i)^{-t_n} > 0\end{aligned}$$

Da qui la formulazione del valore attuale netto:

$$VAN = -x_0 + \frac{x_1}{1+i} + \dots + \frac{x_n}{(1+i)^n}$$

ESEMPIO 2.2. Consideriamo il seguente progetto di investimento rappresentato dalle alternative $A[x,t]$ e $B[y,t]$:

- Progetto $A[x,t]$:

$$x = (-1000, 110, 1100), \qquad t = (0,1,2)$$

- Progetto $B[y,y]$:

$$y = (-600, 260, 240, 220). \qquad t = (0,1,2,3)$$

Valutiamo le due scelte al tasso di rendimento 10%.

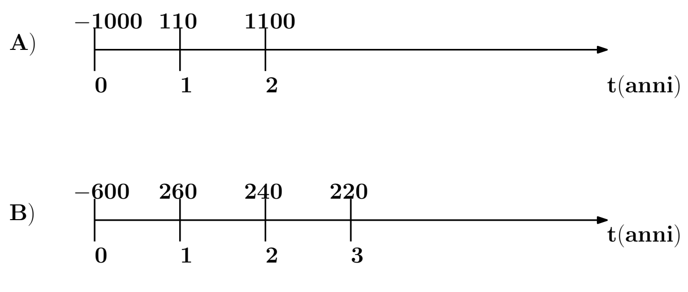


FIGURA 2. Rappresentazione dei progetti sull'asse temporale

Applicando la formula (4.1), andiamo a calcolare i rispettivi VAN:

$$\begin{aligned}
VAN(A) &= \sum_{k=0}^{2} x_k(1+i)^{-k} = \\
&= -1000 + 110(1+0,1)^{-1} + 1100(1+0,1)^{-2} \\
&= -1000 + 100 + 909,0209091 \\
&= 9,090909091 \\
VAN(B) &= \sum_{k=0}^{3} x_k(1+i)^{-k} = \\
&= -600 + 260(1+0,1)^{-1} + 2401100(1+0,1)^{-2} + \\
&+ 220(1+0,1)^{-3} = \\
&= -600 + 236,3636364 + 198,3471074 + 165,2892562 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Al tasso del 10%, otteniamo $VAN(A) = 9,09$, $VAN(B) = 0$, dunque si preferisce A. Consideriamo i due progetti al tasso $i = 13\%$:

$$\begin{aligned}
VAN(A) &= \sum_{k=0}^{2} x_k(1+i)^{-k} = \\
&= -1000 + 110(1+0,13)^{-1} + 1100(1+0,13)^{-2} \\
&= -1000 + 97,34513274 + 861,4613517 \\
&= -41,19751555 \\
VAN(B) &= \sum_{k=0}^{3} x_k(1+i)^{-k} = \\
&= -600 + 260(1+0,13)^{-1} + 240(1+0,13)^{-2} \\
&+ 220(1+0,13)^{-3} \\
&= -600 + 230,0884956 + 187,955204 + 152,4710357 \\
&= -29,4852647
\end{aligned}$$

Al tasso del 13%, otteniamo $VAN(A) = -41,1975$, $VAN(B) = -29,4852$, dunque si preferisce il meno peggio, ossia B.

Nella valutazione del progetto si può cercare il tasso i che rende equivalenti i due progetti.

ESEMPIO 2.3. Consideriamo l'esempio precedente e andiamo a risolvendo l'equazione che rende il valore attuale netto di A uguale al valore attuale netto di B:

$$\begin{aligned} VAN(A) &= VAN(B) \\ -1000+110(1+i)^{-1}+1100(1+i)^{-2} &= -600+260(1+i)^{-1} \\ &\quad +240(1+i)^{-2}+220(1+i)^{-3} \\ \text{posto } (1+i) &= x \\ &\Downarrow \\ -1000+110x^{-1}+1100x^{-2} &= -600+260x^{-1}+240x^{-2}+220x^{-3} \\ -1000x^3+110x^2+1100x &= -600^3+260x^2+240x+220 \\ -400x^3-150x^2+860x-220 &= 0 \end{aligned}$$

Applicando il metodo di Newton e iterando la funzione:

$$F(x) = x - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Andiamo a determinare il tasso $i = 11,29\%$.
Questo tasso è detto *tasso di svolta*, in quanto si ha:

$$\begin{array}{lll} \text{VAN(A)} > \text{VAN(B)} & \text{per} & 0 < i < 11,29\% \\ \text{VAN(A)} < \text{VAN(B)} & \text{per} & i > 11,29\% \end{array}$$

ESEMPIO 2.4. In una azienda agricola si rompe una vecchia falciatrice, e deve essere riparata.
Nella previsione che in un futuro essa richieda elevati costi annui di manutenzione, si ipotizza perciò di sostituirla con una falciatrice nuova.
Ipotizziamo un tasso di rendimento del 5%, valutiamo l'alternativa migliore, fra il riparare la vecchia o comprare la nuova.
Poniamo a confronto le due scelte da valutare:

Macchina vecchia	**Macchina nuova**
Costo iniziale :	Costo:
2.000€	6.000€
Valore corrente:	Risparmio annuo manodopera:
500€	700€
Revisione completa:	Manutenzione annua fino al V anno:
1000€	200€
Spese annue di manutenzione:	Manutenzione annua dopo il V anno:
500€	300€
	Obsolescenza tecnica: 8 anni.

Analizziamo il flusso di cassa:

Investimento iniziale		
Macchina nuova:		6.000€
Vendita **macchina vecchia**:	500€	
Costi di riparazione:	1.000€	
Investimento effettivo:		4.500€
Incremento annuo delle entrate: i primi 5 anni		
Manodopera:	700€	
Manutenzione:	300€	
Incremento annuo:	1.000€	
Incremento annuo delle entrate: ultimi 3 anni		
Manodopera:	700€	
Manutenzione:	200€	
Incremento annuo:	900€	

Dall'analisi del flusso di cassa, risulta che investendo al tempo $t_0 = 0$ l'ammontare di 4.500€, si ottiene un'entrata addizionale di 1.000€ per i primi 5 anni e una di 900€, per i successivi 3 anni.
Il valore attuale netto è dato da:

$$\begin{aligned} VAN &= -4.500 + 1.000(1+0,05)^{-1} + 1.000(1+0,05)^{-2} \\ &+ 1.000(1+0,05)^{-3} + 1.000(1+0,05)^{-4} + 1.000(1+0,05)^{-5} \\ &+ 9.00(1+0,05)^{-6} + 1.000(1+0,05)^{-7} + 1.000(1+0,05)^{-8} \\ &= 1.749,84 \end{aligned}$$

Evidenziamo l'evoluzione temporale del valore attuale netto, attraverso l'uso delle tavole di matematica finanziaria, relative al saggio del 5%.

TAVOLE DI MATEMATICA FINANZIARIA

SAGGIO In % 5,00 q= 1,0500

n	q^n	1/q^n	q^n - 1 /r	q^n - 1
1	1,05000000	0,95238095	1,00000000	0,9
2	1,10250000	0,90702948	2,05000000	1,8
3	1,15762500	0,86383760	3,15250000	2,7
4	1,21550625	0,82270247	4,31012500	3,5
5	1,27628156	0,78352617	5,52563125	4,3
6	1,34009564	0,74621540	6,80191281	5,0
7	1,40710042	0,71068133	8,14200845	5,7
8	1,47745544	0,67683936	9,54910888	6,4

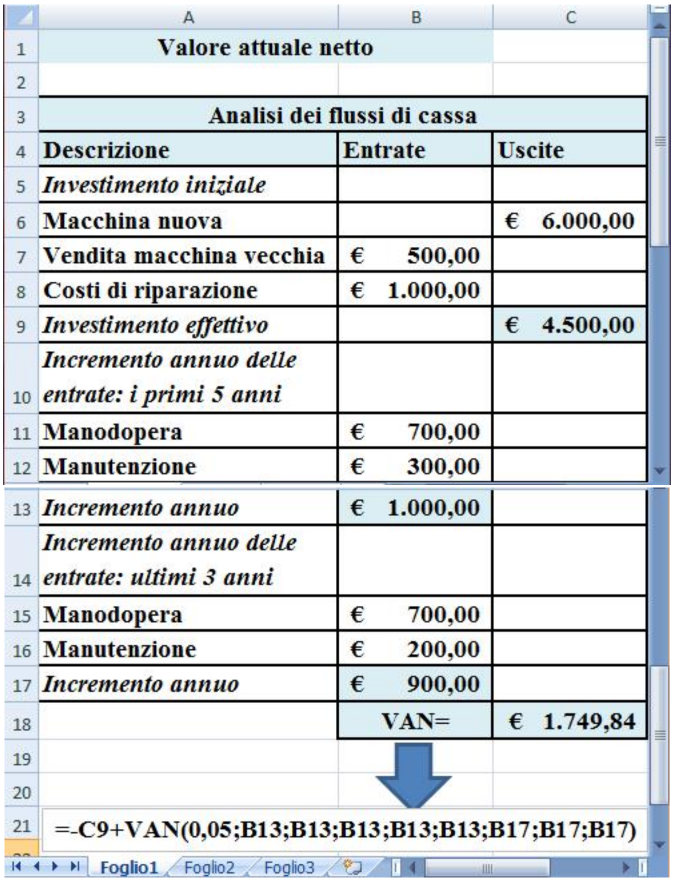
Tf

FIGURA 3. Tavole finanziarie relative al saggio del 5%

Il problema a questo punto può essere così schematizzato:

Anno	Entrata netta	Fattore sconto	Flusso monetario
0	-4.500	1.000	-4.500
1	1.000	$0,95238095$	$952,38095$
2	1.000	$0,90702948$	$907,02948$
3	1.000	$0,86383760$	$863,83760$
4	1.000	$0,82270247$	$822,70247$
5	1.000	$0,78352617$	$783,52617$
6	9.00	$0,74621540$	$671,59386$
7	9.00	$0,71068133$	$693,613197$
8	9.00	$0,67683936$	$609,155424$
		VAN	$1.749,84$€

La conclusione è che l'acquisto della nuova falciatrice, supera il tasso di valutazione limite $i = 5\%$, e rappresenta dunque un investimento interessante il cui valore positivo è di $1.749,84$€.
Attraverso il foglio elettronico EXCEL, questa valutazione avviene utilizzando la funzione VAN, applicata ai flussi di cassa esaminati.



	A	B	C
1	**Valore attuale netto**		
2			
3	**Analisi dei flussi di cassa**		
4	**Descrizione**	**Entrate**	**Uscite**
5	***Investimento iniziale***		
6	**Macchina nuova**		**€ 6.000,00**
7	**Vendita macchina vecchia**	**€ 500,00**	
8	**Costi di riparazione**	**€ 1.000,00**	
9	***Investimento effettivo***		**€ 4.500,00**
10	***Incremento annuo delle entrate: i primi 5 anni***		
11	**Manodopera**	**€ 700,00**	
12	**Manutenzione**	**€ 300,00**	
13	***Incremento annuo***	**€ 1.000,00**	
14	***Incremento annuo delle entrate: ultimi 3 anni***		
15	**Manodopera**	**€ 700,00**	
16	**Manutenzione**	**€ 200,00**	
17	***Incremento annuo***	**€ 900,00**	
18		**VAN=**	**€ 1.749,84**
19			
20			
21	**=-C9+VAN(0,05;B13;B13;B13;B13;B13;B17;B17;B17)**		

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 4. Metodo del VAN applicato attraverso EXCEL

3. Metodo del tasso interno di renditmento

Esaminiamo ora il metodo del TIR(tasso interno di rendimento) che si basa sulla valutazione, al tempo t_0, di un valore che può essere associato ad alcuni flussi di cassa e che risulta essere legato solo alle caratteristiche intrinseche all'operazione finanziaria.
Alla base di questo metodo vi è il problema di studiare come varia il VAN, al variare del tasso di rendimento $i > 0$:

- Per $i = 0$, Abbiamo la somma dei flussi di cassa:
$$VAN(i = 0) = \sum_{k=0}^{n} x_k > 0$$
- Per $i \to \infty$, abbiamo :
$$\lim_{i \to \infty} VAN(i) = x_0 < 0$$
in quanto in un problema di investimento la prima posta è negativa.

Essendo $VAN(t_0, i)$ una funzzione continua di i, esiste almeno un valore i^*, per cui il VAN si annulla:

$$VAN(i^* = 0)$$

Se questo esiste ed è unico, si chiama TIR- tasso interno di rendimento o tasso implicito.

TEOREMA 3.1. *(Condizione di esistenza TIR)*
Consideriamo un flusso di cassa (x_0,$x_1, x_2, \ldots, x_n$), relativo a un investimento semplice, tale per cui:

(1) $x_0 < 0$
(2) $\sum_{k=0}^{n} x_k > 0$ *, che equivale alla condizione* $\sum_{k=1}^{n} x_k > -x_0$

allora esiste un unico i^*, soluzione dell'equazione:

$$x_0 + \frac{x_1}{1+i} + \ldots + \frac{x_n}{(1+i)^n} = 0 \tag{4.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funazione

$$\begin{aligned} f(c) &= x_0 + \frac{x_1}{1+i} + \ldots + \frac{x_n}{(1+i)^n} \\ &= x_0 + x_1 c + \ldots + x_n c^n, \text{ per } c = \frac{1}{1+i} \end{aligned}$$

La funzione $f(c)$ è una funzione continua e strettamente crescente. Inoltre essendo:

$$f(0) < 0 \text{ e } f(1) > 0$$

sono verificate le condizioni per cui deve esistere un valore $\bar{c}$, unico per la stretta monotonia di f, con $0 < \bar{c} < 1$, tal e per cui $f(\bar{c}) = 0$.
Allora $i^* = \frac{1}{\bar{c}} - 1 > 0$. □

È da sottolineare che l'ipotesi $\sum_{k=0}^{n} x_k > 0$ evidenzia che la somma dei pagamenti incassati supera l'investimento iniziale. Da un punto di vista finanziario, il TIR è quel tasso che rende equa l'intera operazione di investimento.

DEFINIZIONE 3.1. (Tasso Interno di Rendimento)
Si definisce Tasso Interno di Rendiomento (TIR), di un investimento semplice che soddisfa la relazione $\sum_{k=0}^{n} x_k > 0$, il valore i^* che soddisfa l'equazione:

$$x_0 + \frac{x_1}{1 + i} + \ldots + \frac{x_n}{(1 + i)^n} = 0$$

OSSERVAZIONE 3.1. Il TIR può essere definito per tutte le operazioni di finanziamento semplice per cui $\sum_{k=0}^{n} x_k < 0$. Generalmente, il TIR di un flusso di cassa $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, è definito come la soluzione dell'equazione

$$x_0 + \frac{x_1}{1 + i} + \ldots + \frac{x_n}{(1 + i)^n} = 0$$

e, tale definizione, ha senso se il valore di i^* è positivo ed unico, cosa che non sempre è verificato. Infatti la relazione (4.4) può essere soddisfatta per pi*ù* valori di i, e quindi VAN(i) può avere più di uno zero, e ciò può succedere in operazioni complesse in cui si succedono costi e ricavi ripetutamente.

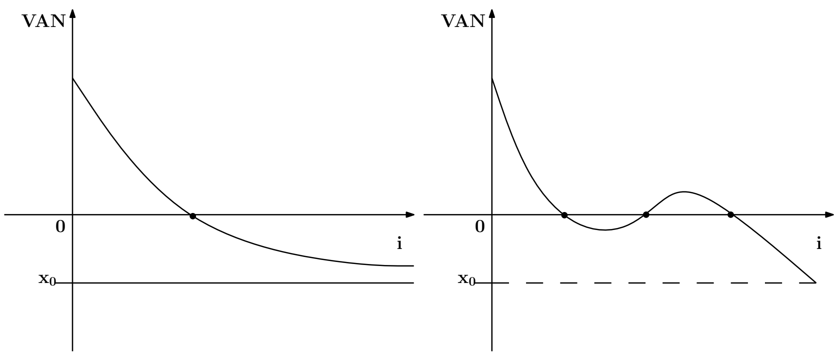


FIGURA 5. Caso in cui esiste un solo i, e caso in cui esistono diversi i

In questo capitolo saranno esposti i criteri che consentiranno di definire l'unicità della soluzione dell'equazione (4.4).

ESEMPIO 3.1. Calcoliamo il TIR di una operazione finanziaria che a fronte di un esborso iniziale di 1000€ da effettuare al tempo $t_0 = 0$, prevede la riscossione di 500€ tra un anno e 750€ tra due anni.

Occorre risolvere l'equazione:

$$
\begin{aligned}
0 &= -1000 + 500(1+x)^{-1} + 750(1 + x)^{-2} \\
0 &= -1000x^2 - 1500x + 250 \\
x_{1,2} &= \frac{1500 \pm \sqrt{2250000+1000000}}{-2000} \\
1)x_1 &= \frac{1500+1802,775638}{-2000} < 0 \Rightarrow \text{soluzione non accetabile} \\
2)x_2 &= \frac{1500-1802,775638}{-2000} > 0 \Rightarrow x_2 = 0,151387819
\end{aligned}
$$

Per risolvere il seguente problema attraverso il foglio elettronico EXCEL, inseriamo i dati seguendo la tabella sottostante e utilizzando la funzione finanziaria TIR.COST:

cella B4	0	scadenza t_0
cella B5	1	scadenza t_1
cella B6	2	scadenza t_2
cella C4	-1000€	Esborso iniziale
cella C5	500	somma riscossa al tempo t_1
cella C6	6.000	somma riscossa al tempo t_2
cella C8	$TIR.COST(C4:C6)$	la funzione TIR.COST

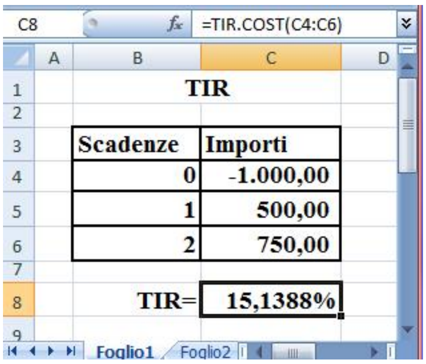


FIGURA 6. Metodo del TIR applicato attraverso EXCEL

4. Rendita a rata costante

Consideriamo il TIR valutato per una rendita a rata costante, ossia quando in un flusso di cassa $(x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n)$, relativo a un progetto di investimento equivale la condizione:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

Abbiamo visto che, una rendita costante formata da n rate costanti unitarie, ossia $x_s = 1, \forall s = 1,2,\ldots,n$, il valore attuale della rendita al tasso i, è definibile attraverso una funzione

$$f(i) = \sum_{k=1}^{n}(1 + i)^{-k} = a_{\overline{n}|i}$$

e che l'equazione

$$f(i) = a_{\overline{n}|i} = \alpha$$

ammette una sola radice positiva i^*, $\forall\alpha$ tale che $1 < \alpha < n$.
Analogamente, per ogni tasso i, esiste un unico corrispondente valore attuale.
Il caso che andremo ad esaminare è il seguente:
L'investimento di un capitale

$$x_0 = \alpha_0$$

effettuato al tempo $t_0 = 0$ al quale segue una rendita

$$R(x_1, x_2 \ldots, x_n)$$

ai tempi

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

L'investimento ha senso solo se la somma degli n termini positivi della rendita supera l'esborso iniziale:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k > x_0 = \alpha_0$$

Verificate le ipotesi poste dal teorema (3.1), possiamo calcolare il TIR attraverso il metodo delle tangenti, in quanto sappiamo che la soluzione è compresa nell'intervallo $]0,1[$.
Supponiamo che la rendita periodica costante assegnata, abbia n termini di valore α, con valore attuale α_0, tale che $n\,\alpha > \alpha_0$. Si ottiene cosi l'equazione nella variabile i:

$$\alpha_0 = \alpha\, a_{\overline{n}|i}$$

Per $v = (1 + i)^{-1}$, otteniamo:

$$f(v) := v^{n+1} - (1 + \frac{\alpha_0}{\alpha})v + \frac{\alpha_0}{\alpha} = 0$$

Applicando il metodo di Newton, andiamo ad iterare la funzione:

$$F(v) = v - \frac{f(v)}{f'(v)} = \frac{\alpha \cdot n \cdot v^{n+1} - \alpha_0}{\alpha(1 + n)v^n - (\alpha + \alpha_0)} \tag{4.5}$$

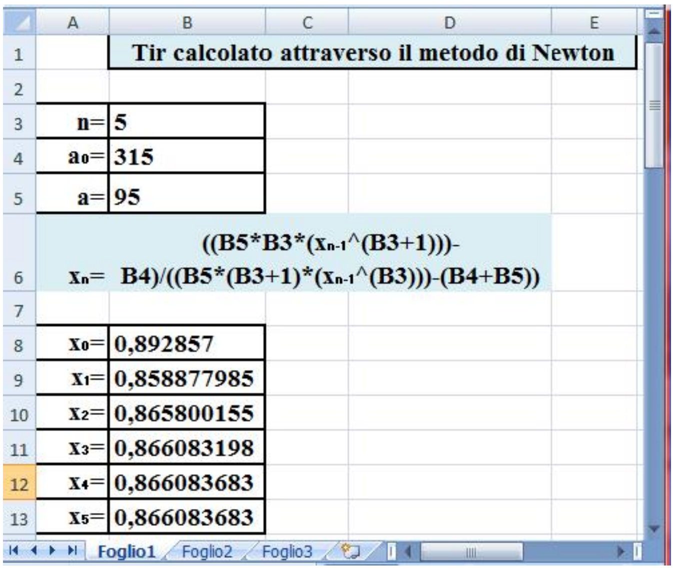
ESEMPIO 4.1. Una rendita periodica di 5 termini eguali a €95 ha il valore attuale di €315. Determinare il tasso interno di rendimento. In base ai dati forniti dal problema, andiamo a costruire la funzione (4.5):
$n = 5 \qquad \alpha_0 = 315 \qquad \alpha = 95$

$$F(x) = \frac{\alpha \cdot n \cdot x^{n+1} - \alpha_0}{\alpha(1 + n)x^n - (\alpha + \alpha_0)} = \frac{95 \cdot 5 \cdot x^6 - 315}{95 \cdot 6 \cdot x^5 - 410} = \frac{475 \cdot x^6 - 315}{570 \cdot x^5 - 410}$$

L'iterazione sarà tanto più rapida quanto più il valore di partenza v_0 è scelto vicino al valore cercato.

