

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
-Sede di Forlì-

CORSO DI LAUREA
IN INGEGNERIA MECCANICA
Classe: L-9

ELABORATO FINALE DI LAUREA
In
DISEGNO TECNICO ASSISTITO DAL CALCOLATORE

Studio ed ottimizzazione di un CVT per bicicletta elettrica

CANDIDATO
Andrea Nicolini

RELATORE
Prof. Luca Piancastelli

Anno Accademico 2013/2014
Sessione III

Indice

Capitolo 1

1.1	Introduzione alle ruote dentate.....	1
1.2	Generalità.....	1
1.2.1	Profilo dei denti.....	1
1.3	Nomenclatura.....	4
1.4	Rapporto di trasmissione.....	5
1.5	Continuità dell'ingranamento e interferenza.....	6
1.5.1	Ruote a dentatura esterna.....	6
1.5.2	Ruote a dentatura interna.....	12
1.6	Forze.....	13
1.7	Perdite e rendimento.....	14
1.8	Fabbricazione.....	17
1.8.1	Taglio per fresatura.....	17
1.8.2	Taglio per involuppo.....	19
1.9	Avarie.....	20
1.9.1	Rottura per flessione.....	20
1.9.2	Pitting.....	21
1.9.3	Scuffing.....	22
1.9.4	Usura.....	23
1.10	Rotismi.....	25
1.10.1	Rotismi ordinari.....	25
1.10.2	Rotismi epicicloidali.....	26
1.10	Teoria di Lewis.....	29

Capitolo 2

2.1 Innesti.....	37
2.2 Innesti a denti.....	37
2.3 Frizioni.....	39
2.4 Innesco di una frizione.....	41
2.4.1 Fase di accostamento.....	41
2.4.2 Fase di strisciamento.....	42
2.4.3 Fase finale.....	42

Capitolo 3

3.1 Breve storia della bicicletta.....	43
3.2 La E-Bike.....	45

Capitolo 4

4.1 Storia del cambio.....	49
4.2 Shimano XTR-Di2.....	51

Capitolo 5

5.1 Il Riduttore.....	53
5.2 Forze e coppie resistenti.....	55
5.3 Studio del rapporto di trasmissione.....	56
5.4 Dimensionamento cinematico.....	58
5.5 Calcolo della velocità.....	61
5.6 Calcolo della coppia.....	62

5.7 Scelta del secondo motore elettrico.....	64
5.8 Schema finale.....	66

Capitolo 6

Conclusioni.....	69
Bibliografia.....	71

Indice immagini

1.1 Evolvente di cerchio.....	2
1.2 Contatto negli ingranaggi cilindrici a denti dritti, ruote esterne.....	5
1.3 Relazione geometrica tra arco d'azione e segmento dei contatti.....	8
1.4 Contatto negli ingranaggi cilindrici a denti dritti, ruote interne.....	11
1.5 Esempio di rottura per flessione.....	19
1.6 Esempio di danneggiamento a pitting.....	22
1.7 Esempio di danneggiamento per scuffing.....	23
1.8 Esempio di scuffing in cui appaiono molto visibili le striature causate “dall'effetto utensile” delle microsaldature.....	24
1.9 Esempio di ruota soggetta a usura per carenza di lubrificante.....	24
1.10 Ingranaggio epicicloidale.....	27
1.11 Modello delle forze relative alla teoria di Lewis.....	28
2.1 Innesto a denti frontali.....	38
2.2 Innesto a denti radiali.....	38
2.3 Innesto a frizioni coniche.....	39
2.4 Innesto a frizione a dischi multipli.....	40
3.1 Evoluzione della bicicletta.....	43
3.2 Safety Bicycle agli inizi del 900.....	45
3.3 E-bike.....	46
3.4 Andamento e previsioni al 2016 relative al mercato delle E-bike.....	48
4.1 Cambio a bacchetta Campagnolo.....	49
4.2 Cambio Gran Sport 1012.....	50
4.3 Shimano XTR-Di2.....	51
4.4 Guarnitura a tre corone Shimano XTR-Di2.....	51
4.5 Cassetta 11 velocità Shimano XTR-Di2.....	52
4.6 Schema di cambiata eseguita dal computer elettronico.....	52
5.1 Caratteristica del motore elettrico.....	53
5.2 Schema del rotismo epicicloidale adottato.....	54

5.3 Andamento del rapporto di trasmissione in funzione di ω_3	58
5.4 Trasmissione secondaria.....	65
5.5 Schema finale.....	66
5.6 Soluzione con innesto a denti frontali.....	67

Sommario

Lo scopo di questo elaborato di tesi è quello di trattare la progettazione di un cambio continuo per una bicicletta elettrica. L'idea alla base è quella di realizzare un meccanismo in grado di fornire una variazione continua del rapporto di trasmissione.

È stato preso come punto di partenza un motore elettrico già presente in commercio e si è sviluppato un rotismo epicicloidale. Il motore controllerà la velocità di una ruota del rotismo e il porta satellite sarà il membro d'uscita.

Inoltre si è studiata una soluzione affinché il nostro veicolo possa partire in salita senza che il conducente faccia sforzi e possa pedalare anche quando il motore è spento o la batteria scarica. Come si vedrà nei prossimi capitoli il nostro sistema sarà implementato da un cambio già in commercio per le biciclette elettriche.

Per dimensionare gli organi sono state considerate le seguenti caratteristiche:

- Velocità minima di marcia;
- Velocità massima di marcia;
- Dimensione della ruota posteriore;
- Coppia e velocità del motore elettrico in condizione di massimo rendimento.

Saranno affrontate le seguenti problematiche:

- Dimensionamento cinematico e dinamico delle ruote dentate;
- Scelta del secondo motore elettrico
- Scelta del cambio necessario per affrontare le salite

- Soluzione del problema riguardante l'uso del veicolo a motore spento o batteria scarica

In corso di trattazione delle varie parti si è anche cercato di fornire al lettore una base sulle nozioni teoriche che sono state utilizzate, al fine di creare un documento che potesse essere utilizzato anche come mezzo di studio

Capitolo 1

1.1 Introduzione alle ruote dentate

In questo capitolo verranno trattate le nozioni teoriche di base relative alle ruote dentate, con particolare riferimento alle ruote a denti dritti. Si forniranno tutti gli strumenti per affrontare la progettazione, cinematica e dinamica, delle ruote dentate di un meccanismo.

1.2 Generalità

Le ruote dentate permettono di trasmettere il moto tra assi paralleli, concorrenti e sghembi mantenendo una ben definita correlazione tra la rotazione angolare dell'albero motore e quella dell'albero condotto. Nella pratica l'utilizzo delle ruote dentate per la trasmissione del moto risulta particolarmente conveniente quando:

- sono richiesti ridotti valori dell'interasse;
- è necessario mantenere costante il valore del rapporto di trasmissione;
- si devono trasmettere coppie di grande entità.

Le ruote dentate sono dei corpi solidi, strutturati in modo da poter ruotare attorno ad un asse, e sono costituite lungo la loro circonferenza da un profilo sagomato (costituito da elementi detti "denti") in modo tale da permettere loro di trascinare in moto un'altra ruota dentata.

1.2.1 Profilo dei denti

Come appena accennato il profilo dei denti di una ruota dentata deve essere realizzato in modo da assicurare la trasmissione del moto secondo la legge desiderata. La quasi

totalità delle ruote dentate viene ormai realizzata con profilo dei denti ad evolvente di cerchio, profilo che fu proposto per la prima volta nel 1695 dal francese Philippe Lahaire.

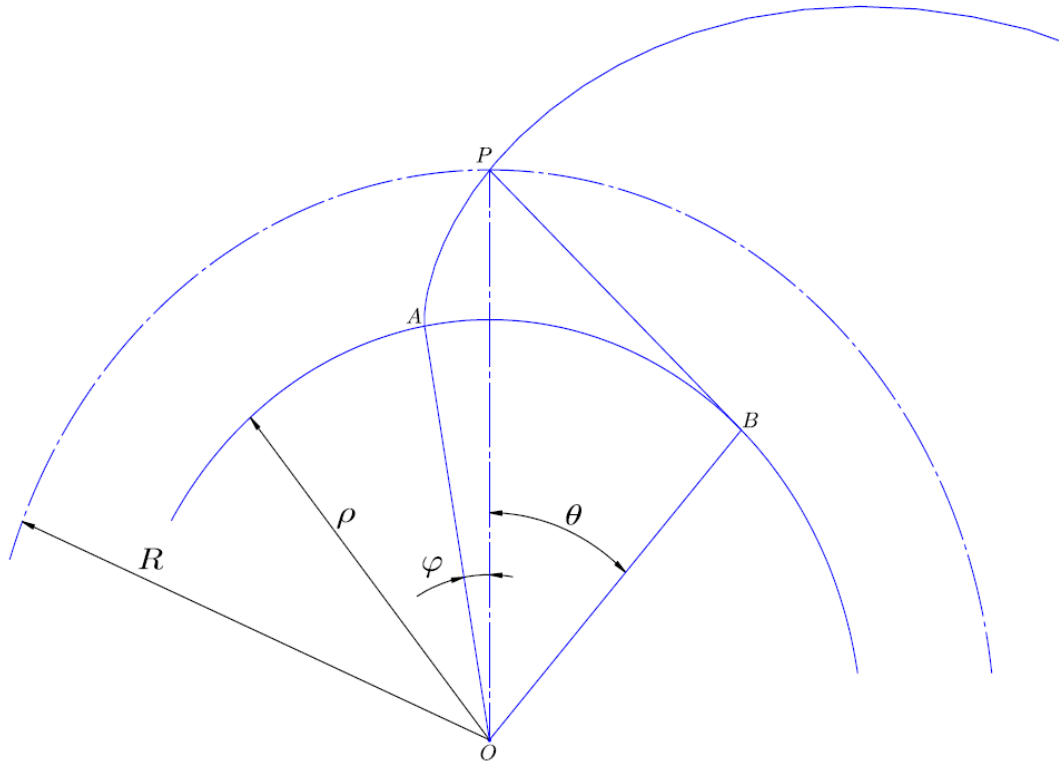


Figura 1.1: Evolvente di cerchio

Uno dei motivi che ha favorito la larga diffusione del profilo ad evolvente risiede nella grande semplicità di lavorazione de dente stesso rispetto alle altre tipologie di profili altri tipi di profili possono essere quelli cicloidali e quelli ad arco di cerchio, le cui applicazioni risultano sempre più limitate.

Definizione 1.1.1 (di evolvente). Si definisce *evolvente di una circonferenza* la curva piana descritta da un punto di una retta (detta generatrice), tangente ad una circonferenza (detta base), quando questa rotola senza strisciare sulla stessa.

La definizione analitica di evolvente di una circonferenza può essere fatta assumendo un sistema di coordinate polari avente come origine il centro della circonferenza di base e un asse passante per il punto d'origine dell'evolvente, ossia per il punto dell'evolvente appartenente alla circonferenza di base. Facendo quindi riferimento alla figura 1.1

possiamo quindi esprimere l'equazione parametrica dell'evolvente ricavando le coordinate di un generico punto P, ad essa appartenente, rispetto al sistema di riferimento appena adottato.

Dalla definizione 1.1.1 è immediato ricavare che la normale all'evolvente nel punto P sarà tangente alla circonferenza di base (nel punto B), vale perciò:

$$\rho = R \cos(\vartheta),$$

da cui segue immediatamente:

$$R = \frac{\rho}{\cos(\vartheta)} = \overline{OP}.$$

L'angolo φ , vale invece:

$$\varphi = A\hat{O}B - \vartheta,$$

e poiché

$$\tan(\vartheta) = \frac{\overline{PB}}{\overline{OB}} = \frac{\widehat{AB}}{\rho} = \frac{\rho A\hat{O}B}{\rho} = A\hat{O}B,$$

vale la relazione

$$\varphi = A\hat{O}B - \vartheta. \tag{1}$$

Le coordinate polari del punto P generico, che come già detto, identificano l'equazione parametrica in coordinate polari dell'evolvente di una circonferenza di raggio ρ , sono;

$$\varphi = ev(\vartheta), \quad R = \frac{\rho}{\cos(\vartheta)}.$$

È possibile ricavare l'espressione di tale equazione in coordinate cartesiane:

$$x = \rho(\cos(t) + t \sin(t)), \quad y = \rho(\sin(t) - t \cos(t)).$$

¹ In letteratura è possibile incontrare anche la notazione *inv*(ϑ) la quale risulta storicamente antecedente. A seguito dell'unificazione tedesca (DIN 3960 del 1987) è stata introdotta la notazione *ev*(ϑ), che corrisponde alla traduzione italiana e tedesca della parola *involute*. In questo scritto si ritiene opportuno adottare la nuova notazione, perché più conforme alla lingua italiana.

1.3 Nomenclatura

In questo paragrafo sono riportati alcuni dei concetti principali della nomenclatura delle ruote dentate. Per ogni nozione riportata di seguito si è fatto riferimento alla norma UNI 8862, *Parte 1^a*.

Simbolo	Denominazione	Unità di misura
z	Numero di denti	
	Modulo normale di riferimento	mm
d	Diametro primitivo di riferimento $d = zm_n$	mm
ϑ	Angolo di pressione normale di riferimento $\vartheta = 20^\circ$ ⁽²⁾	°
h_a	Addendum $h_a = m_n$ ⁽³⁾	mm
h_d	Dedendum $h_d = 1.25 m_n$ ⁽⁴⁾	mm
h	altezza dente $h = h_a + h_d$	mm
b	larghezza di fascia	mm
d_a	diametro di testa	mm
d_b	diametro di base $d_b = 2r_b = 2r \cos(\vartheta)$	mm
ρ_f	raggio di raccordo sul fondo dente $\rho_f = 0.37 m_n$ ⁽⁵⁾	mm
τ	rapporto di trasmissione	
i	rapporto di condotta	
l	pedice relativo al pignone	

² Per il valore dell'*angolo di pressione* si fa riferimento alla norma UNI 6587.

³ Per il valore dell'*addendum* si fa riferimento alla norma UNI 6587.

⁴ Per il valore del *dedendum* si fa riferimento alla norma UNI 6587.

⁵ Per il valore del *raggio di raccordo* si fa riferimento alla norma UNI 6587.

1.4 Rapporto di trasmissione

Il rapporto di trasmissione è un coefficiente utilizzato per caratterizzare le modalità con cui viene trasmesso il moto da una ruota dentata ad un'altra in un ingranaggio. Viene definito come:

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

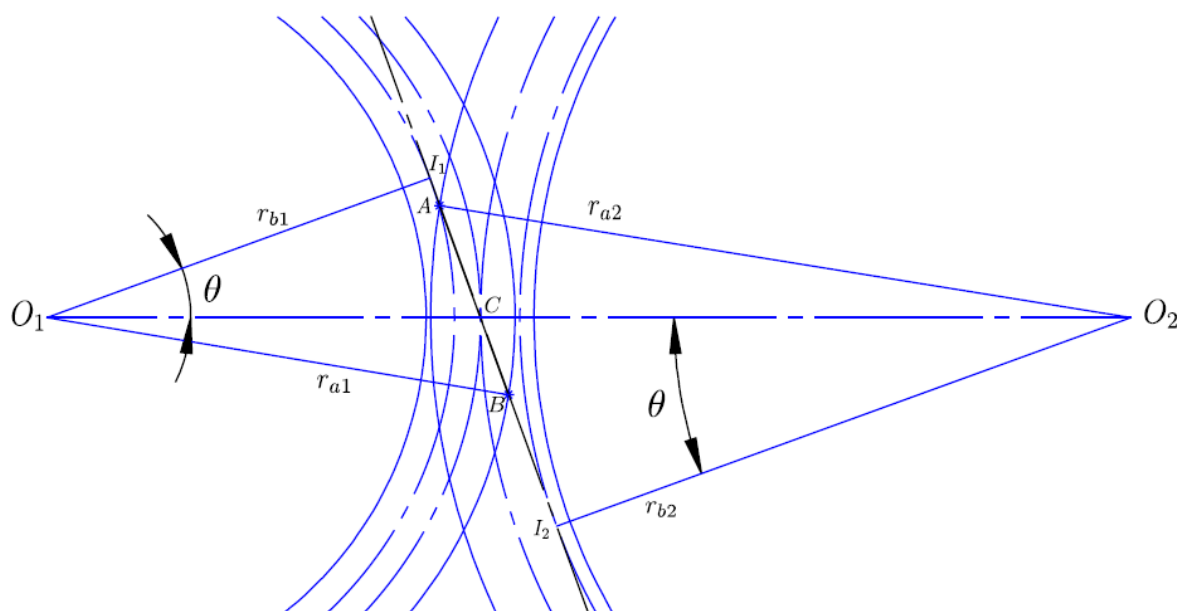


Figura 1.2: Contatto negli ingranaggi cilindrici a denti dritti, ruote esterne.

A seconda del valore del rapporto di trasmissione un ingranaggio può essere definito come:

Riduttore: $|\tau| < 1$, la velocità della ruota condotta è minore di quella del pignone.