Metodo di Newton	
$\mathbf{x_n = F(x_{n-1}) = \frac{475x_{n-1}^6 - 315}{570x_{n-1}^5 - 410}}$	
$\mathbf{x_0 = 0,892875}$	$\mathbf{x_1 = F(x_0) \approx 0,858877985}$
$\mathbf{x_2 = F(x_1) \approx 0,865800155}$	$\mathbf{x_3 = F(x_2) \approx 0,866083198}$
$\mathbf{x_4 = F(x_3) \approx 0,866083683}$	$\mathbf{x_5 = F(x_4) \approx 0,866083683}$

TABELLA 1. Metodo iterativo di Newton



	A	B	C	D	E
1		Tir calcolato attraverso il metodo di Newton			
2					
3	n=	5			
4	a₀=	315			
5	a=	95			
6	xₙ=	((B5*B3*(xₙ₋₁^(B3+1)))-B4)/((B5*(B3+1)*(xₙ₋₁^(B3)))-(B4+B5))			
7					
8	x₀=	0,892857			
9	x₁=	0,858877985			
10	x₂=	0,865800155			
11	x₃=	0,866083198			
12	x₄=	0,866083683			
13	x₅=	0,866083683			

FIGURA 7. Tir calcolato con il metodo di Newton in EXCEL

La stabilizzazione delle prime sei cifre decimali fornisce una accettabile approssimazione. del tasso cercato:

$$i = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0,866083683} - 1 = 0,154622838$$

Abbiamo dunque che $TIR = 0,15\%$.

5. Esercizio sui problemi di scelta fra progetti finanziari certi

Si analizza la convenienza dei progetti di investimento alternativi A, B, e C che presentano i seguenti flussi di cassa (in euro), in corrispondenza delle epoche $t = 0.,1,2,3,4$; Consideriamo innanzitutto le espressioni analitiche

Epoca	0	1	2	3	4
ProgettoA	-30.000	14.400	9.900	9.900	0
ProgettoB	-30.000	12.000	12.000	12.000	0
ProgettoC	-30.000	12.000	0	12.000	13.500

TABELLA 2. Flussi di cassa relativi ai tre progetti

dei VAN, noti anche come REA, dei tre progetti:

$$\begin{aligned}
VAN_A =& -30.000 + 14.400(1+i)^{-1} + \\
& + 9.900(1+i)^{-2} + 9.900(1+i)^{-3} \\
VAN_B =& -30.000 + 12.000(1+i)^{-1} + \\
& + 12.000(1+i)^{-2} + 12.000(1+i)^{-3} \\
VAN_C =& -30.000 + 12.000(1+i)^{-1} + \\
& + 12.000(1+i)^{-3} + 13.500(1+i)^{-4}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

OSSERVAZIONE 5.1. Nella valutazione di due progetti A e B, indicando con VAN_A, e VAN_B i rispettivi valori attuali netti, distinguiamo le seguenti considerazioni di scelta:

- Per $VAN_A - VANB > 0 \Rightarrow VAN_A > VAN_B$, abbiamo che il progetto A è preferibile a quello B;
- Per $VAN_A - VANB < 0 \Rightarrow VAN_A < VAN_B$, abbiamo che il progetto B è preferibile a quello A;
- Per $VAN_A - VANB = 0$, abbiamo che la scelta fra il progetto A e quello B è indifferente.

Cominciamo con il confrontare il Valore Attuale Netto relativo ai primi due progetti, ossia A e B; la differenza fra i due VAN è

$$VAN_A - VAN_B = 2400(1+i)^{-1} - 2100(1+i)^{-2} - 2100(1+i)^{-3}$$

Per studiarne il segno, effetuiamo la sostituzione $v = (1+i)^{-1}$ e cerchiamo gli zeri del polinomio:

$$0 = 2400v^1 - 2100v^2 - 2100v^3$$

$$0 = v(2400 - 2100v^1 - 2100v^2) \Rightarrow v_1 = 0$$

$$0 = 2100v^2 + 2100v^1 - 2400 \Rightarrow v_{1,2} = \frac{-2100 \mp \sqrt{24.570.000}}{4200}$$

$$v_2 = 0,680193688 \qquad v_3 = -1680193689$$

Con facili calcoli si determinano le radici v_1, v_2, v_3, le quali definiscono il segno della differenza nel seguente modo:

- $VAN_A - VAN_B > 0$, per $v < -168019$ e $0 < v < 0,68019$;
- $VAN_A - VAN_B < 0$, per $-168019 < v < 0$ e $v > 0,68019$.

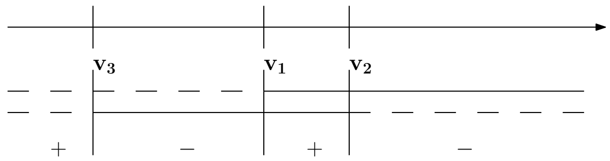


FIGURA 8. Studio del segno

Siccome siamo interessati solo a valori positivi di i, ci restringiamo a considerare il segno in funzione di $v \in]0,1]$, per cui otteniamo che il progetto A è preferibile a B per $0 < v < 0,68019$, mentre per $0,68019 < v \leq 1$ il progetto A è dominato da quello B. Andiamo ora a calcolare i tassi corrispondenti a tali intervalli, sostituendo i valori di v in $v = (1+i)^{-1}$:

- Per $0 < v < 0,68019$, ho che:
  Per
  $$v > 0,\ (1+i)^{-1} > 0,$$
  è sempre verificato.
  Per
  $$v < 0,68019, (1+i)^{-1} < 0,68019$$
  $$1 < (1+i)0,68019$$
  $$0,470169 < i$$
  Ne segue che A è preferibile a B per un tasso corrispondente a
  $$i > 47,02\%$$
- Per $0,68019 < v \leq 1$, ho che:
  Per
  $$v \leq 1,\ (1+i)^{-1} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq (1+i) \Rightarrow 0 \leq i$$
  è sempre verificato.
  Per
  $$v > 0,68019, (1+i)^{-1} > 0,68019$$
  $$1 > (1+i)0,68019$$
  $$0,470169 > i$$
  Ne segue che B è preferibile a A per un tasso corrispondente a
  $$i < 47,02\%$$

In modo analogo si procede a esaminare gli altri due casi, ossia:

- $VAN_A - VAN_C > 0$
- $VAN_B - VAN_C > 0$

Per vedere come effettuare il confronto fra i progetti finanziari usando Excel, iniziamocon il riportare i dati del problema, cioèi flussi di cassa relativi ai VAN dei tre progetti e alle differenze tra essi:

Costruiamo ora la tabella delle variazioni del VAN, relative alle variazioni del tasso di interesse i da 0 a 0,5, nel seguente modo:
Nella colonna relativa al tasso i, inseriamo il valore 0 di partenza e lo

Problemi di scelta fra progetti finanziari certi

	Progetti				Differenze		
Epoche	A	B	C		A-B	A-C	B-C
0	-30000	-30000	-30000		0	0	0
1	14400	12000	12000		2400	2400	0
2	9900	12000	0		-2100	9900	12000
3	9900	12000	12000		-2100	-2100	0
4	0	0	13500		0	-13500	-13500

FIGURA 9. Flussi di cassa e differenze

incrementiamo nella cella sottostante di 0,05; in questo modo trascinando con il mouse la casella selezionata lungo la colonna otterremo tutti i valori di i da 0 al valore finale desiderato ($0,5$ nel nostro caso).
Nelle tre colonne adiacenti, dopo aver inserito nella prima riga l'espressione del VAN dei tre progetti, con un semplice procedimento di copia e incolla otterremo i valori dei tre VAN corrispondenti al variare del tasso di interesse.
Per cominciare il confronto da un punto di vista qualitativo, è utile disegnare un grafico in cui sia rappresentato simultaneamente l'andamento dei tre VAN.
A tale scopo seguiamo le istruzioni indicate:

(1) Selezioniamo nel foglio di calcolo le celle da B11 A E112 contenenti i nostri dati;
(2) Dal menù selezioniamo:
   - Inserisci→Grafico di Excel;
   - Scegliamo il tipo 'Dispers. (XY)';
   - Tra le scelte possibili utilizziamo 'Dispersione conlinee smussate'.

Dopo aver cliccato su ok, Excel automaticamente creerà un grafico in cui in ascissa verrà inserita la prima colonna, ossia il tasso i, e per i valori delle ordinate verranno presi quelli delle altre tre colonne, e quindi l'asse delle ordinate corrisponde al VAN.
Si osserva così che :

- Il progetto C è preferibile agli altri due, per tassi di interesse esterni fino al 6% circa;
- Per tassi maggiori e fino 50% circa, il progetto preferibile è B;
- Per valori ancora più grandi il progetto migliore diventa A.

Per verificare con precisione quali sono i valori di discrimine possiamo utilizzare la funzione TIR.COST di Excel, che calcola il tasso interno di rendimento relativo ad una serie di flussi di cassa che occorrono a intervalli regolari di tempo, applicandola alle differenze dei REA. Come si può osservare:

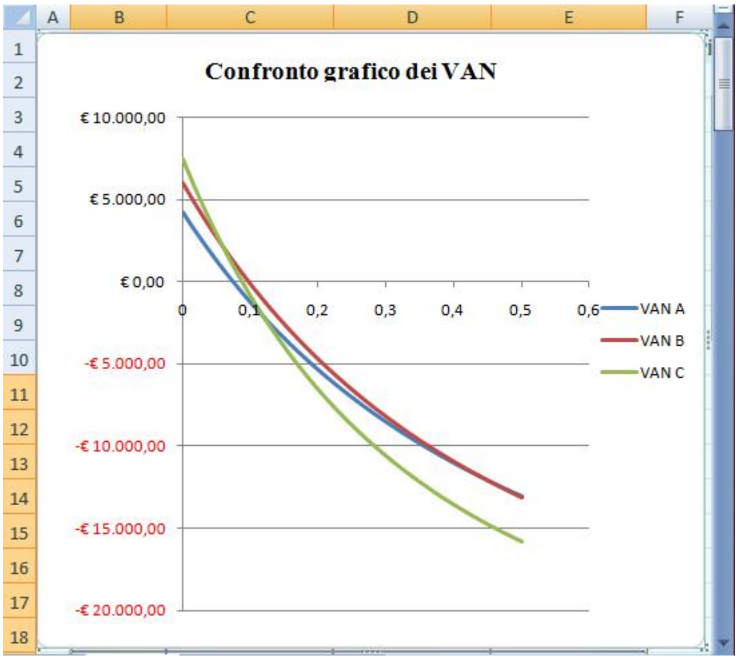


FIGURA 10. Grafico variazione dei VAN relativi ai tre progetti in funzione della variazione di i

- Il tasso che rende indifferenti i progetti A e B è il $47,02\%$;
- Quello per i progetti A e C è il $12,21\%$;
- Quello per i progetti B e C è il $6,07\%$.

Per terminare il confronto, possiamo, sempre con l'utilizzo della funzione TIR.COST, calcolare i tassi interni di rendimento dei tre progetti di investimento per confrontare la loro redditività con le opportunità di investimento al tasso esterno.

In conclusione si ha dunque che:

- Il progetto C è preferibile per tassi esterni i_0 compresi fra 0 e $6,07\%$; per quest'ultimo valore si ha indifferenza fra i progetti C e B;
- Per tassi esterni $6,07\% < i_0 < 9,70\% = TIR_B$ il progetto preferibile è B; per $i_0 = TIR_B$ si ha indifferenza fra esso e l'investimento al tasso esterno;
- Per tassi esterni $i_0 > 9.70\%$nessuno dei tre progetti è preferibile rispetto all'investimento al tasso esterno.

	Progetti				Differenze		
Epoche	A	B	C		A-B	A-C	B-C
0	-30000	-30000	-30000		0	0	0
1	14400	12000	12000		2400	2400	0
2	9900	12000	0		-2100	9900	12000
3	9900	12000	12000		-2100	-2100	0
4	0	0	13500		0	-13500	-13500
				TIR=	47,02%	12,21%	6,07%

FIGURA 11. Calcolo dei tassi di indifferenza fra i progetti A, B, C

Problemi di scelta fra progetti finanziari certi

	Progetti				Differenze		
Epoche	A	B	C		A-B	A-C	B-C
0	-30000	-30000	-30000		0	0	0
1	14400	12000	12000		2400	2400	0
2	9900	12000	0		-2100	9900	12000
3	9900	12000	12000		-2100	-2100	0
4	0	0	13500		0	-13500	-13500
TIR=	7,36%	9,70%	8,77%	TIR=	47,02%	12,21%	6,07%

FIGURA 12. Calcolo dei TIR per i progetti A, B, C

i	VAN A	VAN B	VAN C
0	€ 4.200,00	€ 6.000,00	€ 7.500,00
0,005	€ 3.883,07	€ 5.642,98	€ 6.995,43
0,01	€ 3.571,20	€ 5.291,82	€ 6.501,50
0,015	€ 3.264,28	€ 4.946,41	€ 6.017,95
0,02	€ 2.962,21	€ 4.606,60	€ 5.544,49
0,025	€ 2.664,88	€ 4.272,28	€ 5.080,84
0,03	€ 2.372,18	€ 3.943,34	€ 4.626,76
0,035	€ 2.084,03	€ 3.619,64	€ 4.181,99
0,04	€ 1.800,32	€ 3.301,09	€ 3.746,27
0,045	€ 1.520,97	€ 2.987,57	€ 3.319,39
0,05	€ 1.245,87	€ 2.678,98	€ 2.901,11
0,055	€ 974,94	€ 2.375,20	€ 2.491,20
0,06	€ 708,10	€ 2.076,14	€ 2.089,45
0,065	€ 445,26	€ 1.781,71	€ 1.695,66
0,07	€ 186,34	€ 1.491,79	€ 1.309,61
0,075	-€ 68,75	€ 1.206,31	€ 931,12
0,08	-€ 320,07	€ 925,16	€ 560,00
0,085	-€ 567,71	€ 648,27	€ 196,06
0,09	-€ 811,74	€ 375,54	-€ 160,88
0,095	-€ 1.052,23	€ 106,88	-€ 511,00
0,1	-€ 1.289,26	-€ 157,78	-€ 854,45
0,105	-€ 1.522,88	-€ 418,52	-€ 1.191,41
0,11	-€ 1.753,17	-€ 675,42	-€ 1.522,02
0,115	-€ 1.980,19	-€ 928,57	-€ 1.846,46
0,12	-€ 2.204,01	-€ 1.178,02	-€ 2.164,86
0,125	-€ 2.424,69	-€ 1.423,87	-€ 2.477,37
0,13	-€ 2.642,29	-€ 1.666,17	-€ 2.784,13
0,135	-€ 2.856,86	-€ 1.905,00	-€ 3.085,27
0,14	-€ 3.068,47	-€ 2.140,42	-€ 3.380,94
0,145	-€ 3.277,18	-€ 2.372,50	-€ 3.671,26
0,15	-€ 3.483,03	-€ 2.601,30	-€ 3.956,35
0,155	-€ 3.686,08	-€ 2.826,89	-€ 4.236,34
0,16	-€ 3.886,38	-€ 3.049,33	-€ 4.511,35
0,165	-€ 4.083,99	-€ 3.268,67	-€ 4.781,49
0,17	-€ 4.278,96	-€ 3.484,98	-€ 5.046,87
0,175	-€ 4.471,32	-€ 3.698,31	-€ 5.307,60

FIGURA 13. Variazione dei VAN relativi ai tre progetti in funzione della variazione di i

	A	B	C	D	E
48		0,18	-€ 4.661,14	-€ 3.908,72	-€ 5.563,79
49		0,185	-€ 4.848,45	-€ 4.116,27	-€ 5.815,54
50		0,19	-€ 5.033,31	-€ 4.321,00	-€ 6.062,95
51		0,195	-€ 5.215,76	-€ 4.522,97	-€ 6.306,12
52		0,2	-€ 5.395,83	-€ 4.722,22	-€ 6.545,14
53		0,205	-€ 5.573,58	-€ 4.918,82	-€ 6.780,11
54		0,21	-€ 5.749,05	-€ 5.112,80	-€ 7.011,11
55		0,215	-€ 5.922,27	-€ 5.304,21	-€ 7.238,23
56		0,22	-€ 6.093,29	-€ 5.493,10	-€ 7.461,56
57		0,225	-€ 6.262,14	-€ 5.679,52	-€ 7.681,19
58		0,23	-€ 6.428,86	-€ 5.863,51	-€ 7.897,18
59		0,235	-€ 6.593,49	-€ 6.045,11	-€ 8.109,62
60		0,24	-€ 6.756,07	-€ 6.224,36	-€ 8.318,59
61		0,245	-€ 6.916,63	-€ 6.401,31	-€ 8.524,16
62		0,25	-€ 7.075,20	-€ 6.576,00	-€ 8.726,40
63		0,255	-€ 7.231,82	-€ 6.748,46	-€ 8.925,38
64		0,26	-€ 7.386,53	-€ 6.918,74	-€ 9.121,18
65		0,265	-€ 7.539,35	-€ 7.086,87	-€ 9.313,86
66		0,27	-€ 7.690,32	-€ 7.252,89	-€ 9.503,48
67		0,275	-€ 7.839,47	-€ 7.416,83	-€ 9.690,11
68		0,28	-€ 7.986,83	-€ 7.578,74	-€ 9.873,81
69		0,285	-€ 8.132,43	-€ 7.738,64	-€ 10.054,64
70		0,29	-€ 8.276,29	-€ 7.896,57	-€ 10.232,67
71		0,295	-€ 8.418,46	-€ 8.052,56	-€ 10.407,94
72		0,3	-€ 8.558,94	-€ 8.206,65	-€ 10.580,51
73		0,305	-€ 8.697,78	-€ 8.358,86	-€ 10.750,45
74		0,31	-€ 8.835,00	-€ 8.509,23	-€ 10.917,79
75		0,315	-€ 8.970,63	-€ 8.657,79	-€ 11.082,60
76		0,32	-€ 9.104,68	-€ 8.804,57	-€ 11.244,92
77		0,325	-€ 9.237,20	-€ 8.949,60	-€ 11.404,81
78		0,33	-€ 9.368,19	-€ 9.092,91	-€ 11.562,32
79		0,335	-€ 9.497,69	-€ 9.234,52	-€ 11.717,48
80		0,34	-€ 9.625,72	-€ 9.374,46	-€ 11.870,35
81		0,345	-€ 9.752,30	-€ 9.512,76	-€ 12.020,97
82		0,35	-€ 9.877,46	-€ 9.649,44	-€ 12.169,38
83		0,355	-€ 10.001,21	-€ 9.784,54	-€ 12.315,64
84		0,36	-€ 10.123,59	-€ 9.918,07	-€ 12.459,77
85		0,365	-€ 10.244,60	-€ 10.050,07	-€ 12.601,83

FIGURA 14. Variazione dei VAN relativi ai tre progetti in funzione della variazione di i

	A	B	C	D	E
86		0,37	-€ 10.364,28	-€ 10.180,55	-€ 12.741,84
87		0,375	-€ 10.482,64	-€ 10.309,54	-€ 12.879,86
88		0,38	-€ 10.599,71	-€ 10.437,07	-€ 13.015,91
89		0,385	-€ 10.715,50	-€ 10.563,15	-€ 13.150,04
90		0,39	-€ 10.830,03	-€ 10.687,80	-€ 13.282,28
91		0,395	-€ 10.943,32	-€ 10.811,06	-€ 13.412,66
92		0,4	-€ 11.055,39	-€ 10.932,94	-€ 13.541,23
93		0,405	-€ 11.166,27	-€ 11.053,47	-€ 13.668,02
94		0,41	-€ 11.275,95	-€ 11.172,66	-€ 13.793,05
95		0,415	-€ 11.384,48	-€ 11.290,53	-€ 13.916,36
96		0,42	-€ 11.491,85	-€ 11.407,11	-€ 14.037,99
97		0,425	-€ 11.598,09	-€ 11.522,41	-€ 14.157,96
98		0,43	-€ 11.703,22	-€ 11.636,46	-€ 14.276,30
99		0,435	-€ 11.807,26	-€ 11.749,27	-€ 14.393,04
100		0,44	-€ 11.910,20	-€ 11.860,85	-€ 14.508,22
101		0,445	-€ 12.012,09	-€ 11.971,24	-€ 14.621,86
102		0,45	-€ 12.112,92	-€ 12.080,45	-€ 14.733,99
103		0,455	-€ 12.212,72	-€ 12.188,48	-€ 14.844,63
104		0,46	-€ 12.311,49	-€ 12.295,38	-€ 14.953,81
105		0,465	-€ 12.409,26	-€ 12.401,13	-€ 15.061,57
106		0,47	-€ 12.506,04	-€ 12.505,78	-€ 15.167,91
107		0,475	-€ 12.601,84	-€ 12.609,32	-€ 15.272,87
108		0,48	-€ 12.696,68	-€ 12.711,78	-€ 15.376,48
109		0,485	-€ 12.790,57	-€ 12.813,18	-€ 15.478,75
110		0,49	-€ 12.883,52	-€ 12.913,52	-€ 15.579,70
111		0,495	-€ 12.975,55	-€ 13.012,83	-€ 15.679,37
112		0,5	-€ 13.066,67	-€ 13.111,11	-€ 15.777,78
113					

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 15. Variazione dei VAN relativi ai tre progetti in funzione della variazione di i

6. Condizioni di esistenza e unicità del TIR

Uno dei problemi principali nell'applicare il criterio del TIR, nella valutazione di uno o più progetti, è che esso non è necessariamente unico.
Nel teorema (3.1) sono stati consederati progetti finanziari in cui, a fronte di una uscita iniziale, corrisponde una rendita. Andremo ora a presentare delle condizioni che si applicano ad una classe più ampia e generale.

6.0.1. **Condizione di C.J. Norstrøm.** La condizione di Norstrøm è una condizione sufficente a garnatire l'esistenza e l'unicità del TIR per una gamma generale di progetti finanziari.
Se consideriamo un investimento o un finanziamento con un flusso di cassa

$$\{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n\}$$

abbiamo visto che il TIR è usualmente definito come un tasso di interesse r che verifica le seguenti condizioni:

$$p(r) = \sum_{k=0}^{n} x_k(1 + i)^{-k} = 0 \Rightarrow x_0 + x_1 + \ldots + x_n(1 + r)^{-n} = 0$$

dove $p(r)$ è un polinomio di ordine n.
Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, sappiamo che tale polinomio ammette al più n soluzioni reali o complesse.
È dunque significativo restringere l'insieme di valori che il tasso r può assumere ad uno unico reale e non negativo. Tale soluzione deve essere una radice semplice.
Moltiplichiamo il polinomio $p(r)$ per il fattore $(1+r)^n$, e operiamo la seguente sostituzione: $y = (1+r)$, ottenendo:

(1) $f(y) = p(r)(1 + i)^n = x_0 y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n y^0$

Abbiamo ora che $r = y - 1$, e dovendo essere $r > 0$, abbiamo che l'intervallo di definizione della radice è definito da $y \in]1, \infty[$.

DEFINIZIONE 6.1. (Flussi di cassa cumulato)
Per un flusso di cassa

$$\{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n\}$$

definiamo flusso di cassa cumulato, non attualizzato, all'istante $0 \leq t \leq n$ la quantità

$$Xt = \sum_{k=0}^{t} x_k$$

TEOREMA 6.1. *(Teorema di Norstrøm) Assegnato un flusso di cassa*

$$\{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n\}$$

Definiamo flusso di cassa cumulativo, il flusso:

$$\{X_0, X_1, X_2 \ldots, X_n\}$$

costituito dai flussi comulati, non attualizzati, all'istante $0 \leq t \leq n$ *.*
Allora il flusso di cassa $x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n$ *ammette un unico TIR se il flusso di cassa cumulativo cambia di segno una sola volta, e* $X_n \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il polinomio (1):

$$F(y) = x_0 y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_n y^0$$

ottenuto dalla sostituzione $y = r + 1$, per $y \in]1, \infty[$.
Essendo la condizione $f(y) = 0$ equivalente a $-f(y) = 0$, possiamo supporre che

$$X_0 = x_0 < 0 \qquad \text{e} \qquad X_n > 0$$

In base al teorema esiste allora una unica radice per $y \in]1, 0[$. Nell'intervallo viene escluso $y = 1$, in quanto abbiamo che $f(1) = X_n \neq 0$ per $X_n \neq 0$.
Conseguentemente alle considerazioni appena esposte, resta ora da dimostrare che esiste al più una soluzione.
A tal scopo ipotizziamo l'esistenza di un insieme numerabile di soluzioni

$$y_1 \leq y_2 \leq .... \leq y_n$$

e si dimostriamo che, le condizioni $y_k > 1$ e $f(y_k) = 0$ comportano che $f'(y_k) < 0$. Infatti, verificato per $k = 1$, dalla condizione $f'(y_1) < 0$ segue che:

- y_1 è una soluzione semplice
- per $y_1 < y < y_2$ si ha $f(y) < 0$

ma questo comporta che $f'(x_2) \geq 0$, il che è assurdo .
Consideriamo dunque:

$$f(y) = (y-1)(A_0 y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + \ldots + A_{n-1}) + A^n$$

e, posto

$$g(y) = (A_0 y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + \ldots + A_{n-1})$$

si ottiene

$$f(y) = (y-1)g(y) + A^n \tag{4.7}$$

e

$$f'(y) = (y-1)g'(y) + g(y) \tag{4.8}$$

Siano $y_k > 1$ e $f(y_k) = 0$.
Si dimostra che $g(y_k) < 0$ e $g'(y_k) < 0$, da cui segue dalla (4.8), che

$$f'(y_k) < 0$$

La condizione $g(y_k) < 0$ segue subito dalla (4.7) e $A^n > 0$.
Infine, l'ipotesi per cui esiste un solo cambio di segno nelle cumulative,implica che: $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{cases} A_t \leq 0 & per\ t = 0, 1, 2, ..., m \\ A_t \geq 0 & per\ t = m+1, m+2, .., n \end{cases}$$

Ora, vale

(4.9)

$$y_k g'(y_k) - g(y_k)(n-m-1) =$$
$$mA_0 y_k^{n-1} + \ldots + A_{m-1} y_k^{n-m} - A_{m+1} y_k^{n-m-2} - \cdots - (n-m-1)A_{n-1} < 0$$

Per $(n-m-1) \geq 0$ e $g(y_k) < 0$, segue dalla (8) che $g'(y_k) < 0$, essendo tutti i coefficienti negativi. □

ESEMPIO 6.1. Il sig. Goffredo acquista un appartamento occupato spendendo 103.000€. Il canone d'affitto è di 2.200€quadrimestrali. Le spese condominiali sono di 700€, trimestrali. Dopo un anno il sog. Goffredo rivende l'appartamento a 105.000€. Calcolare il TIR dell'operazione. Analizziamo il problema riscrivendo il flusso di cassa:

Flussi di cassa relativi a 12 mesi			
$x_0 = -103.000$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = -700$
$x_4 = 2200$	$x_5 = 0$	$x_6 = -700$	$X_7 = 0$
$x_8 = 2200$	$x_9 = -700$	$x_{10} = 0$	$x_{11} = 0$
$x_{12} = 105.000 + 2200 - 700$			

TABELLA 3. Flussi di cassa del problema, per il calcolo del TIR

Quindi i flussi cumulati sono dati da:

Flussi di cassa relativi a 12 mesi			
$X_0 = -103.000$	$X_1 = -103.000$	$X_2 = 103.000$	$X_3 = -103.700$
$X_4 = -101.500$	$X_5 = -101.500$	$x_6 = -102.200$	$X_7 = -102.200$
$X_8 = -100.000$	$x_9 = -100.700$	$x_{10} = -100.700$	$x_{11} = -100.700$
$x_{12} = 5.800$			

TABELLA 4. Flussi cumulati per il calcolo del TIR

Possiamo vedere che nella successione dei segni dei flussi cumulati vi è un unico cambio di segno, il ché verifica le condizioni del teorema. Quindi esiste ed è unico il TIR reale, non negativo soluzione dell'equazione:

$$VAN(i) = 3500 - 700(1+i)^{-9} + 2200(1+i)^{-8} - 700(1+i)^{-6}$$
$$+ 2200(1+i)^{-4} - 700(1+i)^{-3} = 0$$

Possiamo notare, che il polinomio essendo di grado 9, può ammettere almeno 9 soluzioni reali o complesse. Grazie al teorema di Norstrøm abbiamo la certezza che la soluzione di nostro interesse è unica.
Andiamo a determinare il TIR attraverso il foglio elettronico:

Abbiamo dunque che $i = 0,4625\%$.

	A	B	C	D	E	F
1		Calcolo del TIR - Norstrom				
2						
3		Costo d'acquisto	103000	Canone di locazione	2200	
4		ricavo di vendita	105000	Condominio	700	
5						
6	n	Flussi di cassa	Cumulate			
7	0	-103000	-103000			
8	1	0	-103000			
9	2	0	-103000			
10	3	-700	-103700			
11	4	2200	-101500			
12	5	0	-101500			
13	6	-700	-102200	TIR.COST(B7:B19)=	0,4625%	
14	7	0	-102200			
15	8	2200	-100000			
16	9	-700	-100700			
17	10	0	-100700			
18	11	0	-100700			
19	12	106500	5800			
20						

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 16. Tir calcolato con EXCEL

OSSERVAZIONE 6.1. La condizione di Norstrøm è una condizione solo sufficente e non necessaria per l'unicità del TIR non negativo.

ESEMPIO 6.2. Consideriamo il flusso di cassa data da:

$$\{-1,2,-2,4\}$$

a cui corrisponde il vettore delle cumulate:

$$\{-1,1,-1,3\}$$

Andiamo a risolvere l'equazione:

$$VAN(i)=0 \;\Rightarrow\; -1+2(1+i)^{-1}-2(1+i)^{-2}+4(1+i)^{-3}=0$$

Posto $s=(1+i)$ otteniamo l'equazione equivalente:

$$-s^3+2s^2-2s+4=0$$

Essendo una equazione che non presenta particolari gradi di difficoltà, andiamo ad applicare il teorema di Ruffini, per determinare uno zero della funzione:

$$s=2 \;\Rightarrow\; -(2^3)+2(2^2)-2\cdot 2+4=0$$

Dalla scomposizione otteniamo che:

$$-s^3+2s^2-2s+4=(-s^2-2)(s-2)$$

	-1	2	-2	4
2		-2	0	-4
	-1	0	-2	0

TABELLA 5. Metodo di Ruffini

Ed essendo il binomio $(-s^2-2)$ irriducibile in $\mathbb{R}$, abbiamo che l'unica soluzione reale del problema esaminato è :

$$s=2 \;\Rightarrow\; 2=(1+i) \;\Rightarrow\; i=1$$

Abbiamo dunque esaminato un esempio, in cui nonostante vi fossero ben 3 variazioni di segno all'interno della successione delle cumulate, il TIR è unico.

OSSERVAZIONE 6.2. È, possibile evidenziare una corrispondenza tra la condizione posta da Norstrøm nel teorema enunciato, e il teorema dei segni di Descartes, matematico a noi noto con il nome di Cartesio.
Sia $X[x,t]$ un generico progetto, e consideriamo il suo valore atuale:

$$V(i)=\sum_{k=1}^{n} x_k(1+i)^{-k}$$

nonché il suo saldo o montante:

$$S(i)=\sum_{k=1}^{n} x_k(1+i)^{k}=(1+i)^n V(i)$$

Posto $s=(1+i)^{-1}$ avremo allora:

$$V(s)=\sum_{k=1}^{n} x_k s^{-k}$$

e dato che:

$$-1<i<+\infty \Rightarrow 0<s<\infty$$

avremo allora anche:

$$\lim_{s\to 0^+} V(s)=x_0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{s\to\infty} V(s)=\infty$$

con il segno che dipende da quello di x_n(diverso da quello dei flussi). Da questi risultati è immediato verificare che:

$$x_0\cdot x_n<0$$

è una condizione necessaria ma non sufficente a garantire l'esistenza di un TIR unico e semplice. Supposta nota la radice s^* dell'equazione

$$V(s)=0$$

e posto $i^* = (s^*)^{-1} - 1$, la condizione per l'unicità del TIR, consiste nell'imporre, per la *Regola dei segni di Cartesio*, ai coefficenti del quoziente

$$V(s) : (s \, - \, s^*)$$

di non presentare alcuna variazione. Si dovrà avere, se $x_0 < 0$:

$$\sum_{k=1}^{c} x_k(1+i^*)^{c-k} \leq 0, \qquad \forall c : 0 < c \leq (n-1)$$

Ma dato che

$$\sum_{k=1}^{c} x_k(1+i^*)^{c-k} = S_c(i^*)$$

questa condizione di unicità può essere espressa dicendo che se il progetto è puro nel TIR, allora il TIR è unico. Enunciamo brevemente alcuni risultati usati in questa breve riflessione.

DEFINIZIONE 6.2. (Variazione dei segni)
Sia $(a_0, \ldots, a_n)$ una successione di numeri reali. Definiamo il numero $\lambda(a_0, \ldots, a_n)$ delle variazioni dei segni, il numero di coppie di interi $(i, i+k)$ tali che:

- $a_i \cdot a_{i+k} < 0$
- $a_{i+h} = 0$, per $h = 1, (k-1)$

Per ogni polinomio reale $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$, poniamo $\lambda(p(t)) = \lambda(a_0, \ldots, a_n)$.

TEOREMA 6.2. *(Regola dei segni di Cartesio)*
Consideriamo il polinomio reale:

$$p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n, \qquad p(t) \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

Se tutte le radici di (4.10) sono reali, allora $\lambda(p(t))$ è *il numero delle sue radici positive contate con la loro molteplicità.*

La regola dei segni di Cartesio può essere utile anche per la determinazione delle radici negative diun polinomio. Dato il grafico di $y = P(x)$, il grafico di $y = P(x)$ si ottiene dal precedente mediante una simmetria rispetto all'asse y. Le radici di $P(x)$ e di $P(x)$ corrispondono ai punti in cui i grafici intersecano l'asse x. Dalla simmetria dei grafici si deduce che il numero di radici positive di $P(-x)$ coincide col numero di radici negative di $P(x)$. Quindi, se $\lambda(p(t))$ è il numero di variazioni di segno dei coefficienti di $P(x)$ e n è il numero di radici reali negative di $P(x)$, possiamo scrivere:

$$\lambda(p(t)) = n + 2h$$

dove h è un intero non negativo.
Si osservi che generalmente, tale teorema, non ci permette di di dire nulla sul segno delle radici del polinomio (4.10), in quanto non si conoscono a priori le radici reali.
Inoltre, l'ipotesi che il polinomio abbia radici reali è fondamentale, in quanto

altrimenti il numero delle radici reali positive o ngative può essere inferiore a quello stimato.

7. Il criterio TRM (o criterio del saldo finale a due tassi

Abbiamo visto nel criterio del VAN, noto anche come il metodo del REA, che il tasso di valutazione è lo stesso sia nel calcolo del Valore Attuale Netto, che in quello dei saldi finali (o montanti al tempo t_n). Quello di cui non si tiene conto nel criterio VAN è che i flussi di cassa dei progetti possono essere positivi o negativi, e che ipotizzare una simmetria tra i tassi da applicare ai due tipi di poste è irrealistico.
Nella pratica finanziaria si usano generalmente tassi diversi $i \neq j$ con $(j < i)$, da applicare rispettivamente ai costi e ai rendimenti del progetto da esaminare.
Teichroew, Robichek e Montalbano, riesaminando la procedura di attualizzazione dei flussi di cassa del progetto, fornirono un crtiterio di scelta, detto appunto criterio TRM, applicabile senza ambiguità ad ogni possibile progetto e coerente rispetto al tasso di mercato. Se ad esmpio un investimento ad un dato tasso di mercato δ è appetibile, allora lo sarà anche per ogni tasso $j < \delta$. Analogamente se il progetto è da scartare per un tasso δ, allora lo è anche per ogni tasso $j > \delta$.
Operata la distinzione tra i progetti puri e misti ad un dato tasso i, gli autori, usando due diversi tassi di interesse, ossia:

- h, tasso di finanziamento;
- r, tasso di investimento.

definiscono la funzione saldo o montante del progetto,mediante la funzione $F(h,r) = F_n(h,r)$, nel seguente modo:

(4.11)

$$F_n(h,r) = \begin{cases} F_0(h,r) = x_0 \\ \underbrace{F_k(h,r)}_{k=1,\dots,n} = \begin{cases} (1+h)^{t_k - t_{k-1}} \cdot F_{k-1}(h,r) + x_k, & \text{se } F_{k-1}(h,r) \geq 0, \\ (1+r)^{t_k - t_{k-1}} \cdot F_{k-1}(h,r) + x_k, & \text{se } F_{k-1}(h,r) < 0. \end{cases} \end{cases}$$

L'idea alla base di questo criterio è la seguente:

- una quota $F_k < 0$ paga interessi ad un tasso h;
- una quota $F_k > 0$ genera interessi ad un tasso r.

È evidente che ora più che guardare i segni delle poste, determiniamo i saldi parziali ad ogni epoca t_k, in quanto è questo saldo a indicare a quale tempo si ha una quota $F_k < 0$ che paga interessi ad un tasso h, oppure se siamo in una situazione di attivo, con $F_k > 0$, ed i saldi stanno maturando interessi ad un tasso r. Se poniamo

$$h = r = i$$

otterremo ovviamente

$$F(i,i) = (1\ +\ i)^n V(i) = S(i)$$

] ed il grafico di $S(i)$ altro non è che l'intersezione della superficie $z = F(h,r)$ con il piano di equazione $h = r$.
In base al segno di x_0 abbiamo che:

- Per $x_0 < 0$ esiste un valore r_{min} tale che $\forall r > r_{min}$ ogni progetto misto diviene puro;
- Per $x_0 > 0$ esiste un valore h_{min} tale che $\forall h > h_{min}$ ogni progetto misto diviene puro.

In entrambi i casi la funzione $F(r,h)$ diviene una funzione di una singola variabile. Ciò determina la divisione del piano (r,h) in due regioni:

1) Regione mista: , definita nel seguente modo:

- Per $x_0 > 0$,

$$\begin{cases} -1 < h < h_{min} \\ -1 < r \end{cases}$$

- Per $x_0 < 0$,

$$\begin{cases} -1 < r < r_{min} \\ -1 < r \end{cases}$$

2) Regione pura: , di puro investimento o finanziamento a seconda che $x_0 < 0$ o $x_0 > 0$

La funzione montante $F(h,r)$ è una funzione continua e parzialmente derivabile, con:

$$\frac{\partial F(h,r)}{\partial h} > 0 \qquad \frac{\partial F(h,r)}{\partial r} < 0 \tag{4.12}$$

potendo al più non essere derivabile dove almeno uno dei saldi $F_k(h,r)$ è nullo.

DEFINIZIONE 7.1. (Curva di equilibrio del progetto)
Considerando l'insieme delle coppie (h,r) tali che

$$F(h,r) = 0$$

Questa è la curva di equilibrio, o di equità finale del progetto.

Essa è una curva continua e monotona crescente, mediante la quale, se il progeto è misto, si può definire implicitamente h come funzione di r nel seguente modo:

$$h = h(r)$$

o viceversa:

$$r = r(h)$$

DEFINIZIONE 7.2. (Tassi di investimento e finanziamento)
Assegnato r, il valore $h(r)$ viene detto *tasso di finanziamento* del progetto; assegnato h, il valore $r(h)$ è definito *tasso di investimento* del progetto.

Se la funzione $r = r(h)$(o la sua inversa $h = h(r)$) hanno intersezioni con la bisettrice $r = h$, queste corrispondono ovviamente ai TIR del progetto, ovvero alle soluzioni dell'equiazione $V(i) = 0$. In base alla (4.12) abbiamo

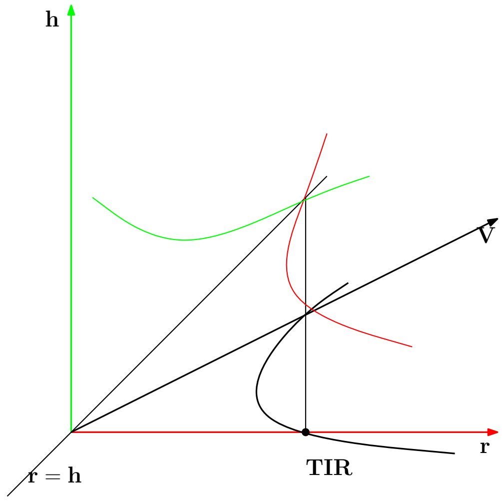


FIGURA 17. TIR come punto corrispondente a r=h.

che:

$$F(h,r) > 0 \text{ oppure } F(h,r) < 0$$

a seconda che il punto (h,r) si trovi al di sotto o al di sopra della curva di equilibrio.

Il criterio decisionale che scaturisce dall'analisi svolta è così formulata:

(1) Calcolare $F(0,0)$, oppure $F(-1,-1)$, per vedere se il progetto è puro per ogni tasso postivo, nel primo caso, ammissibile, nel secondo. A tal scopo basta esaminare la cumulata dei flussi di cassa, e vedere se ha segno diverso da quello delle cumulate parziali.

(2) Distinguiamo i seguenti casi:
  - Se il progetto, relativamente ai tassi che ci interessano, è puro per qualunque tasso, esso appartiene alla classe dei progetti non semplici per i quali i criteri del VAN e del TIR sono ancora applicabili; la regione mista se esiste, è al di fuori dell'nsieme delle coppie di tassi che ci interessano.
  - Se il progetto non è puro, il criterio di scelta si basa sulla posizione della curva $r(h)$ rispetto alla bisettrice $h = r$. In questo caso avremo che:
    - Se al dato tasso di mercato h^* avremo che,

$$r(h^*) > h^*$$

il progetto è da accogliere.

    - Se al dato tasso di mercato r^* avremo che,

$$h(r^*) < r^*$$

il progetto è da accogliere.

Per i progtti misti abbiamo che supponendo noti i tassi di mercato di investimento r^*, e di finanziamento h^*, e svincolandoli dalla condizione di assumere lo stesso valore, il criterio decisionale si basa sulla posizione del punto (h^*, r^*) rispetto alla curva $F(h,r) = 0$:

- Se il punto si trova al di sotto, ossia nella regione in cui $F(h,r) > 0$, all'ra il progetto è da intraprendere;
- Se $F(h^*, r^*) = 0$ il progetto è indifferente;
- In posizioni diverse, il progetto è da scartare.

OSSERVAZIONE 7.1. Partendo da presupposti totalmente diversi, ma pervenendo a risultati analoghi, Sandro Gronchi ridefinisce il TIR in modo da renderlo economicamente significativo e privo di ambiguità, ponendo

$$TIR = r(i)$$

dove $k = i$ è il valore noto del tasso di mercato.

ESEMPIO 7.1. (**r=h)** Consideriamo i seguenti progetti finanziari A e B:

Epoca(anni)	0	1	
Progetto A	$-10.000,00$	$+8.000,00$	
Progetto B	$-10.000,00$	0	
Epoca(anni)	2	3,5	4
Progetto A	$-5.000,00$	$+10.000,00$	$+6.000,00$
Progetto B	0	0	$20.500,00$

TABELLA 6. Flussi di cassa dei proggetti A e B

Con riferimento al criterio del TRM, utilizzando i tassi annui $i = 6\%$, rispettivamente per i saldi positivi e negativi, determinare i valori di $i = i^*$, per i quali il progetto B è preferibile a quello A.
Applichiamo il criterio definito dalla (4.11), ai due progetti. Essendo $r = t$, abbiamo che:

$$F_n(i) = \begin{cases} F_0(i) = x_0 \\ \underbrace{F_k(i)}_{k=1,\dots,n} = (1+i)^{t_k - t_{k-1}} \cdot F_{k-1}(i) + x_k, \end{cases}$$

Progetto A:

$$F_0^A(i) = -10.000,00$$
$$F_1^A(i) = -10.000,00(1+0,06) + 8.000,00 \qquad = -2.600,00$$
$$F_2^A(i) = -2.600,00(1+0,06) - 5.000,00 \qquad = -7.756,00$$
$$F_{3,5}^A(i) = -7.756,00(1+0,06)^{1,5} + 10.000,00 \qquad = +1.535,59$$
$$F_4^A(i) = +1535,59(1+i^*)^{0,5} + 6.000,00$$

Progetto B:

$$
\begin{aligned}
F_0^B(i) &= -10.000,00 \\
F_1^B(i) &= -10.000,00(1+0,06)^1+0 && = -10.600,00 \\
F_2^B(i) &= -10.000,00(1+0,06)^2+0 && = -11.236,00 \\
F_{3,5}^B(i) &= -10.000,00(1+i^*)^4+20.500,00 && = 7.875,23 \\
F_4^B(i) &= -10.000,00(1+i^*)^4+20.500,00 && = 7.875,23
\end{aligned}
$$

Per determinare il taso i^*, poniamo la condizione di preferibilit*grave*a tr A e B, ossia:

$$F_4^A(i) < F_4^B(i)$$

$$+1535,59(1+i^*)^{0,5}+6.000,00 < 7.875,23 \Rightarrow i^* < 0,491277$$

Il progetto B è preferibile a A per $i^* < 49,13\%$
Attraverso il foglio elettronico EXCEL, per la risoluzione di questo problema si può usare il comando 'Risolutore', il quale determina una soluzione dell'equazione:

$$-10.000,00(1+i^*)^4+20.500,00 = 7.875,23$$

nel seguente modo.