Moltiplicatore: $|\tau| > 1$, la velocità del pignone è minore di quella della ruota condotta.

Per quanto riguarda la trasmissione della coppia, rapporti di trasmissione minori dell'unità garantiscono una coppia maggiore nella ruota condotta rispetto a quella del pignone, invece con rapporti maggiori dell'unità vale il contrario.

1.5 Continuità dell'ingranamento e interferenza

1.5.1 Ruote a dentatura esterna

Negli ingranaggi cilindrici a denti dritti il contatto tra i denti delle ruote dentate avviene in modo simultaneo lungo una retta, che prende il nome di *retta dei contatti*. Si consideri ora una sezione generica di accoppiamento (fig. 1.2), il punto A di inizio contatto è individuato dall'intersezione della circonferenza di base del pignone con la circonferenza di testa della ruota condotta, il punto B invece è individuato come intersezione della circonferenza di testa del pignone con la retta dei contatti (delle due intersezioni geometricamente impossibili, B è ovviamente quella dove può esserci contatto tra i denti delle due ruote). Il segmento \overline{AB} prende il nome di *segmento dei contatti* e può essere espresso in funzione delle grandezze geometriche delle due ruote, infatti:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = (\overline{AI_2} - \overline{CI_2}) + (\overline{BI_1} - \overline{CI_1}),$$

dove le grandezze $\overline{AI_2}$ e $\overline{BI_1}$ valgono rispettivamente:

$$\overline{AI_2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}, \quad (1.1)$$

$$\overline{BI_1} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}. \quad (1.2)$$

Se ora introduciamo la relazione $r_{a1} = r_1 + h_{a1}$, $r_{a2} = r_2 + h_{a2}$, $r_{b1} = r_1 \cos(\theta)$ e $r_{b2} = r_2 \cos(\theta)$; sarà possibile scrivere le equazioni (1.1) e (1.2) come:

$$\overline{AI_2} = r_2 \sqrt{\left(1 + \frac{h_{a2}}{r_2}\right)^2 - \cos^2(\theta)},$$

$$\overline{BI_1} = r_1 \sqrt{\left(1 + \frac{h_{a1}}{r_1}\right)^2 - \cos^2(\theta)}.$$

Inoltre risulta:

$$\overline{CI_2} = r_2 \sin(\theta), \quad \overline{CI_1} = r_1 \sin(\theta).$$

Possiamo quindi riscrivere la relazione del segmento dei contatti nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \overline{AB} = r_2 \left[\sqrt{\left(1 + \frac{h_{a2}}{r_1}\right)^2 - \cos^2(\theta)} - \sin(\theta) \right] \\ - r_1 \left[\sqrt{\left(1 + \frac{h_{a1}}{r_1}\right)^2 - \cos^2(\theta)} - \sin(\theta) \right] \end{aligned}$$

che nel caso di ruote realizzate con proporzionamento modulare ($h_{a1} = h_{a2} = m_n$ e $m_{n1} = m_{n2} = m_n$ con $m_n = \frac{r_z}{2}$) diventa:

$$\begin{aligned} \overline{AB} = \frac{m_n}{2} \left[z_1 \sqrt{\left(1 + \frac{2}{z_1}\right)^2 - \cos^2(\theta)} \right] + \\ \frac{m_n}{2} \left[z_2 \sqrt{\left(1 + \frac{2}{z_2}\right)^2 - \cos^2(\theta)} - (z_1 + z_2) \sin(\theta) \right]. \end{aligned}$$

Considerando adesso la figura 1.3, in cui è messo in evidenza il profilo di un generico dente del pignone, rispettivamente nella posizione corrispondente

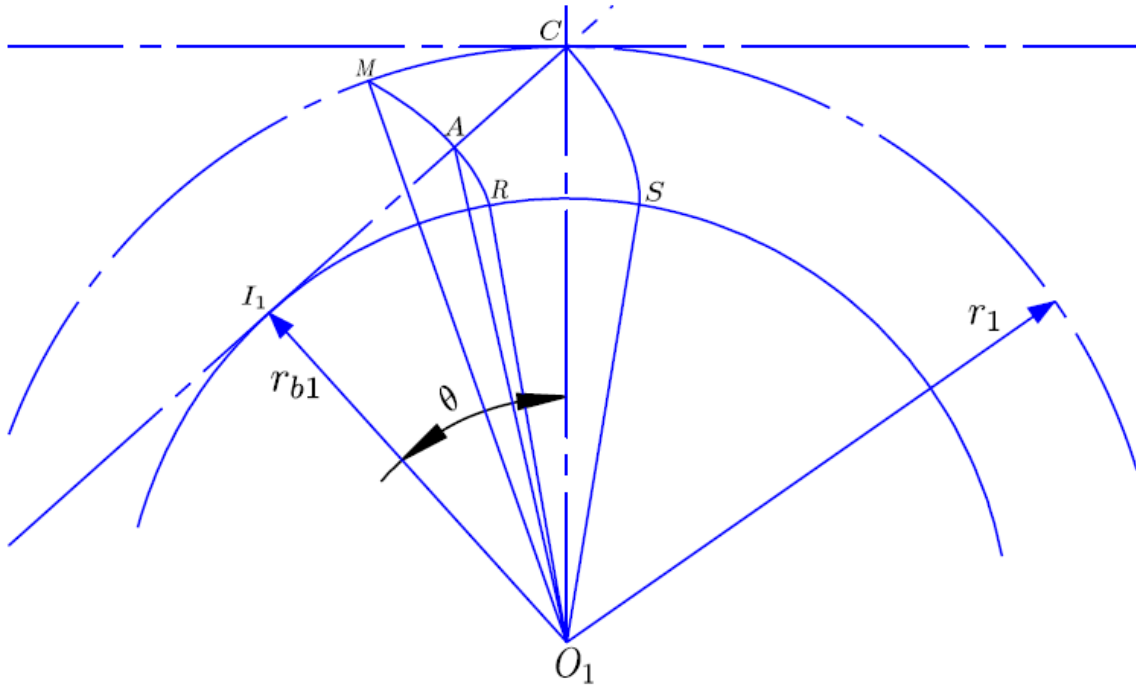


Figura 1.3: Relazione geometrica tra arco d'azione e segmento dei contatti

all'inizio dell'ingranamento (punto A) e in quella in cui il contatto avviene in corrispondenza del punto C. Si può osservare che nel passaggio dalla prima alla seconda configurazione tutti i punti del dente hanno ruotato dello stesso angolo, perciò si ha:

$$M\widehat{O}_1C = R\widehat{O}_1S,$$

e per tanto tra gli archi \widehat{MC} e \widehat{RS} esisterà la seguente relazione:

$$\widehat{MC} = \widehat{RS} \frac{r_1}{r_{b1}} = \frac{\widehat{RS}}{\cos(\theta)} \quad (1.3)$$

Contemporaneamente per le proprietà dell'evolvente possiamo scrivere $\overline{AC} = \widehat{RS}$ per cui la relazione (1.3) diventa:

$$\widehat{MC} = \frac{\overline{AC}}{\cos(\theta)},$$

dove \widehat{MC} rappresenta l'arco d'azione in accesso. Con lo stesso procedimento è poi possibile ricavare l'arco d'azione in recesso, risulterà quindi che la lunghezza totale dell'arco d'azione vale:

$$e = \frac{\overline{AB}}{\cos(\theta)} \quad (1.4)$$

Dalla relazione (1.4) è possibile ricavare il numero di denti contemporaneamente in presa:

$$z_p = \frac{e}{p_n} = \frac{\overline{AB}}{p_n \cos(\theta)} = \frac{\overline{AB}}{p_b},$$

con p_b , passo misurato sulla circonferenza di base.

Per garantire un corretto ingranamento è necessario che il contatto avvenga unicamente lungo il profilo dei denti. Può verificarsi che la geometria di un ingranaggio sia tale da avere uno o entrambi i punti A e B esternamente al segmento $\overline{I_1 I_2}$, quando questo accade si verificano fenomeni d'interferenza. Per evitare quindi il manifestarsi di queste eventualità occorre che l'addendum assuma valori tali da ottenere che il segmento dei contatti sia completamente contenuto all'interno degli estremi I1 e I2.

Si consideri la configurazione $A \equiv I_1$ (condizione al limite dell'interferenza) in modo da poter determinare il valore dell'addendum corrispondente. Applichiamo quindi il teorema di Carnot al triangolo $\widehat{O_1 O_2 I_1}$ che coincide nel nostro particolare caso con il triangolo $\widehat{O_1 O_2 A}$, si ottiene la relazione:

$$\overline{O_2 A}^2 = (\overline{O_2 I_1})_{lim}^2 = \overline{O_1 O_2}^2 + \overline{O_1 I_1}^2 - 2\overline{O_1 I_1} \overline{O_1 O_2} \cos(\theta) \quad (1.5)$$

Valgono inoltre:

$$O_1 C = r_1 = \frac{m_n z_1}{2}, \quad (1.6)$$

$$O_2 C = r_2 = \frac{m_n z_2}{2}, \quad (1.7)$$

$$O_1 I_1 = r_{b1} = \frac{m_n z_1}{2} \cos(\theta), \quad (1.8)$$

$$\tau = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad (1.9)$$

$$O_2 I_1 = r_2 + h_{a2} = \frac{m_n z_2}{2} + h_{a2} \text{ (caso generale)}. \quad (1.10)$$

Sostituendo le equazioni dalla (1.6) alla (1.9) all'interno della (1.5) si ottiene:

$$(\overline{O_2 I_1})_{lim}^2 = \left(\frac{m_n z_1}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{\tau^2} + \left(1 + \frac{2}{\tau}\right) \sin^2(\theta)\right]. \quad (1.11)$$

Per non generare interferenza dovrà perciò valere $O_2 I_1 \leq (\overline{O_2 I_1})_{lim}$, da cui è possibile, usando le relazioni (1.10) e (1.11), ottenere il seguente risultato:

$$\frac{h_{a2}}{m_n} \leq \frac{z_1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \left(1 + \frac{2}{\tau}\right) \sin^2(\theta)} - \frac{1}{\tau} \right] \quad (1.12)$$

Nella pratica è di uso comune progettare le ruote dentate facendo riferimento alle normative, in cui l'addendum è espresso in funzione del modulo ($h_{a1} = h_{a2} = k m_n$). Perciò per evitare interferenze, la ruota di diametro minore deve avere un numero di denti sempre inferiore a z_{min} . La relazione del numero minimo di denti può essere ricavata dalla (1.12) inserendo la condizione appena citata, si ottiene:

$$\begin{aligned} z_{min} &= \frac{2k}{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \left(1 + \frac{2}{\tau}\right) \sin^2(\theta)} - \frac{1}{\tau}} \\ &= 2k \frac{1 + \sqrt{1 + (2\tau + \tau^2) \sin^2(\theta)}}{(2 + \tau) \sin^2(\theta)} \end{aligned}$$

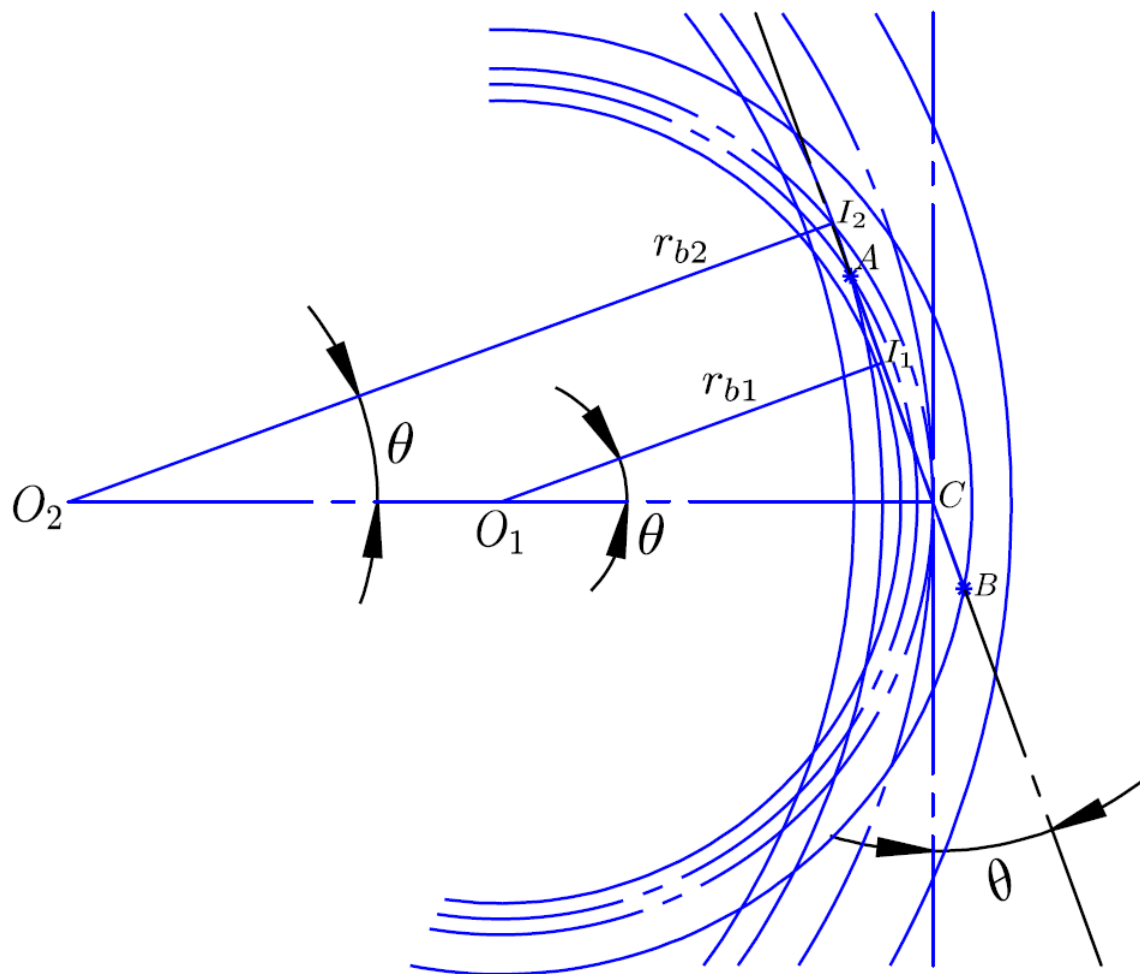


Figura 1.4: Contatto negli ingranaggi cilindrici a denti dritti, ruote interne

Osserviamo che il valore di z_{min} cresce sia al diminuire di θ sia al diminuire di τ . Nel caso particolare $\tau = 0$ (ingranamento tra rocchetto e dentiera) risulterà

$$(z_{min})_{\tau=0} = \frac{2k}{\sin^2(\theta)}.$$

Va inoltre aggiunto che valori più bassi dell'angolo di pressione permettono di ottenere ruote con un minor numero di denti, tuttavia i primi causano, a parità di coppia, un aumento delle forze scambiate fra i denti, con un conseguente incremento dello stato di sollecitazione interno degli stessi.

1.5.2 Ruote a dentatura interna

Il ragionamento relativo alle ruote a dentatura interna è del tutto simile a quello trattato per quelle a dentatura esterna, con la sola differenza che i punti I_1 e I_2 si trovano dalla stessa parte rispetto al punto di contatto C (vedi fig.1.4). E' evidente, per quanto detto nel paragrafo precedente, che nelle ruote a dentatura interna può esistere il fenomeno dell'interferenza solo nella fase d'accesso, mentre in quella di recesso il contatto risulterà sempre corretto qualunque sia la geometria dei denti. Nonostante ciò, il valore di z_{min} risulta maggiore in questo tipo di ruote, perché il punto A cade più lontano rispetto ad I_1 . Si riporta la relazione seguente:

$$z_{min} = 2k \frac{1 + \sqrt{1 - (2\tau - \tau^2)\sin^2(\theta)}}{(2 - \tau)\sin^2(\theta)}.$$

Si può aggiungere che a differenza delle ruote a dentatura esterna, in questo caso possono verificarsi anche altri tipi d'interferenza:

- *Interferenza secondaria*, tipo d'interferenza generata tra la testa de pignone e quella della ruota condotta in punti esterni alla retta d'azione. Per ruote con proporzionamento normale ⁽⁶⁾ ed angolo di pressione di 20° questa interferenza si verifica se $z_2 - z_1 < 8$;
- *Interferenza radiale*, questo tipo d'interferenza si genera nel montaggio o nel taglio (con coltello Fellows). Nel montaggio può essere facilmente evitata avvicinando i pezzi assialmente ma nel taglio essa risulta inevitabile.

⁶ Si intende per quelle ruote in cui la dimensione del dente è stata realizzata secondo le direttive di una normativa, dove il valore di addendum e dedendum sono espressi in funzione del modulo normale di riferimento.

1.6 Forze

Per completare l'analisi della trasmissione del moto mediante ruote dentate cilindriche a denti dritti rimane da considerare la trasmissione della potenza fra gli assi delle ruote stesse.