	A	B	C	D	E
1	**Criterio T.R.M con h=r**				
2					
3	**h=**	**0,06**			
4	**r=**	**0,06**			
5					
6	**Epoca**	**Progetto A**	**Progetto B**	**Saldi prg A**	**Saldi prg B**
7	**0**	**-10000,00**	**-10000,00**	**-10000,00**	**-10000,00**
8	**1**	**8000,00**	**0,00**	**-2600,00**	**-10600,00**
9	**2**	**-5000,00**	**0,00**	**-7756,00**	**-11236,00**
10	**3,5**	**10000,00**	**0,00**	**1535,59**	**-12262,26**
11	**4**	**6000,00**	**20500,00**	**T.R.M(A, i)**	**7875,23**
12					
13	**T.R.M(A, i)=D10*((1+i)^(A10-A9))+B11**				
14					
15		**i=TIR**	**T.R.M(A, i)**		
16		**40,00**	**409135,99**		

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 18. Dati del TRM

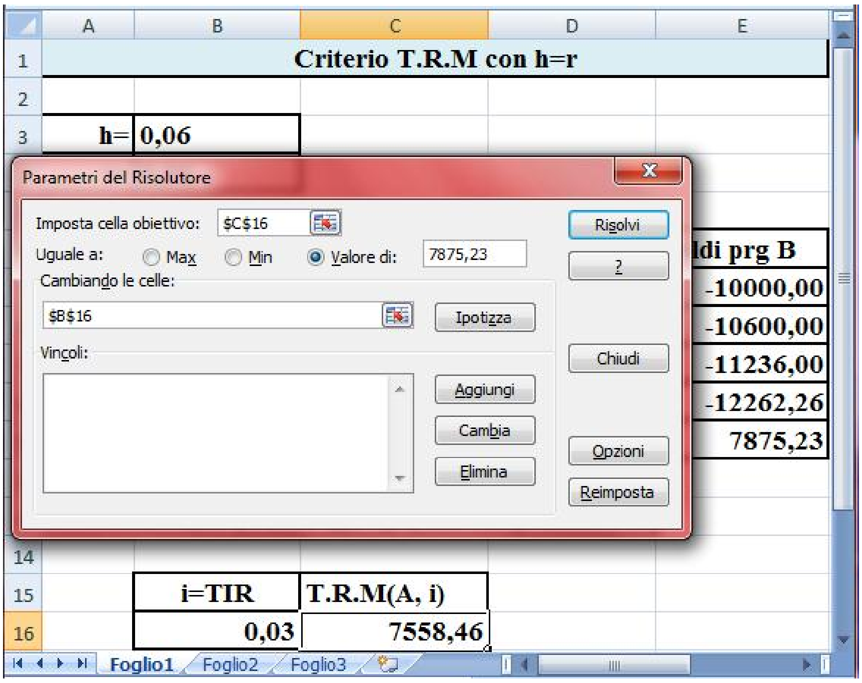


FIGURA 19. Comando risolutore applicato al TRM

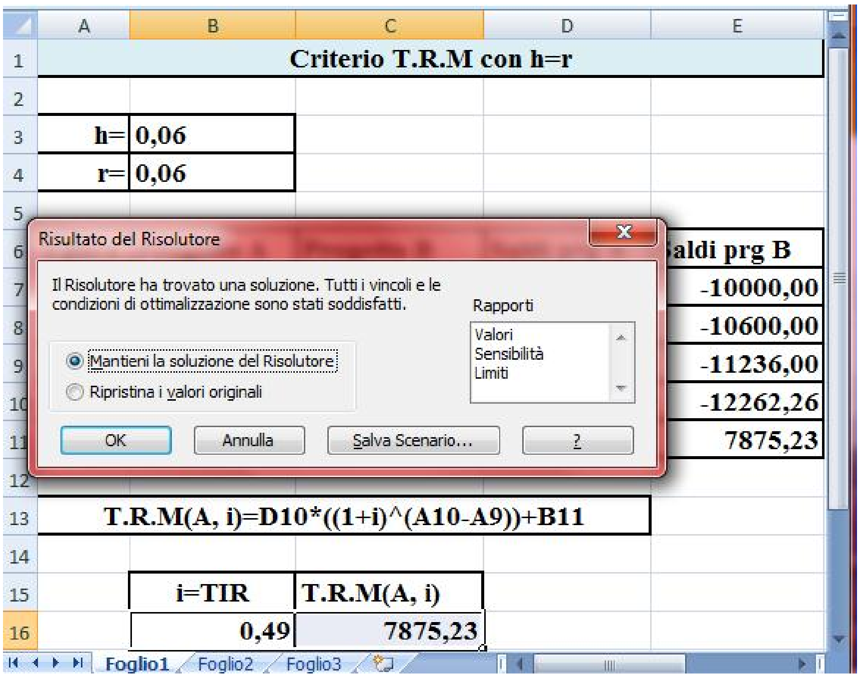


FIGURA 20. Comando risolutore applicato al TRM

ESEMPIO 7.2. ($\mathbf{r} \neq \mathbf{h}$) Consideriamo i seguenti progetti finanziari:

Epoca(anni)	0	1	2
Progetto A	$-70.000,00$	$+25.000,00$	$-8.000,00$
Progetto B	$-70.000,00$	$-10.000,00$	0
Epoca(anni)	3,5	4	5
Progetto A	$+60.000,00$	0	$+8.000,00$
Progetto B	0	$20.000,00$	+ K

TABELLA 7. Flussi di cassa dei proggetti A e B

Individuare il progetto ottimo tra A e B, al variare di K, con $K \geq 0$, effettuando la valutazione in regime di capitalizzazione composta, sulla base del criterio TRM, utilizzando i tassi annui composti del 3% e del 9%, rispettivamente per i saldi positivi e per quelli negativi.
Applichiamo il criterio definito dalla (4.11), ai due progetti. Essendo $h \neq r$, per $h = 9\%$ e $r = 3\%$ applichiamo la formula:

$$F_n(h,r) = \begin{cases} F_0(h,r) = x_0 \\ \underbrace{F_k(h,r)}_{k=1,\dots,n} = \begin{cases} (1+h)^{t_k - t_{k-1}} \cdot F_{k-1}(h,r) + x_k, & \text{se } F_{k-1}(h,r) \geq 0, \\ (1+r)^{t_k - t_{k-1}} \cdot F_{k-1}(h,r) + x_k, & \text{se } F_{k-1}(h,r) < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Progetto A:

$$\begin{aligned}
F_0^A(9,3) &= -70.000,00 \\
F_1^A(9,3) &= -70.000,00(1+0,09) + 25.000,00 &&= -51.300,00 \\
F_2^A(9,3) &= -51.300,00(1+0,09) - 8.000,00 &&= -63.917,00 \\
F_{3,5}^A(9,3) &= -63.917,00(1+0,09)^{1,5} + 10.000,00 &&= -12.737,12 \\
F_5^A(9,3) &= +1535,59(1+0,09)^{1,5} + 8.000,00 &&= -6.494,76
\end{aligned}$$

Progetto B:

$$\begin{aligned}
F_0^B(9,3) &= -70.000,00 \\
F_1^B(9,3) &= -70.000,00(1+0,09) - 10.000,00 &&= -86.300,00 \\
F_4^B(9,3) &= -86.300,00(1+0,09)^3 + 20.000,00 &&= -91.761,00 \\
F_5^B(9,3) &= -91.761,00(1+0,09) + K &&= -100.019,49 + K
\end{aligned}$$

Per ottimizzare al variare di K, poniamo:

$$F_5^A(9,3) \geq F_5^B(9,3) \Rightarrow -6.494,76 \geq -100.019,49 + K$$

$$K \leq 93.524,73 = K^*$$

Distinguiamo quindi i seguenti casi:

- Per $0 \leq K < K^*$, abbiamo che il progetto A è preferibile a quello B;

- Per $K = K^*$, abbiamo che è indifferente la scelta fra i due progetti;
- Per $K > K^*$, abbiamo che il progetto A è dominato da quello B.

	A	B	C	D	E
1	Criterio T.R.M con h≠r				
2					
3	h=	0,09			
4	r=	0,03			
5					
6	Epoca	Progetto A	Progetto B	Saldi prg A	Saldi prg B
7	0	-70000	-70000	-70000	-70000
8	1	25000	-10000	-51300	-86300
9	2	-8000	0	-63917	-94067
10	3,5	60000	0	-12737,125	-107047,626
11	4	0	20000	-13297,949	-91761,0027
12	5	8000	93524,73	-6494,764	-6494,762943
13					
14		100019,49+k = (-6494,764)			k=93524,73

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 21. Saldi parziali e calcolo del TRM

OSSERVAZIONE 7.2. Abbiamo viso che il criterio del T.R.M può essere usato per la scelta fra diversi progetti alternativi, e tra quelli di investimento sceglieremo quello avente massimo saldo finale (4.11).

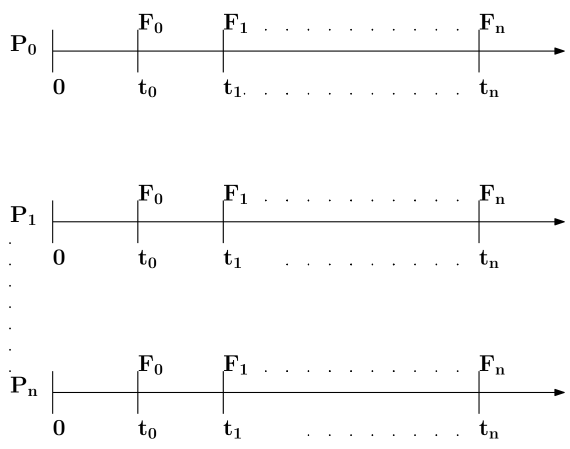


FIGURA 22. Saldi parziali relativi ai progetti

Poniamo ora il problema di *razionamento di capitale*, cambiando la funzione obiettivo. Invece di massimizzare il VAN complessivo, massimizziamo il saldo finale complessivo, dato dalla attivazione parziale di più progetti:

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$

Detto S il vettore dei saldi finali calcolati in base alla formula (4.11):

$$S = [S_n^1, S_n^2, \ldots, S_n^n]$$

dove $S_n^k = S_n(P_k)$ è il saldo finale del progetto P_k, che viene calcolato con il tasso passivo $h = h_k$, ed il tasso attivo $r = r_k$, tassi che possono variare in funzione del progetto.
Otteniamo così il problema di ottimizzazione

$$\begin{cases} max\ S^T x \\ s.a^1 \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ \sum_k x_k = 1 \end{cases}$$

7.1. Ipotesi di troncabilità dei progetti: il Teorema del Troncamento.

DEFINIZIONE 7.3. Dato un progetto $X_n = [x, t]$, costituito da un flusso di cassa:

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

relativo alle epoche:

$$\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$$

diremo che il progetto è troncabile se è possibile arrestarne la vita fisica alla fine di qualunque periodo.

Supponiamo che il progetto sia troncabile alla fine del periodo $k - esimo$, con $0 < k < n$, allora è possibile intraprendere al posto del progetto originale, il sottoprogetto $X_k = [x, t]$, definito dal flusso di cassa:

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$$

relativi alle epoche:

$$\{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$$

È importante è che il troncamento del progetto verifica le condizioni (1.1)

8. Condizione di unicità di C.S. Soper

La condizione di unicità per il Tasso Interno di Rendimento di un progetto fornita da C. S. Soper, permette di caratterizzare la relazione che intercorre tra l'essere un progetto di puro investimento o di puro finanziamento, per un valore del tasso pari al suo TIR, e la troncabilità del progetto stesso, determinando l'intervallo dei valori del tasso d'interesse per i quali il valore attuale del progetto è massimo, rispetto a quello di tutti i suoi possibili sottoprogetti. Si arriva così a stabilire che nel caso di un progetto di puro investimento o puro finanziamento, il miglior troncamento coincide con il progetto stesso. Prima di esporre il teorema di Soper, ricordiamo brevemente i concetti che sono alla base della sua trattazione.

- Un progetto $X = [x,t]$ è semplice (di investimento se $x_0 < 0$, di finanziamento se $x_0 > 0$), quando i suoi flussi di cassa non nulli hanno segno diverso da x_0. È detto investimento(finanziamento) in senso stretto se i flussi di cassa negativi(positivi) precedono tutti quelli positivi(negativi).
- Un progetto $X = [x,t]$, si dice di puro investimento (finanziamento), al dato tasso i, quando tutti i suoi sottoprogetti presentano saldi al tasso i, non positivi (negativi):

$$S_j(i) = \sum_{k=0}^{j} x_k(1+i)^{j-k} \leq (\geq), \qquad \forall 0 \leq j \leq n-1$$

In funzione del tasso di valutazione distinguiamo i seguenti casi:

- Un progetto $X = [x,t]$, si dice di puro investimento (finanziamento), al dato tasso $i > (-1)$, se l'ultimo flusso di cassa x_n ha segno diverso da quello di tutti gli altri flussi di cassa:

$$x_k \cdot x_n \leq 0, \qquad \forall k < n$$

- Un progetto $X = [x,t]$, si dice di puro investimento (finanziamento), al dato tasso $i > 0$, se e solo se la cumulata dei flussi di cassa:

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{j} x_k$$

dato dal saldo del progetto a tasso nullo, ha segno(positivo nel caso dell'investimento, negativo nel caso del finanziamento) diverso da quello di tutte le altre cumulate:

$$S_j(0) = \sum_{k=0}^{j} x_k \leq (\geq), \qquad \forall 0 \leq j \leq n-1$$

il che equivale alla condizione:

$$S_n(0) \cdot S_j(0), \qquad \forall j < n$$

- Tutti i progeti semplici, anche se non sono puri, per qualunque valore $i < (-1)$, sono sempre puri nel loro TIR.

Tra le tante condizioni di unicit1*grave*a del Tasso Interno di Rendimento, C.S.Soper ha fornito una condizione di unicità che può essere così formulata:

TEOREMA 8.1. *(Condizione di C.S.Soper) Dato il progetto $X = [x,t]$, sia i un suo Tasso interno di Rendimento, ossia tale che:*

$$V(i) = S(i) = 0$$

Il T.I.R è *unico se, $\forall j : 0 \leq j \leq n-1$ si ha che:*

$$S_j(i) = \sum_{k=0}^{j} x_k(1+i)^(j-k) \leq 0$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che sia $x_0 < 0$, potendo trattare così in modo analogo, con opportuni cambiamenti di segno, il caso $x_0 > 0$.
Consideriamo la funzione montante, o saldo:

$$S(i) = \sum_{k=0}^{n} x_k (1+i)^k$$

e posto $\lambda = (1+i)$, andiamo a considerare il polinomio:

$$x_0\lambda^n + x_1\lambda^{n-1} + \cdots + x_n\lambda^0 = 0$$

L'ipotesi $x_0 \cdot x_n < 0$ garantisce l'esistenza di almeno una soluzione per l'equazione

$$S(i) = 0$$

e supponiamo che questa soluzione sia i_0, e poniamo $\lambda_0 = 1 + i_0$.
Consideriamo, in funzione della soluzione, la scomposizione della funzione montante:

$$S(i) = P(\lambda)(\lambda - \lambda_0) = x_0\lambda^n + x_1\lambda^{n-1} + \cdots + x_n\lambda^0$$

Per la *regola dei segni di Cartesio*, se il polinomio non ammette variazioni nei segni dei suoi coefficienti, allora la radice i_0 è unica, e quindi è unico il TIR determinato. Si vede facilmente che i coefficienti del polinomio $P(\lambda)$ altro non sono che i valori $S_j(\lambda_0)$ con $0 \leq j \leq n-1$. Il che dimostra il teorema. □

Una interpretazione della condizione fornita da C.S.Soper è che se un progetto è puro rispetto il $TIR = i$, allora questo tasso è unico.

DEFINIZIONE 8.1. Un progetto si dice di Soper, quando esso è puro per un valore del tasso *i* che corrisponde al TIR del progetto.

Un progetto di Soper può essere espresso in un solo modo, ossia come una successione di *n* operazioni uniperiodali consecutivi di investimento, schematizzabili nel seguente modo:

$$\{Y_{t,t-1}; Y_{t,t}\} = \{S_{t-1}(i_0), -(1+i_0)S_{t-1}(i_0)\}, \qquad \forall t : 1 \leq t \leq n$$

dove:

$$\begin{aligned} Y_{1,0} &= x_0 \\ Y_{t,t} &= -(1+i_0) \cdot Y_{t,t-1} \\ Y_{t,t} + Y_{t+1,t} &= x_t \\ Y_{t,t} &= x_n \end{aligned}$$

Per la condizione di Soper, abbiamo che:

$$Y_{t+1,t} \leq 0 \ \text{ e } \ Y_{t+1,t+1} \leq 0, \forall t : 0 \leq t \leq n-1$$

con unico tasso $i_0 = TIR$.
Una rapida giustificazione di questo schema deriva dal fatto che i temini $Y_{t,t-1}, Y_{t,t}$ costituiscono gli elementi della riga finale e gli opposti di quella

intermediaria nella tabella che si costruisce per calcolare $P(\lambda)$ usando la regola di Ruffini. In seguito a semplici sostituzioni otteniamo che porre

$$Y_{t,t} = x_n$$

equivale a porre

$$S(i_0) = 0$$

in quanto per ipotesi i_0 è il TIR del progetto. Una simile scomposizione è possibile anche per quei progetti che presentano più di un TIR, ed è unica per quei progetti che hanno un solo TIR, senza verificare la condizione di Soper. In questi casi però la successione dei $Y_{t+1,t}$ presenterà delle variazioni di segno.

Con una procedura simile a quella appena esaminata, possiamo ottendere una ulteriore condizione di unicità. Mentre prima abbiamo costruito la successione sui saldi, andiamo ora a considerare il valore attuale netto, del quale $i_0 = TIR$ è uno zero, ossia soluzione dell'equazione:

$$V(i_0) = 0$$

Abbiamo allora che, posto

$$s = (1+i)^{-1} \text{ e } s_0 = (1+i_0)^{-1}$$

la funzione VAN può essere scomposta nel prodotto:

$$V(i) = x_n s^n + x_{n-1} s^{n-1} + \ldots + x_0 s^0 = Q(s)(s - s_0)$$

e, se il polinomio $Q(s)$ non ammette variazioni di segno nei suoi coefficienti, la radice s_0 è unica e coincide con il TIR del progetto.

Andiamo ora a considerare i coefficienti del polinomio $Q(s)$, i quali si possono esprimere come:

$$\sum_{k=0}^{j} x_{n-k}(1+i)^{k-j}, \qquad 0 \leq j \leq n-1$$

Per garantire l'unicità del TIR, occorre che i coefficenti siano quantità non negative, come x_n.

In base alla loro formula possiamo interpretare i coefficienti come attualizzazioni al tempo $n-j$, con $0 \leq j \leq n-1$ dei flussi di cassa del progetto. Indichiamo tali quantità nel seguente modo:

$$q_j(i) = \sum_{k=0}^{j} x_{n-k}(1+i)^{k-j}, \qquad \forall j : 0 \leq j \leq n-1$$

In funzione alla quantità q_j, la seconda condizione di unicità del TIR, è:

$$q_j(i_0) = \sum_{k=0}^{j} x_{n-k}(1+i_0)^{k-j} \geq 0, \qquad \forall j : 0 \leq j \leq n-1$$

Anche in questo caso un progetto che verifica la condizione di Soper, può essere espresso come una successione di n operazioni uniperiodali di finanziamento schematizzabili nel seguente modo:

$$\{Z_{t,t-1}; Z_{t,t}\} = \{q_{t-1}(i_0), -(1+i_0)qt-1(i_0)\}, \qquad \forall t : 1 \le t \le n$$

$$Z_{1,0} = x_0$$
$$Z_{t,t} = -(1+i_0)\cdot Z_{t,t-1}$$
$$Z_{t,t} + Z_{t+1,t} = x_{n-t}$$
$$Z_{t,t} = x_0$$

dove

$$Z_{t+1,t} \ge 0 \text{ e } Z_{t+1,t+1} \le 0, \forall t : 0 \le t \le n-1$$

Con semplici sostituzioni, vediamo che porre $Z_{n,n} = x_0$ equivale a $V(i_0) = 0$. Se esaminiamo dall'inizio, il progetto di Soper si presenta come una successione di investimenti, mentre se esaminiamo un progetto di Soper dalla fine, allora si presenta come una successione di finanziamenti.
In analogia alle quantià q_j, andiamo a definire:

$$w(i) = \sum_{k=0}^{j} x_{n-k}(1+i)^k, \qquad 0 \le j \le n-1$$

che può essere interpretata come la capitalizzazione a partire dal tempo $n-j$, dei flussi di cassa del progetto considerato.
Dall'analisi svolta sui progetti di Soper abbiamo che:

$$S_n(i) = w_n(i), \text{ e } V_n(i) = q_n(i)$$

da cui segue:

$$V(i) = V_{j-1}(i) + (1+i)^{-j} q_{n-j}(i) \tag{4.13}$$

$$S(i) = (1+i)^{n-j+1} S_{j-1} + w_{n-j}(i) \tag{4.14}$$

Dalle quali relazioni, per

$$w_{n-j}(i) = (1+i)_{n-j} q_{n-j}(i)$$

otteniamo che:

$$(1+i)_{n-j} q_{n-j}(i) = S(i) - (1+i)^{n-j+1} S_{j-1}$$

ed essendo $S_{i_0} = 0$, abbiamo dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 8.2.

$$S_j(i_0) \le 0 (\ge 0), \qquad \forall j : 0 \le j \le n-1$$

Se e solo se

$$q_j(i_0) \ge 0$$

APPENDICE A

Applicazioni matematiche ai problemi finanziari in EXCEL

L'impiego di un foglio elettronico, può rivelarsi molto utile per la risoluzione di problemi di matematica applicata, in particolar modo qualora si richieda la gestione di una grande quantità di informazioni. Definito un modello associato ad un problema di natura finanziaria, è possibile risolvere il problema tramite un foglio elettronico. Si possono inoltre analizzare l'impatto sul modello decisionale di eventuali cambiamenti nel valore di uno o più parametri e presentare le interazioni fra le diverse variabili. Oltre a costituire uno strumento per la gestione diretta di informazioni quantitative, e trattare modelli decisionali che si riscontrano in ambito economico e che frequentemente vengono impostati come problemi di ottimizzazione. In questo elaborato utilizzeremo il foglio elettronico excel, versione 2007.

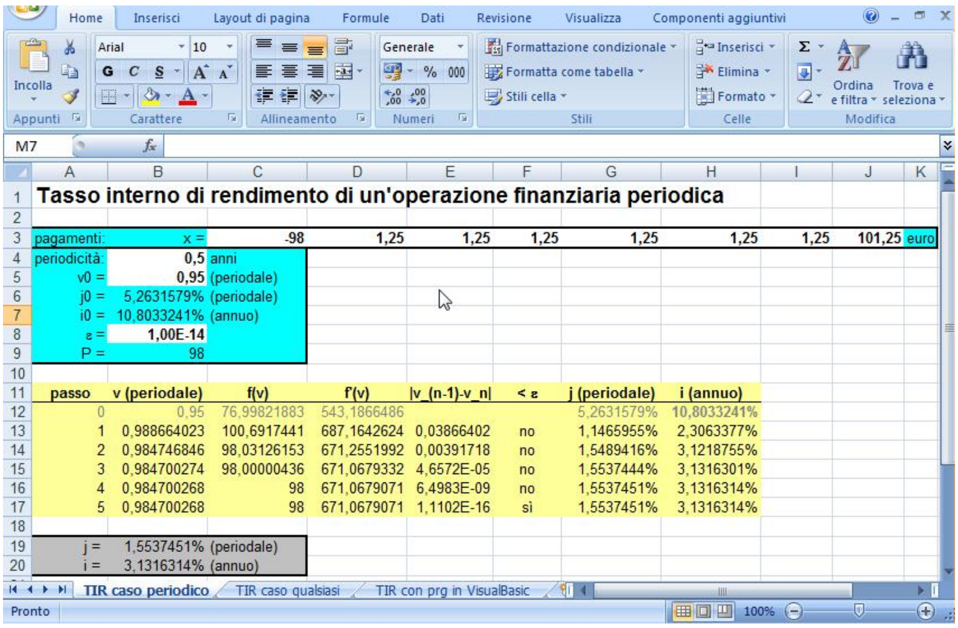


FIGURA 1. Esempio di problema di matematica finanziaria

1. Inserire dati e formule in un foglio elettronico

Per introdurre un dato, sia esso un numero o una parola, occorre seguire le sequenti procedure:

- selezionare la cella interessata, attraverso il mouse o i tasti di selezione;
- digitare il dato o il testo da inserire;
- premere invio.

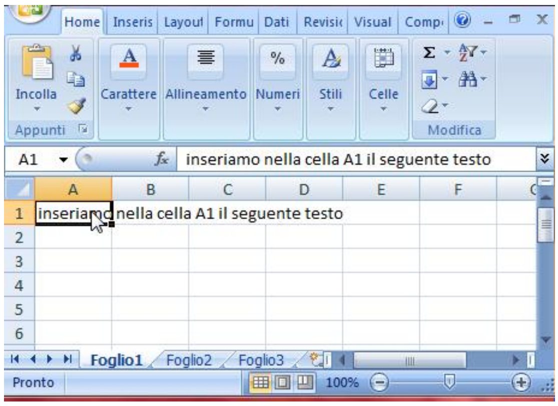


FIGURA 2. Inserire un testo

Nelle celle di un foglio elettronico si possono anche inserire delle formule contenenti espressioni ed operazioni. A differenza di un testo, ogni formula deve iniziare con il segno $'='$.Ad esempio se inseriamo nella cella A3 la formula:

$$= A7 + C3$$

abbiamo che in A3 viene scritta la somma delle cifre inserite nelle celle indicate come addendi. In genere, per qualsiasi altra operazione aritmetica basta seguire la procedura indicata.

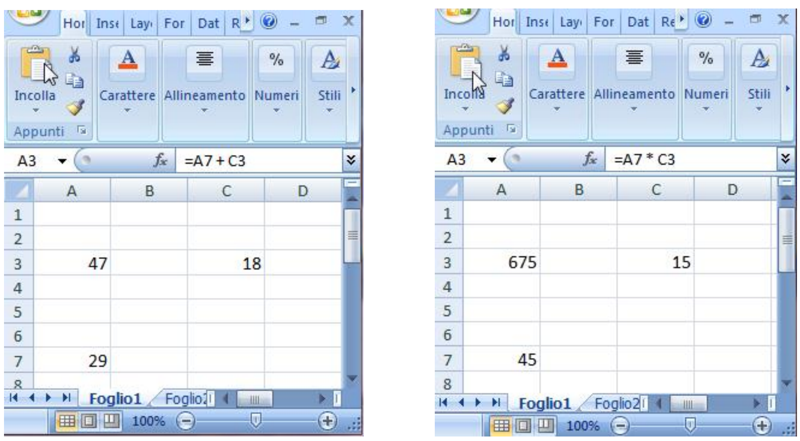


FIGURA 3. Inserire una formula

2. Grafico di una successioni aritmetica o geometriche

I grafici sono un modo molto utile per comprendere e confrontare un insieme di dati numerici. Attraverso i fogli elettronici si possono creare grafici di tipo diverso, in cui i valori sono visualizzari come linee, barre, colonne, sezioni di torta e così via. Mostriamo dunque come rappresentare i primi 10 termini di una progressione aritmetica e successivamente quelli di una successione geometrica, aventi entrambe lo stesso primo elemento e la stessa ragione. In ultimo porremo a confronto i due grafici.

2.1. Successione di una progressione aritmetica e successione di una progressione geometrica.

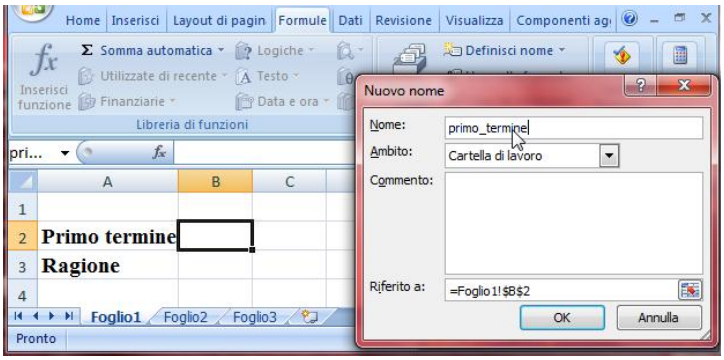
DEFINIZIONE 2.1. Si definisce *progressione aritmetica* una successione di numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tale che sia costante la differenza fra un qualsiasi numero e il precedente. La differenza costante,che indichiamo con q, si chiama *ragione* della progressione aritmetica, mentre a_1 è il $primotermine$. Noti il primo termine e la ragione, una progressione aritmetica può essere definita nel seguente modo:

$$a_n = a_1 + (n - 1)q, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{A.1}$$

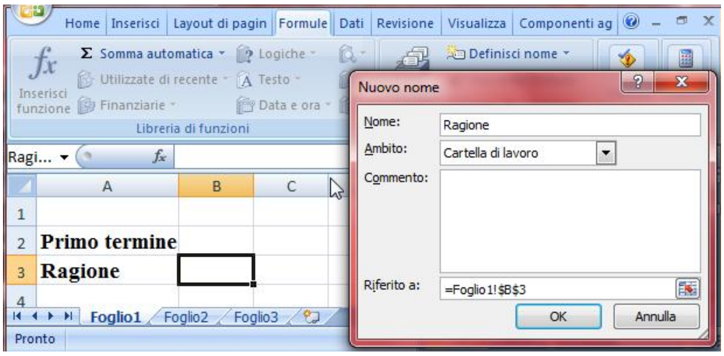
ma anche in forma generale nel seguente modo:

$$a_n = a_{n-1} + q, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{A.2}$$

Consideriamo dunque un foglio elettronico e selezioniamo le celle in cui andremo ad inserire il primo termine e la ragione della progressione aritmetica. A questo punto è possibile assegnare un nome alla cella, o inserire direttamente il valore numerico. Nel primo caso, il nome diventa un nuovo simbolo che può essere usato nelle formule. Vediamo in che modo assegnare un nome alla cella, visto che l'inserimento del numero è già stato precedentemente trattato.
Innanzittutto occorre selezionare la cella in cui si vuole inserire il valore del primo termine, nel nostro caso consideriamo B2, e dal menù *Formule* scelgiere l'opzione $Definisci\ nome$, e dalla finestra delle opzioni scegliere $Definisci\ nome$, e nella finestra di dialogo *Nuovo nome*, nella casella *Nome* scivere $Primo\ termine$.



Analoga procedura va eseguita per assegnare il nome *Ragione* alla cela B4.

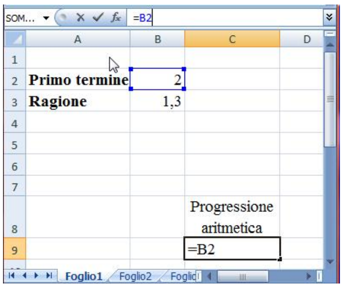


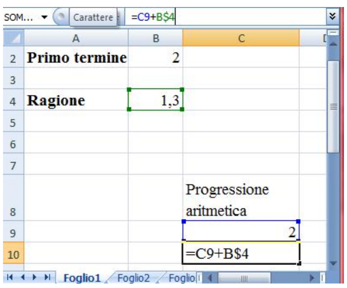
Occorre ora inserire la formula (A.6). Innanzittutto scriveremo il primo termine nella cella della colonna nela quale svilupperemo i primi 12 termini della progressione.

Consideriamo la cella C8 nella quale scriveremo il valore del primo termine. Questo avviene digitando o la formula $'' = B2''$, oppure il nome assegnato alla cella ossia $'' = primo\_termine''$. Ora possiamo selezionare la cella C9 per immettervi la formula (A.6, che può essere scritta nei seguenti due modi: Per $B4 \in \mathbb{R}$, abbiamo :

(A.3) $$a_n{}'' = C9 + B\$4''$$

dove il simbolo $''\$''$ frapposto tra B e 4 serve per non fare aumentare l'indice di riga nel trascinamento verticale del processo copiativo che andremo a descrivere a breve;

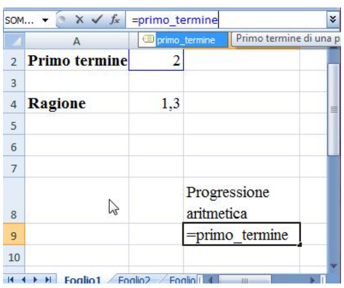


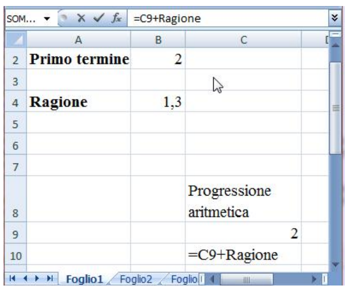


Se condsideriamo il nome assegnato a B4, allora la formula diventa :

(A.4) $$a_n{}'' = C9 + Ragione''$$

Per copiare la formula sulle celle della colonna basta copiare per trascina-

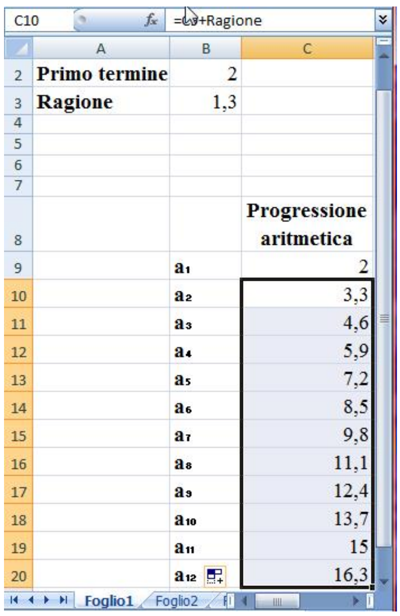


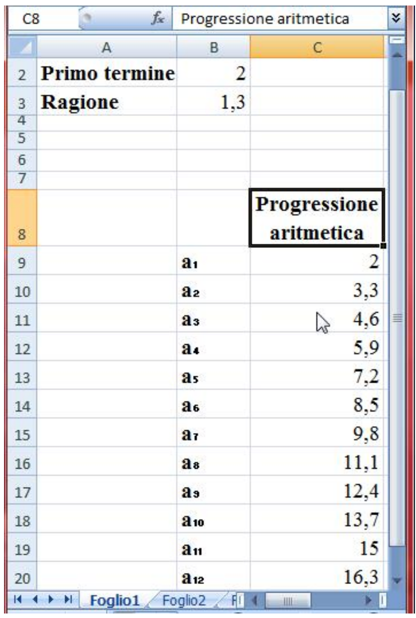


mento nel seguente modo:

(1) selezionare la cella C10;
(2) puntare il quadratino di riempimento, situato nell'angolo in basso a destra della cella selezionata;
(3) trascinare da C10 a C20.

Possiamo ora inserire nelle celle opportune, i termini della successione e completare il foglio elettronico con i dati opportuni.





DEFINIZIONE 2.2. Si definisce *progressione geometrica* una successione di numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tale che sia costante il quoziente fra un qualsiasi numero e il precedente. Il quoziente costante,che indichiamo con q, si chiama *ragione* della progressione geometrica, mentre a_1 è il *primotermine*. Noti il primo termine e la ragione, una progressione geometrica può essere definita nel seguente modo:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{A.5}$$

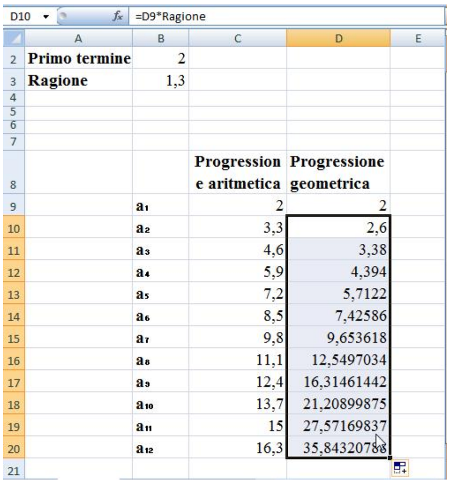
ma anche in forma generale nel seguente modo:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{A.6}$$

Andiamo ora a introdurre nel foglio elettronico i dati che definiscono una progressione geometrica.
La procedura è la stessa definita per la progressione aritmetica. Cambia la formula. Selzioniamo la cella D9 per inserire il primo termine in uno dei due modi descritti e andiamo a digitare nella cella D10 la formula relativa alla progressione geometrica:

$$a_n{}'' = D9 * ragione \qquad \text{oppure} \qquad a_n{}'' = D9 * B\$4''$$

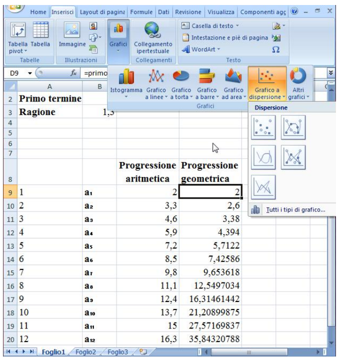
Infine per trascinamento copiamo fino alla cella D20. Andiamo ora a visualizzare i dati in un unico grafico in base alla seguente procedura:

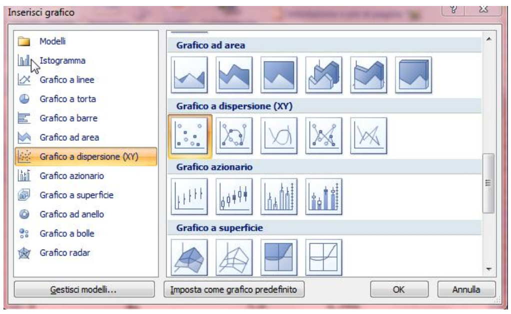


D10 =D9*Ragione

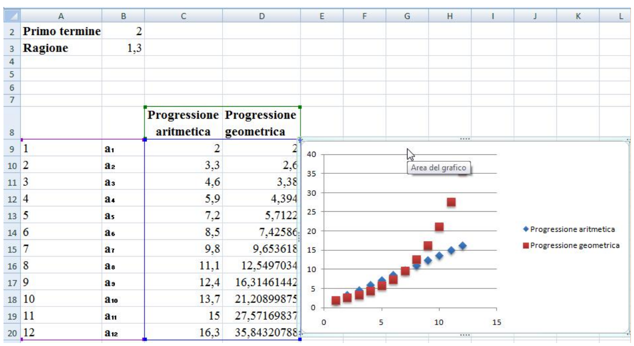
	A	B	C	D	E
2	**Primo termine**	2			
3	**Ragione**	1,3			
4					
5					
6					
7					
8			**Progressione aritmetica**	**Progressione geometrica**	
9		a_1	2	2	
10		a_2	3,3	2,6	
11		a_3	4,6	3,38	
12		a_4	5,9	4,394	
13		a_5	7,2	5,7122	
14		a_6	8,5	7,42586	
15		a_7	9,8	9,653618	
16		a_8	11,1	12,5497034	
17		a_9	12,4	16,31461442	
18		a_{10}	13,7	21,20899875	
19		a_{11}	15	27,57169837	
20		a_{12}	16,3	35,84320788	
21					

- Inseriamo nelle celle da B9 a B20, i numeri da 1 a 12. Per farlo basta digitare il numero 1 nella cella B9 e il 2 nella B10. Selezionare l'interballo B9-B10 e copiare per trascinamento. Automaticamente il foglio elettronico continua la numerazione.
- selezionare una cella dei dati che intendiamo visualizzare. Ad esempio D9. Dal menu *Inserisci* selezionare *Grafico*, e tra le varie opzioni che vengono proposte scegliere *Grafico a dispersione*. Tra le varie scelte, consideriamo per prima *la dispersione con soli indicatori:*

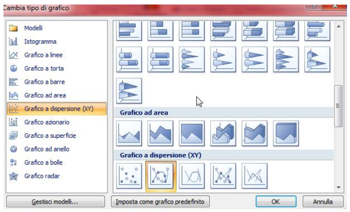


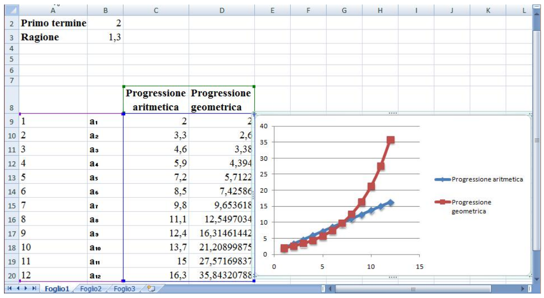


e avremo la seguente rappresentazione:



Se invece tra le varie scelte, consideriamo *la dispersione con linee smussate e indicatori*, otteniamo la seguente rappresentazione:





2.2. Calcolo di espressioni e uso di funzioni predefinite. Vediamo ora come tramite excel è possibile calcolare espressioni del tipo:

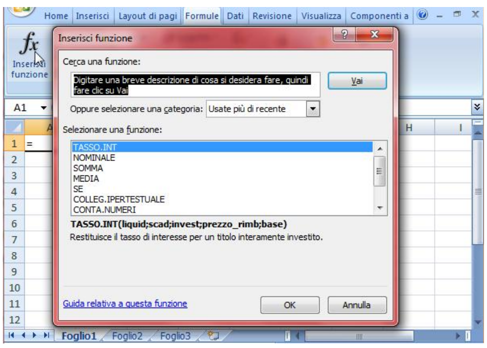
$$n = \frac{\ln(\frac{Ki}{R(1+i)} + 1)}{\ln(1+i)} \tag{A.7}$$

che in ambito finanziario sta ad indicare il numero delle rate che occorrono per costituire un capitale predefinito in un regime di capitalizzazione composta.

Il fogio elettronico, mette a disposizione una serie di funzioni predefinite, raggruppate per argomento. Ci sono dunque funzioni matematiche, trigonometriche, finanziarie, ecc..

Le funzioni vanno inserite all'interno di una formula nel seguente modo:

- Si seleziona la cella in cui si vuole inserire la formula e si digita '=';[1]
- Si inserisce la funzione all'inteno della formula, o digitando direttamente il comando che la contraddistingue, oppure sceliendo il comando *formule* dal menù principale, e dal comando *inserisci funzione* identificare la funzione da inserire.



La sintassi da seguire è la seguente:

$$= \mathbf{NOME\_FUNZIONE}(\mathbf{ARGOMENTO}; \mathbf{ARGOMENTO2}; \ldots)$$

[1]Questa prcedura è fondamentale, perché solo attraverso il simbolo '=' il foglio elettronico distingue una formula da un testo, rendendola operativa

Gli argomenti all'interno della funzione devono essere separati con un '**;**' se rappresentano singoli dati, mentre devono essere separati con il simbolo '**:**' quando indicano gli estremi di un intervallo o di una sequenza di dati

ESEMPIO 2.1. $=\textbf{SOMMA}(\mathbf{3};\mathbf{5};\mathbf{9})$, darà come risultato 17.