Indicando con P_1 la potenza entrante nella trasmissione attraverso l'albero motore, la coppia sul pignone risulterà quindi:

$$C_1 = \frac{P_1}{\omega_1}.$$

La forza che le due ruote si scambiano è diretta lungo la retta di pressione, pertanto per l'equilibrio alle rotazioni del pignone, in condizioni di assenza di attrito e a regime completamente sviluppato, si ha:

$$\left. \begin{array}{l} F_t = \frac{C_1}{r_1} = \frac{2C_1}{m_n z_1} \\ F_t = F \cos(\theta) \end{array} \right\} F = \frac{2C_1}{m_n z_1 \cos(\theta)}$$

$$F_n = F \sin(\theta).$$

Analogamente per la ruota condotta otteniamo:

$$C_2 = F_t r_2 = F r_2 \cos(\theta) = \frac{F m_n z_2}{2} \cos(\theta) = C_1 \frac{z_2}{z_1} = \frac{C_1}{\tau}.$$

1.7 Perdite e rendimento

Le perdite di potenza meccanica negli ingranaggi possono essere di diverso tipo, quali:

- Perdite dovute allo strisciamento dei denti a contatto;
- Perdite causate dall'imperfetto rotolamento dei profili dei denti durante l'ingranamento;
- Perdite nei supporti;
- Perdite per attrito con l'aria;
- Perdite causate da piccoli urti che si sviluppano fra due denti che vengono a contatto quando l'accoppiamento è caratterizzato da piccoli giochi o errori di produzione.

A basse velocità le perdite per attrito costituiscono la parte principale delle perdite mentre all'aumentare delle velocità acquistano peso le perdite causate dagli urti e quelle dovute all'imperfetto rotolamento. Questo fenomeno è ancora più marcato se i carichi sono più elevati.

Per determinare l'entità delle perdite causate dallo strisciamento nel contatto occorre considerare la forza che i denti si scambiano nelle sue due particolari componenti, una (F_N) avente direzione normale alla superficie del dente mentre l'altra (F_T) tangenziale, ossia avente la stessa direzione della velocità relativa tra i denti. Tali forze non sono da confondere con le componenti introdotte nel paragrafo 1.5 le cui direzioni sono riferite alla circonferenza primitiva e non al profilo laterale del dente.

La velocità relativa della ruota condotta rispetto al pignone, risulterà:

$$\vec{V}_r = (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \wedge (P - C),$$

che in modulo vale:

$$V_r = (\omega_2 + \omega_1)x .$$

dove x rappresenta la distanza del generico punto P da C . Introduciamo l'ipotesi semplificativa di avere una sola coppia di denti in presa alla volta e consideriamo il pignone, su di esso agiranno: la coppia motrice C_1 e le due forze F_N e F_T , che il dente della ruota condotta gli trasmette. Dall'equazione di equilibrio alla rotazione del pignone rispetto al punto O_1 ricaviamo:

$$C_1 = F_N r_1 \cos(\theta) - F_T (r_1 \sin(\theta) - x) .$$

Conoscendo la relazione $F_T = f F_N$, dove f è il coefficiente di attrito, possiamo scrivere la precedente equazione come:

$$F_N = \frac{C_1}{r_1 \cos(\theta) - f(r_1 \sin(\theta) + x)} . \quad (1.13)$$

Contemporaneamente sulla ruota condotta agiscono, la coppia resistente C_2 e le forze F'_N e F'_T che sono uguali ed opposte rispettivamente alla F_N e alla F_T . Scrivendo questa volta l'equilibrio alla rotazione della ruota condotta rispetto al punto O_2 e considerando la relazione $F_T = f F_N$ si ricava:

$$F_N = \frac{C_2}{r_2 \cos(\theta) - f(r_2 \sin(\theta) + x)} . \quad (1.14)$$

Eguagliando ora le espressioni (1.13) e (1.14) otteniamo:

$$\frac{C_1}{r_1 \cos(\theta) - f(r_1 \sin(\theta) + x)} = \frac{C_2}{r_2 \cos(\theta) - f(r_2 \sin(\theta) + x)}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{r_2 \cos(\theta) - f(r_2 \sin(\theta) + x)}{r_1 \cos(\theta) - f(r_1 \sin(\theta) - x)} ,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r_2}{r_1} \left[\frac{1-f(\tan(\theta)+\frac{x}{r_2 \cos(\theta)})}{1-f(\tan(\theta)-\frac{x}{r_1 \cos(\theta)})} \right] , \\
&= \frac{1}{\tau} \left[\frac{1-f(\tan(\theta)+\frac{x}{r_2 \cos(\theta)})}{1-f(\tan(\theta)-\frac{x}{r_1 \cos(\theta)})} \right] . \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Il risultato ottenuto nella (1.15) può essere usato per calcolare l'espressione del rendimento:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{P_2}{P_1} , \\
&= \frac{C_2 \omega_2}{C_1 \omega_1} , \\
&= \frac{C_2}{C_1} \tau , \\
&= \frac{1-f(\tan(\theta)+\frac{x}{r_2 \cos(\theta)})}{1-f(\tan(\theta)-\frac{x}{r_1 \cos(\theta)})} .
\end{aligned}$$

Questa espressione è valida durante la fase di accesso, quando cioè il punto P si trova all'interno del segmento $\overline{I_1 C}$. Durante la fase di recesso, ossia quando si trova invece all'interno del segmento $\overline{C I_2}$ sarà valida l'espressione (1.16) che può essere ottenuta con un ragionamento analogo a quello appena esposto, tenendo conto però che la forza tangenziale e la velocità relativa sono di verso opposto alle precedenti. Quindi in fase di recesso si ha:

$$\eta = \frac{1+f(\tan(\theta)-\frac{x'}{r_2 \cos(\theta)})}{1+f(\tan(\theta)+\frac{x'}{r_1 \cos(\theta)})} , \tag{1.16}$$

Che risulta strutturalmente simile a quella precedente. Possiamo tuttavia sottolineare che a parità di distanza dal punto C il rendimento della trasmissione nella fase di recesso risulta leggermente superiore a quello della fase di accesso.

Introduciamo ora, senza dimostrarla, la *formula di Poncelet* che esprime invece il valore medio del rendimento durante l'ingranamento in funzione dei raggi delle circonferenze primitive, del fattore d'attrito e delle lunghezze dei segmenti di contatto l_a e l_r , rispettivamente nella fase di accesso e in quella di recesso:

$$\eta_m = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left(\frac{l_a^2 + l_r^2}{l_a + l_r} \right) f .$$

Nella pratica i valori del rendimento per le ruote dentate si attestano tra il 95% e il 98% ($\eta \in [0.95, 0.98]$).

1.8 Fabbricazione

In questo paragrafo ci proponiamo di raccogliere i concetti di base relativi al taglio delle dentature cilindriche a denti dritti, senza tuttavia entrare nella descrizione particolareggiata delle macchine utensili interessate. Esistono innumerevoli sistemi per la produzione di ruote dentate, quali: la fusione a terra, la fusione a guscio, la fusione in forma permanente, la pressofusione e la rullatura o formatura a freddo. Tipicamente però come conseguenza degli elevati rapporti di carico trasmesso e delle dimensioni, le ruote dentate sono prodotte in acciaio e poi tagliate tramite fresatura o per involuppo.

1.8.1 Taglio per fresatura

Il taglio delle ruote dentate cilindriche a denti dritti mediante fresatura è realizzato mediante frese a disco. I denti della fresa sono costruiti in modo da riprodurre il vano fra dente e dente della particolare ruota da realizzare.

Lo svantaggio principale del taglio con fresa consiste nel fatto che, se si desidera la massima qualità della ruota (con massima qualità si intende quella relativa a questo specifico processo produttivo) è necessaria una diversa fresa sia per ogni diverso modulo che per ogni numero di denti. Se diversamente non è richiesta una elevata precisione, è possibile tagliare con ogni fresa

Tabella 1.1: Serie di 8 frese prese dalla normativa UNI 4501

n	12	14	17	21	26	35	55	135
n _{max}	13	16	20	25	34	54	134	∞

Tabella 1.2: serie di 15 frese prese dalla normativa UNI 4501

n	12	13	14	15	17	19	21	23
n _{max}				16	18	20	22	25
n	26	30	35	42	55	80	135	
n _{max}	29	34	41	54	79	134		

anche ruote con numero di denti alquanto maggiore di quello ottimale per quel determinato profilo (per il modulo lo stesso ragionamento non è valido). Riportiamo, puramente a titolo di esempio, due tabelle (1.1 e 1.2) prese da normativa⁽⁷⁾ che contengono, la prima 8 serie di frese per tagliare ruote dentate con modulo da 0.5 a 9 mentre la seconda 15 serie per moduli maggiori di 10. Nelle tabelle sono indicati i rispettivi valori del numero di denti ottimale e quello massimo.

Concludiamo specificando che il taglio con fresa non consente di raggiungere gli elevati gradi di precisione che talvolta sono richiesti in ingranaggi per applicazioni veloci. Al contrario risulta molto semplice ed economico, qualità che lo rendono idoneo alla produzione su larga scala di ruote con le medesime caratteristiche.

⁷ La norma di riferimento è la UNI 4501 del 1960, che risulta ora ritirata senza sostituzione.

1.8.2 Taglio per involuppo

Questo metodo è quello che possiede la massima versatilità e consente di ottenere la massima precisione possibile, esso è usato principalmente per realizzare ruote con dentatura ad evolvente. Le sue modalità di realizzazione possono essere facilmente comprese se si immagina che la ruota sia costituita da materiale modellabile per pressione mentre l'utensile sia infinitamente rigido. Facendo muovere ruota ed utensile l'una rispetto all'altra con lo stesso movimento che avrebbero se la ruota da realizzare fosse già tagliata, si ottiene la modellazione di quest'ultima.

Tra i vari utensili che possono essere usati si trovano:

- le dentatrici-strozzatrici del tipo Maag, Sunderland o Fellows;
- le dentatrici con moto rotatorio continuo (Pfauter e Reinecker).



Figura 1.5: Esempio di rottura per flessione

1.9 Avarie

Esistono numerose modalità di cedimento delle ruote dentate che sono state messe in relazione ad una moltitudine di fattori legati al funzionamento degli ingranaggi, come per esempio la lubrificazione, le forze trasmesse e la velocità periferica. Tali relazioni sono state poi riportate all'interno di normative come la ISO 6336, la UNI 8862, la DIN 3990 e anche tante altre.

Nella maggior parte dei casi è difficile attribuire ben determinate condizioni alle specifiche tipologie di avarie in quanto nella quasi totalità dei casi si presentano simultaneamente diversi tipi di danneggiamento. Nel seguente capitolo verrà proposta una presentazione generale delle tipologie più frequenti di cedimento. Quelle che tratteremo in questo paragrafo sono:

- rottura per flessione;
- pitting;
- scuffing;
- usura.

1.9.1 Rottura per flessione

Con *rottura per flessione* si intende il cedimento del dente in conseguenza dello stato tensionale a flessione pulsante a cui esso è sottoposto. La sezione più sollecitata si trova alla base del dente sia perché rappresenta la sezione di massimo sforzo, essendo massimo il braccio della forza scambiata fra i denti, sia per la presenza di intaglio. Perciò la frattura si sviluppa normalmente in questa zona (vedi figura 1.5), la rigidità di una ruota può però influenzarne la propagazione, facendola sviluppare verso l'interno.

La sua evoluzione risulta quella tipica delle rotture a fatica, con una prima fase di nucleazione, una successiva di propagazione della cricca, generalmente lungo la direzione perpendicolare allo sforzo ed in fine la rottura che è di tipo fragile.

In linea del tutto generale, è possibile affermare che questo fenomeno è legato al superamento del limite di fatica del materiale, limite che deve essere calcolato tenendo conto delle condizioni di carico e delle particolari geometrie delle ruote dentate.

1.9.2 Pitting

Il *pitting* è un danneggiamento per fatica dovuto allo scambio di forze tra due superfici a contatto, risulta tipico di tutti i membri che prevedono la trasmissione delle forze tramite contatto, quindi non solo negli ingranaggi ma anche nei cuscinetti, nelle camme e in tantissimi altri meccanismi.

Lo stato tensionale tipico di questo fenomeno può essere approssimato tramite la teoria del contatto hertziano, in cui le due ruote sono immaginate come due cilindri a contatto lungo una generatrice di lunghezza pari a quella della faccia dei denti. Le altre ipotesi che stanno alla base di questa teoria sono:

- perfetta elasticità del materiale;
- assenza di forze di attrito;
- zona del contatto limitata rispetto alle dimensioni dei due corpi.

La tensione massima risulterà:

$$\sigma_{Hmax} \approx 0.418 \sqrt{\frac{PE\rho}{b}},$$

dove:

$$\rho = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \text{ è la somma delle curvature delle superfici a contatto,}$$

$$E = \frac{2E_1E_2}{E_1+E_2}$$
 con E_1 e E_2 moduli elastici dei materiali delle due ruote, e P forza

premente i due cilindri l'uno contro l'altro.

Il punto di contatto varierà durante l'ingranamento lungo il segmento dei contatti facendo di conseguenza variare il valore delle due curvature e quindi il valore di σ_H . È stato tuttavia dimostrato che il punto di massima tensione hertziana è il centro di istantanea rotazione C ($\rho_1 = r_1$ e $\rho_2 = r_2$), in cui essendo nulla la velocità relativa si ha una bassa lubrificazione.



Figura 1.6: Esempio di danneggiamento a pitting

1.9.3 Scuffing

Questo particolare fenomeno consiste nella saldatura e nel successivo distacco del fianco dei denti di due ruote dentate. La causa principale è la carenza o addirittura la mancanza dello strato di lubrificante che dovrebbe permettere alle due superfici di

scorrere l'una sull'altra. L'insorgenza di questa eventualità, unita a determinate condizioni di velocità e temperatura, può creare tra le due superfici una pressione tale da indurre il materiale delle due ruote a microsaldarsi. Poi durante il proseguimento del moto queste microsaldature si romperanno, determinando uno scambio di materiale e la conseguente formazione di superfici scabre. Tali irregolarità si comporteranno come degli utensili, generando durante gli ingranamenti successivi delle striature lungo la direzione di strisciamento relativo delle due superfici (vedi figure 1.7 e 1.8).

1.9.4 Usura

Il fenomeno dell'usura è un processo continuativo e duraturo nel tempo, che consiste nella abrasione delle superfici di contatto tra i denti, la sua principale causa è come per lo scuffing la mancanza o l'inadeguatezza della lubrificazione.

Un'altra possibile causa potrebbe anche essere la presenza di particelle estranee trasportate dal lubrificante, in questi casi esse asportano una piccola quantità di materiale dalle superfici, causando delle vistose striature nella direzione di scorrimento.



Figura 1.7: Ruota a denti dritti danneggiata per scuffing



Figura 1.8: Esempio di scuffing in cui appaiono molto visibili le striature causate “dall’effetto utensile” delle microsaldature

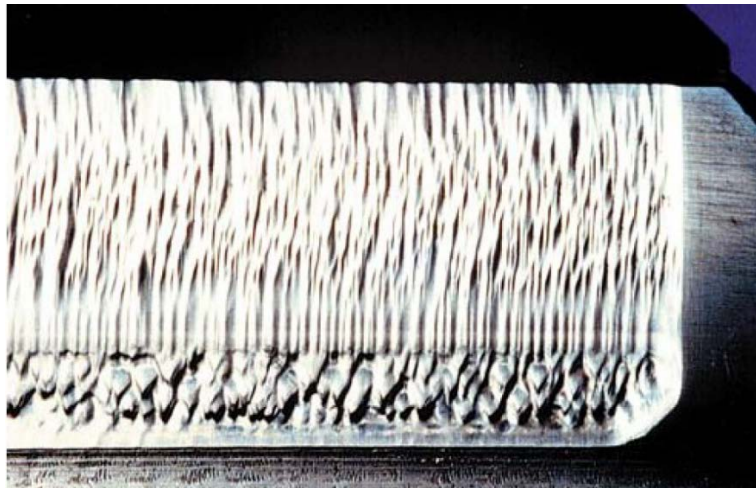


Figura 1.9: Esempio di ruota soggetta a usura per carenza di lubrificante

Gli effetti e le cause sono molto simili allo scuffing, da cui però si differenzia per la maggior omogeneità del danneggiamento, l’usura infatti interessa tutto il fianco attivo del dente mentre lo scuffing è localizzato soprattutto nelle zone ad alta velocità di scorrimento. Se i carichi e le velocità sono ridotti, il materiale asportato è rappresentato principalmente da ossidi, che tenderanno a riformarsi con sufficiente rapidità in modo da impedire il contatto diretto tra le superfici sottostanti. Quando le condizioni sono più critiche, la velocità di rigenerazione degli ossidi non è più in grado di evitare il contatto diretto tra le superfici dei denti, in questo caso l’usura può raggiungere entità tali da produrre modifiche nel profilo dei denti con conseguenti vibrazioni e rumore.

1.10 Rotismi

Si definiscono *rotismi* quei meccanismi in cui la trasmissione del moto avviene per mezzo di ruote dentate, la cui funzione principale è quella di assicurare un determinato rapporto di trasmissione. Il rotismo più elementare è costituito da due ruote dentate (ingranaggio) e dai membri a cui le ruote sono accoppiate rotoidalmente. In questo capitolo distingueremo i rotismi in:

- *ordinari*, quando gli assi di tutte le ruote sono fissi;
- *epicicloidali*, se almeno uno degli assi delle ruote risulta mobile.

Definiremo poi le modalità del calcolo del rapporto di trasmissione in uno e nell'altro caso.

1.10.1 Rotismi ordinari

Il rapporto di trasmissione τ di un rotismo ordinario composto da $n+1$ ruote dentate è definito come il rapporto tra la velocità angolare del cedente con quella del movente:

$$\tau = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_1},$$

e può anche essere espresso attraverso i rapporti di trasmissione dei singoli ingranaggi, ossia scrivendo:

$$\tau = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \dots \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau_n \tau_{n-1} \dots \tau_1 .$$

Ora, se un rotismo ordinario contiene una ruota che ingrana contemporaneamente con altre due, il rapporto di trasmissione tra la prima e l'ultima ruota non viene influenzato, in valore, dalla presenza della ruota intermedia, che ha invece la sola funzione di invertire il segno della velocità in uscita: tale ruota prende il nome di *oziosa*.

Nella pratica è di uso comune considerare come range di valori ottenibili, dalla trasmissione di un singolo ingranaggio, quelli compresi nell'intervallo $\left[\frac{1}{6}, 6\right]$. Questa convenzione, che non è obbligatorio applicare, ha lo scopo di limitare l'ingombro ed il costo del meccanismo. Quindi nel caso si debba realizzare un rotismo il cui rapporto di trasmissione non risulti interno a tali valori (ad esempio $\tau = \frac{1}{18}$), sarà necessario suddividere la trasmissione in più stadi (2 per il nostro esempio). Si pone quindi il problema di come debba essere suddiviso il rapporto stesso ed in quale ordine debbano essere posti i vari stadi.

La soluzione più opportuna risulta quella di suddividere la trasmissione in stadi il più possibile simili tra loro, montando sugli alberi più veloci le coppie di ruote aventi trasmissione più bassa.

1.10.2 Rotismi epicicloidali

Come abbiamo già anticipato, un rotismo epicicloidale è un rotismo in cui almeno una delle ruote è accoppiata rotoidalmente ad un albero avente asse mobile. Il più semplice esempio di rotismo epicicloidale è quello rappresentato in figura 1.10, come si può vedere esso è costituito da due ruote e da un terzo membro accoppiato rotoidalmente ad esse. La ruota 1 ad asse fisso prende il nome di solare, la 2 ad asse mobile di satellite mentre il componente numero 3 viene chiamato *portatreno* (o *portasatellite*).

Prima di passare al calcolo del rapporto di trasmissione è necessario osservare che a differenza dei rotismi ordinari, nei quali erano presenti un solo albero motore e un solo albero condotto, possono esistere in questo caso diverse configurazioni in cui è possibile avere più alberi condotti o più alberi motore. Risulterà quindi necessario determinare una relazione tra le velocità angolari dei vari componenti.

Consideriamo ora un generico rotismo epicicloidale costituito da n ruote, dove la 1 sia il movente e la n il cedente (rotismo ad un grado di libertà). Il rapporto di trasmissione sarà quindi:

$$\tau = \frac{\omega_n}{\omega_1}, \quad (1.17)$$

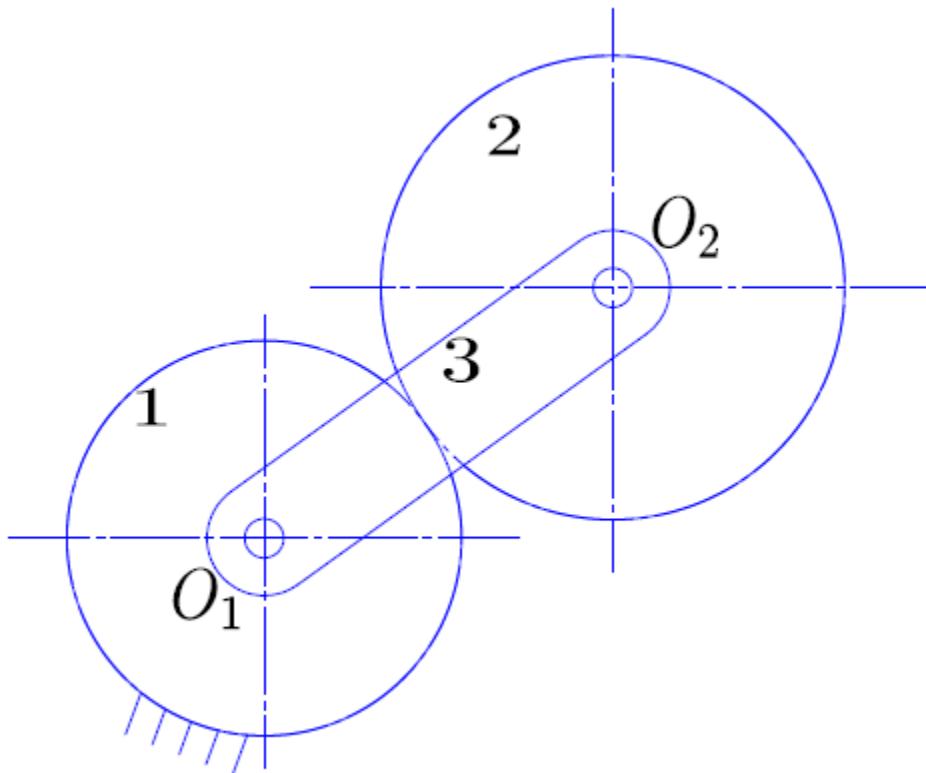


Figura 1.10: ingranaggio epicicloidale

ipotizzando ora di attribuire a tutto il rotismo una velocità angolare uguale ed opposta a quella del portatreno, le velocità delle altre ruote diventeranno:

$$\omega_{1,0} = \omega_1 - \Omega$$

$$\omega_{2,0} = \omega_2 - \Omega$$

...

$$\omega_{n,0} = \omega_n - \Omega$$

In questo modo il rotismo in esame è stato privato della caratteristica peculiare dei rotismi epicicloidali, il rotismo che ne deriva prende il nome di *rotismo ordinario associato* ed ha rapporto di trasmissione pari a:

$$\tau_0 = \frac{\omega_n - \Omega}{\omega_1 - \Omega}, \quad (1.18)$$

$$= \frac{\omega_{n,0}}{\omega_{(n-1),0}} \dots \frac{\omega_{2,0}}{\omega_{1,0}},$$

$$= \frac{z_{n-1}}{z_n} \dots \frac{z_1}{z_2}. \quad (1.19)$$

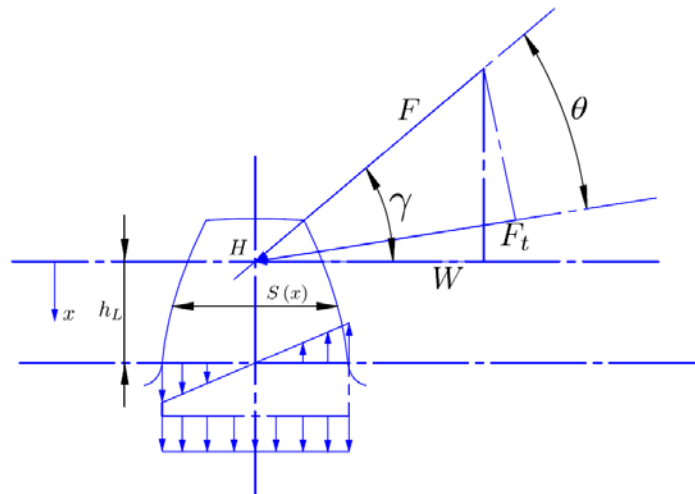


Figura 1.11: Modello delle forze relativo alla teoria di Lewis

La relazione 1.18 è detta *formula di Willis* ed individua, come si è già compreso, il rapporto di trasmissione del rotismo ordinario associato.

L'introduzione di questo modello di calcolo ha lo scopo di determinare una relazione che esprima un legame tra il rapporto di trasmissione e le grandezze note, come per esempio la velocità dell'albero motore e il numero di denti delle ruote. A tal proposito dalla 1.19 è possibile ricavare τ_0 in funzione del numero di denti:

$$\tau_0 = f(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Dopo aver considerato tutte le condizioni al contorno, e se possibile applicato delle semplificazioni alla 1.18 il passo successivo è quello di scrivere la velocità del cedente in funzione di τ_0 :

$$\omega_n = f(\tau_0, \omega_1) .$$

A questo punto si inserisce la relazione appena trovata all'interno della 1.17, ottenendo così il risultato cercato:

$$\tau = f(\tau_0, \omega_1) .$$

1.11 Teoria di Lewis

Nella teoria di Lewis il dente è considerato come una mensola incastrata nella circonferenza di base, sollecitata alla forza complessiva che le ruote si tramettono (vedi fig. 1.11).

Le ipotesi che stanno alla base di questa teoria sono:

- il dente è sollecitato dalla forza F agente sulla punta dello stesso;
- è considerata nel calcolo la condizione più sfavorevole, cioè quella nella quale all'interno del segmento dei contatti vi sia una sola coppia di denti in presa;
- tra le due componenti della F , la W responsabile dello sforzo di flessione sul dente è la sola che viene considerata nel calcolo e per semplicità presa in modulo pari alla F_t agente lungo la tangente alla circonferenza primitiva (si ipotizza cioè $\theta = \gamma$);
- forze d'attrito considerate trascurabili;
- effetto della concentrazione delle tensioni alla base del dente considerato trascurabile.

Al fine di eliminare le condizioni di carico del dente, scriviamo la componente W della F che genera lo sforzo di flessione:

$$W = F \cos(\gamma) ,$$

essendo però per ipotesi $\theta = \gamma$, si ha;

$$\cos(\theta) = \cos(\gamma) ,$$

e, di conseguenza:

$$W = \frac{F_t}{\cos(\theta)} \cos(\gamma) \cong F_t .$$

Avendo trascurato la componente di F che determina lo sforzo di compressione sul dente, calcoliamo la massima tensione dovuta al solo momento flettente:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f \frac{S(x)}{2}}{I} = \frac{F_t x}{\frac{1}{6} b [S(x)]^2} , \quad (1.20)$$

dove:

- x , è la distanza fra il punto corrispondente all'intersezione della retta dei contatti con l'asse di simmetria del dente e la sezione del dente in cui si produce la σ_{max} ;
- $S(x)$, è lo spessore del dente alla coordinata x ;
- b , è la larghezza di fascia del dente;
- I , è il momento d'inerzia della sezione resistente, con $I = \frac{1}{12} b [S(x)]^3$.

Da quanto detto finora non è ancora nota la sezione del dente in cui si ha σ_{max} . Se il dente avesse sezione costante ovviamente la si avrebbe nella sezione d'incastro, ma non è questo il caso.

In generale invece per la teoria di Lewis il massimo dello sforzo sul dente si ha nel punto in cui una parabola di uniforme resistenza, avente per asse l'asse del dente e origine nel punto H (corrispondente all'intersezione della retta dei contatti con l'asse di simmetria del dente), risulta tangente al profilo del dente stesso. Ponendo quindi $\sigma_{max} \equiv cost.$, si ha:

$$[S(x)]^2 = y^2 = \frac{F_t}{\sigma_{max} \frac{1}{6} b} x, \quad (1.21)$$

Che rappresenta l'equazione della parabola di uniforme resistenza appena citata. Imponendo poi la tangenza tra la 1.21 e l'equazione dell'evolvente specifica della ruota dentata in esame, è possibile determinare la sezione in cui si ha la σ_{max} . Ponendo:

$$\sigma_{max} = \sigma_{Lw},$$

$$x = h_L,$$

$$S[x = h_L] = S_L,$$

dove x è la coordinata della sezione relativa alla σ_{max} e S_L è la larghezza della sezione in cui si ha la σ_{max} , si può scrivere:

$$\sigma_{Lw} = \frac{6 F_t h_L}{b S_L} = \frac{6 F_t}{\left(\frac{S_L}{m_n}\right)^2} = \frac{6 F_t}{b} Y_{Lw}. \quad (1.22)$$

Il termine Y_{Lw} prende il nome di *fattore di forma* (secondo Lewis), e vale:

$$Y_{Lw} = \frac{6 \left(\frac{h_L}{m_n}\right)}{\left(\frac{S_L}{m_n}\right)^2}.$$

Una volta definito il quadro teorico rimane da esaminare come elaborare le equazioni in modo da poter affrontare un calcolo di progetto. Consideriamo il caso in cui debba essere determinato sia il modulo m_n che la larghezza di fascia b . Pertanto introducendo nella 1.22 le relazioni:

$$\lambda = \frac{b}{m_n},$$

$$C = F_t r \rightarrow F_t = \frac{2 C}{z m_n},$$

otteniamo:

$$\sigma_{LW} = \frac{2 C Y_{LW}}{\lambda z m_n^3}.$$

Tabella 1.3: Valori convenzionalmente utilizzati per λ

Qualità delle dentature e condizioni di lavoro	λ
Dentatura precisa, fusa oppure tagliata alla fiamma; pignone con supporti esterni non rigidi.	6 ÷ 10
Dentatura temprata ma non rettificata.	5 ÷ 15
Dentatura lavorata bene; supporti nello stesso carter del rotismo, rigidi e ben allineati.	10 ÷ 20
Dentatura lavorata di precisione; $n_1 < 3000$ rpm	20 ÷ 40
Superficie dei denti pressochè perfetta ed elevata precisione di dentatura; supporti rigidi; $n_1 < 3000$ rpm	40 ÷ 80

In ambito di progettazione dovrà valere la condizione di resistenza, ossia $\sigma_{LW} \leq \sigma_{amm}$ e perciò rielaborando l'equazione precedente possiamo scrivere:

$$m_n \geq \sqrt[3]{\frac{2 C Y_{LW}}{\lambda z f_v \sigma_{amm}}},$$

dove il termine f_v è un coefficiente correttivo aggiunto che considera possibili urti e vibrazioni.

Esso vale:

$$f_v = \frac{12}{12 + \sqrt{v}},$$

per ruote ad alta precisione,

$$f_v = \frac{6}{6 + \sqrt{v}},$$

per ruote di buona qualità,

$$f_v = \frac{5}{5 + \sqrt{v}},$$

per ruote di medio-bassa qualità.

Tabella 1.4: Valori del coefficiente Y_{Lw}

z	$\theta = 20^\circ$	$\theta = 15^\circ$
	$1/Y_{Lw}$	$1/Y_{Lw}$
12	0.245	0.210
13	0.261	0.220
14	0.276	0.226
15	0.289	0.236
16	0.295	0.242
17	0.302	0.251
18	0.308	0.261
19	0.314	0.273
20	0.320	0.283
21	0.327	0.289
22	0.330	0.292
24	0.336	0.298
25	0.346	0.307
28	0.352	0.314
30	0.358	0.320
34	0.371	0.327
38	0.383	0.336
43	0.396	0.346
50	0.408	0.352
60	0.421	0.358
75	0.434	0.364
100	0.446	0.371
150	0.459	0.377
∞	0.484	0.390

Tabella 1.5: Valori dei moduli unificati, presi dalla normativa UNI 6586. In fase di scelta sono da preferire, nell'ordine, moduli appartenenti alla colonna 1 poi alla 2 ed infine alla 3

Colonna 1	Colonna 2	Colonna 3	Colonna 1	Colonna 2	Colonna 3
0.5			6		
	0.75				6.5
1				7	
	1.25		8		
1.25				9	
	1.375		10		
1.5				11	
	1.75		12		
2				14	
	2.25		16		
2.5				18	
	2.75		20		
3				22	
		3.25	25		
	3.5			29	
		3.75	32		
4				35	
	4.5		40		
5				45	
	5.5		50		

Capitolo 2

2.1 Innesti

In questo capitolo ci concentreremo sui vari tipi di innesti esistenti.

Gli innesti permettono di collegare e scollegare a piacere due alberi (uno dei quali sarà collegato al motore e l'altro all'utilizzatore), in molti casi anche mentre questi sono in movimento.

I principali tipi di innesti sono gli innesti a denti e gli innesti a frizione. Un tipo particolare è il giunto idraulico, che svolge sia la funzione di innesto sia quella di giunto.

2.2 Innesti a denti

Gli innesti a denti frontali permettono di effettuare il collegamento fra due alberi rotanti alla medesima velocità o con velocità poco diverse fra loro. Sono di due tipo fondamentali (figura 2.1):

- A pochi denti (con denti rettangolari, triangolari, trapezoidali, a spirale) per collegamento da fermo o a velocità molto bassa.
- A molti denti (con denti a dente di sega) per collegare anche in movimento a velocità relativa medio bassa.