Alcune funzioni di Excel utilizzate frequentemente sono:

- La funzione **SOMMA**: Come visto nell'esempio (2.1), la funzione consente di sommare un insieme di numeri, e si presenta nella forma:

  $$=\textbf{SOMMA}(\textbf{num1; num2; num3; } ...)$$

  L'argomento della funzione è costituito da un elenco di voci che possono corrispondere a numeri, formule, intervalli o riferimenti a celle che contengono un numero. In funzione dell'argomento distinguiamo:
  - Valori costanti o riferimenti a singole celle:
    $=$ SOMMA(3**;** 5**;** 9), somma i valori numerici indicati;
    $=$ SOMMA($A1$**;** $A4$), somma il valore delle celle A1 e A4;
  - Riferimento a un blocco di celle:
    $=$ SOMMA($A1$**:** $A4$), somma il contenuto delle celle A1, A2, A3, A4;
    $=$ SOMMA($A1$**:** $C4$), somma il contenuto delle celle formanti il rettangolo di vertici opposti A1, C4;
    $=$ SOMMA(1**:** 4), somma tutte le celle delle righe 1, 2, 3, 4;
    $=$ SOMMA(A**:** C), somma tuttel le celle delle colonne A, B, C.
  - Riferimenti misti: $=$ SOMMA($A1$**:** $C4$**;**100), somma il contenuto del rettangolo A1, C4, e il valore 100;
    $=$ SOMMA($A1$**:** $A3$**;**$D5$), somma il contenuto delle celle da A1 a A3, e D5.

  Le celle vuote danno un contributo pari a 0, mentre le celle che contengono un testo privo di valore associato, generano un messaggio di errore (VALUE#).
- La funzione **PRODOTTO**: Questa funzione consente di moltiplicare un insieme di numeri, e si presenta nella forma:

  $$=\textbf{PRODOTTO}(\textbf{num1; num2; num3; } ...)$$

- La funzione **LN o LOG**: Restituisce il logaritmo a base naturale o decimale, del numero indicato nell'argomento:

  $$=\textbf{LN}(\textbf{numero}) \text{ oppure } =\textbf{LOG}(\textbf{numero})$$

- La funzione **EXP**: Calcola il valore della costante di Nepero e, elevata alla potenza indicata dall'argomento della funzione. La sintassi è la seguente:

  $$=\textbf{EXP}(\textbf{numero})$$

3. Valutazione dei progetti finanziari e di rendite

Consideriamo un progetto finanziario costituito da una successione di capitali $C_0, C_1, \ldots, C_n$, che si verificano alle corrispondenti epoche temporali $0, 1, 2, \ldots, n$. Il Valore attuale del progetto è dato dalla somma dei valori attuali calcolati in $t = 0$ degli importi C_k, considerato in regime di capitalizzazione composta, al tasso di interesse i:

$$V(i) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k(1+i)^{-k}$$

3.1. La funzione VAN(Valore Attuale Netto). Per calcolare il valore attuale netto di un progetto si utilizza la funzione finanziaria VAN di EXCEL. La sintassi della funzione è :

(A.8) **VAN(tasso_int; valore1; valore2; ...; valoren)**

dove gli argomenti della funzione hanno il seguente significato:

tasso_int	è il *tasso di interesse*
valore 1; valore 2; ...; valore n	sono gli importi di $C_0, \ldots, C_n$

TABELLA 1. Argomenti della funzione VAN

Occorre fare attenzione al primo importo C_0, il quale non viene incluso come argomento della funzione VAN, per cui occorre sommare algebricamente il risultato della funzione VAN con l'importo C_0.

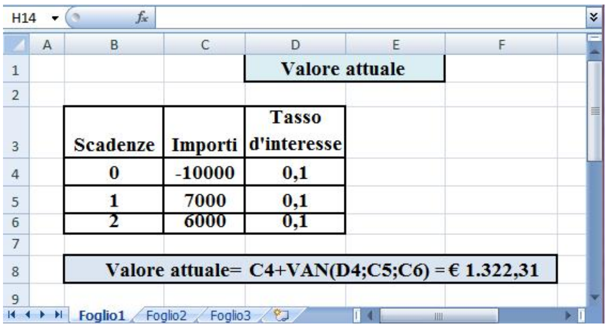
ESEMPIO 3.1. Si vuole calcolare utilizzando un tasso di interesse del 10%, il valore attuale netto di un investimento finanziario che prevede un esborso iniziale di 10.000€, e la riscossione di 7.000€alla fine del primo anno e la riscossione di 6.000€alla fine del secondo anno.
Inseriamo i dati del problema, in un foglio EXCEL, nel seguente modo:

Per calcolare il valore attuale del proggetto di investimento occorre posizionarsi nella cella in cui inserire la formula (A.8).

3.2. La funzione VA. Per i progetti finanziari caratterizzati da capitali C_k uguali ad un comune importo C, indipendentemente dall'epoca di riferimento, si usa la funzione finanziaria VA di EXCEL.
Questa funzione permette di considerare anche la situazione in cui gli importi

cella C4	-10.000	importo alla scadenza $t_0 = 0$
cella C5	7.000	importo alla scadenza $t_1 = 1$
cella C6	6.000	importo alla scadenza $t_2 = 2$
cella D4	$0,1$	tasso di interesse
cella F8	$C4 + VAN(D4;C5;C6)$	valore attuale

TABELLA 2. Dati foglio EXCEL problema A.2.



Scadenze	Importi	Tasso d'interesse
0	-10000	0,1
1	7000	0,1
2	6000	0,1

Valore attuale

Valore attuale= C4+VAN(D4;C5;C6) = € 1.322,31

siano pagati o riscossi anticipatamente, ossia all'inizio di ciascun perido di riferimento.
Inoltre la funzione VA permette di considerare la possibilità che all'epoca finale vi sia un eventuale pagamento o risossione S, aggiunto ai movimenti del progetto. La sintassi della funzione è :

(A.9) **VA(tasso_int; periodi; pagamento; valore_futuro; tipo)**

dove gli argomenti della funzione hanno il seguente significato:

tasso_int	è il *tasso di interesse*
periodi	*numero* totale dei pagamenti
pagamento	*pagamento* costante efettuato in ciascun periodo
valore_futuro	*pagamento* addizionale S, effettuato nell'ultima epoca e che si aggiunge all'ultimo pagamento
tipo	se è uguale a 0, oppure è omesso, indica che gli importi sono posticipati; se è uguale a 1 indica che gli importi sono anticipati.

TABELLA 3. Argomenti della funzione finanziaria VA

Prima di passare a qualche esempio, occorre evidenziare il fatto che la funzione VA fornisce un valore di segno opposto a quello dei flussi di cassa C, per cui il valore atttuale sarà calcolato come opposto del risultato della funzione VA.

ESEMPIO 3.2. (Mancano $valore\_futuro$, e $tipo$)
Si vuole calcolare utilizzando un tasso di interesse dell'8%, il valore attuale, al tempo $t_0 = 0$, di un progetto che prevede la riscossione di 850€, alla fine di ogni anno, per 6 anni.
Schematizziamo i dati del problemo in una tabella e distinguiamo gli argomenti della funzione:

tasso_int	$i = 0,08$
periodi	$n = 6$
pagamento	$C = 850€$
valore_futuro	manca
tipo	è omesso, quindi gli importi sono posticipati

TABELLA 4. Dati dell'esempio A.3.

Per calcolare il valore attuale occorre inserire la funzione con la seguente sintassi:

$$= -\mathbf{VA}(\mathbf{0,08; 6; 850}) = {}^{2} - (\mathbf{3929,448}) = \mathbf{3929,448}$$

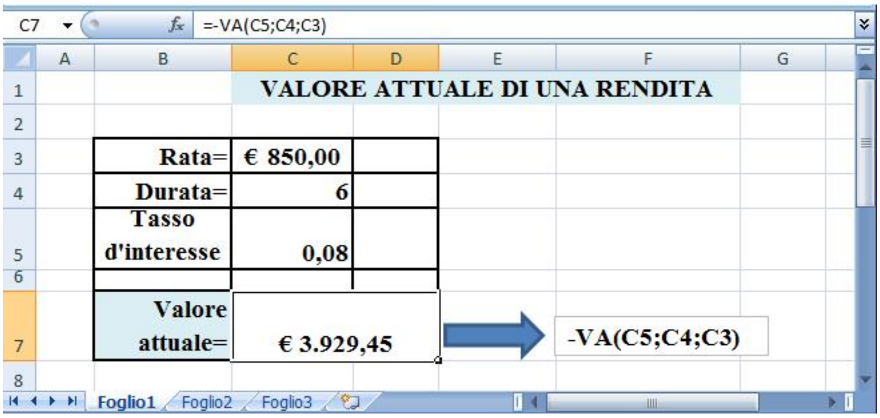


FIGURA 4. Valore attuale del progetto d'investimento

4. Valutazione di rendite

Data una rendita , consideriamo in questa sede, unicamente quelle periodiche (in cui gli istanti temporali sono equidistanti), costanti (la rata è costante), e temporanee (la durata è finita).

4.1. Montante di una rendita periodica posticipata. Consideriamo una rendita $R(t_n, C)$, annua, posticipata, di rata C e durata $t_n = n$. Utilizzando il regime di capitalizzazione composta al tasso i, il montante è definito dalla formula:

$$M(i) = C\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

[2]Il segno $'-'$ va anteposto alla funzione, in quanto essa restituisce un valore negativo. La motivazione è la seguente:si dovrebbe spendere $3929,448€$, per ricevere 850€alla fine di ogni anno, per i prossimi 6 anni. Se quindi al tempo $t_0 = 0$ si paga una somma minore, allora il progetto risulterà conveniente.

Per calcolare il montante della rendita si usa la la funzione finanziaria di EXCEL VAL.FUT, la cui sintassi è :

(A.10) **VAL.FUT(tass_int; periodi; pagamenti; valore_attuale; tipo)**

Gli argomenti della funzione hanno il seguente significato, relativo alla valutazione di una rendita:

tasso_int	è il *tasso di interesse*
periodi	*numero* totale delle rate, corrispondente anche alla durata della rendita
pagamento	*importo C* della rata costante
valore_attuale	rappresenta un flusso iniziale il cui importo può anche essere diverso da quello della rata
tipo	se è uguale a 0, oppure è omesso, indica che gli importi sono posticipati; se è uguale a 1 indica che gli importi sono anticipati.

TABELLA 5. Argomenti della funzione finanziaria VAL.FUT

Se la rendita è di tipo periodica, con epoca non corrispondente a quella del tasso di interesse, occorre inserire nella funzione VAN.FUT, il tasso effettivo riferito al periodo di tempo considerato. Ad esempio, se la rata è semestrale e il tasso è annuale, occorre inserire nella funzione (A.10) il tasso effettivo semestrale. Come la funzione VAN, anche VAL.FUT restituisce un numero che ha segno oppost al pagamento.

ESEMPIO 4.1. Calcolare il montante di una rendita annua posticipata di 5.000€, durata 6 anni e al tasso di interesse del $4,4\%$. Compiliamo il foglio elettronico nel seguente modo:

cella C3	5.000€	l' importo della rata
cella C4	6	la durata della rendita
cella C5	$0,044$	il tasso di interesse
cella C7	$-VAL.FUT(C5;C4;C3)$	la funzione montante

TABELLA 6. Dati dell'esempio A.4.

4.2. Montante di rendite periodiche anticipate. Consideriamo ora una rendita annua in cui la riscossione o il pagamento degli importi monetari C, avviene in modo anticipato all'inizio di ogni anno, per una durata complessiva di n anni.
Per calcolare il montante della rendita usiamo la funzione finanziaria(A.10), attribuendo all'argomento $tipo$ il valore 1.

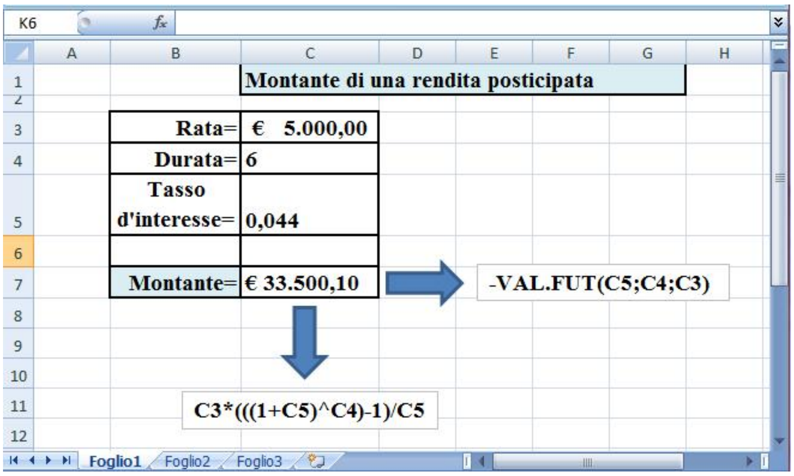


FIGURA 5. Calcolo del montante, e formule a confronto

cella C3	20.000€	l' importo della rata
cella C4	10	la durata della rendita
cella C5	$0,05$	il tasso di interesse
cella C7	$-VAL.FUT(C5;C4;C3;;1)$	la funzione montante

TABELLA 7. Dati dell'esempio A.5.

ESEMPIO 4.2. Calcolare il montante di una rendita che prevede la riscossione di 20.000€all'inizio di ogni anno, per 10 anni, con un tasso di interesse uguale al 5%annuo.

Da notare nella funzione $VAL.FUT$ il punto e virgola aggiuntivo che agisce da separatore per l'argomento della funzione $Val\_attuale$ non impiegato.

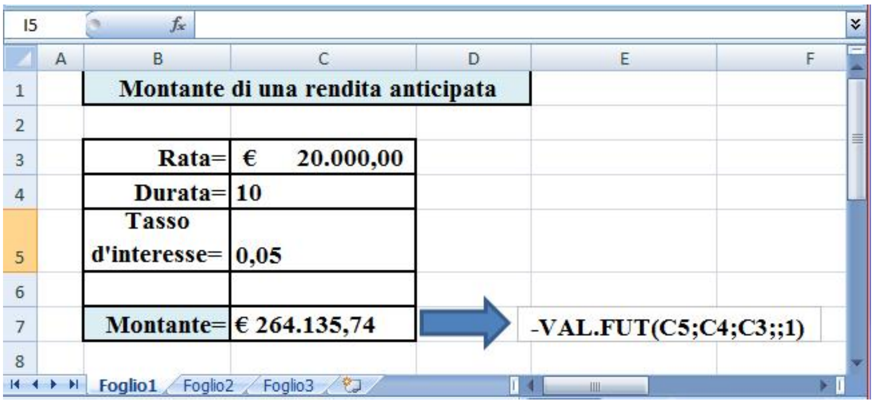


FIGURA 6. Calcolo del montante di una rendita anitcipata

4.3. Valore attuale di rendite periodiche. Il calcolo del valore attuale di rendite periodiche avviene attraverso la funzione finanziaria di EXCEL

VA la cui formula (A.9), può essere usata sia nel caso di rendita anticipata che posticipata. Vediamo tramite esempi una sua valida applicazione.

ESEMPIO 4.3. Calcolare il valore attuale di una rendita che prevede la riscossione mensile, in via anticipata, di 5000€, per 4 anni ad un tasso annuo del 12%. Occorre innanzitutto determinare il tasso mensile equivalente al tasso annuo assegnato:

$$(1+i) = (1+i_k)^k \Rightarrow i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \to i_{12} = 0,009488793$$

e poi inseririre i dati relativi al problema, in base la seguente tabella:

cella C3	5.000€	l' importo della rata
cella C4	4	la durata della rendita
cella C5	$0,12$	il tasso di interesse annuo
cella C6	$0,009488793$	il tasso di interesse mensile
cella C7	$-VA(C5;C4;C3;;1)$	la funzione valore attuale

TABELLA 8. Dati dell'esempio A.6.

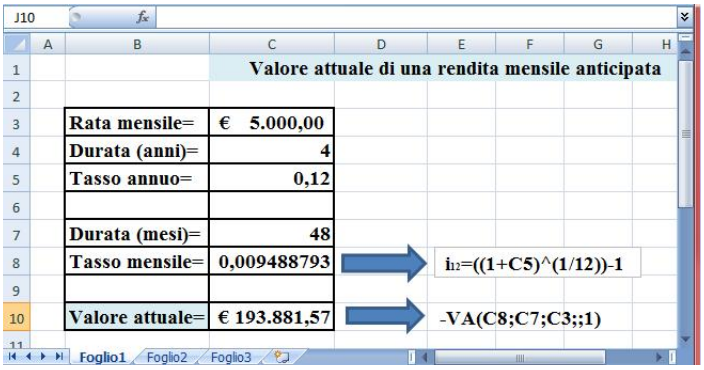


FIGURA 7. Calcolo del valore attuale di una rendita mensile anitcipata

5. Uso del comando *Ricerca obiettivo*

Il comando *Ricerca obiettivo*, serve per trovare il valore di una certa variabile in modo da raggiundere un certo obiettivo.
Questo comando può essere utilizzato per trovare il tasso di interesse oppure il costo iniziale di un progetto che permette di determinare un certo valore attuale. Consente quindi di risolvere i problemi inversi, quali la determinazione della rata, della durata o del tasso, relativi a quelli esaminati fino ad ora.
Noto un risultato , è possibile determinare il valore di una delle variabile che lo ha prodotto.
Per accedere a questo strumento occorre accedere dalla scheda *Dati*, all'opzione *Analisi di simulazione* e quindi cliccare su *Ricerca obiettivo*.

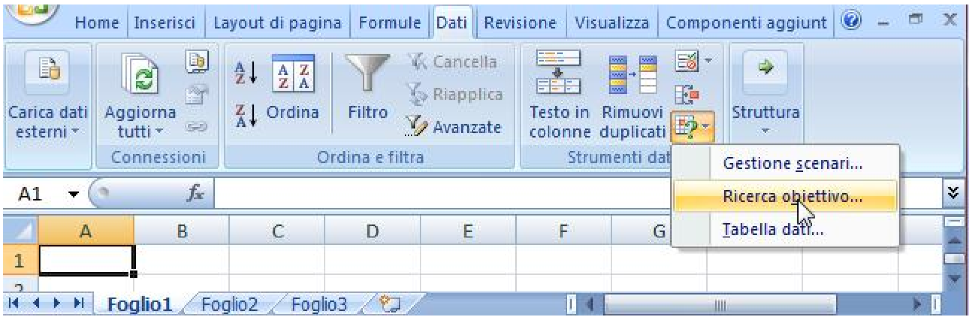


FIGURA 8. Ricerca Obiettivo

Una volta selezionato il comando*Ricerca obiettivo*, compare una finestra di dialogo con tre voci:

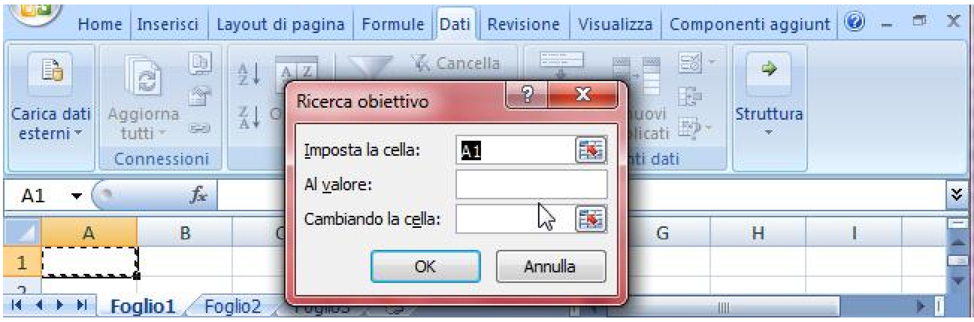


FIGURA 9. Finestra di dialogo relativa alle opzioni del comando *Ricerca obiettivo*

(1) ***Imposta cella***: rappresenta il riferimento alla cella obietivo, la quale deve contenere non un valore, ma la formula che si intende risolvere;
(2) ***Al valore***: rappresenta il valore che vogliamo assuma la cella obiettivo, e quindi occorre inserire il valore che si intende ottenere mediante la formula;
(3) ***Cambiando la cella***: rappresenta il riferimento alla cella soluzione, che deve contenere un valore e non una formula.

A volte *Ricerca obiettivo* potrebbe non trovare una soluzione o perché una soluzione non esiste o perché i dati non sono corretti. In questo caso si riceve un messaggio di errore.

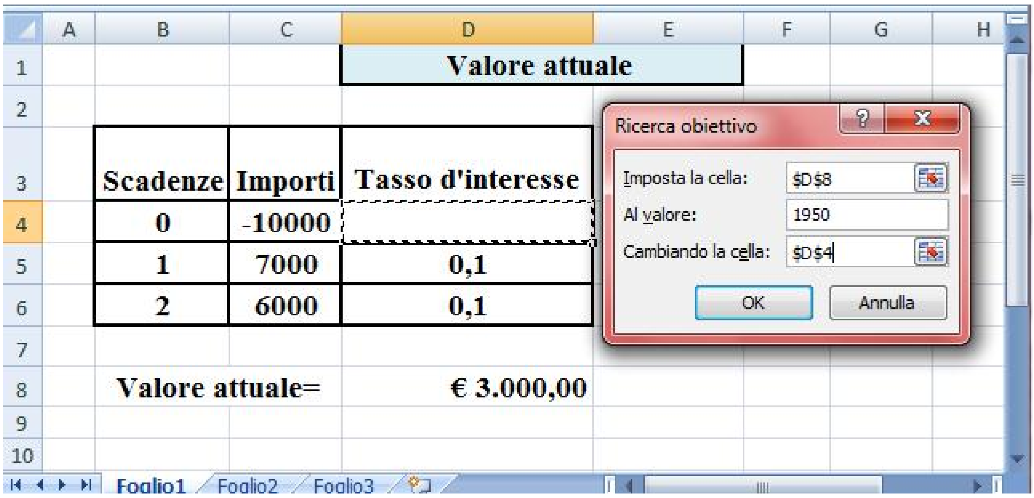
ESEMPIO 5.1. Il sig. Fruttolo intende eseguire un investimento che prevede un esborso iniziale di 10.000€, la riscossione di 7.000€ alla fine del primo anno e la riscossione di 6.000€ alla fine del secondo anno. determinare il tasso di interesse che dà luogo ad un valore attuale dell'investimento di 1950€.
Inseriamo in un foglio elettronico i dati nel seguente modo:

Per risolvere il problema si procede nel seguente modo:

cella C4	-10.000€	Esborso iniziale
cella C5	7.000	prima rata riscossa
cella C6	6.000	seconda rata riscossa
cella D4	$0,1$	il tasso di interesse annuo
cella C	$C4+VAN(D4;C5;C6)$	la funzione valore attuale

TABELLA 9. Dati del problema A.7.