Gli innesti a denti di esecuzione normale permettono di ottenere il collegamento in una posizione qualsiasi, ma esistono innesti che permettono il collegamento solo in una o in alcune posizioni angolari relative dei due alberi.

Si trovano in commercio gruppi costituiti da un innesto e dal relativo comando, che può essere oleodinamico, pneumatico o elettromagnetico. La modalità di intervento del comando si dice positiva se il comando provoca il collegamento fra i due alberi, si dice negativa se i due alberi sono normalmente collegati ed il comando ne provoca lo scollegamento.

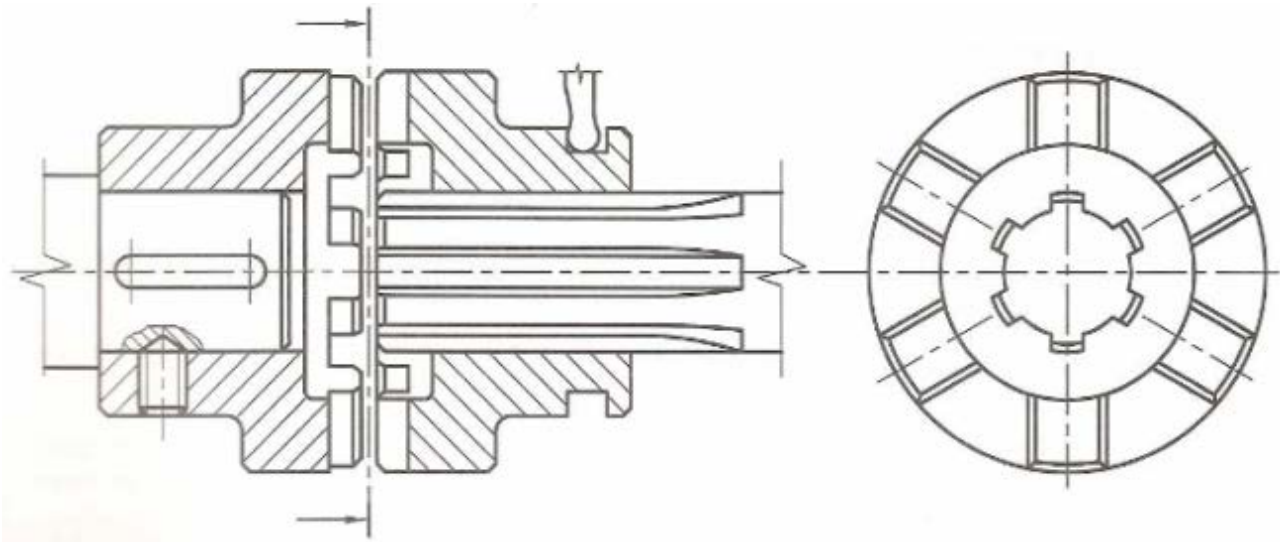


Figura 2.1: Innesto a denti frontali

Gli innesti a denti radiali (figura2.2) realizzano l'innesto senza sviluppare sforzi assiali. Essi trovano impiego, ad esempio, nei cambi automobilistici. Questi comprendono due alberi principali, sui quali sono montate delle ruote dentate: su uno le ruote sono calettate, mentre sull'altro albero sono montate folli. Ogni ruota del primo albero è costantemente in presa con la corrispondente ruota del secondo. Opportuni innesti a denti radiali permettono di rendere solidale con il proprio albero una delle ruote folli.

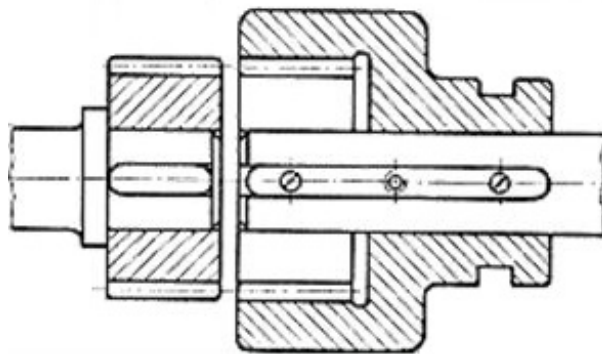


Figura 2.2: Innesto a denti radiali

L'innesto avviene facendo scorrere il manicotto dentato sul proprio albero, che è scanalato, fino a farlo entrare in presa con la dentatura ricavata sul fianco della ruota folle. Poiché l'innesto deve avvenire con velocità relativa nulla, il manicotto è munito di superfici coniche (sincronizzatori) che funzionano come frizioni coniche: quando il manicotto incomincia a muoversi, ma prima che abbia inizio l'innesto delle due dentature, le superfici coniche del

manicotto vengono a contatto con corrispondenti superfici coniche ricavate su un anello solidale con la ruota folle, e questa è portata a ruotare alla stessa velocità angolare del manicotto, cioè dell'albero.

2.3 Frizioni

Gli innesti ad attrito, o frizioni, permettono di effettuare il collegamento fra due alberi, rotanti inizialmente con velocità anche molto diverse fra loro. Il principio di funzionamento è molto semplice. I due alberi da collegare portano due superfici affacciate: quando queste non sono a contatto fra loro, non c'è trasmissione di coppia; se vengono accostate e premute una contro l'altra, dapprima le superfici strisciano fra loro e trasmettono una coppia per attrito; successivamente, acquistano la stessa velocità e la coppia è trasmessa per aderenza.

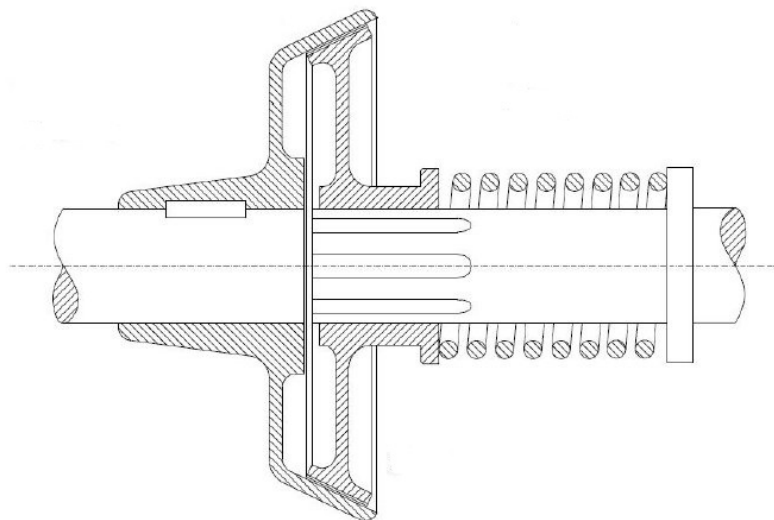


Figura 2.3: Innesto a frizioni coniche

I primi innesti a frizione erano conici (figura 2.3), cioè con le superfici di contatto coniche; anche attualmente le frizioni coniche trovano impiego in applicazioni industriali, in alcuni veicoli e nei sincronizzatori dei cambi automobilistici. Rispetto alle frizioni piane, questi innesti richiedono sforzi assiali minori durante la trasmissione per aderenza, mentre per lo spostamento assiale relativo delle due superfici coniche, cioè durante le fasi di accostamento e di distacco, le componenti d'attrito fanno sì che siano necessarie forze assiali maggiori.

Un certo interesse hanno le frizioni radiali, nella quali parti mobili collegate ad uno dei membri si muovono in senso radiale fino a premere su idonee superfici (di solito cilindriche o coniche) ricavate nell'altro membro. Il movimento radiale delle parti mobili può essere realizzato mediante meccanismi vari, per esempio, un collare ed una molla, oppure può essere dovuto all'azione della forza centrifuga, che fornisce allora anche l'azione che tiene premute una corona contro l'altra le due superfici d'attrito: si realizza così una frizione centrifuga, che effettua automaticamente l'innesto quando la velocità dell'albero al quale sono collegate le parti mobili raggiunge un valore sufficiente per fare avvenire l'innesto.

I tipi più comuni sono però le frizioni piane, nelle quali il contatto avviene su superfici a forma di corona circolare. Le frizioni piane possono essere monodisco, di solito a secco, con una o due superfici di contatto.

Le frizioni a dischi multipli sono realizzate con un albero scanalato, sul quale scorrono assialmente dei dischi dotati di dentelli che si accoppiano con le scanalature dell'albero, e con una campana con scanalature interne, entro la quale scorrono dischi simili ai precedenti, alternati ad essi e dotati di dentelli verso l'esterno (figura 2.4).

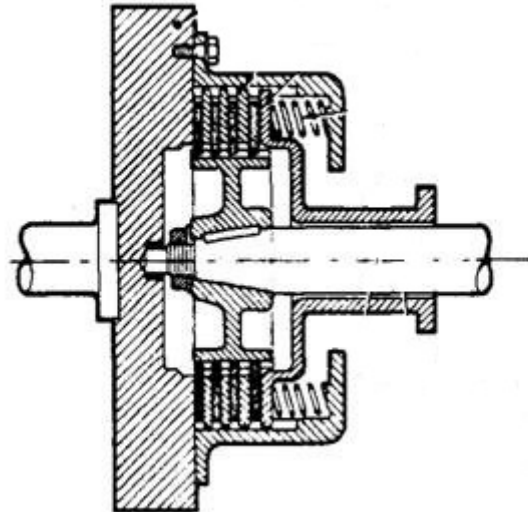


Figura 2.4: Innesto a frizione a dischi multipli

Quando i dischi vengono premuti gli uni contro gli altri, quelli calettati sull'albero scanalato trasmettono, per attrito o per aderenza, una coppia a quelli dotati della dentellatura verso l'esterno, torsionalmente solidali con la campana.

Se le superfici a contatto sono n , il momento trasmesso per attrito durante la fase di strisciamento a quello trasmesso per aderenza nella fase finale sono n volte quelli trasmessi da ciascuna superficie di contatto.

Nelle applicazioni industriali, intervento sulla frizione avviene di regola mediante un comando elettromagnetico, oleodinamico o pneumatico. L'innesto si dice a comando positivo se la frizione è normalmente disinserita e viene inserita o alimentando con una tensione elettrica o inviando olio o aria in pressione; si dice a comando negativo quando la frizione è normalmente innestata e alimentando con una tensione elettrica o inviando olio o aria in pressione se ne provoca il disinnesto.

Nel campo industriale le frizioni sono largamente utilizzate sia come innesti, sia come limitatori di coppia. La frizione non è in grado di trasmettere una coppia superiore ad un certo massimo, e pertanto può essere impiegata per impedire che un sovraccarico, cioè un momento torcente di valore eccessivo, che si verifichi in un lato della trasmissione, si trasmetta anche all'altra parte, danneggiando o distruggendo parti importanti del sistema.

2.4 Innesto di una frizione

Nell'innesto di una frizione meccanica si distinguono tre fasi principali:

- Fase di accostamento;
- Fase di strisciamento;
- Fase di aderenza finale.

2.4.1 Fase di accostamento

Questa fase è molto breve e pertanto verrà trascurata.

2.4.2 Fase di strisciamento

La frizione trasmette la coppia

$$M_f = fQR_m \quad (2.1)$$

Indicando con M_m il momento motore, con M_r il momento resistente, con Ω_m la velocità angolare del motore, con Ω_u quella dell'utilizzatore, con J_m e J_u i momenti d'inerzia, rispettivamente, del motore e dell'utilizzatore, le equazioni del moto nella fase di strisciamento sono:

$$\begin{cases} M_m - M_f = J_m \frac{d\Omega_m}{dt} \\ M_F - M_r = J_u \frac{d\Omega_u}{dt} \end{cases} \quad (2.2)$$

La prima delle 2.2 si riferisce al lato motore, la seconda al lato utilizzatore. La frizione trasmette un momento M_F , che è resistente per il motore ed è motore per l'utilizzatore. Affinché quest'ultimo possa essere effettivamente trascinato, occorre evidentemente che sia $M_F > M_r$.

Durante questa fase la velocità angolare del motore diminuisce e quella dell'utilizzatore aumenta: la fase ha termine quando le due velocità diventano uguali.

2.4.3 Fase finale

In questa fase è $\Omega_m = \Omega_u$; posto $\Omega_m = \Omega_u = \Omega$, l'equazione del moto nella fase di aderenza è:

$$M_m - M_r = (J_m - J_u) \frac{d\Omega}{dt} \quad (2.3)$$

I due alberi sono solidali fra loro e la frizione trasmette per aderenza un momento M_a il cui valore è compreso tra i limiti $0 \leq M_a \leq f_a QR$, dove f_a è il coefficiente di aderenza fra le superfici di contatto.

Capitolo 3

3.1 Breve storia della bicicletta

Nel tracciarne la storia è necessario tener conto del fatto che le invenzioni applicate alla bicicletta che hanno avuto successo, di rado sono state il frutto dell'idea di una persona; piuttosto sono state il risultato di precedenti idee ed esperimenti per cui difficilmente è possibile associare ad un determinato progetto una precisa data storica ed un particolare inventore.

Numerose sono le rivendicazioni iniziali per l'invenzione della bicicletta come veicolo. Sembra piuttosto probabile comunque che tutte le presunte invenzioni antecedenti quella brevettata da Karl Drais nel 1818 siano solo ipotetiche.

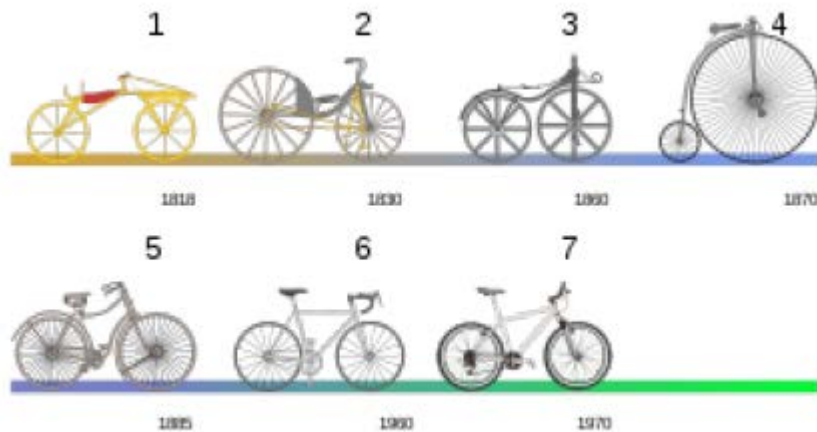


Figura 3.1: Evoluzione della bicicletta

Rivendicazioni più datate fanno risalire l'invenzione della bicicletta ad un disegno preciso del mezzo trovato all'interno del codice atlantico di Leonardo Da Vinci, nel foglio 133v e accompagnato da altre tavole raffiguranti congegni meccanici ad oggi, sebbene messo in dubbio dalla critica, mai smentito dagli studiosi. L'origine della prima bicicletta effettivamente utilizzata è da attribuirsi al barone Karl von Drais, un impiegato statale del Gran Ducato di Baden in Germania. Drais inventò la sua *Laufmaschine* (macchina da corsa)

nel 1817 che fu chiamata dalla stampa *draisine* e più tardi *velocipede*. La draisina era comunque molto diversa dalla bicicletta intesa in senso moderno poiché la propulsione non avveniva per mezzo di pedali e trasmissione ma per spinta diretta dei piedi sul terreno.

L'adozione dei pedali avvenne solo intorno al 1860, in Francia, in concomitanza con la nascita di un nuovo tipo di fondo stradale che rese più semplice condurre il velocipede sebbene imitando la tecnologia delle carrozze per la costruzione di massicci telai d'acciaio, il peso del veicolo era raddoppiato a quasi 45 chilogrammi. Un'ulteriore comodità fu portata con l'introduzione di copertoni di gomma solida e del primo cuscinetto a sfere. Necessitano una menzione anche i primi tentativi di introdurre la trazione posteriore per superare gli svantaggi di quella anteriore (la difficoltà nel mantenere la pedalata mentre si sterza e la velocità limitata), anche se dovranno passare altri 40 anni prima che questa si affermi definitivamente diventando d'uso comune. Lo sviluppo della "bicicletta sicura" fu indubbiamente la modifica più importante nella storia della bicicletta; essa spostò la percezione dell'opinione pubblica sulla bicicletta da quella di un giocattolo pericoloso per giovani sportivi a quella di un mezzo di trasporto adatto a uomini e donne di tutte le età. Si deve dunque a John Kemp Starley l'invenzione della prima "safety bicycle" nel 1885; egli non brevettò mai la sua invenzione ma le principali novità erano rivoluzionarie: ruota anteriore sterzante con il significativo angolo d'incidenza⁽⁸⁾, ruote di uguali dimensioni e trasmissione a catena alla ruota posteriore. Inizialmente il punto della safety bicycle fu la stessa difficoltà nell'assorbimento delle asperità del terreno, problema rilevante su ruote di diametro inferiore; ciò costringeva all'adozione di sistemi di ammortizzazione a molla complicati, ingombranti e pesanti; tutto ciò divenne obsoleto a partire dal 1888 quando John Dunlop inventò il primo pneumatico da bicicletta.

⁸ L'angolo di incidenza è quello formato dall'asse dello sterzo con il terreno. Tale angolo si traduce in una distanza dall'asse di rotazione del punto di applicazione della reazione del suolo, dando origine ad una coppia che, nel caso di angolo positivo, tende a riportare la ruota parallela alla direzione di marcia durante le sterzate. Un aumento dell'angolo d'incidenza aumenta la stabilità del veicolo penalizzandone la reattività e viceversa.



Figura 3.2: Safety bicycle agli inizi del '900

La trasmissione a catena aumentò sia il confort che la velocità, il moto veniva trasferito alla ruota non sterzante permettendo una pedalata più rilassata e meno rischiosa ⁽⁹⁾. La configurazione a trazione posteriore semplificò inoltre la forma del telaio e la sua costruzione (figura 3.2); i progressi nella scienza dei materiali lo resero inoltre più leggero.

3.2 La e-bike

Durante tutta la sua storia la bicicletta è sempre stata un veicolo soggetto a continua innovazione e revisione; ciò è dovuto essenzialmente alla sua semplicità e negli anni in tanti si sono cimentati in infinite “customizzazioni” e personalizzazioni di vario genere, tanto che spesso si sono create forti ambiguità nell’attribuzione della paternità di innovazioni di successo.

⁹ Con la trasmissione posta direttamente sulla ruota anteriore sterzante la pedalata diventa difficoltosa a causa del disallineamento tra il piano di mezz'aria del corpo del ciclista e quello delle gambe e dei pedali che seguono la ruota in fase di sterzata.



Figura 3.3: E-bike

In anni recenti, in particolare nelle città più congestionate dal traffico, si è assistito ad un rinnovato interesse per l'uso della bicicletta, incentivato anche da iniziative delle amministrazioni pubbliche che in diversi luoghi, un po' in tutta Europa, hanno introdotto diversi servizi di bike sharing ⁽¹⁰⁾.

Accanto a queste innovazioni di tipo logistico, si è avuta anche la diffusione delle cosiddette EPAC (Electric Pedal Assisted Cycle), ovvero biciclette alla cui azione propulsiva umana si aggiunge quella di un motore. In passato era comune l'uso di un motore a combustione interna, mentre negli anni i motori sono quasi esclusivamente elettrici. La bicicletta a pedalata assistita in questa configurazione è molto silenziosa e assicura in media 25-35 km di autonomia con un coefficiente di ripartizione del lavoro 1:1 fra motore e ciclista. Naturalmente l'autonomia si intende con l'ausilio del motore, senza è teoricamente infinita o meglio si spinge fino a dove arrivano le gambe del ciclista.

¹⁰ Il bike sharing (traducibile come “condivisione della bicicletta”, talvolta indicato come servizio di biciclette pubbliche) è uno degli strumenti di mobilità sostenibile a disposizione delle amministrazioni pubbliche che intendono aumentare l'utilizzo dei mezzi di trasporto pubblici (autobus, tram e metropolitane), integrandoli tra loro (trasporto intermodale) e integrandoli dall'utilizzo delle biciclette condivise per i viaggi di prossimità dove il mezzo pubblico non arriva o non può arrivare. È quindi una possibile soluzione al problema dell'”ultimo chilometro”, cioè quel tratto di percorso che separa la fermata del mezzo pubblico alla destinazione finale dell'utente. Oltre a grandi città Europee come Londra e Barcellona, anche in Italia il servizio ha preso piede in 132 città, Forlì inclusa.

La direttiva europea 2002/24/CE¹¹(articolo 1, punto h) definisce la bicicletta a pedalata assistita come una bicicletta dotata di motore elettrico ausiliario e con le seguenti caratteristiche:

- potenza nominale massima del motore elettrico: 0.25 kW;
- alimentazione del motore progressivamente ridotta ed infine interrotta al raggiungimento dei 25 km/h;
- alimentazione del motore elettrico interrotta a qualsiasi velocità se il ciclista smette di pedalare.

Ai veicoli che soddisfano questa direttiva non viene richiesta l'omologazione e sono considerati a tutti gli effetti come le biciclette tradizionali. Veicoli invece che non soddisfano contemporaneamente questi requisiti non possono essere considerati biciclette e devono essere quindi omologati e immatricolati ⁽¹¹⁾ .

Uno dei componenti cruciali di questo tipo di veicolo sono senz'altro le batterie che, seppure in modo fortemente dipendente dal tipo e dal modello, hanno in generale un'autonomia assai variabile in dipendenza di:

- percorso;
- peso complessivo (ciclista più veicolo);
- velocità;
- postura del ciclista;
- tipo di strade.

¹¹ Questa direttiva è stata recepita in Italia con il decreto 31 gennaio 2003 del Ministero delle infrastrutture e dei trasporti ed è pertanto in vigore.

Anche se per un uso cittadino le autonomie raggiunte dalle batterie attuali sono decisamente sufficienti, questa considerazione non è valida per percorsi più lunghi di tipo extraurbano o suburbano.

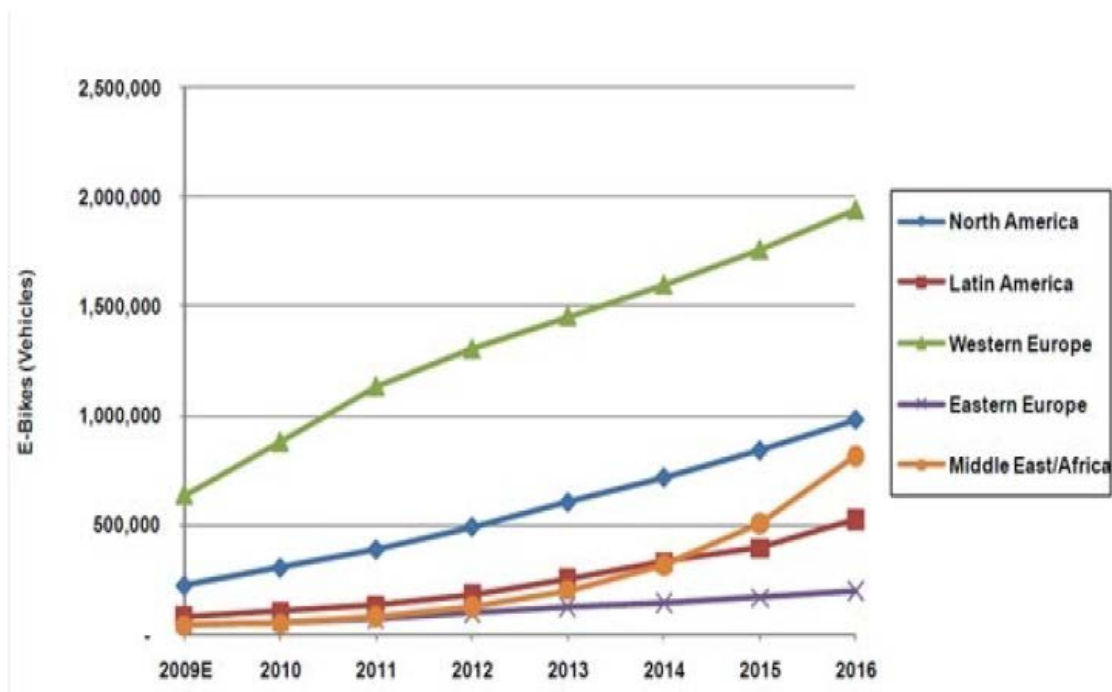


Figura 3.4: Andamento e previsioni al 2016 relative al mercato delle E-bike

Inoltre, all'interno dello scenario che ci può condurre fuori dall'era del carbonio, deve essere considerato un aspetto non trascurabile dei veicolo elettrici (che presumibilmente sostituiranno quelli a motore endotermico) ovvero il loro impiego come piccole centrali "mobili" per la generazione elettrica. Fermo restando che un ciclo completamente pulito può essere realizzato solo impiegando fonti rinnovabili come energia primaria, un veicolo di questo tipo (PHEV Plug - in Hybrid Electric Vehicle), all'interno di un'infrastruttura elettrica "intelligente"⁽¹²⁾ sarebbe in grado, oltre che ricaricare le proprie batterie, di fornire la propria energia in eccesso alla rete, in particolare nel caso in cui fosse alimentato con sistemi ad idrogeno più cella a combustibile.

¹² Per rete intelligente (smart grid) si intende una rete di distribuzione elettrica bidirezionale adatta al trasporto di energia in uno scenario di generazione distribuita in cui gli utenti finali sono anche i produttori di energia in loco e la scambiano tra loro a seconda delle esigenze. Il controllo dei flussi energetici sulla rete deve essere regolato elettronicamente per una distribuzione efficace dell'energia, analogamente a ciò che avviene con internet in ambito informativo.

Capitolo 4

4.1 Storia del cambio

Prima dell'invenzione del cambio si correva con un pignone unico e due rapporti. Per passare da un rapporto all'altro si doveva scendere dalla bicicletta staccare la ruota posteriore e cambiare posizione alla catena. Nel 1933 nasce la ditta Campagnolo⁽¹²⁾ che inventa il cambio a bacchetta(figura 4.1) posizionato sul foderino posteriore destro.



Figura 4.1: Cambio a bacchetta Campagnolo

Era una grande innovazione anche se molto scomoda da utilizzare. Il ciclista infatti doveva raggiungere con le mani le due estremità delle bacchette che si trovavano sul foderino

¹² L'azienda Campagnolo fu fondata da Tullio Campagnolo nel 1933 in seguito al brevetto risalente al 1930 per lo sgancio rapido del mozzo della ruota.

posteriore. Ancora oggi viene utilizzato sulle biciclette che vengono esibite alle manifestazioni storiche.

La continua ricerca da parte di Campagnolo porta alla produzione del cambio a parallelogramma che è l'antecedente del cambio moderno.

Nel 1950 nasce il primo cambio a parallelogramma denominato Gran Sport 1012, una vera innovazione che diventa uno standard per le altre case costruttrici per restare alla pari (figura 4.2).

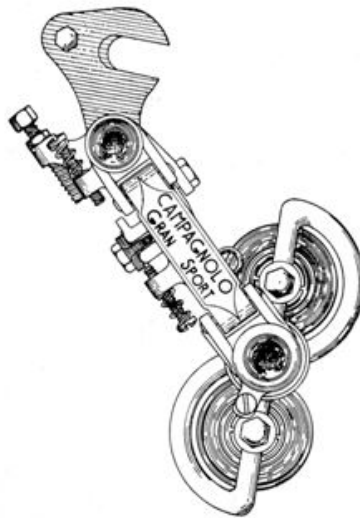


Figura 4.2: Cambio Gran Sport 1012

Con l'avanzare degli anni il sistema si è sempre più sviluppato e anche il campo delle corse su strada ha iniziato a diventare sempre più esigente e questo richiese molti sviluppi e innovazioni nel campo tecnologico.

Una innovazione è stata l'introduzione della guarnitura tripla. Questa permetteva di avere un numero di rapporti ancora maggiore così da poter affrontare le tappe che diventavano sempre più impegnative.

Negli ultimi anni si è vista la nascita del cambio elettronico. Tale cambio consiste in un computer di bordo che calcola sempre il rapporto migliore di pedalata senza sforzare il gruppo di trasmissione e dando al ciclista maggior confort di guida.

4.2 Shimano XTR-Di2

Il gruppo Shimano XTR-Di2 è un gruppo di nuova generazione composto da un cambio elettronico (figura 4.3).



Figura 4.3: Shimano XTR-Di2

Il computer di bordo (attraverso dei sensori) riesce a riconoscere se il conducente ha bisogno di cambiare rapporto oppure no. Il cambio del rapporto può avvenire in modo automatico oppure in modo manuale attraverso una leva posizionata sul manubrio. Il computer di bordo inoltre comunica con i deragliatori anteriore e posteriore.

Lo Shimano XTR-Di2 è munito di guarnitura⁽¹³⁾ a tre corone e da una cassetta⁽¹⁴⁾ a 11 velocità



Figura 4.4: Guarnitura a tre corone Shimano XTR-Di2

¹³ La guarnitura è il sistema di ruote dentate posizionato sul movimento centrale dove sono uniti i pedali.

¹⁴ La cassetta è il sistema di ruote dentate posizionato sul mozzo posteriore della bicicletta.



Figura 4.5: cassetta a 11 velocità Shimano XTR-Di2

Il sistema elettronico del cambio Shimano permette di avere sempre il miglior rapporto di trasmissione e permette di non stressare i componenti. In figura 4.6 vediamo lo schema di cambiata che esegue il computer di bordo.

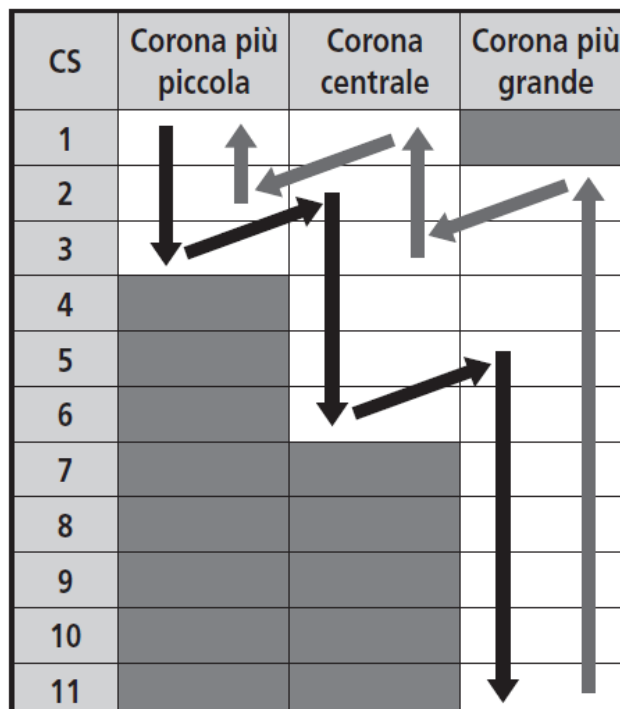


Figura 4.6: schema di cambiata eseguita dal computer elettronico

La possibilità di avere una guarnitura da tre corone e una cassetta da 11 velocità ci permette di avere un'ampia scelta di corone e inoltre ci permette di avere dei rapporti molto spinti. La guarnitura monta tre corone da 40,30,22 denti mentre la cassetta undici corone da 11-13-15-17-19-21-24-27-31-35-40.

Capitolo 5

5.1 Il riduttore

Il particolare cambio automatico, argomento di questa tesi, ha la caratteristica di consentire una variazione continua de rapporto di trasmissione. Questa sua particolare proprietà non gli deriva tanto da una particolare struttura, in quanto risulta quella tipica di un rotismo planetario (vedi figura 5.2), ma dalla possibilità di controllare e quindi modificare la velocità della ruota interna (in figura indicata col numero 3). Dai calcoli che seguono all'interno del capitolo sarà più facile comprenderne il funzionamento.