- Scegliere il comando *Ricerca obiettivo* e nella casella *Imposta cella* della finestra di dialogo, scrivere la cella relativa alla formula del valore attuale, nel quale c'è il riferimento al tasso di interesse;
- Nella casella *Al valore* digitare il valore attuale che si desidera ottenere, che nel problema considerato e di 1950€;
- Nella casella *Cambiando la cella* digitare la cella $D4$ in cui va inserito il valore del tasso ricercato, e nel quale non vi deve esser scritto alcun valore, per non generare un messaggio di errore;
- Confermare con ok. A questo punto, compare una finestra di dialogo indicante *Stato di ricerca obiettivo*, la quale informa che è stata trovata una soluzione;
- Confermare con ok il risultato, il quale comparirà nella cella $D4$.



Si ottiene un tasso di interesse $i = 0,5961$.

FIGURA 10. Finestra di dialogo relativa alle opzioni del comando *Ricerca obiettivo*

valori	La sequenza del flusso di cassa $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$
ipotesi	Tasso con cui EXCEL inizia il calcolo di procedimento interativo; se l'opzione *ipotesi* viene omesso, EXCEL inizia con un tasso di interesse uguale a $0,1$

TABELLA 10. Argomenti della funzione finanziaria TIR.COST

6. Metodo del *Tasso Interno di Rendimento*

Il tasso interno di rendomento di un progetto finanziario è il tasso di interesse che eguaglia a zero il valore attuale netto , e si ottiene risolvendo l'equazione:

$$x_0 + \frac{x_1}{1+i} + \ldots + \frac{x_n}{(1+i)^n} = 0$$

6.1. La funzione TIR.COST. Per il calcolo del tasso interno di rendimento relativo ad un progetto finanziario caratterizzato da un flusso di cassa $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si può usare la funzione finanziaria di EXCEL TIR.COST, la cui sintassi è :

$$= \mathbf{TIR.COST}(\mathbf{valori}, \mathbf{ipotesi}) \tag{A.11}$$

Gli argomenti della funzione hanno il seguente significato:

La funzione TIR.COST restituisce il tasso interno di rendimento, inteso come il tasso effettivo relativo alla periodicità dei flussi considerati (per flussi di cassa trimestrali, il valore restituito dalla funzione TIR.COST è il tasso effettivo semestrale).
È anche possibile usare la funzione finanziaria TASSO. La differenza tra le due funzioni finanizarie TIR.COST e TASSO, è analoga a quella che intercorre tra VAN e VA. La funzione TIR.COST considera importi di capitale di diverso valore, mentre in TASSO gli importi di capitale sono ipotizzati uguali. Inoltre la funzione TASSO consente di trattare anche la situazione in cui i movimenti finanziari sono eseguiti in modo anticipato.

ESEMPIO 6.1. Scegliere , utilizzando il criterio del tasso interno di rendimento il progetto più conveniente fra i progetti A e B i cui movimenti di cassa sono i seguenti:

In un foglio di lavoro, immettiamo i dati secondo la tabella: Essendo il tasso di rendimento del progetto A maggiore rispetto a quello del progetto B, si sceglie il progetto A.

6.2. Uso del comando *Ricerca obiettivo*. Consideriamo il comando di *Ricerca obiettivo* per determinare quale deve essere l'importo riscosso o pagato ad una determinata epoca del progetto affinché il tasso interno di rendimento del progetto sia pari ad un valore assegnato.

ESEMPIO 6.2. Sia dato un progetto finanziario che prevede un esborso iniziale di X €, la riscossione di 3.000€, alla fine del primo anno e il

Progetto A	
epoca	**importo**
0	-13.000
1	4.000
2	5.900
3	1.800
4	6.000

Progetto B	
epoca	**importo**
0	-28.000
1	2.000
2	13.000
3	9.500
4	10.500

TABELLA 11. Movimento di cassa dei proggetti a confronto

cella B5	0	scadenza t_0
cella B6	1	scadenza t_1
cella B7	2	scadenza t_2
cella B8	3	scadenza t_3
cella B9	4	scadenza t_4

TABELLA 12. Dati dell'esempio A.8.

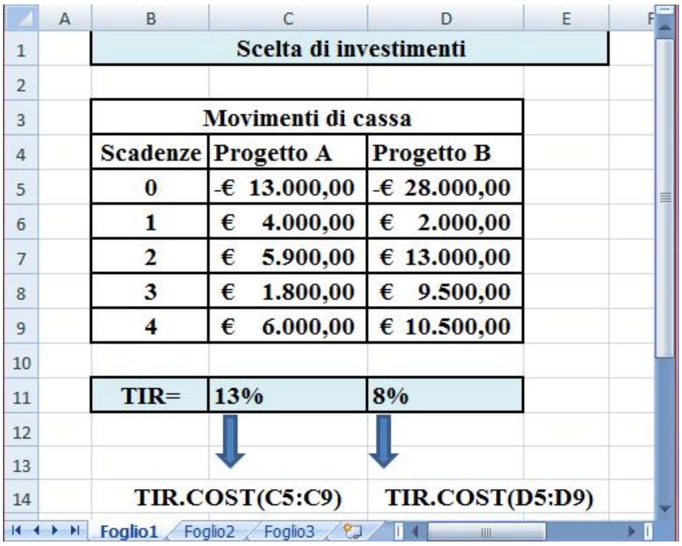
cella C5	-13.000	flusso P.A relativo al tempo t_0
cella C6	4.000	flusso P.A relativo al tempo t_1
cella C7	5.900	flusso P.A relativo al tempo t_2
cella C8	1.800	flusso P. A relativo al tempo t_3
cella C9	6.000	flusso P.A relativo al tempo t_4
cella D5	-28.000	flusso P.B relativo al tempo t_0
cella D6	2.000	flusso P.B relativo al tempo t_1
cella D7	13.000	flusso P.B relativo al tempo t_2
cella D8	9.500	flusso P.B relativo al tempo t_3
cella D9	10.500	flusso P.B relativo al tempo t_4
cella C11	$TIR.COST(C5:C9)$	la funzioneTIR.COST telativo P.A
cella C11	$TIR.COST(D5:D9)$	la funzioneTIR.COST telativo P.B

TABELLA 13. Dati dell'esempio A.8.

pagamento di 250€alla fine del secondo anno. Calcolare l'esborso iniziale X che consente di ottenere un tasso interno di rendimento del 12%. Inseriamo in un foglio di lavoro i seguenti dati:

In questo modo si definisce un tasso fittizio corrispondende al problema schematizzato. Per definire il valore X, seguiamo le seguenti procedure:

- Accedere alla finestra di dialogo del comando *Ricerca obiettivo*;
- Nella casella *Imposta la cella* inserire C8;
- Nella casella*Al valore* inserire il valore del TIR: $0,12$



Scelta di investimenti

Movimenti di cassa		
Scadenze	Progetto A	Progetto B
0	-€ 13.000,00	-€ 28.000,00
1	€ 4.000,00	€ 2.000,00
2	€ 5.900,00	€ 13.000,00
3	€ 1.800,00	€ 9.500,00
4	€ 6.000,00	€ 10.500,00
TIR=	13%	8%
	TIR.COST(C5:C9)	TIR.COST(D5:D9)

FIGURA 11. Valutazione dei progetti attraverso la funzione TIR.COST

cella B4	0	scadenza t_0
cella B5	1	scadenza t_1
cella B6	2	scadenza t_2
cella C4	-1000€	Esborso iniziale fittizio
cella C5	7.000	somma riscossa
cella C6	6.000	somma pagata
cella C8	$TIR.COST(C4:C6)$	la funzione TIR.COST

TABELLA 14. Dati relativi al'esempio A.9.

- Nella casella *Cambiando la cella* digitare la cella incognita C4.

Seguendo tali comandi, avremo che nella cella C4 comparirà il valore cercato

	Obb.Bancarie	**Titoli di Stato**
Prezzo	100	99,5
Tasso nominale	2,75	3,00
Vita residua (anni)	4	4
Valore di rimborso	100	100
Flussi di cassa attesi		
0	-100,00	-99,50
1	2,75	3,00
2	2,75	3,00
3	2,75	3,00
4	2,75	3,00

TABELLA 15. Scelta tra investimenti: il confronto fra due obbligazioni

7. Valutazione degli investimenti

Il confronto di due o più alternative di investimento è il cardine su cui poggia tutta la teoria e la pratica dei mercati finanziari. La tecnica più diffusa nella valutazione di un'alternativa di investimento è quella del valore attuale, che come abbiamo già visto si basa sul principio di attualizzazione, a d un opportuno tasso di sconto, dei flussi di cassa attesi. Il tasso di sconto è rappresentato dal costo di oportunità dell'investimento in alternative di investimento, il cui valore base è dato dal rendimento dell'attività oriva di rischio.

ESEMPIO 7.1. Un investitore vuole scegliere se investire un'obbligazione emessa dalla banca in cui è cliente oppure rifiutare e investire in un titolo di stato. Le due alternative possono essere schematizzate dalla seguente tabella:

L'alternativa migliore, ipotizzando che il merito creditizio della banca sia identico a quello dello Stato, è quello il cui valore attuale netto è maggiore, scontando i flussi di cassa attesi ad un opportuno tasso di rendimento.
In modo del tutto equivalente possiamo confrontare le due alternative sulla base al Tasso Interno di Rendimento, ossia il tasso che eguaglia il prezzo pagato con il valore attuale dei pagamenti attesi. In tal caso sceglieremo l'alternativa il cui tasso è maggiore.
Applicando il metodo del TIR, abbiamo che:

- Obbligazioni bancarie:

$$\frac{-100}{(1+TIR)^0}+\frac{2,75}{(1+TIR)^1}+\frac{2,75}{(1+TIR)^2}+\frac{2,75}{(1+TIR)^3}+\frac{102,75}{(1+TIR)^4} = 0$$

Da cui otteniamo che TIR $= 2,75\%$

- Obbligazioni di stato:

$$\frac{-99,5}{(1+TIR)^0}+\frac{3}{(1+TIR)^1}+\frac{3}{(1+TIR)^2}+\frac{3}{(1+TIR)^3}+\frac{103}{(1+TIR)^4} = 0$$

Da cui otteniamo che TIR $= 3,13\%$

Le due alternative hanno il tasso di rendimendo interno differente, per cui l'alternativa da preferire è quella del Titolo di Stato, in quanto offre un rendimento atteso maggiore. Nell'esempio proposta in tabella confrontiamo i due TIR su un foglio di lavoro nel seguente modo:

Confronto tra due investimenti obbligazionari			
		Obbligazione bancaria	**Obbligazione di Stato**
Prezzo		100	99,5
Tasso nominale		2,75	3
Vita residua		4	4
Valore di rimborso			
	Tempo	**Flussi di cassa attesi**	
	0	-100	-99,5
	1	2,75	3
	2	2,75	3
	3	2,75	3
	4	102,75	103
	TIR=	2,75%	3,13%

FIGURA 12. Valutazione di due obbligazioni la funzione TIR.COST

7.1. Funzione fianzniaria TIR.X e VAN.X. La funzione finanziaria TIR.COST, ricerca il TIR di una sequenza di flussi di cassa equidistanti tra loro. Supponiamo ora di dover confrontare due alternative, considerando che i flussi di cassa previsti non siano distanziati in modo uniforme e costante come nel precedente esempio. Per tali problemi, EXCEL mette a disposizione la funzione finanziaria TIR.X, la cui sintassi:

(A.12) **TIR.X(valori;date_pagamento;ipotesi)**

dove gli argomenti della funzione hanno il seguente significato: Occorre

valori	Valori dei flussi di cassa
date_pagamento	Scadenze relative ai flussi di cassa

TABELLA 16. Argomenti della funzione VAN

osservare che, tutti i valori successivi al primo costo o pagamento, inseriti nel campo **valori**, vengono scontati secondo una base annua di 365 giorni. È necessario che la serie di valori contenga almeno un valore positivo ed uno negativo. Nel campo **date_pagamento**, invece, l'inizio delle scadenze di pagamento è indicato dalla data del primo pagamento. Tutte le altre date devono essere posteriori, ma non necessariamente seguire un ordine particolare. Le date o devono essere risultato di formule o funzioni, o immesse attraverso funzione **DATA**. Ad esempio, utilizzare DATA(2008;5;23), per inserire la data del 23 maggio 2008 Consideriamo un esaempio in cui occorre confrontare due alternative i cui flussi di cassa previsti non siano distanziati in modo uniforme e costante.

ESEMPIO 7.2. Un investitore vuole scegliere se investire un'obbligazione emessa dalla banca in cui è cliente oppure rifiutare e investire in un titolo di stato. Le due alternative possono essere schematizzate dalla seguente tabella:

	Obb.Bancarie	**Titoli di Stato**
Prezzo	100	99,5
Tasso nominale	2,75	3,00
Vita residua (anni)	4	4
Valore di rimborso	100	100

TABELLA 17. Condizioni relative alle due obbligazioni

Inseriamo i dati in un foglio di lavoro, come di consetuo, immettendo le date nel seguente modo:

Dal confronto dei rispettivi TIR, possiamo concludere che conviene investire nei Titoli di Stato, in quando il rendimento atteso è maggiore rispetto alle obbligazioni emesse dalla banca.

Obbligazioni Bancarie		**Titoli di Stato**	
Scadenza	Flusso di cassa	Flusso di cassa	Scadenza
05/01/05	-100,00	-99,50	05/01/05
03/01/06	2,75	1,5	04/07/05
07/01/07	2,75	1,5	03/01/06
04/01/08	2,75	1,5	05/07/06
02/01/09	102,75	1,5	04/01/07
		1,5	06/07/07
		1,5	05/01/08
		1,5	06/07/08
		101,5	05/01/09

TABELLA 18. Il confronto fra le due obbligazioni, in presenza di flussi di cassa con scadenze diverse

cella B9	DATE(2005;01;05)	cella D9	$DATE(2005;01;05)$
cella B10	$DATE(2006;01;03)$	cella D10	$DATE(2005;07;04)$

TABELLA 19. Dati relativi all'esempio A.11.

cella B11	$DATE(2007;01;07)$	cella D11	$DATE(2006;01;03)$
cella B12	$DATE(2008;01;07)$	cella D12	$DATE(2006;07;05)$
cella B13	$DATE(2009;01;02)$	cella D13	$DATE(2007;01;04)$
celle $C9 \to C13$	Flussi Obb.b.	cella D14	$DATE(2007;07;06)$
celle $D9 \to D17$	Flussi Titoli S.	cella D15	$DATE(2008;01;05)$
cella D16	$DATE(2008;07;06)$	cella D17	$DATE(2009;01;05)$
cella C19	TIR.X(C9:C13;B9:B13)	cella D19	$TIR.X(D9:D13;E9:E13)$

TABELLA 20. Dati relativi all'esempio A.11.

Analogamente, si può determinare il valore attuale netto per valutare e confrontare due investimenti con flussi di cassa scadenti in epoche differenti. La funzione finanziaria èVAN.X, la cui sintassi è:

(A.13) **VAN**(**tasso_int**;**valori**;**date_pagamenti**)

Gli argomenti della funzione finanziaria hanno il seguente significato:

ESEMPIO 7.3. Consideriamo un investimento caratterizzato da un flusso di cassa indicato nella tabella sottostante e determiniamo il suo valore attuale netto, al tasso di sconto del 9%.

	A	B	C	D	E
1		Confronto di due obbligazioni con TIR.X			
2					
3			Obbligazioni bancarie	Titoli di stato	
4	Prezzo		100	99,5	
5	Tasso nominale		2,75	3	
6	Vita residua (anni)		4	4	
7	Valore di rimborso		100	100	
8		Scadenze	Flussi di cassa		Scadenze
9		05/01/2005	-100	-99,5	05/01/2005
10		03/01/2006	2,75	1,5	04/07/2005
11		07/01/2007	2,75	1,5	03/01/2006
12		04/01/2008	2,75	1,5	05/07/2006
13		02/01/2009	102,75	1,5	04/01/2007
14				1,5	06/07/2007
15				1,5	05/01/2008
16				1,5	06/07/2008
17				101,5	05/01/2009
18					
19		TIR.X=	0,02753723	0,03156682	=TIR.X
20					
21		TIR.X(C9:C13;B9:B13)		TIR.X(D9:D13;E9:E13)	

Foglio1 Foglio2 Foglio3

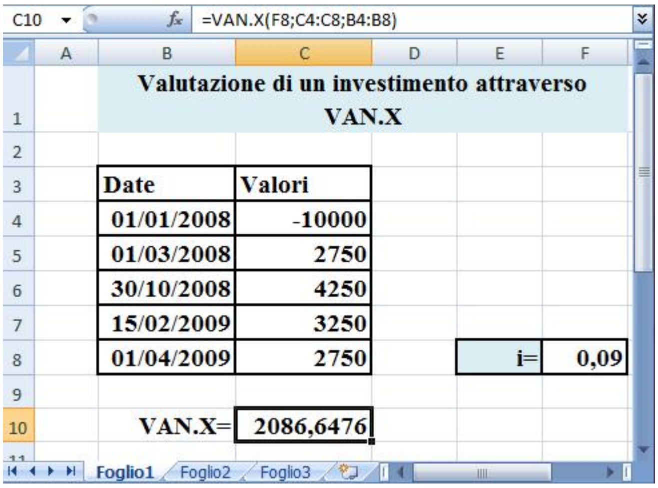
FIGURA 13. Valutazione di due obbligazioni la funzione TIR.X

tasso_int	Tasso di sconto
valori	Valori dei flussi di cassa
date_pagamento	Scadenze relative ai flussi di cassa

TABELLA 21. Argomenti della funzione VAN.X

Cella	Flusso di cassa	Cella	Valori
B4	$DATE(2008;01;01)$	C4	-10.000
B5	$DATE(2008;03;01)$	C5	2750
B6	$DATE(2008;10;30)$	C6	4250
B7	$DATE(2009;02;15)$	C7	3250
B8	$DATE(2009;04;01)$	C8	2750
F8	$0,09$	C10	VAN.X(F8;C4:C8;B4:B8)

TABELLA 22. Dati relativi all'esempio A.12.


C10 =VAN.X(F8;C4:C8;B4:B8)

	A	B	C	D	E	F
1		Valutazione di un investimento attraverso VAN.X				
2						
3		Date	Valori			
4		01/01/2008	-10000			
5		01/03/2008	2750			
6		30/10/2008	4250			
7		15/02/2009	3250			
8		01/04/2009	2750		i=	0,09
9						
10		VAN.X=	2086,6476			

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 14. Valutazione di un investimento tramite la funzione VAN.X

8. Criterio TRM

Consideriamo un progetto finanziario che prevede un flusso di cassa

$$S_0, S_1, \dots, S_n$$

che si verificano alle scadenze temporali $0, 1, \dots, n$. Ipotizziamo una situazione in cui i flussi di casssa $(S_k)_{k=1,n}$, confluiscono su di un conto corrente bancario. Indicando con S la disponibiltà iniziale nel conto corrente, abbiamo che il saldo iniziale all'epoca 0, sarà uguale a :

$$M_0 = S + S_0$$

Nell'ipotesi che sia applicato un tasso di interesse i se il saldo ad una determinata scadenza è positivo ed un tasso j, con $j > i$, se il saldo è negativo, possiamo calcolare il saldo ad una generica scadenza k, come aggiornamento del saldo precedente, ossia $k-1$. L'operazione consiste nel contabilizzare l'importo S_k previsto alla scadenza k, e contabilizzare gli interessi che il saldo precedente ha maturato. Gli interessi sono calcolati al tasso i, o al tasso j, a seconda del segno del saldo precedente. Il saldo all'epoca k, viene calcolato nel seguente modo:

$$M_k \begin{cases} M_{k-1}(1+i) + S_k & se M_{k-1} > 0 \\ M_{k-1}(1+j) + S_k & se M_{k-1} < 0 \end{cases}$$

Si sceglie il progetto con il maggior saldo finale.

8.1. Funzione 'Se'. Per risolvere i problemi di scelta di progetti finanziari con il criterio TRM, si usa la funzione di Excel SE, la cui sintassi è:

$$\textbf{SE}(\textbf{test}; \textbf{se}_\textbf{v}\textbf{ero}; \textbf{se}_\textbf{f}\textbf{also}) \tag{A.14}$$

Gli argomenti della funzione hanno il seguente significato:

test	Valore o espressione che può dare come risultato vero o falso
se_vero	È il valore che vienerestituito se *test* è vero
se_falso	È il valore che viene restituito se *test* falso

TABELLA 23. Argomenti della funzione SE

ESEMPIO 8.1. Valutare la convenienza dei progetti A e B: Per la valuta-

Epoca(anni)	0	1	2	3
Progetto A	1.500,00	−300,00	−1.600,00	590
Progetto B	900,00	180,00	−600,00	−1.300,00

TABELLA 24. Flussi di cassa dei proggetti A e B

zione si impieghi il criterio T.R.M. con tassi annuali del 9% sui saldi positivi

Epoca(anni)	4	5	6
Progetto A	$1.900,00$	$200,00$	$1.900,00$
Progetto B	$-60,00$	$1100,00$	$700,00$

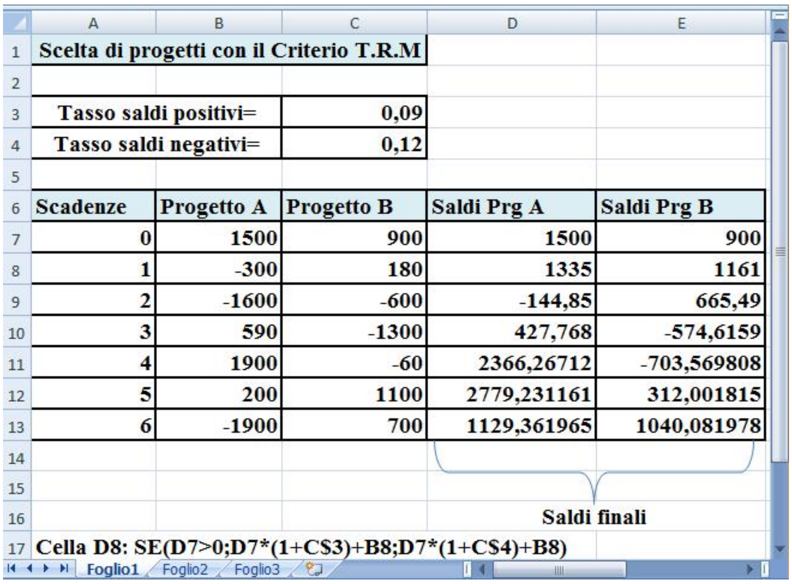
TABELLA 25. Flussi di cassa dei proggetti A e B

e del 12% sui saldi negativi. Per entrambi i progetti la disponibilità iniziale è nulla $(S = 0)$.
In un foglio di lavoro Excel, si procede come segue:[3]

[3]La sigla prg sta per progetto.