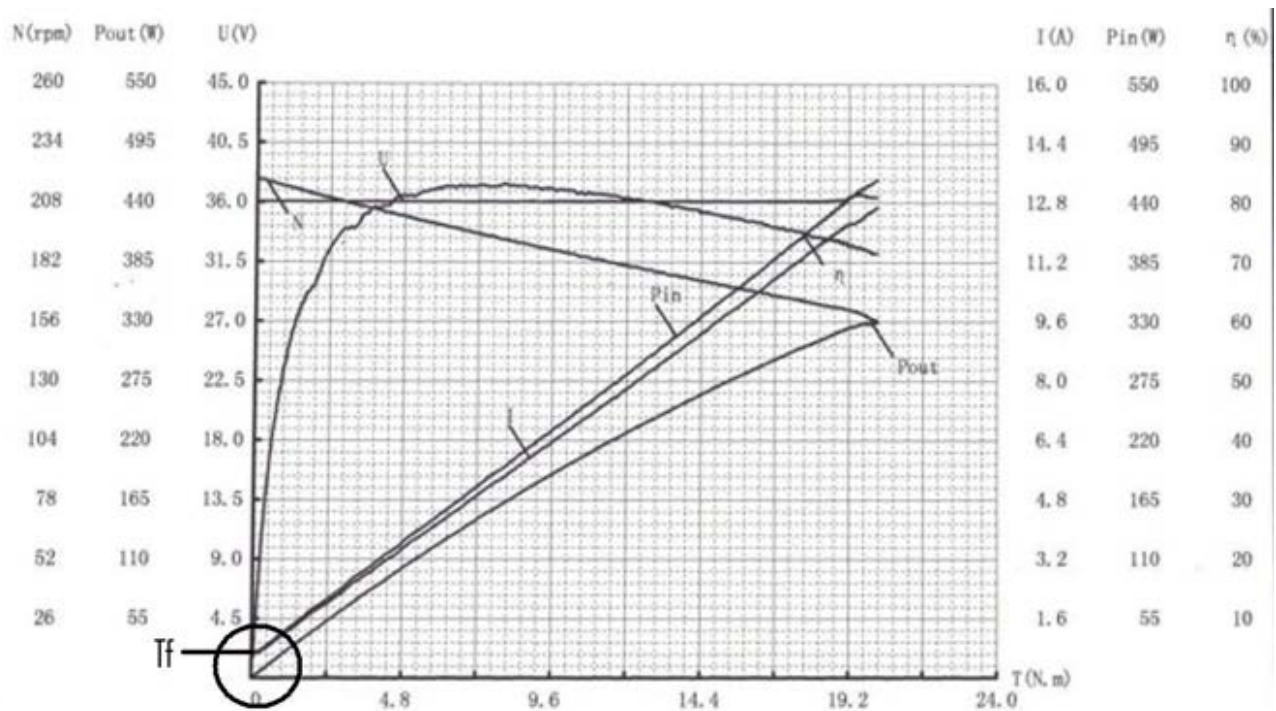


Figura 5.1: Caratteristica motore elettrico

Per progettare la trasmissione abbiamo a disposizione alcune delle caratteristiche meccaniche della bicicletta e del motore utilizzato a massimo rendimento ($\eta_{Max} = 0.82$)

- Numero di giri all'albero motore in condizioni di massimo regime: $n_{1Max} = 195 \text{ rpm}$
- Potenza in condizioni di regime massimo: $P_{1Max} = 137.5 \text{ W}$
- Coppia a rendimento massimo: $C_{1Max} = 6.733 \text{ Nm}$
- Velocità minima di marcia: 2.5 km/h
- Velocità massima di marcia: 25 km/h
- Diametro della ruota posteriore: $0.6604^{(13)}$
- Pendenza massima di salita: 14%
- Peso totale: $125 \text{ kg}^{(14)}$
- Rapporto di trasmissione in caso il motore non funzionasse: $36/18$

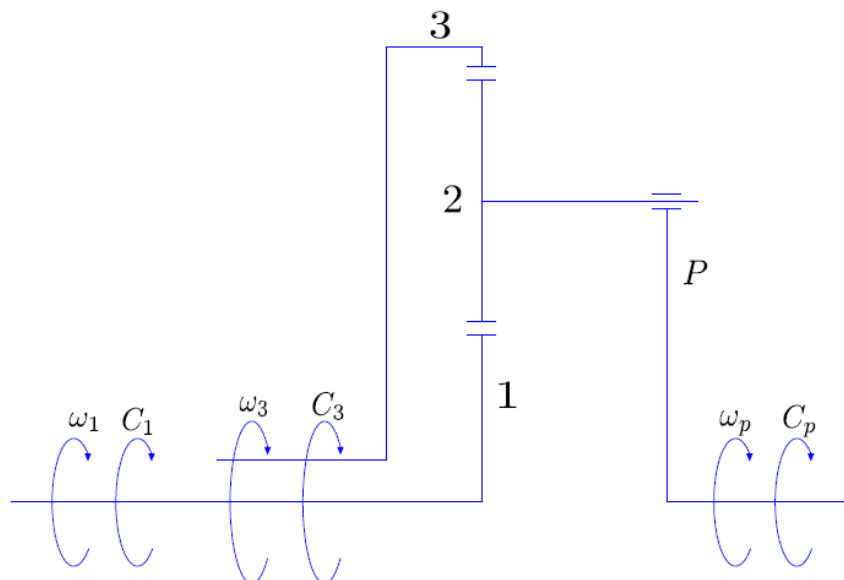


Figura 5.2: Schema del rotismo epicicloidale adottato

¹³ Il diametro della ruota è calcolato tenendo conto di una ruota standard da 26 pollici.

¹⁴ Il peso è composto dal peso del conducente (95kg) e dal peso del veicolo (30kg)

5.2 Forze e coppie resistenti

Il nostro veicolo è soggetto a forze resistenti durante il suo moto quindi occorre conoscere la potenza necessaria al moto da trasmettere alla ruota posteriore e, in definitiva, dimensionare la trasmissione in relazione alla coppia richiesta. Trascurando per il momento gli attriti interni alla trasmissione, la potenza necessaria per il moto a regime è quella necessaria per vincere:

- La resistenza al rotolamento. È dovuta per il 90% all'isteresi del materiale costituente lo pneumatico; nella pratica viene espressa come:

$$X_r = f Z \quad (5.1)$$

in cui Z è la risultante delle pressioni di contatto ruota – suolo ed f è il coefficiente di attrito, misurato sperimentalmente. Tal coefficiente dipende infatti da molti parametri: velocità di marcia, natura e condizioni del fondo stradale, carico sulla ruota, pressione di gonfiaggio, tipo e natura della copertura, dimensioni della ruota temperatura di esercizio, usura del battistrada. Il coefficiente di attrito volvente f , e quindi la resistenza al rotolamento, cresce dunque con la velocità di marcia e l'espressione che viene adottata è:

$$f(V) = f_0 + KV^2 \quad (5.2)$$

in cui f_0 e K sono ricavati sperimentalmente caso per caso. È da notare che comparando il quadrato del termine di velocità, la resistenza di rotolamento cresce piuttosto rapidamente all'aumentare della velocità.

- La resistenza aerodinamica. La resistenza aerodinamica, seppure trascurabile alle basse velocità, già a 20km/h contribuisce per il 10% alla resistenza totale; ai fini pratici la forza F_A dovuta al campo aerodinamico è espressa da

$$F_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x \quad (5.3)$$

in cui ρ è la densità dell'aria, V è la velocità del veicolo (sotto l'ipotesi di assenza di vento), S è la superficie maestra del veicolo e C_x è il coefficiente di resistenza aerodinamica che deve essere calcolato sperimentalmente in galleria del vento o simulato su software CFD.

- La resistenza gravitazionale, ovvero il peso del sistema ciclista più bicicletta.

L'espressione della potenza necessaria a regime risulta pertanto:

$$P_N = V[mg \cos(\theta) (f_0 + KV^2) + \frac{1}{2} \rho S C_x V^2 + mg \sin(\theta)] \quad (5.4)$$

in cui m è la massa complessiva del veicolo, g è l'accelerazione di gravità, f_0 e K sono i coefficienti che compaiono nell'espressione di $f(V)$, e ρ , S , C_x sono rispettivamente la densità dell'aria, la superficie maestra ed il coefficiente di resistenza aerodinamica.

Assumendo i dati in precedenza noi sappiamo che per partire da fermi in salita avremo bisogno di una potenza pari a 199.316 W e quindi di una coppia pari a 65.82 Nm.

5.3 Studio del rapporto di trasmissione

Come già detto il controllo della trasmissione nel cambio oggetto di studio di questo scritto avviene tramite la variazione della velocità angolare della ruota 3. Facendo quindi riferimento al rotismo di figura 5.2, cerchiamo adesso di determinare l'andamento del rapporto di trasmissione in funzione di tale velocità.

Sia l'albero della ruota 1, l'albero definito come movente, mentre l'albero P il cedente. Vale quindi:

$$\tau_{1p} = \frac{\omega_p}{\omega_1} \quad (5.5)$$

Applichiamo ora il metodo di Willis per il calcolo del rapporto di trasmissione nel caso di rotismi epicicloidali. Avremo quindi:

$$\omega_1^0 = \omega_1 - \omega_p ,$$

$$\omega_2^0 = \omega_2 - \omega_p ,$$

$$\omega_3^0 = \omega_3 - \omega_p ,$$

$$\omega_p = 0 ,$$

Il movente ed il cedente nel caso del rotismo ordinario associato saranno rispettivamente la ruota 1 e la 3, perciò il rapporto di trasmissione sarà pari a:

$$\tau_{13}^0 = \frac{\omega_3 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} , \tag{5.6}$$

$$= \frac{\omega_3^0}{\omega_1^0} ,$$

$$= \frac{\omega_3^0}{\omega_2^0} (-1) \frac{\omega_2^0}{\omega_1^0} ,$$

$$= \frac{z_2}{z_3} (-1) \frac{z_1}{z_2} ,$$

$$= - \frac{z_1}{z_3} . \tag{5.7}$$

Consideriamo la 5.6, da cui possiamo ricavare la relazione di ω_p :

$$\tau_{13}^0 = \frac{\omega_3 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} ,$$

$$(\omega_1 - \omega_p) \tau_{13}^0 = \omega_3 - \omega_p ,$$

$$\omega_1 \tau_{13}^0 - \omega_p \tau_{13}^0 = \omega_3 - \omega_p ,$$

$$\omega_1 \tau_{13}^0 - \omega_3 = \omega_p (\tau_{13}^0 - 1) ,$$

$$\omega_p = \frac{\tau_{13}^0}{\tau_{13}^0 - 1} \omega_1 - \frac{1}{\tau_{13}^0 - 1} \omega_3 . \quad (5.8)$$

Riprendiamo l'equazione 5.5, nella quale inseriamo il valore della ω_p appena ricavato nella 5.8, seguirà:

$$\tau_{1p} = \frac{z_1}{z_1 + z_3} + \frac{z_3}{z_1 + z_3} \frac{\omega_3}{\omega_1} . \quad (5.9)$$

La 5.9 rappresenta l'equazione di una retta, avente intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $-z_1/z_3$ e con quello delle ordinate nel punto $z_1/(z_1 + z_3)$. Quindi l'andamento della curva di trasmissione in funzione della velocità angolare ω_3 sarà quello rappresentato in figura 5.3.

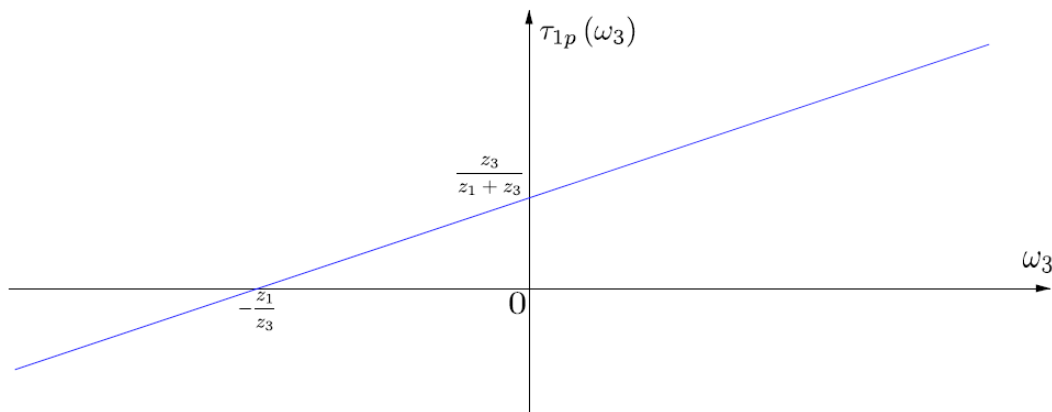


Figura 5.3: Andamento del rapporto di trasmissione in funzione di ω_3

5.4 Dimensionamento cinematico

Per dimensionare correttamente il cambio, in modo da mantenere valide le velocità di marcia della bicicletta, dobbiamo prima calcolare il range di variazione del rapporto di trasmissione. Ipotizzando una ruota standard da 26" ($D_{ruota} = 0.6604$ m), possiamo determinare il legame tra la velocità di marcia e il numero di giri corrispondente. Vale quindi

$$n = \frac{60 v}{\pi D_{ruota}}, \text{ velocità espressa in m/s e il diametro in m}$$

Quindi i giri necessari alle gomme per avere $v_{min} = 0.69$ m/s e $v_{Max} = 6.94$ m/s sono:

$$n_{min} = \frac{60 v_{min}}{\pi D_{ruota}} = 20.083 \text{ rpm}$$

$$n_{Max} = \frac{60 v_{Max}}{\pi D_{Ruota}} = 200.83 \text{ rpm}$$

Ipotizziamo ora che la variazione del rapporto di trasmissione sia tale da permettere al motore elettrico di funzionare sempre al massimo regime, avremo perciò che i valori limite del rapporto di trasmissione totale saranno:

$$\tau'_{min} = \frac{n_{min}}{n_{1Max}} = 0.103 \rightarrow i'_{min} = 9.71$$

$$\tau'_{Max} = \frac{n_{Max}}{n_{1Max}} = 1.03 \rightarrow i'_{Max} = 0.97$$

Considero adesso il rapporto di trasmissione dato dalla guarnitura e dalla cassetta(definito come τ_{ponte}):

$$\tau_{min} = \tau_{ponte} * \tau'_{min} = 0.028 \rightarrow i_{min} = 35.3078$$

$$\tau_{Max} = \tau_{ponte} * \tau'_{Max} = 0.28 \rightarrow i_{Max} = 3.53078$$

Considero quindi

$$\tau(\omega_3 = 0) = \tau_{Max}$$

Il primo passo consiste nel determinare il numero minimo di denti. Per poterlo fare però occorre prima definire le trasmissioni parziali tra le varie ruote, ossia:

$$\tau_{12} = \frac{z_1}{z_2};$$

$$\tau_{23} = \frac{z_2}{z_3}.$$

In riferimento alla figura 3.2, scriviamo:

$$i(\omega_3 = 0) = \frac{z_1 + z_3}{z_1}, \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{matrix} m_{n1} = m_{n2} = m_{n3} = m_n \\ r_1 + 2r_2 = r_3 \end{matrix} \right\} z_1 + 2z_2 = z_3 \quad (5.11)$$

Aggiustando le equazioni 3.10 e 3.11, otteniamo:

$$i(\omega_3 = 0) = 1 + \frac{1}{\tau_{12}\tau_{23}},$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{\tau_{23}} - 2, \quad (5.12)$$

da cui infine è possibile ricavare delle trasmissioni parziali:

$$\tau_{12} = \frac{2}{i(\omega_3=0)-2} = 1.306$$

$$\tau_{23} = \frac{i(\omega_3=0)-2}{2i(\omega_3=0)-2} = 0.302.$$

Ipotizzando che le ruote siano realizzate tramite taglio per involuppo, per esempio con una dentatrice di tipo Fellows, per evitare interferenza di taglio il numero di denti deve essere superiore a:

$$(Z_{min})_{\tau=0} = \frac{2k}{\sin^2(\theta)} = 17.10 \approx 18.$$

Richiamiamo nuovamente le relazioni 5.10 e 5.11, che questa volta useremo per effettuare il dimensionamento cinematico vero e proprio.

Poniamo quindi $z_1 = 26$, allora:

$$z_3 = z_1(i_{min} - 1) = 65.8 \approx 66,$$

$$z_2 \frac{z_3 - z_1}{2} = 20$$

Rimane da determinare il numero di satelliti, a tal proposito definiamo $\Delta\theta_p = \frac{2\pi}{N_s}$ e $\Delta\theta_1 = \frac{2\pi}{z_1} h$ (con $h \in N$), rispettivamente le rotazioni compiute dal portatreno e dalla ruota 1 ed N_s il numero di satelliti.

$$\tau(\omega_3=0) \left. \begin{array}{l} \frac{\Delta\theta_p}{\Delta\theta_1} = \frac{z_1}{hN_s} \\ = \frac{z_1}{z_1+z_3} \end{array} \right\} z_1 + z_3 = h N_s \quad (5.13)$$

Rimane da determinare il numero di satelliti, a tal proposito definiamo $\Delta\theta_p = \frac{2\pi}{N_s}$ e $\Delta\theta_1 = \frac{2\pi}{z_1} h$ (con $h \in N$), rispettivamente le rotazioni compiute dal portatreno e dalla ruota 1 ed N_s il numero di satelliti.

$$\tau(\omega_3=0) \left. \begin{array}{l} \frac{\Delta\theta_p}{\Delta\theta_1} = \frac{z_1}{hN_s} \\ = \frac{z_1}{z_1+z_3} \end{array} \right\} z_1 + z_3 = h N_s \quad (5.13)$$

In maniera del tutto arbitraria è scelto $N_s = 4$.

5.5 Calcolo della velocità

La scelta della soluzione progettuale consiste nel calcolo del numero dei denti nell'ipotesi di $\tau(\omega_3 = 0) = \tau_{min}$ e nella successiva determinazione delle $\omega_3 lim$ alla quale risulti $\tau(\omega_3 = \omega_3 lim) = \tau_{Max}$. Richiamiamo ora l'equazione 3.9, questa volta con lo scopo di ricavare da essa la funzione della velocità angolare ω_3 :

$$\tau = \frac{z_1}{z_1+z_3} + \frac{z_3}{z_1+z_3} \frac{\omega_3}{\omega_1},$$

$$\omega_3 = \omega_1 \left[\left(1 + \frac{z_1}{z_3} \right) \tau - \frac{z_1}{z_3} \right],$$

$$= \frac{\pi n_{1Max}}{30} \left[\left(1 + \frac{z_1}{z_3} \right) \tau - \frac{z_1}{z_3} \right].$$

Poniamo quindi $\tau = \tau_{Max}$, quindi si ha:

$$\omega_{3 \lim} = \frac{\pi n_{1Max}}{30} \left[\left(1 + \frac{z_1}{z_3} \right) \tau_{min} - \frac{z_1}{z_3} \right] = -9.26$$

$$n_{3 \lim} = -90.15 \text{ rpm.}$$

5.6 Calcolo della coppia

Il dimensionamento cinematico risulta completato, tuttavia rimane da verificare se la coppia sprigionata dalla trasmissione sia pari o maggiore della coppia necessaria per partire in salita con la guarnitura più piccola e il pignone più grande.

Lo scopo di questo paragrafo è appunto studiare la coppia C_p . Definiamo a tale scopo le seguenti leggi:

$$C_1 + C_3 + C_p = 0, \quad (5.13)$$

$$\eta_{tot} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_1 + P_{dis}}{P_1}, \quad (5.14)$$

$$P_1 + P_3 + P_p + P_{dis} = 0 \quad (5.15)$$

Valgono inoltre:

$$P_1 = C_1 \omega_1,$$

$$P_3 = C_3 \omega_3,$$

$$P_p = C_p \omega_p ,$$

$$\omega_p = \tau \omega_1 ,$$

le equazioni 3.13, 3.14 e 3.15 diventano:

$$C_1 + C_3 + C_p = 0 , \quad (5.16)$$

$$\eta_{tot} = \frac{C_1 \omega_1 + P_{dis}}{C_1 \omega_1} , \quad (5.17)$$

$$C_1 \omega_1 + C_3 \omega_3 + C_p \tau \omega_1 + P_{diss} = 0 . \quad (5.18)$$

Dalla 3.17 ricaviamo P_{diss} :

$$C_1 \omega_1 \eta_{tot} = C_1 + P_{diss} \rightarrow P_{diss} = C_1 \omega_1 (\eta_{tot} - 1) ,$$

inseriamo poi la relazione P_{diss} nella 3.24 e ricaviamo C_p :

$$C_1 \omega_1 + C_3 \omega_3 + C_p \tau \omega_1 + C_1 \omega_1 (\eta_{tot} - 1) = 0 ,$$

$$C_1 \omega_1 \eta_{tot} + C_3 \omega_3 + C_p \tau \omega_1 = 0 ,$$

$$C_p = - \frac{C_1 \eta_{tot}}{\tau} - \frac{C_3 \omega_3}{\tau \omega_1}$$

Infine inseriamo nella 3.16 l'espressione della C_p e determiniamo quella della C_3 :

$$C_1 + C_3 - \frac{C_1 \eta_{tot}}{\tau} - \frac{C_3 \omega_3}{\tau \omega_1} = 0 ,$$

$$C_1 \left(1 - \frac{\eta_{tot}}{\tau} \right) - C_3 \left(\frac{\omega_3}{\tau \omega_1} - 1 \right) = 0 ,$$

$$C_3 = C_1 \frac{1 - \frac{\eta_{tot}}{\tau}}{\frac{\omega_3}{\tau \omega_1} - 1} .$$

Per fornire una descrizione ancora più precisa delle grandezze in esame, si presentano qui di seguito i grafici delle curve di C_3 e C_p ottenuti tramite l'utilizzo del software Mathematica. Le espressioni inserite in Mathematica sono state semplificate in modo da esprimere C_3 e C_p in funzione della sola variabile n_3 , sono rispettivamente:

$$C_3 = C_1 \frac{n_1 z_1 (1 - \eta_{tot}) + z_3 (n_3 - \eta_{tot} n_1)}{z_1 (n_3 + n_1)},$$

$$C_p = -\frac{z_1 + z_3}{n_1 z_1 + n_3 z_3} \left(n_1 \eta_{tot} + \frac{n_1 z_1 (1 - \eta_{tot}) + z_3 (n_3 - \eta_{tot} n_1)}{z_1 (n_3 + n_1)} n_3 \right) C_1.$$

Il valore del rendimento totale della trasmissione primaria è stato ipotizzato a $\eta_{tot} = 0.96$

Quindi avremo:

$$\begin{aligned} n_3 = 0 \text{ rpm} & & C_3 = -16.14 \text{ Nm} \\ & & C_p = -22.87 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_3 = -90.15 \text{ rpm} & & C_3 = -44.70 \text{ Nm} \\ & & C_p = 553.524 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Come possiamo notare la coppia C_3 non è ancora sufficiente per partire in salita.

Per questo motivo è stato introdotto il gruppo Shimano XTR-Di2.

Il rapporto della trasmissione che è stato considerato per il calcolo della velocità è 40 alla guarnitura e 11 al pignone.

Se noi dobbiamo partire in salita avremo bisogno di una rapporto differente. Il rapporto più leggero disponibile per la nostra trasmissione è di 22 alla guarnitura e di 40 al pignone.

Quindi ricalcolando il rapporto di trasmissione possiamo trovare una coppia in salita con $n_3 = -90.15$ rpm pari a 116 Nm. Essendo la coppia richiesta pari a 65 Nm il veicolo riesce a partire con molta facilità in salita.

5.7 Scelta del secondo motore elettrico

Il secondo motore elettrico è stato scelto uguale al motore elettrico utilizzato in precedenza. Dimensioniamo ora il rapporto di trasmissione tra la corona 3 e il motore elettrico.

$$\tau_{m3} = \frac{n_3}{n_m} = 0.46$$

Trovato il rapporto di trasmissione posso verificare se la coppia a disposizione è necessaria per contrastare la coppia resistente C_3

$$C_{spunto} = \frac{C_{Max}}{\eta * \tau_{m3}} = 15 \text{ Nm} \approx 16 \text{ Nm}$$

Come si può notare la coppia a disposizione è sufficiente per far partire la corona 3.

Il numero dei denti della seconda riduzione quindi sarà (ipotizzando $Z_m = 18$):

$$Z_{3e} = \frac{Z_m}{\tau_{m3}} = 39.13 \approx 40$$

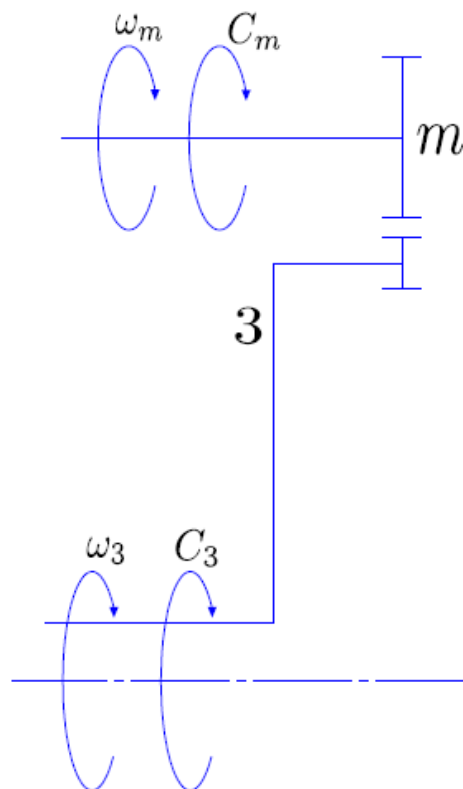


Figura 4.4: trasmissione secondaria

5.8 Schema finale

In figura 4.5 è raffigurato lo schema del sistema di trasmissione completo (compresa il gruppo Shimano XTR-Di2).

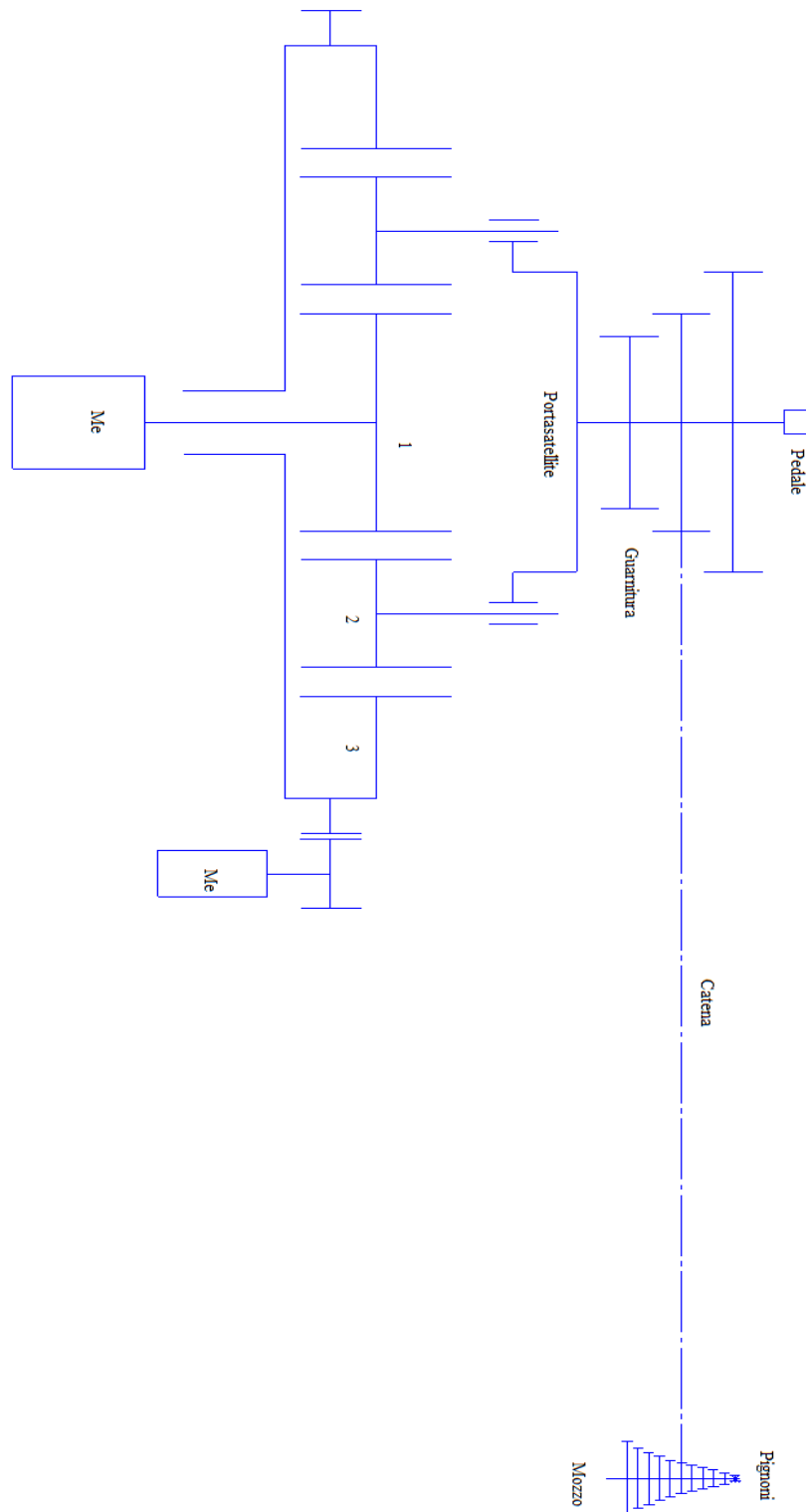


Figura 5.5: Trasmissione con cambio CVT e gruppo Shimano XTR-Di2

Come possiamo notare dalla figura 5.5 sorge il problema di riuscire a pedalare in caso il motore sia spento o la batteria scarica. Per risolvere tale quesito si è deciso quindi di installare tra il portasatellite e la guarnitura un giunto meccanico a innesti frontali con comandi al manubrio così da poter connettere o disconnettere il motore elettrico dalla guarnitura.

In questo modo la nostra bicicletta potrà essere usata sia in modalità normale (giunto disinnescato quindi motore elettrico staccato), sia in modalità elettrica (giunto innescato quindi il motore è unito alla guarnitura) per una assistenza alla pedalata. In figura 5.6 si può vedere la soluzione adottata.

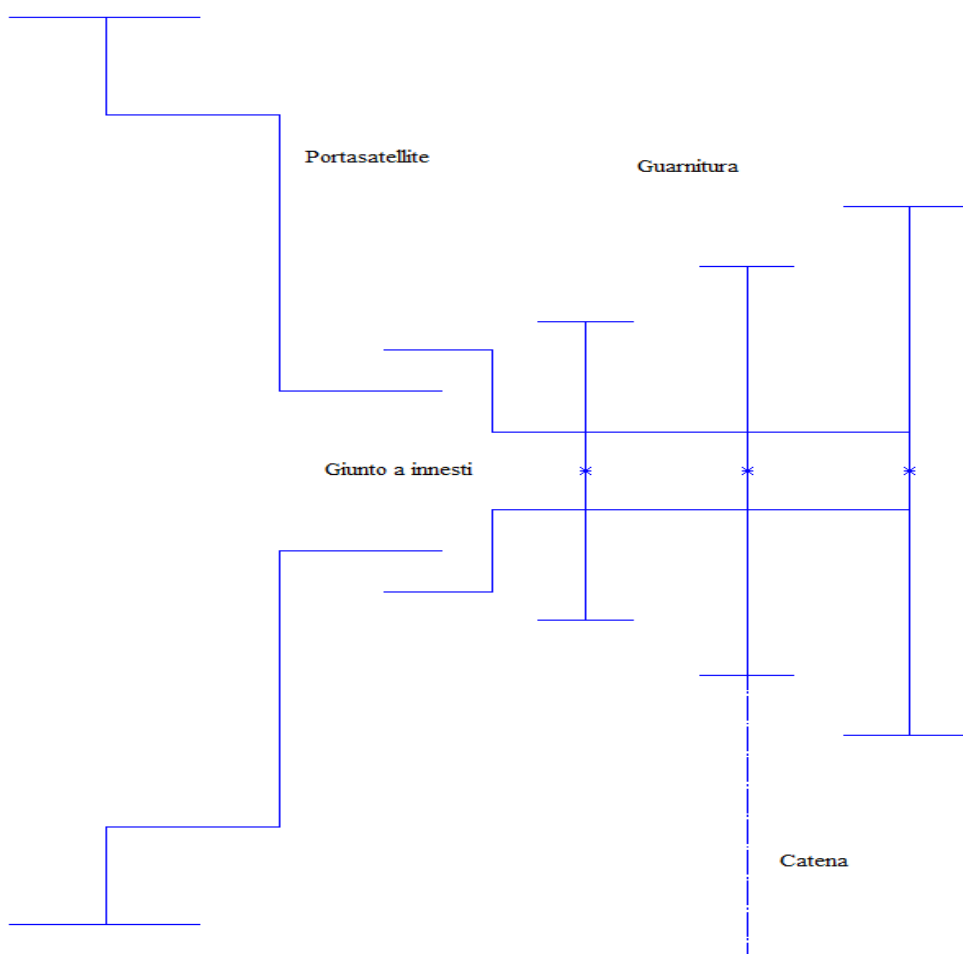


Figura 5.6: Soluzione con innesto a denti frontali

Capitolo 6

Conclusioni

Lo scopo della presente opera è stato quello di progettare un cambio automatico in grado di variare con continuità il rapporto di trasmissione e di permettere al veicolo di partire in salita. Si è voluto sviluppare una bicicletta comune utilizzando componenti già in commercio.

Gli obiettivi preposti sono stati:

- il dimensionamento dei vari membri in conformità alle linee guida delle norme UNI;
- la progettazione di un meccanismo di dimensioni contenute;
- la possibilità di partire in salita senza che il conducente facesse il minimo sforzo.

Visti i risultati ottenuti nei capitoli precedenti possiamo ritenere soddisfatti tutte le richieste che ci eravamo preposte.

Bibliografia

- UNI 4501. Frese modulari a disco per taglio ruote cilindriche diritte, 30 aprile 1960
- UNI 6586. Ruote dentate cilindriche e coniche - Serie dei moduli, 31 dicembre 1969
- UNI 6587. Ruote dentate cilindriche - Dentiera di riferimento, 31 dicembre 1969
- UNI EN 10083 - Parte 1. Acciai da bonifica - Condizioni tecniche generali di fornitura, 28 novembre 2006
- UNI EN 10083 - Parte 2. Accia da bonifica - Condizioni tecniche di fornitura per acciai non legati, 28 novembre 2006
- UNI EN 10083 - Parte 3. Acciai da bonifica - Condizioni tecniche di fornitura per acciai legati, 28 novembre 2006
- UNI EN 10084. Acciai da cementazione - Condizioni tecniche di fornitura, 23 ottobre 2008
- UNI 8862 - Parte 1. Calculation of load capacity of spur and helical gears - Basic principles, introduction and general influence factors, 4 settembre 2006
- Ettore Funaioli, Alberto Maggione, Umberto Meneghetti - *Lezioni di meccanica applicata alle macchine vol.1. Fondamenti di meccanica delle macchine* - Editore Patron
- Ettore Funaioli, Alberto Maggione, Umberto Meneghetti - *Lezioni di meccanica applicata alle macchine vol.2. Elementi di meccanica degli azionamenti* - Editore Patron

- www.ridextr.com/it/di2/ - *Sito web Shimano*
- <http://www.bikeitalia.it/2013/07/19/il-cambio-della-bici-modelli-e-marchi/> - *Sito della storia del cambio*
- http://it.wikipedia.org/wiki/Storia_della_bicicletta - *Sito della storia della bicicletta*