Cella $C3$	Tasso di investimento relativo ai saldi positivi
Cella $C4$	Tasso di finanziamento, relativo ai saldi negativi
Colonna $B7-B13$	Importi realtivi ai flussi di cassa del prg A
Colonna $C7-C13$	Importi relativi ai flussi di cassa del prg B
Cella $D7$	$=B7$
Cella $D8$	$SE(D7>0;D7*(1+C\$3)+B8;D7*(1+C\$4)+B8$
Colonna $D9-D13$	copiare per trascinamento la formula in $D8$
Cella $E7$	$=C7$
Cella $E8$	$SE(E7>0;E7*(1+C\$3)+C8;E7*(1+C\$4)+C8$
Colonna $E9-E13$	copiare per trascinamento la formula in $E8$

TABELLA 26. Inserimento dati per calcolare il saldo finale



	A	B	C	D	E
1	Scelta di progetti con il Criterio T.R.M				
2					
3	Tasso saldi positivi=		0,09		
4	Tasso saldi negativi=		0,12		
5					
6	Scadenze	Progetto A	Progetto B	Saldi Prg A	Saldi Prg B
7	0	1500	900	1500	900
8	1	-300	180	1335	1161
9	2	-1600	-600	-144,85	665,49
10	3	590	-1300	427,768	-574,6159
11	4	1900	-60	2366,26712	-703,569808
12	5	200	1100	2779,231161	312,001815
13	6	-1900	700	1129,361965	1040,081978
14					
15					
16				Saldi finali	
17	Cella D8: SE(D7>0;D7*(1+C$3)+B8;D7*(1+C$4)+B8)				

Foglio1 Foglio2 Foglio3

FIGURA 15. Uso della funzione SE per il criterio TRM

I valori dei saldi relativi ai due progetti si leggono nelle celle da $D7$ a $D13$ per il progetto A e nelle celle da $E7$ a $E13$ per il progetto B. Poiché A è caratterizzato da un saldo finale maggiore di B, esso verrÃă valutato come il progetto più conveniente.

9. Il comando RISOLUTORE

Il comando 'Risolutore' è uno strumento messo a disposizione da EXCEL per poter rislolvere delle equazioni o delle disequazioni. Esso si trova nel menù nell'opzione 'dati', Se esso non è presente nel menù strumenti, basta andare a 'componenti aggiuntivi', accedendovi dal simbolo microsoft posto sul foglio elettronico, e installare il componente 'Strumento Risolutore'.

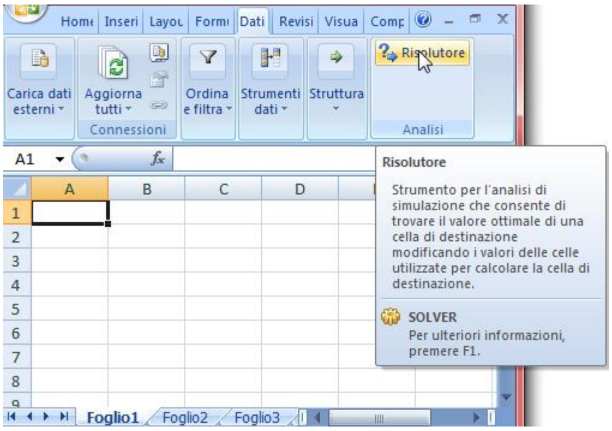


FIGURA 16. Comando Risolutore

Per illustrare l'uso del risolutore supponiamo di voler risolvere la seguente equazione:

$$\ln(x) = 3 - x \tag{A.15}$$

Per questa equazone trascendente la soluzione non può essere trovata per via analitica. Occorre trovare la soluzione per mezzo di approssimazioni. Per comprendere il problema consideriamo il grafico della funzione.

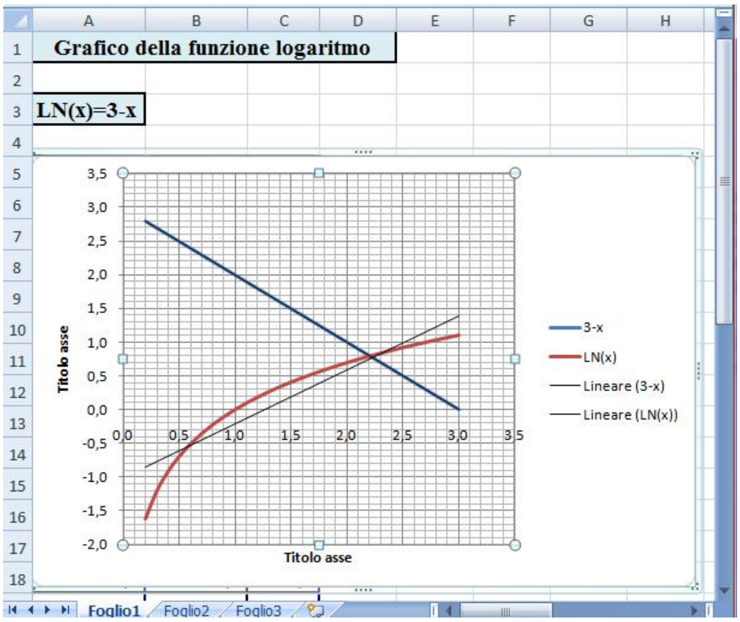
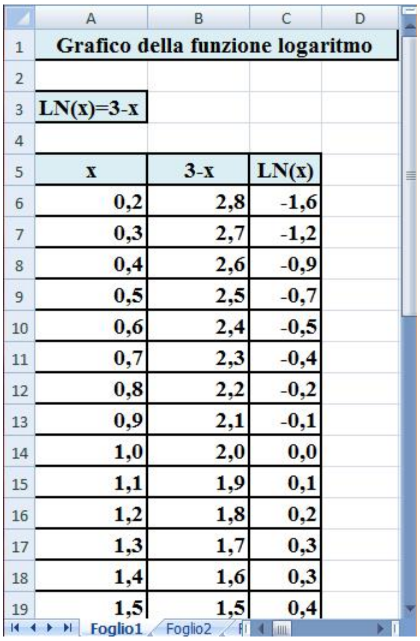


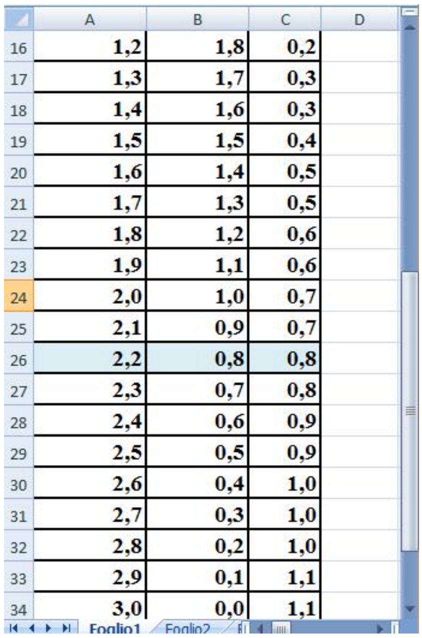
FIGURA 17. Grafico Ln(x) = 3-x

La soluzione dell'equazione sarà data dall'intersezione:

$$\begin{cases} y = \ln(x) \\ y = 3 - x \end{cases}$$



	A	B	C	D
1	Grafico della funzione logaritmo			
2				
3	LN(x)=3-x			
4				
5	x	3-x	LN(x)	
6	0,2	2,8	-1,6	
7	0,3	2,7	-1,2	
8	0,4	2,6	-0,9	
9	0,5	2,5	-0,7	
10	0,6	2,4	-0,5	
11	0,7	2,3	-0,4	
12	0,8	2,2	-0,2	
13	0,9	2,1	-0,1	
14	1,0	2,0	0,0	
15	1,1	1,9	0,1	
16	1,2	1,8	0,2	
17	1,3	1,7	0,3	
18	1,4	1,6	0,3	
19	1,5	1,5	0,4	



	A	B	C	D
16	1,2	1,8	0,2	
17	1,3	1,7	0,3	
18	1,4	1,6	0,3	
19	1,5	1,5	0,4	
20	1,6	1,4	0,5	
21	1,7	1,3	0,5	
22	1,8	1,2	0,6	
23	1,9	1,1	0,6	
24	2,0	1,0	0,7	
25	2,1	0,9	0,7	
26	2,2	0,8	0,8	
27	2,3	0,7	0,8	
28	2,4	0,6	0,9	
29	2,5	0,5	0,9	
30	2,6	0,4	1,0	
31	2,7	0,3	1,0	
32	2,8	0,2	1,0	
33	2,9	0,1	1,1	
34	3,0	0,0	1,1	

FIGURA 18. Comando Risolutore

Dal grafico vediamo che la soluzione è all'incirca:

$$x = 2,2$$

Per trovare una soluzione approssimata dell'equazione, operiamo come segue:

(1) isoliamo la parte con la incognita x al primo menmbro, ovvero riscriviamo l'equazione come:
$$\ln(x) + x = 3$$
(2) Fissiamo un valore iniziale della x, ad esempio $x = 2,2$, in una cella e calcoliamo il valore di:
$$\ln(x) + x$$
(3) Richiamiamo lo strumento risolutore dal menù 'dati'

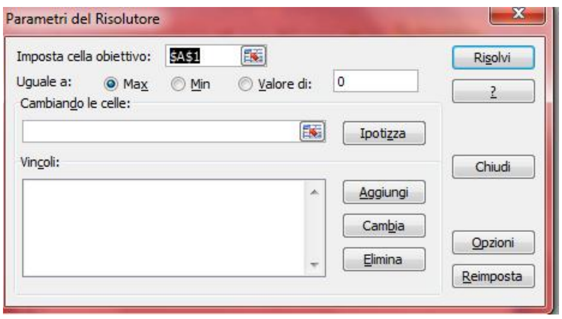


FIGURA 19. Finestra del comando Risolutore

(4) Gli argomenti di questa finestra hanno il seguente significato:

Imposta cella obiettivo:	Si indica la cella che contiene il valore ipotetico del nostro obiettivo
Uguale a:	Si inserisce il valore a cui deve eguagliare l'equazione
Cambiando le celle	Va inserita la cella che contiene il valore di partenza assegnato alla x

TABELLA 27. Argomenti del comando Risolutore

Cliccando sul pulsante *risolvi*, il risolutore per mezzo di opportuni algoritmi iterativi, cerca il valore di x che rendono il valore di

$$\ln(x) + x$$

uguale a 3.

FIGURA 20. Finestra del comando Risolutore: inserimento dati

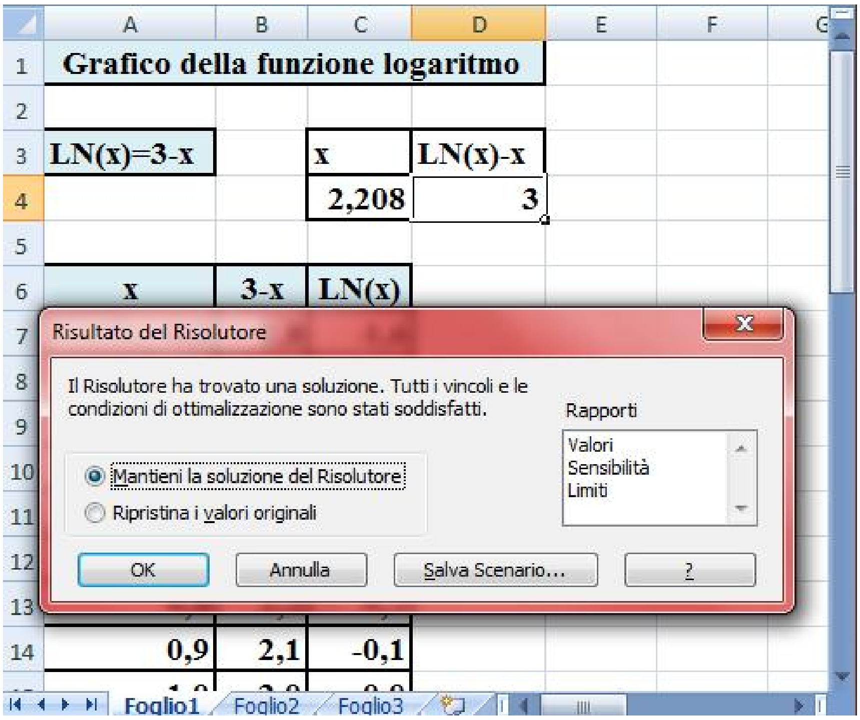


FIGURA 21. Finestra del comando Risolutore: inserimento dati

APPENDICE B

Sintesi delle principali formule di Matematica Finanziaria

- Regime finanziario dell'Interesse Semplice o Capitalizzazione Semplice

$\mathbf{I = C \cdot i \cdot t}$	Calcolo dell'Interesse semplice prodotto da un capitale C, investito al tasso i per un tempo t.
$\mathbf{M = C \cdot (1 + i \cdot t)}$	Calcolo del Montante prodotto da un capitale C, investito al tasso i, per un tempo t.
$\mathbf{C = \frac{M}{(1+i \cdot t)}}$	Calcolo del Valore attuale C,di un capitale che al tempo t, e al tasso i, ha un valore nominale M.
$\mathbf{I = S_r = \frac{M \cdot i \cdot t}{(1+i \cdot t)}}$	Calcolo dello Sconto Semplice o Razionale applicato ad un capitale M al tasso $i$per un tempo t.

TABELLA 1. Capitalizzazione semplice

- Regime finanziario dell'Interesse Composto o Capitalizzazione Composta

$\mathbf{M = C \cdot (1 + i)^t}$	Calcolo del Montante prodotto da un capitale C, investito al tasso i, per t anni.
$\mathbf{C = \frac{M}{(1+i)^t}}$	Calcolo del Valore attuale C, di un capitale che dopo t anni, e al tasso i, ha un valore nominale M.
$\mathbf{I = M - C}$	Calcolo dell'Interesse/ Sconto Commerciale.
$\mathbf{n = \frac{\ln(M/C)}{\ln(1 + i)}}$	Calcolo dl numero di anni che occorre investire un capitale C per avere alla fine il montante M al tasso di interesse i.
$\mathbf{i_k = (1 + i)^{1/k} - 1}$	Conversione dal tasso annuo i, al tasso frazionato i_k
$\mathbf{i = (1 + i)^k - 1}$	Conversione dal tasso frazionato i_k, al tasso annuo i
$\mathbf{j_k = k \cdot i_k}$	Calcolo del tasso annuo nominale convertibile
$\mathbf{i_k = \frac{j_k}{k}}$	Calcolo del tasso frazionato noto quello annuo convertibile

TABELLA 2. Capitalizzazione composta

- Regime finanziario dello Sconto Commerciale

$\mathbf{S_c = M \cdot d \cdot t}$	Calcolo dello sconto commerciale applicato ad un capitale$M$ al tasso d, per un tempo t
$\mathbf{C = M \cdot (1 - d \cdot t)}$ $\mathbf{M = \frac{C}{(1-dt)}}$	Calcolo del Valore Attuale C di un capitale che al tempo t ha un valore nominale M Calcolo del Valore Nominale di un capitale C, investito al tasso d per un tempo t

TABELLA 3. Sconto commerciale

- Rendite

$\mathbf{M = R \cdot s_{\overline{n}\rceil i} = R\frac{(1+i)^n-1}{i}}$	Montante di una rendita posticipata di n rate di importo R all'atto del versamento dell'ultima rata.
$\mathbf{R = \frac{M}{s_{\overline{n}\rceil i}}}$	Rata di una rendita posticipata di n rate quando se ne conosce il montante al momento del versamento dell'ultima rata.
$\mathbf{V = Ra_{\overline{n}\rceil i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$	Valore Attuale di una rendita posticipata di n rate un periodo prima della scadenza della prima rata.
$\mathbf{R = \frac{V}{a_{\overline{n}\rceil i}}}$	Rata di una rendita posticipata di n rate quando se ne conosce il valore attuale un periodo prima della scadenza della prima rata.
$\mathbf{M = R \cdot s_{\overline{n}\rceil i}(1 + i)}$	Montante di una rendita anticipata di n rate importo R un periodo dopo il versamento dell'ultima rata.
$\mathbf{V = Ra_{\overline{n}\rceil i}}$	Valore attuale di una rendita anticipata di n rate all'atto della scadenza della prima rata
$\mathbf{M = R \cdot s_{\overline{nk}\rceil i_k}}$	Montante di una rendita frazionata posticipata di kn rate di importo R all'atto del versamento dell'ultima rata.
$\mathbf{V = Ra_{\overline{nk}\rceil i_k}}$	Valore Attuale di una rendita posticipata di kn rate un periodo prima della scadenza della prima rata.

TABELLA 4. Rendite posticipate e rendite anticipate

Bibliografia.

[1] Daniele Ritelli, Matematica per la gestione aziendale,Euscalapio, Edizione 2009;
[2] Paolo Bortot, Daniela Favaretto, Stefania Funari
Appunti di EXCEL per apllicazioni matematiche, Franco Angeli, Edizione2009;
[3] Storia della matematica finanziaria, consultata il 02/2010:
`http://it.wikipedia.org/wiki/Storia_della_matematica_finanziaria`;
[4] Criterio di Confronto;
Dipartimento di Matematica Applicata e SSAV
Università Ca' Foscari di Venezia, consultato il 01/2010:
`http://www.dma.unive.it/Matematica1e2/criteridiconfronto.pdf`;
[5] R.L. D'Ecclesia, Matematica per la Finanza,
Sapienza, Univerità di Roma, consultato il 01/2010:
`http://w3.uniroma1.it/decclesia/lucidimodulo4-2008.pdf`;
[6] ostantino Fabbrizi, La Matematica Finanziaria
Corso di Storia della Matematica, Anno Accademico 2003 – 2004:
Univerità degli studi di Palermo;
`http://math.unipa.it/~grim/storia_fabrizi_04.pdf`;
[7] Sandro Gronchi – Marco Lonzi, Sulla concordanza di alcuni contributi
in tema di Tasso interno di Rendimento,
Istituto di Matematica, Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie,
Universitàdegli Studi Siena, consultato il 01/2010:
`http://www.economia.unisi.it/lonzi/QMPS1.pdf`;
[8] M. Lonzi: Significatività economica del TIR
mediante il Valore Attuale di un progetto e dei suoi sottoprogetti,
Istituto di Matematica, Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie,
Universitàdegli Studi Siena,5/06/1985:
`http://www.economia.unisi.it/lonzi/QMPS2.pdf`;
[9] M. Lonzi, Monografia sui progetti di C.S.Soper;
Istituto di Matematica, Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie,
Universitàdegli Studi Siena,consultato il 01/2010:
`http://www.economia.unisi.it/lonzi/Q39amas.pdf`;
[10] Fabio Perugino Dispensa di Matematica Finanziaria, Capitolo2,29/11/2006:
Facoltà di Economia Universitàdegli Studi di Torino:
`http://forum.econ.unito.it/matfinx/1164808529/DISP2_RENDITE.pdf`
[11] Maurizio Parton, Matematica Finanziaria, consultato il 12/2009:
`http://www.sci.unich.it/~parton/dida/2004-2005/Matematica\`
`%20Finanziaria/esercizi_svolti_4.pdf`;
[12] Adele Colli Franzone,Università degli studi di Pavia
Facoltà di Economia, consultato il 11/2009:
`http://economia.unipv.it/ric-az/temi_esame/t_e_matfin_lz/`
`$141107$ts.pdf`;
[13] Adele Colli Franzone,Università degli studi di Pavia
Facoltà di Economia, consultato il 11/2009:
`http://economia.unipv.it/ric-az/temi_esame/t_e_matfin_lz/`
`$170209s$.pdf`;
[14] Adele Colli Franzone,Università degli studi di Pavia
Facoltà di Economia, consultato il 01/2010:
`http://economia.unipv.it/ric-az/temi_esame/t_e_matfinak/040419at.`
`pdf`;
[15] Adele Colli Franzone,Università degli studi di Pavia
Facoltà di Economia, consultato il 01/2010:

http://economia.unipv.it/ric-az/temi_esame/t_e_matfinak/040906mf.pdf;

[16] Rodolfo Vanzini, Modelli finanziari su Excel:
Appunti per il corso in Master in Corporate Finance & Investment Banking, 9/04/2008:
http://www.rodolfovanzini.com/file/ExcelAvan.pdf;

[17] Daniele Montanino, Dispense di Excel,
Università degli studi di Lecce,data di consultazione:12/2009:
http://www.le.infn.it/~montanin/dispense_lab/Dispense_di_EXCEL.pdf;

[18] Stefania Funari,Applicazioni con Excel alle decisioni finanziarie,
Dipartimento di Matematica Applicata e SSAV
Università Ca' Foscari di Venezia,a.a 2001 – 2002:
http://www.dma.unive.it/quaderni/rapp08-2002.pdf,

[19] Davide Manca, HOW TO 01: Risolvere un'equazione in un'incognita con Excel,
Politecnico di Milano, consultato il 01/2010:
http://www.chem.polimi.it/homes/dmanca/PDPEADC/HTExcel.pdf;

[20] Antonella Basso, Riccardo Gusso, Pierangelo Ciurla
Esercizi di Matematica Finanziaria su foglio elettronico excel,
Dipartimento di Matematica Applicata e SSAV
Università Ca' Foscari di Venezia,maggio2006:
http://www.dma.unive.it/quaderni/rapp19-2006.pdf;

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure