

**Scuola di Scienze**  
**Corso di Laurea Magistrale in Fisica del Sistema Terra**

# **VARIAZIONI DI GRAVITÀ GENERATE DA PROCESSI DEFORMATIVI IN UN SEMISPAZIO ELASTICO**

**Relatore:**  
**Prof. Maurizio Bonafede**

**Presentata da:**  
**Francesco Pintori**

**Sessione III**  
**Anno Accademico 2014/2015**



# **Indice**

Sommario.....	4
Capitolo 1: Introduzione.....	5
1.1 Teoria dell'elasticità.....	5
1.2 Il vettore di Galerkin.....	12
1.3 Sorgenti deformative descritte tramite forze equivalenti.....	15
1.4 Variazioni di gravità.....	17
Capitolo 2: Soluzioni analitiche dell'equazione di Laplace.....	21
2.1 Coordinate cartesiane.....	21
2.2 Funzione armonica assialmente simmetrica.....	22
Capitolo 3: Variazioni di gravità.....	24
3.1 Caso dipolo verticale.....	24
3.2 Caso dipolo orizzontale.....	36
3.3 Caso tre dipoli isotropi.....	50
3.4 Caso dislocazione tensile su piano orizzontale.....	52
3.5 Caso dislocazione tensile su piano verticale.....	55

Capitolo 4: Gravimetria e casi reali.....	60
4.1 Gravimetria.....	60
4.1.1 Gravimetri relativi.....	60
4.1.2 Gravimetri assoluti.....	61
4.2 Campi Flegrei.....	62
4.3 Long Valley Caldera.....	68
Capitolo 5: Applicazioni ai campi Flegrei.....	72
5.1 Evento di sollevamento del suolo.....	72
5.1.1 Caso 1: una sola sorgente di deformazione.....	73
5.1.2 Caso 2: due sorgenti di deformazione.....	75
5.2 Evento di subsidenza.....	81
5.3 Conclusioni.....	83
Bibliografia.....	86
Ringraziamenti.....	88

## ***Sommario***

La precisione delle misure dell'accelerazione di gravità effettuate grazie ai gravimetri più moderni fornisce importanti informazioni relative ai processi deformativi, che avvengono nel nostro pianeta.

In questa tesi il primo capitolo illustra alcuni fondamenti della teoria dell'elasticità ed in particolare la possibilità di descrivere qualunque sorgente deformativa interna alla Terra tramite una distribuzione di "forze equivalenti" con risultante e momento nulli. Inoltre descriviamo i diversi contributi alle variazioni di gravità prodotte da tali eventi.

Il secondo capitolo fornisce alcune tecniche di soluzione dell'equazione di Laplace, utilizzate in alcuni calcoli successivi.

Nel terzo capitolo si sviluppano le soluzioni trovate da Mindlin nel 1936, che analizzò spostamenti e deformazioni generate da una forza singola in un semispazio elastico omogeneo con superficie libera. Si sono effettuati i calcoli necessari per passare da una forza singola a un dipolo di forze e una volta trovate queste soluzioni si sono effettuate combinazioni di dipoli al fine di ottenere sorgenti deformative fisicamente plausibili, come una sorgente isotropa o una dislocazione tensile (orizzontale o verticale), che permettano di descrivere fenomeni reali.

Nel quarto capitolo si descrivono i diversi tipi di gravimetri, assoluti e relativi, e se ne spiega il funzionamento. Questi strumenti di misura sono infatti utilizzati in due esempi che vengono descritti in seguito.

Infine, nel quinto capitolo si sono applicati i risultati ottenuti nel terzo capitolo al fine di descrivere i fenomeni avvenuti ai Campi Flegrei negli anni '80, cercando il tipo di processo deformativo più adatto alla descrizione sia della fase di sollevamento del suolo che quella di abbassamento.

Confrontando le deformazioni e le variazioni residue di gravità misurate prima e dopo gli eventi deformativi con le previsioni dei modelli si possono estrarre importanti informazioni sui processi in atto.

# 1. INTRODUZIONE

## 1.1 Teoria dell'elasticità

### Deformazione di un corpo

In un corpo rigido le distanze relative fra coppie di punti materiali sono fisse. Pertanto, una volta nota la configurazione iniziale del corpo, è sufficiente conoscere la posizione di tre punti per conoscere la configurazione di ogni altro punto ad un istante successivo. Il corpo è deformabile se la distanza tra i punti materiali non è fissa, ed è quindi necessario conoscere le coordinate di ciascun punto in ogni istante di tempo. Sia P un punto materiale che al tempo  $t = 0$  si trova nel punto di coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ; al tempo  $t$  il punto materiale si trovi in  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ; conoscere la configurazione del corpo richiede di conoscere le coordinate  $y_i$  al tempo  $t$  per ciascun punto materiale P. Il punto P può essere identificato tramite la sua posizione  $x_i$  nella configurazione iniziale e allora la configurazione sarà nota se conosciamo le funzioni

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3; t) \quad (1.1)$$

Indichiamo con  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  le posizioni di due punti materiali P e Q nella configurazione di riferimento e sia  $ds_0$  la distanza tra loro; al tempo  $t$ , i punti P e Q siano rispettivamente in  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{y} + d\mathbf{y}$  e sia  $ds$  la distanza tra loro:

$$ds_0^2 = \sum_{k=1}^3 dx_k dx_k, \quad ds^2 = \sum_{k=1}^3 dy_k dy_k$$

Poiché  $y_i$  è funzione di  $\mathbf{x}$  si ha che

$$ds^2 = \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y_k}{\partial x_i} dx_i \right) \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial y_k}{\partial x_j} dx_j \right) \right] \quad (1.2)$$

La variazione di distanza si può scrivere come

$$ds^2 - ds_0^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 E_{ij} dx_i dx_j \quad (1.3)$$

Dove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker ed  $E_{ij}$  è detto *tensore di deformazione*:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) \quad (1.4)$$

E' conveniente riscrivere la (1.4) tramite il vettore spostamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{y}(\mathbf{x},t)-\mathbf{x}$ :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki} \right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj} \right) \right] - \delta_{ij} \right\} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.5)$$

Se  $d\mathbf{u}$  è infinitesimo rispetto a  $d\mathbf{x}$  i termini quadratici nella (1.5) possono essere trascurati ottenendo il *tensore infinitesimo di deformazione*

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

### Tensore di sforzo

Studiamo un corpo  $B$  a un certo istante  $t$ : immaginiamo al suo interno una superficie chiusa  $S$  e consideriamone una porzione infinitesima  $\Delta S$ . Sia  $\mathbf{n}$  la normale esterna su  $\Delta S$ ; possiamo così distinguere le due facce di  $\Delta S$  secondo la direzione di  $\mathbf{n}$ . Consideriamo il materiale che giace sulla faccia positiva di  $\Delta S$ . Questo materiale esercita una forza  $\Delta \mathbf{F}$  sul materiale posto sulla faccia negativa: la forza  $\Delta \mathbf{F}$  dipende dall'area e dall'orientazione della superficie. Assumiamo che il rapporto  $\Delta \mathbf{F}/\Delta S$  tenda ad un limite finito  $\frac{d\mathbf{F}}{dS}$  al tendere di  $\Delta S$  a zero e che il momento delle forze su  $\Delta S$  sia nullo. Il vettore limite prende il nome di *trazione*

$$T_i(\mathbf{n}) = \frac{dF_i}{dS}$$

Dove abbiamo esplicitamente previsto che  $T_i$  dipenda dall'orientazione della normale  $\mathbf{n}$ . Consideriamo ora il caso in cui la superficie  $\Delta S_k$  sia parallela ad uno dei piani coordinati e la normale su  $\Delta S_k$  sia nella direzione positiva  $\mathbf{e}^{(k)}$  dell'asse  $x_k$ . La trazione su  $\Delta S_k$  sarà denotata con  $\mathbf{T}(\mathbf{e}^{(k)})$  con componenti  $T_1(\mathbf{e}^{(k)})$ ,  $T_2(\mathbf{e}^{(k)})$ ,  $T_3(\mathbf{e}^{(k)})$  lungo gli assi  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  rispettivamente. L'indice  $k$  indica la superficie sulla quale agisce la trazione. Introduciamo dei nuovi simboli:

$$T_1(\mathbf{e}^{(k)}) = \tau_{k1}, \quad T_2(\mathbf{e}^{(k)}) = \tau_{k2}, \quad T_3(\mathbf{e}^{(k)}) = \tau_{k3}$$

Secondo questa notazione,  $\tau_{ki}$  è la componente  $i$ -esima della trazione che il materiale posto sulla faccia positiva di  $S_k$  esercita sul materiale posto sulla faccia negativa. Ad esempio,  $\tau_{11}$  è positivo se il materiale posto sulla faccia positiva tira verso l'esterno il materiale posto sulla faccia negativa, mentre  $\tau_{11}$  è negativo se il materiale posto sulla faccia positiva spinge verso l'interno il materiale sulla faccia negativa. Le componenti delle trazioni sui piani coordinati prendono il nome di *sforzi*; le diverse componenti dello sforzo possono essere organizzate in una matrice quadrata  $|\tau_{ki}|$ , in cui il primo indice denota la faccia coordinata su cui agisce la trazione e il secondo indice denota la componente della trazione: gli elementi diagonali  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$ ,  $\tau_{33}$  sono detti *sforzi normali*, gli altri elementi  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{13}$ ,... sono detti *sforzi di taglio*. Gli sforzi hanno dimensioni di una forza per unità di superficie e, nel sistema SI sono espressi in Pascal (Pa),  $1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$ .

### Relazioni costitutive per materiali elastici

Utilizzando il primo ed il secondo principio della termodinamica è possibile ricavare, per un processo reversibile, la seguente espressione:

$$dE = TdS + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.7)$$

In cui  $E$  è la densità di energia interna per unità di massa,  $T$  la temperatura assoluta e  $S$  l'entropia. Impiegando l'energia libera di Helmholtz (per unità di massa)  $F = E - TS$  e la relazione (1.7) otteniamo

$$dF = -SdT + \frac{1}{\rho} \tau_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (1.8)$$



Ed essendo  $dF$  un differenziale esatto dovremo avere

$$-S = \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}}, \quad \tau_{ij} = \rho \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T \quad (1.9)$$

Consideriamo ora un corpo in una configurazione iniziale caratterizzata da temperatura  $T^{(0)}$  e da deformazione nulla  $\varepsilon_{ij}^{(0)} = 0$ . Supponiamo inoltre che in questa configurazione di riferimento sia  $\tau_{ij}^{(0)} = 0$ . Sviluppiamo in serie l'energia libera di Helmholtz (per unità di massa)  $F(T, \varepsilon_{ij})$  attorno alla configurazione di riferimento, fino al secondo ordine:

$$\begin{aligned} F(T, \varepsilon_{ij}) = & F(T^{(0)}, \varepsilon_{ij}) + \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_0 \Delta T + \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_0 (\Delta T)^2 \\ & + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 \Delta T \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dove  $\Delta T = T - T^{(0)}$  e il suffisso "0" indica che tutte le derivate sono calcolate nella configurazione di riferimento sopra descritta. In base alla (1.9), il primo termine  $\left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_0$  fornisce l'entropia (a meno del segno) nella configurazione di riferimento  $-S^{(0)}$ , e il secondo termine  $\left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0$  fornisce (a parte il fattore  $\frac{1}{\rho}$ ) lo sforzo nella configurazione di riferimento, che è nullo per ipotesi. Lo sforzo nella configurazione deformata sarà quindi dato dalla *legge di Duhamel-Neumann*:

$$\tau_{ij} = \rho \left( \frac{\partial F(T, \varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \Delta T \quad (1.11)$$

Dove

$$C_{ijkl} = \rho \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0, \quad \beta_{ij} = -\rho \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right)_0$$

In una deformazione isoterma per la quale  $\Delta T = 0$ , otteniamo la legge di Hooke generalizzata

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.12)$$

I coefficienti  $C_{ijkl}$  sono pertanto detti *coefficienti elastici isotermi*.

### Relazioni costitutive per mezzi elastici isotropi

Un materiale isotropo è un materiale le cui proprietà sono invarianti per rotazione. Pertanto, l'energia di deformazione può dipendere dalla deformazione solo tramite quantità scalari. Le grandezze scalari (invarianti) che possiamo costruire a partire dalle componenti del tensore deformazione si ottengono semplicemente contraendo tutti gli indici tensoriali. L'unico invariante del primo ordine che possiamo costruire è  $I_1 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \varepsilon_{ii}$ . Invarianti del secondo ordine sono  $I_1^2$  e  $I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$ . Nello sviluppo (1.10) dell'energia libera di Helmholtz (arrestato al secondo ordine) potranno comparire solo invarianti del primo ordine e del secondo ordine in  $\varepsilon_{ij}$  e  $\Delta T$ :

$$F(T, I_1, I_2) = F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_0 \Delta T + \left(\frac{\partial F}{\partial I_1}\right)_0 I_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial I_2}\right)_0 I_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial I_1^2}\right)_0 I_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_0 (\Delta T)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial I_1 \partial T}\right)_0 I_1 \Delta T$$

Lo sforzo è dato dalla relazione  $\tau_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$ ; inoltre notando che  $\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \delta_{ki}\delta_{kj} = \delta_{ij}$  e analogamente  $\frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\varepsilon_{ij}$  otteniamo:

$$\tau_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = a \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \beta \Delta T \delta_{ij}$$

Dove

$$a = \rho \left(\frac{\partial F}{\partial I_1}\right)_0, \quad \mu = \rho \left(\frac{\partial F}{\partial I_2}\right)_0, \quad \lambda = \rho \left(\frac{\partial^2 F}{\partial I_1^2}\right)_0, \quad \beta = -\rho \left(\frac{\partial^2 F}{\partial I_1 \partial T}\right)_0$$

Lo sforzo nella configurazione di riferimento ( $\Delta T = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ ) è nullo per ipotesi e quindi  $a = 0$ . Per le piccole deformazioni inoltre possiamo trascurare le variazioni di  $\rho$  e quindi considerare costanti  $\lambda, \mu$  e  $\beta$  e scrivere la relazione costitutiva per materiali isotropi nella forma:

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \Delta T \delta_{ij} \quad (1.13)$$

I parametri  $\lambda, \mu$  sono detti *parametri di Lamè isotermi*.

La precedente relazione costitutiva può essere facilmente invertita per ottenere una relazione che fornisca la deformazione  $\varepsilon_{ij}$  prodotta da un assegnato stato di sforzo  $\tau_{ij}$  e una assegnata variazione di temperatura  $\Delta T$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \tau_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \beta \Delta T \delta_{ij} \quad (1.14)$$

Utilizzando le costanti di Lamè e le relazioni costitutive precedentemente presentate è possibile definire altri parametri. Uno di questi, di cui faremo ampio uso in seguito, è il *modulo di Poisson*  $\nu$ , definito come il rapporto tra contrazione relativa trasversale ed allungamento longitudinale a seguito dell'applicazione di una trazione uniassiale (a temperatura costante). Utilizzando (1.13) e (1.14) si ottiene:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1.15)$$

### Teorema di unicità

Consideriamo il problema elastostatico di determinare lo stato di sforzo e deformazione in un mezzo soggetto a forze di volume  $f_i$  e trazioni  $T_i(\mathbf{n})$ . Assumiamo che esista una funzione  $W_V(\varepsilon_{ij})$  detta *energia di deformazione*, definita positiva, con la proprietà che

$$\frac{\partial W_V}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ij} \quad (1.16)$$

L'energia deve essere definita positiva affinché lo stato naturale sia una configurazione di equilibrio stabile.

L'equazione di equilibrio statico  $\tau_{ij,j} + f_i = 0$  può risciversi in termini di  $W_V$  come

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial W_V}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) + f_i = 0 \quad (1.17)$$

Le condizioni al contorno sulla superficie del corpo  $S$  siano assegnate tramite spostamenti noti  $u_i$  su una porzione  $S_u$  e trazioni note  $\tau_{ij}n_j$  sulla parte restante  $S_\tau$ . Se  $S_u = \emptyset$  ne consegue che  $S_\tau = S$  e l'equilibrio statico può verificarsi solo se il sistema delle forze di volume e di superficie soddisfa le condizioni di equilibrio statico per l'intero corpo; in ogni caso gli spostamenti sarebbero indeterminati a meno di una roto-traslazione. Sotto le precedenti ipotesi, si prova il seguente *Teorema di unicità di Kirchoff*: la soluzione del problema di equilibrio statico di un corpo elastico soddisfacente alle condizioni sopra elencate è unica, nel senso che lo stato di sforzo e deformazione è determinato senza ambiguità (a patto che gli sforzi siano abbastanza piccoli, che la funzione di energia di deformazione esista e sia definita positiva).

### Equazione di Cauchy-Navier

Le equazioni che descrivono l'equilibrio meccanico di un solido elastico sono:

l'equazione di continuità  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$ , l'equazione del moto  $\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$  e la relazione costitutiva elastica  $\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ . Incorporando nell'equazione del moto la relazione costitutiva elastica e l'equazione di continuità, trascurando i termini del secondo ordine, otteniamo l'equazione di Cauchy-Navier:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.18)$$

Se invece ci interessa studiare lo spostamento in un generico punto  $\mathbf{x}$  dovuto ad una forza applicata in  $\mathbf{x}'$  occorre applicare la *funzione di Green*. Utilizzando le relazioni costitutive per un mezzo elastico, omogeneo, isotropo possiamo arrivare a ottenere il *tensore di Somigliana*  $G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  che esprime proprio la componente  $i$ -esima dello spostamento in  $\mathbf{x}$  dovuto a una forza unitaria applicata in  $\mathbf{x}'$  in direzione dell'asse  $j$ -esimo

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{(x_j - x'_j)(x_i - x'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \quad (1.19)$$

## 1.2 Il vettore di Galerkin

La superficie terrestre può essere descritta con ottima approssimazione come una superficie libera, cioè come una superficie sulla quale sono nulle le trazioni applicate dall'esterno; nell'impiego di questa condizione al contorno trascuriamo l'azione di corpi esterni alla superficie solida della Terra. La più intensa fra queste forze esterne è la pressione atmosferica, ma un semplice calcolo mostra che la pressione litostatica, già a 4-5 metri di profondità, supera la pressione atmosferica; dato che le sorgenti sismiche e vulcaniche sono tipicamente localizzate a profondità di diversi km, l'approssimazione di superficie libera può essere ritenuta valida con ottima approssimazione.

Una tecnica molto versatile, che può essere impiegata per "rimuovere" trazioni non nulle dalla superficie  $z=0$ , fa uso del vettore di Galerkin, che fornisce una rappresentazione molto generale degli spostamenti e sforzi in un problema di elasticità statica.

Per il teorema di Helmholtz un generico campo vettoriale, come il campo di spostamento  $\mathbf{u}$ , può essere descritto come somma di due termini: il gradiente di un potenziale scalare  $\phi$  e il rotore di un potenziale vettore  $\vec{\psi}$

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (1.20)$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione di Cauchy-Navier tramite i potenziali  $\phi$  e  $\vec{\psi}$ :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2 \phi) + \mu\nabla \times (\nabla^2 \vec{\psi}) \quad (1.21)$$

Questa equazione, nel caso statico, è certamente soddisfatta se  $\nabla^2 \phi = \text{cost}$  e  $\nabla^2 \psi_k = \text{cost}$ . Tuttavia questa non è la soluzione più generale, perché  $\phi$  e  $\psi_k$  sono in generale interdipendenti. Nel 1930 Galerkin, alla ricerca di soluzioni più generali, introdusse una funzione potenziale vettore che soddisfa ad una equazione biarmonica. Consideriamo ancora la rappresentazione di Helmholtz

$$2\mu u_i = \phi_i + e_{ijk} \psi_{k,j} \quad (1.22)$$

E supponiamo che  $\psi_k$  sia a sua volta generato da un campo vettoriale  $\tilde{G}_l$

$$\psi_k = -e_{klm} c \tilde{G}_{m,l} \quad (1.23)$$

dove  $c$  è una costante da determinare. Impiegando l'identità  $e - \delta$  otteniamo

$$2\mu u_i = c G_{i,jj} - G_{j,ji} \quad (1.24)$$

dove  $G_i = \tilde{G}_i + H_i$  e  $H_i$  è una opportuna funzione armonica (cioè  $H_{i,jj} = 0$ ). Inserendo la (1.25) nell'equazione di Cauchy-Navier

$$\left[ \frac{c-1}{2(1-2\nu)} - \frac{1}{2} \right] G_{j,jii} + \frac{c}{2} G_{k,jji} + f_k = 0$$

dove abbiamo usato la relazione tra le costanti di Lamè e il modulo di Poisson  $\frac{\mu}{\lambda+\mu} = 1 - 2\nu$ ; il coefficiente del primo termine si annulla se  $c = 2(1 - \nu)$ .

In conclusione, l'equazione di Cauchy-Navier è soddisfatta se

$$2\mu u_i = 2(1 - \nu) G_{i,jj} - G_{j,ji} \quad (1.25)$$

dove  $G_i$  soddisfa all'equazione

$$G_{i,jjkk} = -\frac{f_i}{(1-\nu)} \quad (1.26)$$

Il vettore  $G_i$  così definito è il *vettore di Galerkin*. Se le forze di volume sono nulle ( $f_i = 0$ ) l'equazione è detta *biarmonica* e le sue soluzioni sono dette *funzioni biarmoniche*. Dalla (1.26) otteniamo facilmente, tramite le relazioni costitutive, le espressioni per gli sforzi in termini di  $G_1, G_2, G_3$ . Tramite una distribuzione di questi vettori è poi possibile descrivere una qualsiasi sorgente di deformazione interna.

Se le forze di volume sono nulle si può inoltre dimostrare, grazie al teorema di Fung, che ogni vettore di Galerkin ha un vettore di Galerkin equivalente con una componente identicamente nulla.

## Soluzioni di Mindlin

Consideriamo un semispazio solido limitato superiormente dal piano  $z = 0$  avente l'asse  $z$  diretto verso l'interno del solido stesso. Sia  $P$  una forza applicata nel punto  $(0,0,+c)$  agente lungo la direzione positiva dell'asse  $z$ ; poiché lo sforzo che ne consegue è simmetrico rispetto all'asse  $z$  è possibile ricondursi a un vettore di Galerkin avente solo la componente lungo  $z$  non nulla: *la funzione di strain di Love*, che indichiamo con  $Z$ .

Per soddisfare la condizione al contorno di superficie libera è necessario calcolare le trazioni che la forza  $P$  genera in  $z = 0$  e sottrarre la soluzione di un problema nel semispazio  $z \geq 0$  avente in  $z = 0$  le stesse trazioni causate dalla forza. La funzione di Love ci permette di risolvere tale problema.

Il vettore di Galerkin cercato corrisponde dunque alla funzione  $Z$ :

$$Z = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left\{ R_1 + (3-4\nu)R_2 - \frac{2c(z+c)}{R_2} - 4(1-2\nu)c \log(R_2 + z + c) + 4(1-\nu)(1-2\nu)[(z+c) \log(R_2 + z + c) - R_2] + \frac{2c^2}{R_2} \right\} \quad (1.27)$$

in cui

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; R_1 = \sqrt{r^2 + (z-c)^2}; R_2 = \sqrt{r^2 + (z+c)^2}.$$

Nel caso in cui la forza sia invece diretta parallelamente al piano  $z = 0$ , ad esempio lungo l'asse  $x$ , è possibile trovare un vettore di Galerkin che soddisfi le condizioni di superficie libera e avente una componente nulla, in accordo con il teorema di Fung.

$$\mathbf{G} = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left( \mathbf{i} \left\{ R_1 + R_2 - \frac{2c^2}{R_2} + 4(1-\nu)(1-2\nu)[(z+c) \log(R_2 + z + c) - R_2] \right\} + \mathbf{k} \left\{ \frac{2cx}{R_2} + 2(1-2\nu)x \log(R_2 + z + c) \right\} \right) \quad (1.28)$$

in cui  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{k}$  sono rispettivamente i versori dell'asse  $x$  e  $z$ .

### 1.3 Sorgenti deformative descritte tramite forze equivalenti

Per rappresentare un evento di fagliazione di taglio, un sistema di forze apparentemente plausibile è costituito da una coppia di forze, localizzate sulle due pareti della faglia e dirette in direzioni opposte, tangenti alla faglia stessa. Tuttavia questo sistema di forze non è fisicamente accettabile, in quanto che prevede un momento risultante non nullo, mentre un sistema di forze interne deve avere risultante e momento risultante nulli.

Consideriamo una superficie di dislocazione  $\Sigma$  orientata secondo la normale  $\mathbf{n}$ , sulla quale è definita una discontinuità  $b_l$  del campo di spostamento

$$b_i = u_i^{(+)} - u_i^{(-)}$$

in cui  $u_i^{(+)}$ ,  $u_i^{(-)}$  denotano i vettori spostamento calcolati rispettivamente sulla faccia positiva e negativa di  $\Sigma$ . E' possibile associare a questo spostamento discontinuo una deformazione singolare  $\varepsilon_{ij}^{(s)}$  data dalla seguente espressione

$$\varepsilon_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} (n_i b_j + n_j b_i) \delta(\zeta) \chi_\Sigma(\mathbf{x}) \quad (1.29)$$

dove  $\zeta = 0$  è l'equazione di  $\Sigma$ , la coordinata  $\zeta$  è diretta perpendicolarmente a  $\Sigma$  nel verso di  $\mathbf{n}$  e  $\chi_\Sigma$  è la funzione caratteristica di  $\Sigma$ :

$$\chi_\Sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \Sigma \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \Sigma \end{cases}$$

Il vettore  $u_i^{(s)}$ , che subisce un salto  $b_i$  nel passare da  $\zeta = 0^-$  a  $\zeta = 0^+$ , si scrive

$$u_i^{(s)} = b_i H(\zeta) \chi_\Sigma(\mathbf{x})$$

dove  $H(\zeta)$  è la funzione di Heaviside

$$H(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{se } \zeta > 0 \\ 0, & \text{se } \zeta < 0 \end{cases}$$



Lo spostamento discontinuo e la deformazione singolare non sono accompagnate da uno sforzo, dato che la dislocazione implica una rottura dei legami molecolari. Tuttavia, se vogliamo trattare il mezzo fratturato “come se” fosse un continuo elastico, possiamo farlo, a patto di rimuovere lo sforzo singolare indebitamente introdotto. Questo risultato può essere ottenuto introducendo nelle equazioni di equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

una forza di volume fittizia  $f_i^{(s)}$  localizzata sulla superficie di dislocazione  $\Sigma$  e tale da annullare l'effetto degli sforzi singolari introdotti indebitamente

$$f_i^{(s)} = -\frac{\partial \tau_{ji}^{(s)}}{\partial x_j} = -C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}^{(s)}}{\partial x_j} \quad (1.30)$$

Le forze  $f_i^{(s)}$  sono chiaramente localizzate sulla superficie di dislocazione e prendono il nome di forze di volume equivalenti.

Il vantaggio di questa formulazione sta nel fatto che la frattura può essere considerata equivalente, ai fini del calcolo del campo di spostamento (e quindi anche del calcolo di deformazioni e sforzi) al sistema di forze descritto dalla (1.30), agente in un mezzo continuo. Se è nota la funzione di Green per il corpo considerato, siamo quindi in grado di scrivere formalmente la soluzione del problema dislocativo.

In uno spazio elastico, omogeneo ed illimitato possiamo scrivere

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_V G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f_j^{(s)}(\mathbf{x}') dV' \quad (1.31)$$

dove  $G_{ij}$  è la funzione di Green per un mezzo illimitato, descritta in precedenza, che dipende solo dalla differenza  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , e  $dV'$  indica che le variabili di integrazione sono quelle “primate”; l'integrale può essere considerato esteso a tutta la Terra ( $f_j^{(s)} = 0$  fuori di  $\Sigma$ ). Sostituendo nella precedente espressione l'equazione (1.30) si ottiene

$$\varepsilon_{kl}^{(s)} dV = (n_k b_l + n_l b_k) d\Sigma$$

dove  $n_k$  è la normale alla superficie di dislocazione  $d\Sigma$  e  $b_l$  la discontinuità del campo di spostamento.

Per distanze dalla superficie  $\Sigma$  molto maggiori delle dimensioni di  $\Sigma$ ,

$$u_i(\mathbf{x}) = M_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{x}) \quad (1.32)$$

dove

$$M_{jk} = C_{jklm} b_l n_m A_\Sigma \quad (1.33)$$

è detto *momento della dislocazione*; indichiamo con  $A_\Sigma$  l'area della superficie di dislocazione.

## 1.4 Variazioni di gravità

La causa più ovvia della variazione della gravità dovuta a un processo deformativo è lo spostamento del punto in cui la gravità viene misurata: dal momento che le variazioni della gravità in direzione orizzontale sono molto minori delle variazioni verticali, si considera solo quest'ultima componente nella *correzione di aria libera*: se il suolo si alza da  $z = 0$  al tempo  $t = 0$  a  $z = z_0$  al tempo  $t = t_0$ , dobbiamo confrontare la misura di gravità effettuata al tempo  $t_0$  con la misura che avremmo misurato nello stesso punto  $z_0$  al tempo  $t = 0$ ; quest'ultima misura può essere calcolata applicando la correzione in aria libera.

Il valore della correzione in aria libera è il seguente:

$$\frac{\Delta g}{\Delta z} = -2 \frac{g}{R} \sim -308 \mu\text{Gal}/m$$

dove  $R$  è il raggio della Terra.

Una volta applicata la correzione in aria libera, la differenza di gravità rimanente, che indichiamo con il termine *residuo*, è dovuto solamente alla redistribuzione della densità: integrando l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

dove  $\mathbf{v}$  è il campo della velocità, otteniamo, in un punto  $\mathbf{r}$  fissato nello spazio:

$$\Delta \rho = -\mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.34)$$

dove  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \Delta t$  è lo spostamento dalla configurazione iniziale al tempo  $t = 0$  alla configurazione finale  $t = \Delta t$  e  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon_{kk}$  è la traccia del tensore di deformazione  $\varepsilon_{ij}$ .

Il potenziale della differenza di gravità  $\Delta U$  e la variazione dell'accelerazione di gravità  $\Delta \mathbf{g}$  in un punto  $\mathbf{r}$  dovuto alla variazione di densità  $\Delta \rho$  in un generico punto  $\mathbf{r}'$  può essere scritta

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\Delta \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad , \quad \Delta \mathbf{g} = -\nabla(\Delta U) = -G \int_V \Delta \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

dove  $V$  è il dominio nel quale  $\Delta \rho \neq 0$  e si utilizza la forma  $dV'$  per denotare che l'integrazione viene fatta sulla variabile  $\mathbf{r}'$ . Dal momento che  $\Delta g \ll g$  per la maggior parte delle applicazioni pratiche, solamente la componente verticale  $\Delta g_z$  contribuisce al primo ordine per incrementare il modulo della accelerazione:

$$\Delta g = \Delta g_z = -G \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_V \Delta \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right\} \quad (1.35)$$

Come si nota dall'equazione (1.34) possiamo distinguere due differenti contributi che contribuiscono alla variazione di gravità:

### 1) Il contributo $\Delta g_B$

E' dovuto allo spostamento normale rispetto ai confini delle regioni a densità costante. In un semispazio omogeneo questo contributo è localizzato sopra la superficie del suolo dove  $\Delta \rho = \pm \rho$  (positivo in caso di sollevamento e negativo in caso di subsidenza), è un contributo importante dal momento che il valore di  $\Delta \rho$  è grande anche se il dominio di integrazione è piccolo, essendo confinato tra  $z = 0$  e  $z = u_z$  (spostamento della superficie terrestre).

Utilizzando il teorema di Gauss

$$\oint_{\partial V} \Delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi G \Delta M_{int} \quad (1.36)$$

dove  $\Delta M_{int}$  è la variazione di massa racchiusa in  $\partial V$ . Se impieghiamo come  $\partial V$  una superficie cilindrica di altezza infinitesima avente la base inferiore nella regione  $z > 0$  e la base superiore in  $z < 0$ , aventi entrambe estensione  $A$ , possiamo calcolare l'integrale e ottenere

$$-2A|\Delta g| = -4\pi G \rho_0 A |u_z|$$

Da questa si ottiene la formula

$$\Delta g_{B0} = -2\pi G \rho_0 u_z \quad (1.37)$$

## 2) Il contributo $\Delta g_\varepsilon$

E' dovuto alla dilatazione (se  $\varepsilon_{kk} > 0$ ) o contrazione (se  $\varepsilon_{kk} < 0$ ) del mezzo, è importante per ragioni opposte a  $\Delta g_B$ , dal momento che  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  è tipicamente piccolo ma il dominio di integrazione è l'intero semispazio.

Inserendo l'equazione (1.20) nella relazione  $\Delta \rho = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}$  otteniamo  $\Delta \rho = -\rho_0 \nabla^2 \phi$ . Possiamo dunque riscrivere la (1.35) come:

$$\Delta g_\varepsilon = -G \rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \int_V \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

dove  $\nabla'^2$  è il laplaciano rispetto alle coordinate primarie  $\mathbf{r}'$ . Possiamo riscrivere questo integrale utilizzando la seconda identità di Green con  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ :

$$\int_V \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \phi(\mathbf{r}') dV' = \int_V \phi(\mathbf{r}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} \left[ \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'}(\mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi}{\partial n'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS'$$

dove  $\partial V$  è la superficie che racchiude il semispazio  $V$  e  $n'$  è la coordinata normale alla superficie  $dS'$ , diretta verso l'esterno. E' possibile aggiungere a  $\emptyset$  una qualsiasi funzione armonica  $\emptyset_0$ , con  $\nabla^2 \emptyset_0 = 0$ , senza modificare il valore dell'integrale a sinistra dell'uguale; scegliamo dunque  $\emptyset_0$  in modo che  $\emptyset^* = \emptyset + \emptyset_0$  si annulli su  $\partial V$ . Essendo inoltre  $\nabla'^2 \psi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  otteniamo

$$\int_V \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \emptyset(\mathbf{r}') dV' = -4\pi \int_V \emptyset^*(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' + \oint_{\partial V} \left[ \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \emptyset^*}{\partial n'}(\mathbf{r}') \right] dS'$$

dove l'integrale di volume alla destra dell'uguale si annulla per  $\mathbf{r}$  al di fuori di  $V$ . L'integrale di superficie su  $\partial V$  può essere considerato come esteso sulla superficie  $z' = 0$  ed un emisfero di raggio infinito. Tuttavia, dal momento che  $\psi$  si annulla quando  $r' \rightarrow \infty$  occorre calcolare solamente l'integrale di superficie su  $z' = 0$ :

$$\int_V \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \emptyset(\mathbf{r}') dV' = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \left\{ \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \emptyset^*}{\partial z'}(\mathbf{r}') \right\}$$

dove il segno meno deriva dal fatto che  $n'$  ha verso opposto a  $z'$ .

Introducendo le variabili  $\xi = \frac{x-x'}{z}$  e  $\eta = \frac{y-y'}{z}$ , calcolando tutte le quantità per  $z' = 0$  e assumendo infine che il valore di  $z$  sia abbastanza piccolo da poter essere trascurato, otteniamo finalmente

$$\Delta g_\varepsilon = -2\pi G \rho_0 \operatorname{sgn}(z) \frac{\partial \emptyset^*}{\partial z}(x, y, 0) \quad (1.38)$$

## 2. SOLUZIONI ANALITICHE DELL'EQUAZIONE DI LAPLACE

### 2.1 Coordinate cartesiane

Consideriamo una funzione armonica  $\phi(x, y, z)$  nello spazio 3D di coordinate  $x, y, z$ ; per cui vale la seguente *equazione di Laplace*

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0 \quad (2.1)$$

Al fine calcolare il valore di  $\phi(x, y, z)$  troviamo inizialmente il valore di una generica componente armonica, che indichiamo con  $\phi_{kl}(x, y, z)$

E' possibile risolvere tale problema mediante una tecnica che prende il nome di *separazione delle variabili*, che consente di scrivere  $\phi_{kl}(x, y, z)$  come prodotto di tre funzioni, ognuna di esse dipendente da una sola variabile.

$$\phi_{kl}(x, y, z) = f_{kl}(z)e^{ikx}e^{ily} \quad (2.2)$$

Applicando l'equazione (2.1) si ottiene

$$[-(k^2 + l^2)f_{kl}(z) + f_{kl}''(z)]e^{ikx}e^{ily} = 0 \quad (2.3)$$

Ponendo  $\alpha^2 = k^2 + l^2$  ne consegue che

$$f_{kl}''(z) = \alpha^2 f_{kl}(z) \quad (2.4)$$

La cui soluzione generale è

$$f_{kl}(z) = A(k, l)e^{\alpha z} + B(k, l)e^{-\alpha z} \quad (2.5)$$

Nel caso sia presente una condizione al contorno che imponga l'annullamento di  $f_{kl}(z)$  per  $z \rightarrow \infty$ , come vedremo ad esempio nel capitolo 3, si ottiene  $A(k, l)=0$ .

Ne consegue che

$$\phi_{kl}(x, y, z) = B(k, l) e^{-\alpha z} e^{ikx} e^{ily} \quad (2.6)$$

Se è noto  $\phi(x, y, z = 0) = g(x, y)$ , è possibile utilizzare la trasformata inversa di Fourier e scrivere

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(k, l) e^{ikx} e^{ily} dk dl \quad (2.7)$$

Al fine poi di calcolare i coefficienti  $B(k, l)$  incogniti è possibile applicare la trasformata di Fourier, ottenendo

$$B(k, l) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \quad (2.8)$$

Una volta noti i coefficienti  $B(k, l)$  tramite la relazione 2.6 è possibile calcolare il valore di  $\Phi_{kl}(x, y, z)$ .

E' infine possibile trovare il valore di  $\Phi$ , per ogni  $x, y$  e  $z \geq 0$  combinando tutte le componenti  $\Phi_{kl}$  attraverso la serie di Fourier:

$$\Phi = \iint_{-\infty}^{\infty} B(k, l) e^{-\alpha z} e^{ikx} e^{ily} dl dk \quad (2.9)$$

## 2.2 Funzione armonica assialmente simmetrica

Una generica funzione armonica assialmente simmetrica soddisfa l'equazione

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10)$$

Effettuando la separazione delle variabili attraverso la relazione

$$\Phi(r, z) = R(r)Z(z) \quad (2.11)$$

si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 Z_k}{dz^2} - k^2 = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_k}{dr} + k^2 R_k = 0 \quad (2.13)$$

dove  $k$  è la costante di separazione e  $\Phi_k(r, z) = R_k(r)Z_k(z)$  è una soluzione separata (componente armonica)

La soluzione di 2.12 è

$$Z_k(z) = e^{\pm kz} \quad (2.14)$$

L'equazione 2.13 può essere riscritta in una forma standard effettuando il cambio di variabile  $x = kr$ , ottenendo l'equazione di Bessel:

$$\frac{d^2 R_k}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR_k}{dx} + R_k = 0 \quad (2.15)$$

La soluzione di questa equazione è la *funzione di Bessel* di ordine zero:

$$J_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad (2.16)$$

Un potenziale che sia finito per  $z \geq 0$  e che si annulli per  $z \rightarrow \infty$ , è dato dalla seguente espressione:

$$\phi_k(r, z) = \int_0^{\infty} e^{-kz} J_0(kr) A(k) dk \quad (2.17)$$

in cui i valori di  $A(k)$  sono incogniti. Se il valore  $\phi_k(r, z)$  sul piano  $z=0$  è noto

$$\phi_k(r, z = 0) = f(r)$$

è possibile determinare i coefficienti  $A(k)$  invertendo la relazione

$$f(r) = \int_0^{\infty} J_0(kr) A(k) dk$$

ottenendo

$$A(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} r f(r) J_0(kr) dr \quad (2.18)$$



### 3. VARIAZIONI DI GRAVITA'

In questo capitolo studieremo le variazioni di gravità dovute ai seguenti fenomeni:

dipolo di forze posto verticalmente rispetto alla superficie terrestre;

-dipolo di forze posto orizzontalmente rispetto alla superficie terrestre;

-somma di tre dipoli posti lungo gli assi coordinati;

-dislocazione tensile sul piano orizzontale;

-dislocazione tensile sul piano verticale.

#### 3.1 Caso dipolo verticale

Consideriamo una forza verticale che genera spostamenti calcolati dalla strain function  $Z^F$  (1.27), si ottengono i seguenti spostamenti:

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Z^F}{\partial z} \right] \quad (3.1 a)$$

$$u_y = \frac{1}{2\mu} \left[ -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial Z^F}{\partial z} \right] \quad (3.1 b)$$

$$u_z = \frac{1}{2\mu} \left[ 2(1-\nu)\nabla^2 Z^F - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial Z^F}{\partial z} \right] \quad (3.1 c)$$

utilizzando il teorema di Helmholtz  $\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi}$  ne consegue che:

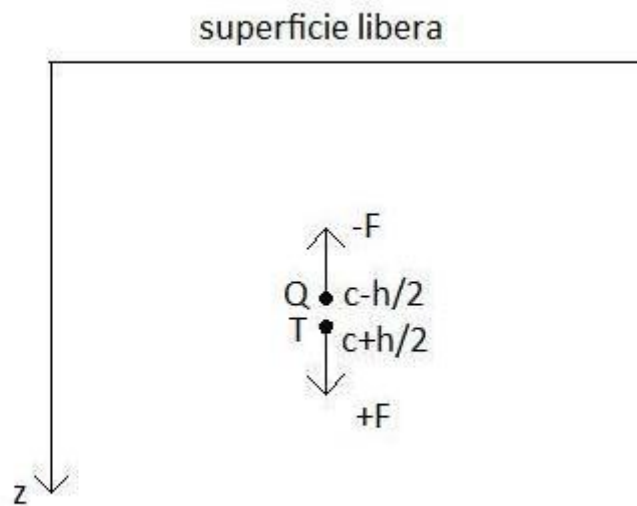
$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \phi^F = \frac{1-2\nu}{2\mu} \nabla^2 \frac{\partial Z^F}{\partial z}$$

essendo nulla la divergenza di un rotore. Dunque

$$\phi^F = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \frac{\partial Z^F}{\partial z}$$

Indichiamo con  $\nu$  il modulo di Poisson, con  $\mu$  il modulo di rigidità e con  $P$  il modulo della forza.

Le sorgenti deformative interne sono descritte da sistemi di forze con risultante nulla e momento nullo. Consideriamo un dipolo elementare in cui una forza verticale  $\vec{F}$  è applicata in un punto T ad una profondità  $c+h/2$ , l'altra è opposta ( $-\vec{F}$ ) ed applicata in un punto Q ad una profondità  $c-h/2$ .



**Figura 3.1.** *Rappresentazione schematica del dipolo verticale descritto*

In questo caso vale, al limite per  $h \ll c$

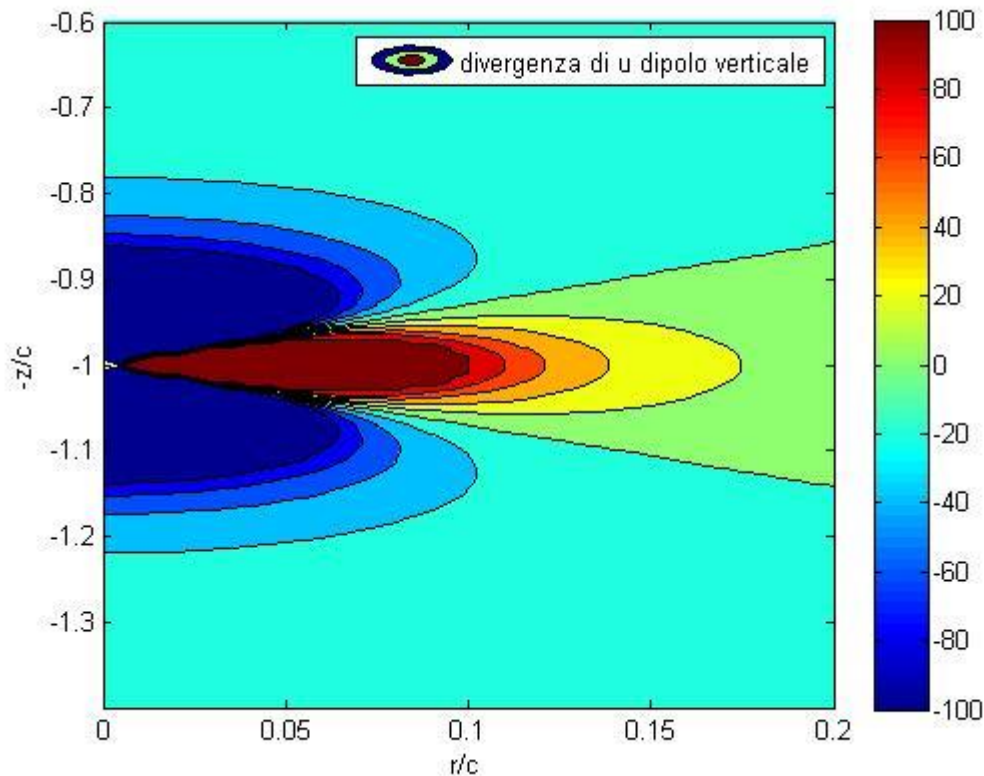
$$\phi^{dv} = \frac{1-2\nu}{2\mu} h \frac{\partial}{\partial c} \frac{\partial Z^F}{\partial z} \quad (3.2)$$

Utilizzando per  $Z^F$  l'espressione ricavata da Mindlin per una forza verticale puntiforme in un semispazio elastico e omogeneo (1.27) otteniamo:

$$\phi^{dv} = Ph \frac{1-2\nu}{16\mu\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(c-z)^2}{R_1^3} - \frac{1}{R_1} + \frac{-(1-4\nu)(c+z)^2 + 2cz + 4c(c+z)(1-2\nu)}{R_2^3} + \frac{1-8\nu(1-\nu)}{R_2} - \frac{3cz(2z+2c)^2}{2R_2^5} \right\}$$

Possiamo ora calcolarci  $\nabla \cdot \vec{u} = \nabla^2 \phi^{dv} =$

$$Ph \frac{1-2\nu}{16\mu\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{6(c-z)^2}{R_1^5} - \frac{2}{R_1^3} + \frac{2-8\nu}{R_2^3} - \frac{6(1-4\nu)(z+c)^2}{R_2^5} + \frac{36c(c+z)}{R_2^5} - \frac{60c(z+c)^3}{R_2^7} \right\} \quad (3.3)$$



**Figura 3.2.** Si esprime la divergenza di  $u$  in funzione della profondità e della distanza radiale dal dipolo, posto a una profondità  $c$ . Dalla relazione  $\Delta\rho = -\rho_0\nabla \cdot \vec{u}$  si evince che le regioni in blu indicano un aumento di densità, cioè una contrazione del mezzo, mentre quelle in rosso una diminuzione di densità dovuta a dilatazione. Si è normalizzato per una costante  $Ph' \frac{1-2\nu}{16\mu\pi(1-\nu)c^2}$  con  $h' = \frac{h}{c}$ . Si è inoltre deciso di rappresentare il grafico in funzione di  $-z/c$  in modo da avere la superficie libera in alto e ottenere un'immagine di più facile comprensione. Si faccia infine attenzione al fatto che le scale utilizzate per l'asse orizzontale e verticale sono differenti.

Come illustrato nel paragrafo 1.4 per calcolare il contributo di gravità  $\Delta g_\varepsilon$  dobbiamo determinare una funzione  $\phi^* = \phi^{dv} - \phi_0^{dv}$  in cui la funzione  $\phi_0^{dv}$  deve avere le seguenti proprietà:

$$\nabla^2 \phi_0^{dv} = 0 \text{ nel semispazio } z \geq 0 ;$$

$$\phi_0^{dv} = \phi^{dv} = f(r) \text{ in } z=0;$$

$$\phi_0^{dv} \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow \infty.$$

Una volta trovata  $\phi^*$ ,  $\Delta g_\varepsilon$  è data semplicemente da

$$\Delta g_\varepsilon = 2\pi G \rho_0 \frac{\partial \phi^*}{\partial z}(x, y, 0)$$

Sostituendo quindi 0 al posto di z nell'espressione di  $\phi$  si ottiene:

$$\phi^{dv}(x, y, z; z=0) = \phi_0^{dv}(x, y, z; z=0) = f(r) = Ph \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} \left( \frac{c^2}{2R^3} - \frac{\nu}{R} \right)$$

In cui  $R = \sqrt{r^2 + c^2}$ .

Come visto nel capitolo 2 è possibile scrivere una generica funzione armonica (cioè una funzione che soddisfa a  $\nabla^2 \phi_0 = 0$ ) nella forma

$$\phi_0^{dv} = \int_0^\infty A(k) J_0(kr) e^{-kz} dk$$

in cui  $J_0(kr)$  è la funzione di Bessel di prima specie di ordine 0.

Dovendo essere  $\phi_0 = f(r)$  per  $z=0$  dovremo avere:

$$f(r) = \int_0^\infty A(k) J_0(kr) dk$$

I coefficienti  $A(k)$  si possono calcolare tramite la relazione inversa

$$A(k) = k \int_0^\infty f(r) J_0(kr) r dr$$

Il risultato che si ottiene risolvendo tale integrale è

$$A(k) = Phk \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{e^{-ck}}{\pi} \left( \frac{c}{2} - \frac{\nu}{k} \right)$$

Sostituendo nell'espressione  $\phi_0^{dv} = \int_0^\infty A(k) J_0(kr) e^{-kz} dk$  il risultato ottenuto per i coefficienti  $A(k)$  otteniamo la seguente rappresentazione integrale

$$\begin{aligned} \phi_0^{dv} &= Ph \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} \int_0^\infty \left( \frac{ck}{2} - \nu \right) J_0(kr) e^{-k(z+c)} dk \\ &= Ph \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} \left( \frac{c(c+z)}{2R_2^3} - \frac{\nu}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Gli integrali sono stati risolti usando tavole presenti nel libro Table of Integrals, Series, and Products, *Fifth Edition*, I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik che per brevità indicheremo in seguito con la notazione (GR), utilizzando in particolare le formule GR 6.554(1 e 4), GR 6.623(1e2). Poiché

$$\frac{\partial \phi^{*dv}}{\partial z} = \frac{\partial \phi^{dv}}{\partial z} - \frac{\partial \phi_0^{dv}}{\partial z}$$

e tali derivate in  $z=0$  valgono rispettivamente

$$\frac{\partial \phi_0^{dv}}{\partial z} = Ph \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} c \left( \frac{\nu}{R^3} - \frac{3c^2}{2R^5} + \frac{1}{2R^3} \right)$$

$$\frac{\partial \phi^{dv}}{\partial z} = Ph \frac{(1-2\nu)}{16\pi\mu(1-\nu)} c \left( + \frac{8\nu(1-\nu)}{R^3} - \frac{12c^2(1-\nu)}{R^5} \right) = Ph \frac{1-2\nu}{2\pi\mu} c \left( \frac{\nu}{R^3} - \frac{3c^2}{2R^5} \right)$$

Si ottiene

$$\boxed{\Delta g_\varepsilon = -G\rho_0 Ph \frac{1-2\nu}{\mu} \left( \frac{c}{2R^3} \right)} \quad (3.5)$$

Il contributo dovuto allo spostamento normale alla superficie di “boundary”, che nel nostro caso è verticale, è dato dalla formula di Bouguer:

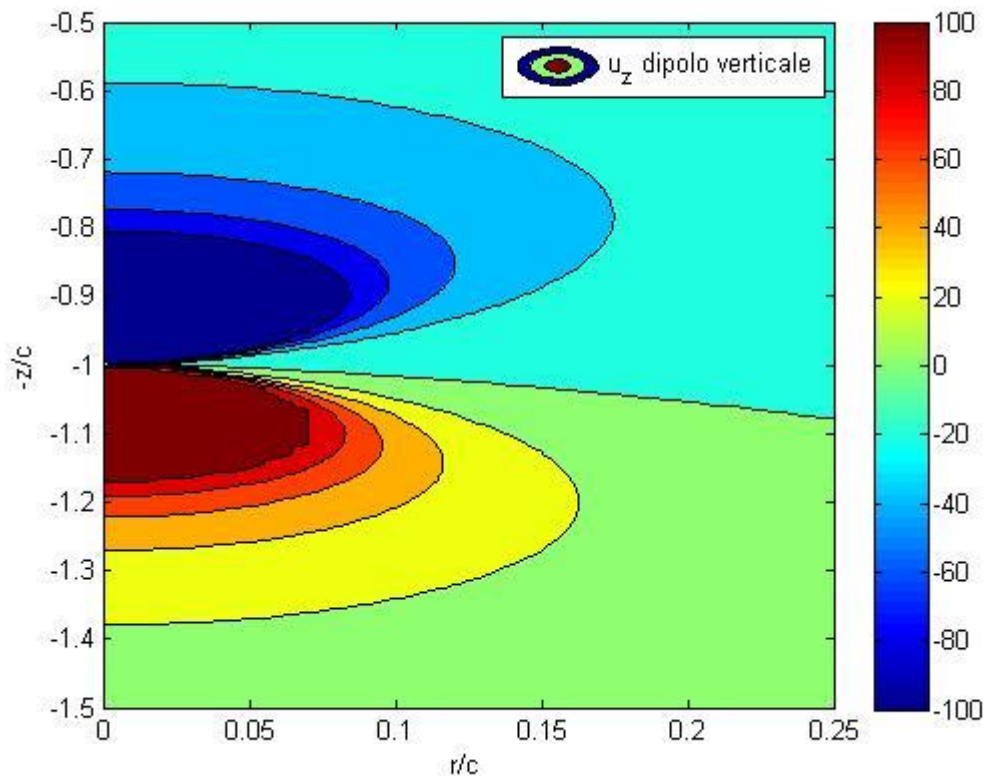
$$\Delta g_{B0} = -2\pi G\rho_0 u_{z0}$$

Utilizzando le formule di Mindlin per lo spostamento verticale  $w$  nel caso di forza singola abbiamo:

$$w = \frac{P}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right] \quad (3.6)$$

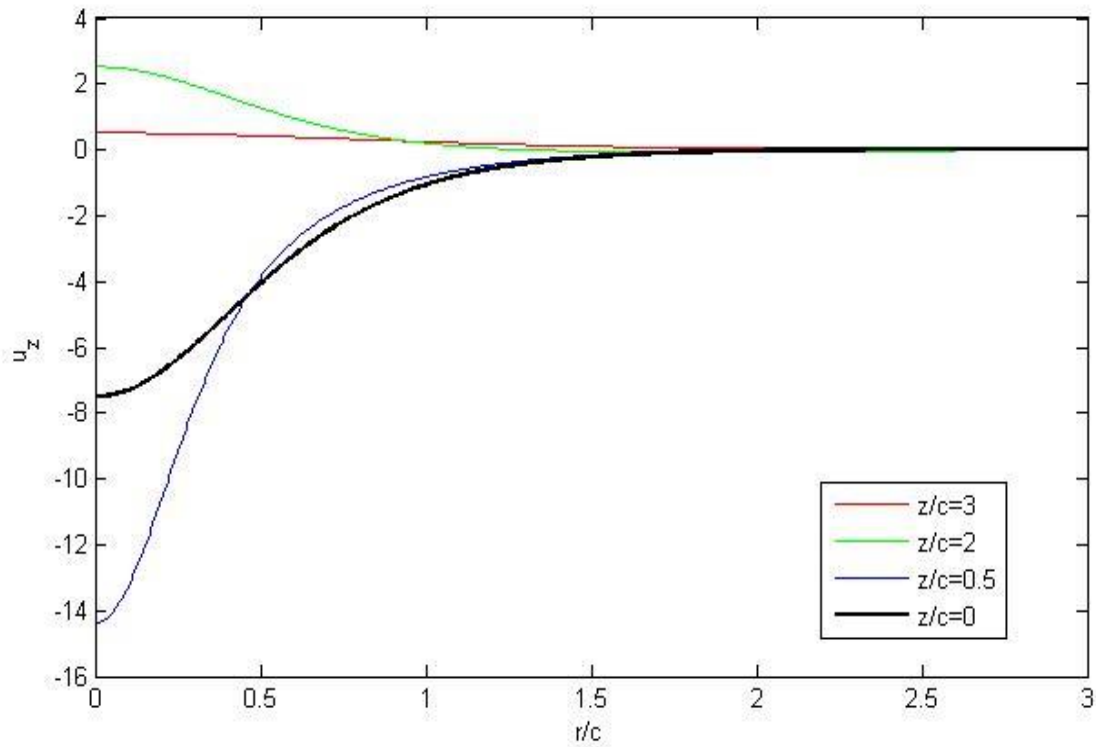
Nel caso considerato siamo in presenza di un dipolo verticale in  $z=c$  per cui dovremo derivare questa espressione rispetto a  $c$  e moltiplicarla per  $h$ . Lo spostamento verticale  $u_z$  dovuto al dipolo è dunque:

$$u_z = \frac{Ph}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{-(1-4\nu)(c-z)}{R_1^3} - \frac{2z + (c+z)(12\nu + 8(1-\nu)^2 - 9)}{R_2^3} + \frac{3(c+z)(8cz + 2z^2 - (3-4\nu)(z+c)^2)}{R_2^5} - \frac{3(c-z)^3}{R_1^5} - \frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7} \right] \quad (3.7)$$



**Figura 3.3.** *Spostamento generato da un dipolo verticale, normalizzato rispetto a una costante  $\frac{Ph'}{16\pi c\mu(1-\nu)}$  con dimensioni di una lunghezza, con  $h' = \frac{h}{c}$ . Per una migliore comprensione della figura abbiamo orientato la superficie libera in alto, impiegando  $-z/c$  come ordinata. I valori negativi di  $u_z$  (regioni di spazio colorate in blu) stanno ad indicare un sollevamento verso la superficie libera, mentre le regioni rosso indicano uno spostamento verso il basso. Come ci si attende, posto il dipolo in  $z=c$ , si avrà dunque un sollevamento nella zona più superficiale e un abbassamento delle regioni più profonde. Anche in questo caso si sono utilizzate scale differenti per l'asse orizzontale e verticale.*





**Figura 3.4.** *Spostamento generato da un dipolo verticale, normalizzato rispetto a una costante  $\frac{Ph'}{16\pi c\mu(1-\nu)}$  con  $h' = \frac{h}{c}$ . Si noti che gli spostamenti negativi sono verso l'alto*

Per calcolare la correzione di Bouguer  $\Delta g_{B0}$  è necessario determinare lo spostamento verticale in superficie. Si pone dunque  $z=0$  nell'espressione precedente di  $u_z$ , ottenendo:

$$u_{z0} = \frac{Phc}{4\pi\mu} \left[ \frac{2\nu}{R^3} - \frac{3c^2}{R^5} \right] \quad (3.8)$$

La variazione di gravità  $\Delta g_{B0}$  in superficie sarà dunque

$$\Delta g_{B0} = -\frac{PhG\rho_0}{2\mu} c \left[ \frac{2\nu}{R^3} - \frac{3c^2}{R^5} \right] \quad (3.9)$$

La differenza totale di gravità  $\Delta g_{tot}$  è dunque

$$\Delta g_\varepsilon + \Delta g_{B0} = \Delta g_{tot} = -\frac{G\rho_0 Ph}{2\mu} c \left( \frac{1}{R^3} - \frac{3c^2}{R^5} \right) \quad (3.10)$$

Il termine  $\Delta g_\varepsilon$  contiene la variazione di gravità  $\Delta g_s$  dovuta all'espandersi della sorgente, che in seguito calcoliamo esplicitamente:

$$\Delta g_s = \frac{-Gc\rho_0\Delta V}{R^3} \quad (3.11)$$

in cui  $\Delta V = \lim_{V_s \rightarrow 0} \int_{V_s} \nabla \cdot \vec{u}(r') dV$  dove  $V_s$  è un volume infinitesimo attorno alla sorgente.

Utilizzando il teorema di Gauss

$$\Delta V = \lim_{V_s \rightarrow 0} \int_{\partial V_s} \vec{u} \cdot \hat{n} dS$$

calcoliamo l'integrale in un dominio di integrazione dato da una sfera infinitesima che racchiuda il dipolo. Essa sarà centrata in  $z=c$  con raggio  $a$  tendente a zero.

Si ottiene il risultato

$$\Delta V = \frac{Ph(1-2\nu)}{6\mu(1-\nu)} \quad (3.12)$$

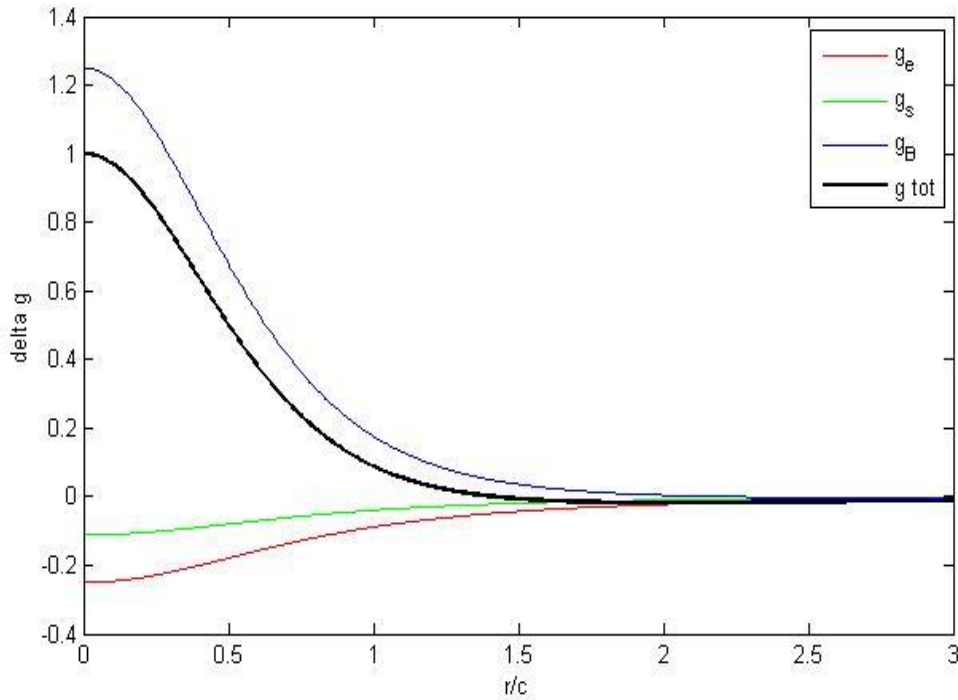
L'azione del dipolo crea dunque una cavità  $\Delta V$  in ( $x=y=0$  e  $z=c$ ). Se tale cavità rimane vuota (*massless cavity*) essa è responsabile di un contributo

$$\Delta g_s^{massless} = \frac{-Gc\rho_0(1-2\nu)Ph}{6\mu R^3(1-\nu)} \quad (3.13)$$

che è già incluso nella (3.5) ma va preso in considerazione separatamente nel caso si verifichi una intrusione di magma all'interno di  $\Delta V$  con densità  $\rho_{intr}$ .

Considerando il rapporto tra differenza di gravità totale massless e spostamento verticale in superficie si ottiene la seguente relazione

$$\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}} = -2\pi G\rho_0 \left( \frac{(1-2\nu)R^2}{2\nu R^2 - 3c^2} + 1 \right) \quad (3.14)$$

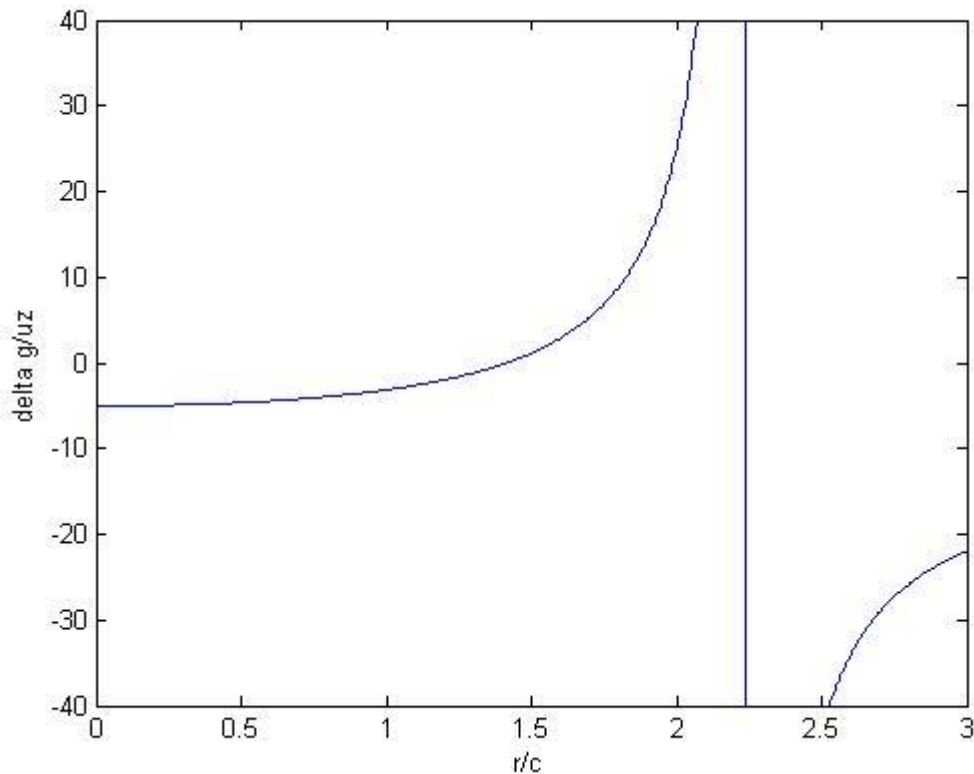


**Figura 3.5.** Variazioni di gravità normalizzate rispetto a una costante  $\frac{PG\rho_0 h'}{c\mu}$  con  $h' = \frac{h}{c}$ ; si è inoltre posto  $\rho_{intr} = 0$ .

E' interessante notare come dalla figura 3.5 emerga che il contributo di gravità  $\Delta g_\varepsilon$ , dovuto alla contrazione e dilatazione del mezzo, sia negativo e lo sia anche  $\Delta g_\varepsilon - \Delta g_s$ ; nonostante vi sia una compressione verticale dovuta all'azione del dipolo. Questo fenomeno, come si vede dalla figura 3.2, è però accompagnato da una dilatazione lungo l'orizzontale che risulta essere dominante rispetto alla contrazione, di conseguenza  $\Delta g_\varepsilon$  assume un valore negativo.

Nel caso in cui vi sia intrusione di magma in  $\Delta V$  ( $\rho_{intr} \neq 0$ ) il contributo di questo termine si calcola facilmente essendo equivalente a quello dato da una massa puntiforme  $m = \rho_{intr}\Delta V$  posta in  $z=c$ .

$$\Delta g_{intr} = \frac{Gc\rho_{intr}(1-2\nu)Ph}{6\mu R^3(1-\nu)}$$



**Figura 3.6.** *Variazioni di gravità diviso lo spostamento verticale in superficie, normalizzata rispetto a una costante  $G\rho_0$ . Si ha una singolarità quando la funzione spostamento verticale passa da valori negativi a positivi.*

Dalla figura 3.6 emerge come la quantità  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$  cambi di segno quando il rapporto  $r/c$  supera all'incirca 1.5, poiché  $\Delta g_{tot}$  passa da valori positivi a valori negativi. Questo accade quando sia  $\Delta g_{tot}$  che  $u_{z0}$  sono quantità piccole in modulo, come evidenziato dalle figure 3.4 e 3.5. Anche  $u_{z0}$  cambia di segno, passando da valori negativi a positivi, quando  $r/c$  è poco superiore a 2, il che causa una singolarità per il rapporto  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$  evidenziata in figura 3.6.

Per completezza inseriamo lo spostamento superficiale in direzione radiale generato dal dipolo. Partendo dalla formula ricavata da Mindlin per una forza singola

$$U = \frac{P r}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(z-c)}{R_1^3} + \frac{(z-c)(3-4\nu)}{R_2^3} - \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right] \quad (3.15)$$

Si ottiene, attraverso lo stesso modus operandi adottato per calcolare lo spostamento verticale,

$$u_{r0} = \frac{Phr}{4\pi\mu} \left[ -\frac{2\nu}{R^3} + \frac{3c^2}{R^5} \right] \quad (3.16)$$

### 3.2 Caso dipolo orizzontale

Per invarianza traslazionale lungo l'orizzontale lo spostamento in  $(x,y,z)$  dovuto ad una forza  $F$  applicata in  $x'=h/2, y'=0, z'=c$  è lo stesso generato in  $(x-h/2,y,z)$  da una forza  $F$  applicata in  $x'=0, y'=0, z'=c$ .

$$\vec{u}^F(x, y, z; x', 0, c) = \vec{u}^F(x - x', y, z; 0, 0, c) \quad (3.17)$$

In questo modo per calcolare lo spostamento dovuto a un dipolo della forza dovremo calcolare l'opposto della derivata rispetto a  $x$  di ciascuna componente del vettore di Galerkin; il segno negativo compare proprio a causa della traslazione:

$$\vec{u}^{dh} = \vec{u}^F\left(x - \frac{h}{2}, y, z\right) - \vec{u}^F\left(x + \frac{h}{2}, y, z\right) = -\frac{\partial \vec{u}^F}{\partial x} h \quad (3.18)$$

Lo spostamento  $\vec{u}^F$  dovuto ad una forza singola è dato dal vettore di Galerkin (1.28) con componenti  $G_x^F$  e  $G_z^F$  non nulle. Lo spostamento del dipolo è dato quindi dal vettore di Galerkin

$$G_x^{dh} = -h \frac{\partial G_x^F}{\partial x}; \quad G_z^{dh} = -h \frac{\partial G_z^F}{\partial x}$$

Procediamo al calcolo della componente  $\Delta g_\varepsilon$ : occorre innanzitutto trovare la funzione  $\phi^{*dh} = \phi^{dh} - \phi_0^{dh}$  e per far ciò si calcola  $\nabla \cdot \vec{u}$ .

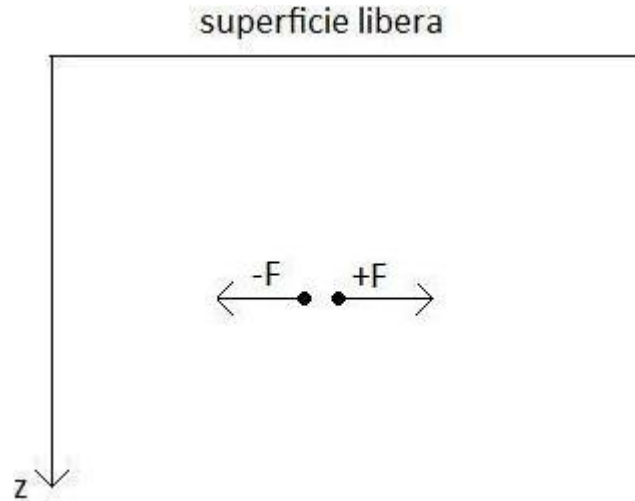
Utilizzando la relazione (1.25)  $2\mu u_i = 2(1 - \nu)G_{i,jj} - G_{j,ji}$  se si deriva rispetto ad  $x_i$  si ottiene

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \nabla^2 \phi^{dh} \quad (3.19)$$

con

$$\phi^{dh} = \frac{\partial G_x^{dh}}{\partial x} + \frac{\partial G_z^{dh}}{\partial z} \quad (3.20)$$

In cui  $G_x^{dh}$  e  $G_z^{dh}$  sono rispettivamente le componenti lungo x e z del vettore di Galerkin. Poiché il dipolo è orientato lungo l'asse x ne consegue che la componente lungo y è nulla dal momento che, per il già citato teorema di Fung in assenza di forze di volume, è sempre possibile trovare un vettore di Galerkin avente due sole componenti non nulle  $G_x$  e  $G_z$ .



**Figura 3.7.** Rappresentazione schematica del dipolo orizzontale descritto

La componente orizzontale del vettore di Galerkin nel caso di dipolo orizzontale, è semplicemente  $= -h \frac{\partial G_x^F}{\partial x}$ . Si ha quindi, utilizzando la (1.28)

$$G_x^{dh} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{x}{R_2} + \frac{x}{R_1} + \frac{2xc^2}{R_2^3} - 4(1-2\nu)(1-\nu) \left( \frac{x}{R_2} - \frac{x(c+z)}{(R_2+c+z)R_2} \right) \right\} \quad (3.21)$$

dove  $P$  indica il modulo della forza. Derivando rispetto a  $x$  si ottiene

$$\frac{\partial G_x^{dh}}{\partial x} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{x^2}{R_2^3} + \frac{2c^2}{R_2^3} - \frac{x^2}{R_1^3} - \frac{6c^2x^2}{R_2^5} + 4(1-2\nu)(1-\nu) \left[ -\frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_2^3} + \frac{c+z}{(R_2+c+z)R_2} - \frac{(c+z)x^2}{R_2^3(R_2+c+z)} - \frac{(c+z)x^2}{R_2^2(R_2+c+z)^2} \right] \right\} \quad (3.22)$$

Utilizzando sempre le formule (3.20) e (1.28) in cui  $G_z$  corrisponde alla componente lungo  $z$ , calcoliamo la componente verticale del vettore di Galerkin nel caso di dipolo orizzontale:

$$G_z^{dh} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ +2 \log(c+z+R_2) (1-2\nu) + \frac{2c}{R_2} - \frac{2cx^2}{R_2^3} + \frac{2x^2(1-2\nu)}{(R_2+c+z)R_2} \right\} \quad (3.23)$$

Derivando rispetto a  $z$  si ottiene

$$\frac{\partial G_z^{dh}}{\partial z} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{-2(1-2\nu)x^2 - 2c(c+z)}{R_2^3} + \frac{6cx^2(c+z)}{R_2^5} + \frac{2(1-2\nu)}{R_2} \right\} \quad (3.24)$$

Calcoliamo ora lo spostamento verticale causato dal dipolo. Partendo dalla formula di Mindlin

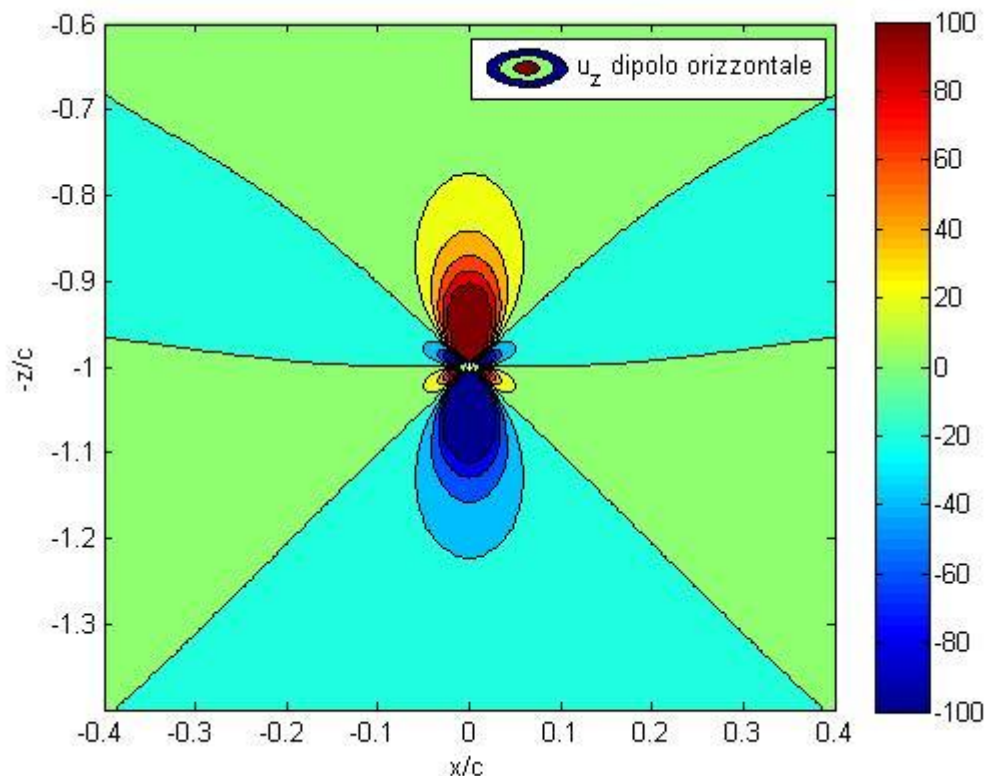
$$w = \frac{Px}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(z-c)}{R_1^3} + \frac{(z-c)(3-4\nu)}{R_2^3} - \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right] \quad (3.25)$$

e utilizzando l'equazione (3.18) si ottiene

$$u_z = \frac{Ph}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{c-z}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(c-z)}{R_2^3} + \frac{6cz(c+z)}{R_2^5} - \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{(R_2+c+z)R_2} \right] + \frac{Px^2h}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{-3(c-z)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)(c-z)}{R_2^5} + \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{(R_2+c+z)^2 R_2^2} + \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R_2^3(R_2+c+z)} - \frac{30cz(c+z)}{R_2^7} \right] \quad (3.26)$$

Lo spostamento verticale in superficie sarà:

$$u_{z0} = \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ \frac{c}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+c)} \right] - \frac{Px^2h}{4\pi\mu} \left[ + \frac{3c}{R^5} - \frac{(1-2\nu)}{(R+c)^2R^2} - \frac{(1-2\nu)}{R^3(R+c)} \right] \quad (3.27)$$



**Figura 3.8.** Spostamento generato da un dipolo orizzontale, normalizzato rispetto a una costante  $\frac{Ph'}{16\pi c\mu(1-\nu)}$  con  $h' = \frac{h}{c}$ . Per facilitare la comprensione della figura abbiamo orientato la superficie libera in alto, impiegando  $-z/c$  come ordinata; i valori positivi di  $u_z$  (regioni di spazio colorate in rosso) stanno ad indicare uno spostamento verso il basso, mentre le regioni blu indicano un sollevamento verso l'alto.

Per calcolare il contributo di gravità cercato dobbiamo calcolare il potenziale  $\phi^{*dh}$  che si ottiene da  $\phi^{dh}$  rimuovendo una funzione armonica  $\phi_0^{dh}$  tale che

$$\phi^{*dh} = \phi^{dh} - \phi_0^{dh}$$



è nulla sulla superficie  $z=0$ .

Una volta trovato  $\phi^{*dh}$  basta inserirlo nell'espressione  $\Delta g_\varepsilon = 2\pi G\rho \frac{\partial \phi^{*dh}}{\partial z}(x, y, 0)$ .

Occorre calcolare  $\nabla^2 \phi_0^{dh} = 0$  sul semispazio  $z \geq 0$  con le seguenti condizioni:

$\phi_0^{dh} = g(x, y)$  in  $z=0$ , cioè  $g(x, y) = \phi_0^{dh}(x, y, z; z = 0)$ ;

$\phi_0^{dh} \rightarrow 0$  per  $R \rightarrow \infty$ .

Sostituendo quindi 0 al posto di  $z$  nell'espressione di  $\phi^{dh}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \phi^{dh}(x, y, z; z = 0) &= g(x, y) \\ &= \phi_0^{dh}(x, y, z = 0) \\ &= \frac{Ph}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} \right. \\ &\quad \left. - (1 - 2\nu) \left[ -\frac{1}{R} + \frac{x^2}{R^3} + \frac{c}{(R+c)R} - \frac{cx^2}{R^3(R+c)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{cx^2}{R^2(R+c)^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nel calcolo di  $\phi^{dh}(x, y, z; z = 0)$  possiamo trascurare i termini il cui laplaciano si annulla dato che fornirebbero un contributo nullo nell'equazione

$$\Delta g_\varepsilon = -G\rho_0 \frac{\partial}{\partial z} \int_V \nabla'^2 \tilde{\phi}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

dove  $\tilde{\phi} = \phi^{dh} + H$  e  $\nabla^2 H = 0$

Partendo dall'espressione delle forze fornita da Mindlin (1.28) notiamo che per la componente  $x$ :

$$\nabla^2 \frac{2c^2}{R_2} = 0; \quad \nabla^2 (z+c) \log(R_2 + z+c) - \nabla^2 R_2 = 0$$

Considerando solo i termini restanti nella (1.28) otterremo

$$\frac{\partial G_x^{dh}}{\partial x} = \frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{x^2}{R_2^3} \right\} + H_x \quad (3.29)$$

dove  $\nabla^2 H_x = 0$

Per il caso di componente z

$$\frac{\partial G_z^{dh}}{\partial z} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{-2(1-2\nu)x^2 - 2c(c+z)}{R_2^3} + \frac{6cx^2(c+z)}{R_2^5} + \frac{2(1-2\nu)}{R_2} \right\} + H_z \quad (3.30)$$

con  $\nabla^2 H_z = 0$

Si riesce ad ottenere dunque una forma semplificata

$$\tilde{\varnothing}^{dh} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{-(3-4\nu)x^2 - 2c(c+z)}{R_2^3} - \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{6cx^2(c+z)}{R_2^5} + \frac{2(1-2\nu)}{R_2} \right\} \quad (3.31)$$

In  $z=0$  scriviamo  $\tilde{\varnothing}^{dh}$  come

$$g(x, y) = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{4(1-\nu)}{R} - \frac{4(1-\nu)x^2 + 2c^2}{R^3} + \frac{6x^2c^2}{R^5} \right\} \quad (3.32)$$

Rimuoviamo ora da  $\tilde{\varnothing}^{dh}$  una funzione armonica  $\varnothing_0^{dh}$  che vale  $g(x, y)$  in  $z=0$

Come visto nel capitolo 2 assumiamo per  $\varnothing_0^{dh}$  una forma generale del tipo

$$\varnothing_0^{dh} = f(z)e^{ikx}e^{ily} \quad (3.33)$$

da cui segue, applicando il laplaciano:

$$-(k^2 + l^2)f(z) + f''(z) = 0 \quad (3.34)$$

Ponendo  $\alpha^2 = k^2 + l^2$  si ottiene  $f''(z) = \alpha^2 f(z)$ .

La soluzione generale è

$$f(z) = A(k, l)e^{\alpha z} + B(k, l)e^{-\alpha z} \quad (3.35)$$

Applicando le condizioni al contorno, per cui  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , si ottiene  $A=0$ .

Si ottiene allora

$$\varnothing_0^{dh} = B(k, l) e^{-\alpha z} e^{ikx} e^{ily} \quad (3.36)$$

Utilizzando le trasformate inverse di Fourier è possibile scrivere

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(k, l) e^{ikx} e^{ily} dkdl \quad (3.37)$$

E' possibile calcolare la funzione  $B(k, l)$  applicando la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} B(k, l) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (g_1 + g_2 + g_3 + g_4) e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \end{aligned} \quad (3.38)$$

Separiamo quindi lo studio dei diversi termini che compaiono della (3.32).

**TERMINE 1:** Consideriamo il termine di  $g_1(x, y)$  che ha una dipendenza del tipo  $\frac{1}{R'}$ , con  $R' = \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}$ :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}} e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}} \cos(kx) \cos(ly) dx dy \end{aligned} \quad (3.39)$$

In questo passaggio si è usata la relazione  $e^{ily} = \cos(ly) + i\sin(ly)$  ma il termine seno si annulla essendo una funzione dispari. Poniamo inoltre  $\beta^2 = y^2 + c^2$ . Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(ly) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \cos(kx) dx$$

Utilizzando la relazione (GR 3.754) si può risolvere l'integrale in dx ottenendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(ly) \left[ 2K_0(k\sqrt{y^2 + c^2}) \right]$$

dove  $K_0 = \frac{\pi i}{2} (J_0(iz) + iN_0(iz))$  in cui  $J_0(iz)$  e  $N_0(iz)$  sono rispettivamente le funzioni di Bessel di prima e seconda specie.

Utilizzando la relazione (GR 6.677.5) si ottiene infine

$$\phi_{01} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}} e^{-c\sqrt{k^2 + l^2}} \quad (3.40)$$

**TERMINE 2:** Consideriamo il termine di  $g_2(x, y)$  che ha una dipendenza del tipo  $\frac{x^2}{R^3}$  e calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \quad (3.41)$$

E' conveniente riscriverlo nella seguente formulazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ix}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{d}{dk} e^{-ikx} \right] e^{-ily} dx dy =$$

$$i \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} e^{-ikx} e^{-ily} dx dy = i \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx))}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} e^{-ily} dx dy =$$

$$\frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(kx)}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} dx \right) e^{-ily} dy \quad (3.42)$$

Il termine tra parentesi si può risolvere utilizzando la relazione (GR 3.754.3) ottenendo

$$2 \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ k K_0(k\sqrt{y^2 + c^2}) \right] e^{-ily} dy \quad (3.43)$$

Utilizzando ancora (GR 6.677.5) otteniamo

$$\frac{d}{dk} \left\{ \frac{2k\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}} e^{-c\sqrt{k^2 + l^2}} \right\}$$

dunque

$$\phi_{02} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}} e^{-c\sqrt{k^2 + l^2}} \left[ 1 - \frac{k^2}{k^2 + l^2} - \frac{k^2 c}{\sqrt{k^2 + l^2}} \right] \quad (3.44)$$

**TERMINE 3 e 4:** Consideriamo i termini  $g_3(x, y)$  e  $g_4(x, y)$  con una dipendenza rispettivamente di  $\frac{x^2}{R^5}$  e  $\frac{1}{R^3}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{5}{2}}} e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \quad (3.45)$$

Che possiamo scrivere anche come segue

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ily} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{5}{2}}} x e^{-ikx} dx \quad (3.46)$$

Integrando per parti l'integrale in dx si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ily} \left\{ \left[ -\frac{1}{3} \frac{1}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} x e^{-ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} [e^{-ikx} - ikx e^{-ikx}] dx \right\} \quad (3.47)$$

Si può notare come il primo termine derivante dall'integrazione per parti si annulli avendo un andamento asintotico del tipo  $1/x^2$  ed essendo il dominio di integrazione da  $-\infty$  a  $\infty$ .

Inoltre  $\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ily} \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} dx$  è dello stesso tipo del termine 4 essendo la dipendenza del tipo  $\frac{1}{R^3}$ . Poiché il termine moltiplicativo del caso  $\frac{x^2}{R^5}$  è  $6c^2$  mentre per  $\frac{1}{R^3}$  è  $-2c^2$  la loro somma sarà nulla. Occorre dunque calcolare solo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ily} \left\{ \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ikx e^{-ikx}}{[x^2 + \beta^2]^{\frac{3}{2}}} dx \right\}$$

Eseguendo passaggi analoghi al caso  $\frac{x^2}{R^3}$  si ottiene

$$\Phi_{03,4} = \frac{-2\pi k^2}{3\sqrt{k^2 + l^2}} e^{-c\sqrt{k^2 + l^2}} \quad (3.48)$$

Tenendo in considerazione le costanti moltiplicative dei vari addendi si ottiene:

$$B(k, l) = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{e^{-c\sqrt{k^2+l^2}}}{\pi\sqrt{k^2+l^2}} \left[ -k^2c^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{k^2}{k^2+l^2} + \frac{k^2c}{\sqrt{k^2+l^2}} \right) \right] \right\} \quad (3.49)$$

e otteniamo quindi la seguente espressione integrale per  $\phi_0^{dh}$ :

$$\phi_0^{dh} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{Ph}{8\pi(\nu-1)} \frac{1-2\nu}{2\mu} \left\{ \frac{e^{-c\sqrt{k^2+l^2}}}{\pi\sqrt{k^2+l^2}} \left[ -k^2c^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{k^2}{k^2+l^2} + \frac{k^2c}{\sqrt{k^2+l^2}} \right) \right] \right\} e^{-\sqrt{k^2+l^2}z} e^{ikx} e^{ily} dldk \quad (3.50)$$

**CALCOLO ANALITICO DI  $\phi_0^{dh}$**  : Consideriamo i tre termini dentro la parentesi quadra separatamente.

**PRIMO TERMINE:**

$$\begin{aligned} & -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-(c+z)\sqrt{k^2+l^2}}}{\pi\sqrt{k^2+l^2}} [-k^2c^2] \right\} e^{ikx} e^{ily} dldk \\ & = -\frac{Phc^2}{8\pi(1-\nu)} \frac{d^2}{dx^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-(c+z)\sqrt{k^2+l^2}}}{\pi\sqrt{k^2+l^2}} \right\} e^{ikx} e^{ily} dldk \end{aligned}$$

Riscrivendo gli esponenziali  $e^{ikx} e^{ily}$  come somma di seni e coseni, come già fatto in precedenza, e ricordando che il seno è una funzione dispari si ottiene

$$= -\frac{Phc^2}{8\pi^2(1-\nu)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) dk \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-(c+z)\sqrt{k^2+l^2}}}{\sqrt{k^2+l^2}} \right\} \cos(ly) dl$$

Utilizzando la relazione (GR 3.961.2) è possibile risolvere l'integrale in  $dl$ :

$$= -\frac{Phc^2}{8\pi^2(1-\nu)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) dk * 2K_0 \left( k\sqrt{y^2 + (c+z)^2} \right)$$

L'integrale in  $dk$  si risolve utilizzando la relazione (GR 6.671.14)

$$-\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} 2c^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{R_2} \right)$$

Calcolando la derivata seconda si ottiene

$$-\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} 2c^2 \left( \frac{3x^2}{R_2^5} - \frac{1}{R_2^3} \right) \quad (3.51)$$

E' possibile ricondursi al caso del primo termine anche per i due successivi. Per il secondo termine è necessario calcolare la derivata seconda rispetto a z, per il terzo termine la derivata prima rispetto a z. Calcoleremo poi la primitiva in dz per ottenere il risultato. Effettuando dunque calcoli analoghi al primo termine si ottiene:

### SECONDO TERMINE:

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} 4(1-\nu) \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{R_2} \right)$$

Integriamo due volte rispetto a z per compensare la derivata che abbiamo introdotto per eliminare un termine che compariva al denominatore. Otteniamo

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} 4(1-\nu) \frac{d^2}{dx^2} \left( (c+z) \log(c+z+R_2) - R_2 \right)$$

Effettuando la derivata seconda rispetto a x otteniamo

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} 4(1-\nu) \left( \frac{x^2}{R_2^3} - \frac{1}{R_2} + \frac{z+c}{(c+z+R_2)R_2} - \frac{x^2(z+c)}{(c+z+R_2)^2 R_2^2} - \frac{x^2(z+c)}{(c+z+R_2)R_2^3} \right); \quad (3.52)$$

### TERZO TERMINE:

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} (-4c(1-\nu)) \frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{R_2} \right)$$

Integriamo rispetto a z per compensare la derivata che abbiamo introdotto per eliminare un termine che compariva al denominatore. Si ottiene

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)} (-4c(1-\nu)) \frac{d^2}{dx^2} \log(c+z+R_2)$$

Effettuando il calcolo della derivata si ottiene

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)}(-4c(1-\nu))\left(\frac{1}{(c+z+R_2)R_2} - \frac{x^2}{(c+z+R_2)^2R_2^2} - \frac{x^2}{(c+z+R_2)R_2^3}\right) \quad (3.53)$$

Sommando il secondo e il terzo termine otteniamo

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)}4(1-\nu)\left(\frac{x^2}{R_2^3} - \frac{1}{R_2} + \frac{z}{(c+z+R_2)R_2} - \frac{zx^2}{(c+z+R_2)^2R_2^2} - \frac{zx^2}{(c+z+R_2)R_2^3}\right)$$

Poiché dovremo calcolare la derivata di  $\phi^{*dh}$  rispetto a  $z$  in  $z=0$ , ed essendo  $\frac{\partial \phi^{*dh}}{\partial z} = \frac{\partial \phi^{dh}}{\partial z} - \frac{\partial \phi_0^{dh}}{\partial z}$ ; ricordando che

$$\phi^{dh} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)}\left\{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{-(3-4\nu)x^2 - 2c(c+z)}{R_2^3} - \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{6cx^2(c+z)}{R_2^5} + \frac{2(1-2\nu)}{R_2}\right\}$$

si calcola prima la derivata di  $\phi^{dh}$ :

$$\frac{d\phi^{dh}}{dz} = -\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)}\left(\frac{-4(1-\nu)c}{R^3} + \frac{3c(4x^2(1-\nu) + 2c^2)}{R^5} - \frac{30x^2c^3}{R^7}\right) \quad (3.54)$$

Derivata rispetto a  $z$  del primo termine di  $\phi_0^{dh}$  calcolata in  $z=0$ :

$$-\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)}2c^2\left(\frac{3c}{R^5} - \frac{15x^2c}{R^7}\right) \quad (3.55)$$

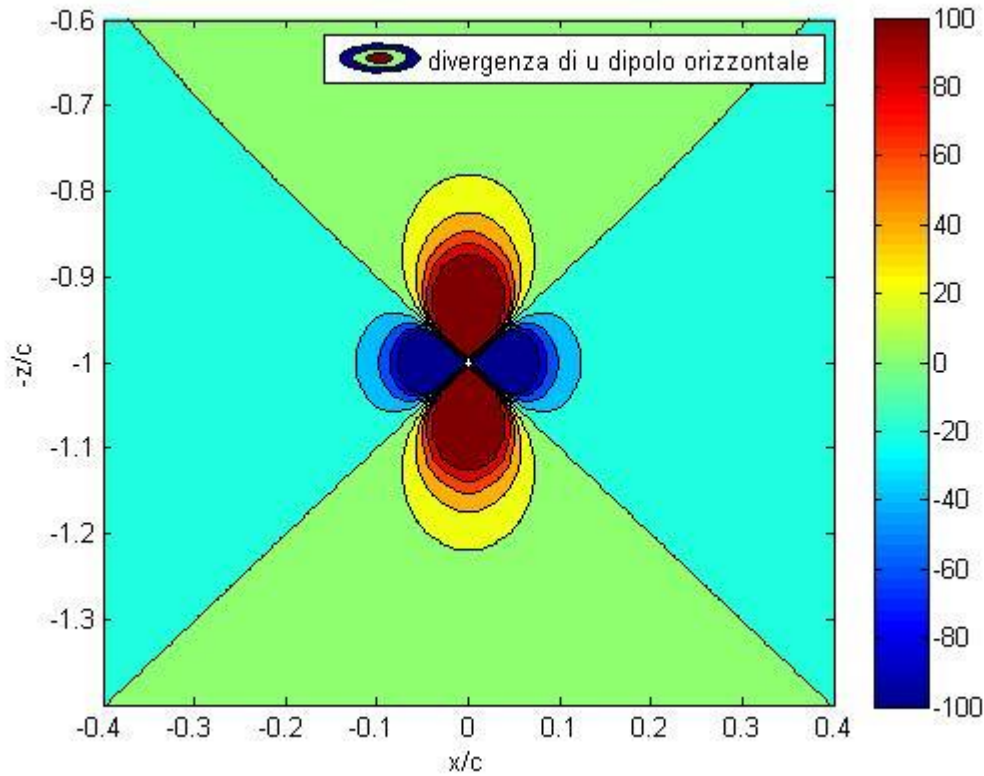
Derivata rispetto a  $z$  della somma del secondo e terzo termine di  $\phi_0^{dh}$  calcolata in  $z=0$ :

$$\frac{Ph}{8\pi(1-\nu)}4(1-\nu)\left(\frac{1}{(c+R)R} + \frac{c}{R^3} - \frac{3x^2c}{R^5} - \frac{x^2}{(c+R)^2R^2} - \frac{x^2}{(c+R)R^3}\right) \quad (3.56)$$

Sommando questi contributi otteniamo infine



$$\Delta g_\varepsilon = G\rho Ph \frac{1-2\nu}{2\mu} \left( -\frac{1}{(c+R)R} + \frac{x^2}{(c+R)^2 R^2} + \frac{x^2}{(c+R)R^3} \right) \quad (3.57)$$



**Figura 3.9.** Si esprime la divergenza di  $u$  in funzione della profondità e della distanza radiale dal dipolo orizzontale lungo  $x$ , posto a una profondità  $c$ . Dalla relazione  $\Delta\rho = -\rho_0\nabla\cdot\vec{u}$  si evince che le regioni in blu indicano un aumento di densità, cioè una contrazione del mezzo, mentre quelle in rosso una diminuzione di densità dovuta a dilatazione. Si è normalizzato per una costante  $\frac{Ph'}{c^2} \frac{1-2\nu}{2\mu}$  con  $h' = \frac{h}{c}$

Per il caso di dipolo orizzontale orientato lungo l'asse  $y$  si ottiene

$$\Delta g_\varepsilon = G\rho Ph \frac{1-2\nu}{2\mu} \left( -\frac{1}{(c+R)R} + \frac{y^2}{(c+R)^2 R^2} + \frac{y^2}{(c+R)R^3} \right) \quad (3.58)$$

Indichiamo inoltre gli spostamenti rispettivamente lungo x e lungo y generati dal dipolo diretto lungo l'asse x. Utilizzando sempre come punto di partenza le formule di Mindlin

$$u = \frac{P}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(3-4\nu)}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{x^2(3-4\nu)}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left( 1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \left( 1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} \right) \right] \quad (3.59 a)$$

$$v = \frac{Pxy}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(3-4\nu)}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} + \frac{1}{R_1^3} + \frac{4(1-2\nu)(1-\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right] \quad (3.59 b)$$

otteniamo:

Spostamento verticale

$$w_{x0} = \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ \frac{c}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+c)} \right] - \frac{Px^2h}{4\pi\mu} \left[ + \frac{3c}{R^5} - \frac{(1-2\nu)}{(R+c)^2R^2} - \frac{(1-2\nu)}{R^3(R+c)} \right] \quad (3.60a)$$

Spostamento lungo l'asse x

$$u_{x0} = \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ -\frac{x}{R^3} + \frac{3x^3}{R^5} - \frac{(1-2\nu)x(3x^2R - 3R^2(c+R) + x^2c)}{(R+c)^3R^3} \right] \quad (3.60 b)$$

Spostamento lungo l'asse y

$$v_{x0} = \frac{Phxy}{4\pi\mu} \left[ \frac{3x}{R^5} - \frac{(1-2\nu)x(3R+c)}{(R+c)^3R^3} \right] - \frac{Phy}{4\pi\mu} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+c)^2} \right] \quad (3.60 c)$$

Nel caso di dipolo orizzontale lungo l'asse y otteniamo:

Spostamento verticale

$$w_{y0} = \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ \frac{c}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+c)} \right] - \frac{Py^2h}{4\pi\mu} \left[ + \frac{3c}{R^5} - \frac{(1-2\nu)}{(R+c)^2R^2} - \frac{(1-2\nu)}{R^3(R+c)} \right] \quad (3.61 a)$$

Spostamento lungo l'asse y

$$v_{y0} = \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ -\frac{y}{R^3} + \frac{3y^3}{R^5} - \frac{(1-2\nu)y(3y^2R - 3R^2(c+R) + y^2c)}{(R+c)^3R^3} \right] \quad (3.61 b)$$

Spostamento lungo l'asse x

$$u_{y0} = \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ \frac{3y}{R^5} - \frac{(1-2\nu)y(3R+c)}{(R+c)^3 R^3} \right] - \frac{Phx}{4\pi\mu} \left[ \frac{1}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+c)^2} \right] \quad (3.61 c)$$

### 3.3 Caso tre dipoli isotropi

Calcoliamo gli spostamenti superficiali e i contributi di gravità sommando le quantità già trovate per i dipoli diretti lungo x, y e z.

Spostamento verticale

$$u_{z0} = -\frac{Ph}{2\pi\mu} \left[ \frac{c(1-2\nu)}{R^3} \right] \quad (3.62)$$

Spostamento radiale

$$u_{r0} = \frac{Ph}{2\pi\mu} \left[ \frac{1-2\nu}{R^3} \right] \quad (3.63)$$

Variazioni di gravità

Combinando i due dipoli orizzontali otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta g_{\varepsilon}^h &= G\rho_0 Ph \frac{1-2\nu}{2\mu} \left( -\frac{2}{(c+R)R} + \frac{r^2}{(c+R)^2 R^2} + \frac{r^2}{(c+R)R^3} \right) \\ &= -G\rho_0 Ph \frac{1-2\nu}{\mu} \left( \frac{c}{2R^3} \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Sommando i contributi dei dipoli orizzontali e quello verticale si ottiene

$$\Delta g_{\varepsilon} = -G\rho_0 Ph \frac{(1-2\nu)}{\mu} \left( \frac{c}{R^3} \right) \quad (3.65)$$

Inoltre

$$\Delta g_{B0} = -2\pi G\rho_0 u_{z0} = \frac{PhG\rho_0}{\mu} \left[ \frac{c(1-2\nu)}{R^3} \right] \quad (3.66)$$

Nel termine  $\Delta g_\varepsilon$  è compreso il seguente contributo di gravità, dovuto all'espandersi della sorgente

$$\Delta g_s^{massless} = \frac{-Gc\rho_0(1-2\nu)Ph}{2\mu R^3(1-\nu)}$$

$\Delta g_{totale}$  è nullo, nel caso misure sperimentali rivelino una variazione di gravità questa è dovuta all'intrusione di materiale nella sorgente:

$$\Delta g_{intr} = \frac{Gc\rho_{intr}(1-2\nu)Ph}{2\mu R^3(1-\nu)} \quad (3.67)$$

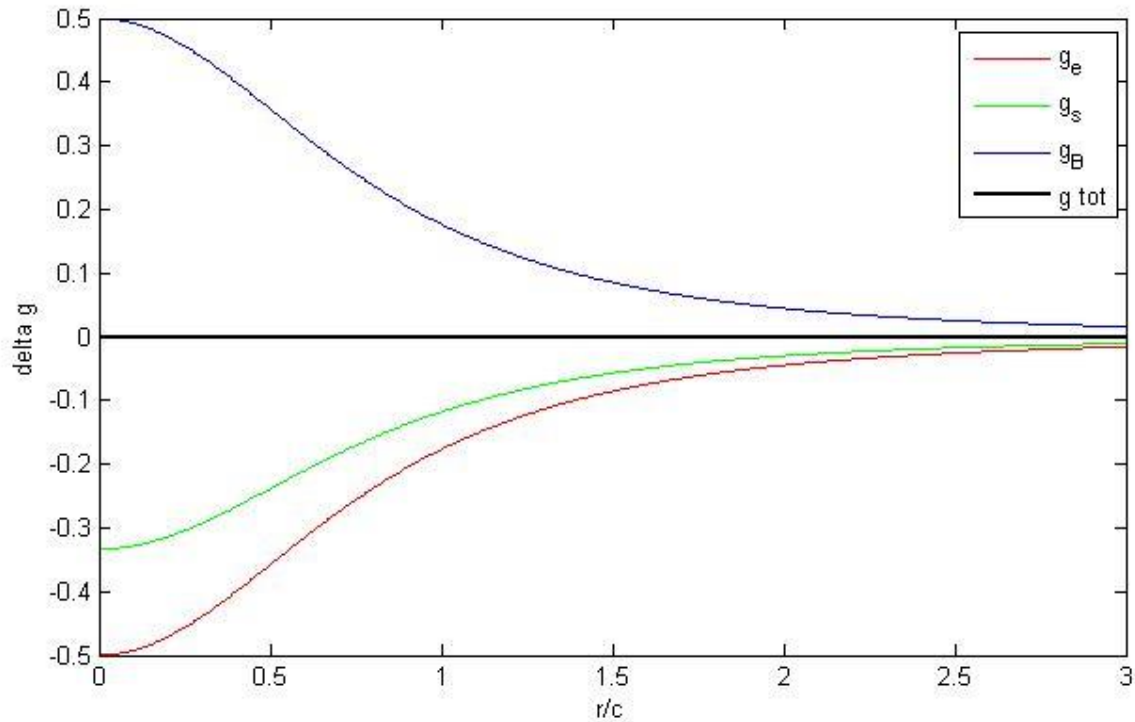
$$\frac{\Delta g_\varepsilon}{u_{z0}} = 2\pi G\rho_0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}} = 0 \quad (3.69)$$

I risultati sono analoghi a quelli calcolati mediante il modello di Mogi per una sfera cava presurizzata, effettuando la sostituzione

$$\Delta p a^3 = \frac{Ph(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)}$$

Si può osservare che in questo caso, essendo  $\Delta g_{tot} = 0$  le variazioni residue di gravità sono date dal solo termine  $\Delta g_{intr}$  con  $\rho_{intr} \neq 0$ . In particolare, se  $\Delta g_{tot}$  è positivo deve necessariamente entrare una massa nel  $\Delta V$  generato dall'espandersi della sorgente, ma se  $\Delta g_{tot}$  è negativo deve verificarsi una "uscita" di massa dalla sorgente deformativa. Un fenomeno che comporti uscita di massa appare tuttavia poco verosimile per casi reali, per cui occorre valutare bene se sia corretto ipotizzare una sorgente deformativa di questo tipo quando si registrano valori  $\Delta g_{tot} \leq 0$ .



**Figura 3.10.** Andamento di tutti i contributi della variazione di gravità descritti in precedenza, normalizzati per una costante  $\frac{PG\rho_0 h'}{c\mu}$ , nel caso  $\rho_{intr} = 0$

### 3.4 Caso dislocazione tensile su piano orizzontale

In questo caso siamo in presenza di una dislocazione tensile, quindi la normale alla superficie di dislocazione è parallela al vettore che descrive la discontinuità dello spostamento ( $b_i = bn_i$ ).

Poiché si è assunto che il mezzo in esame è isotropo possiamo utilizzare per il tensore delle costanti elastiche la seguente espressione

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3.70)$$

Utilizzando la relazione (1.32), tenendo conto che  $b_i = bn_i$ ,

$$M_{ij} = -[\lambda b\delta_{ij} + 2\mu bn_i n_j]A_\Sigma \quad (3.71)$$

Orientando l'asse z lungo  $\mathbf{n}$  si ha

$$M_{ij} = -bA_{\Sigma} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{vmatrix} \quad (3.72)$$

Indichiamo con  $P$  l'intensità del dipolo in direzione  $x$  e  $y$ .

Poiché  $\lambda = 2\mu \frac{\nu}{(1-2\nu)}$  avremo che  $\lambda + 2\mu = \lambda \frac{1-\nu}{\nu}$ : lungo la direzione  $z$  l'intensità del dipolo sarà dunque  $P \frac{1-\nu}{\nu}$ .

Combinando le solite espressioni calcolate in precedenza, tenendo conto della maggiore intensità del dipolo verticale, possiamo ricavare:

Gli spostamenti in superficie :

$$u_{r0} = \frac{Ph r}{4\pi\mu} \left[ \frac{3c^2 (1-2\nu)}{R^5 \nu} \right] \quad (3.73 a)$$

$$u_{z0} = \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ -\frac{3c^3 (1-2\nu)}{R^5 \nu} \right] \quad (3.73 b)$$

Le differenze di gravità

$$\Delta g_{\varepsilon} = -G\rho_0 Ph \frac{(1-2\nu)}{\nu\mu} \left( \frac{c}{2R^3} \right) \quad (3.74)$$

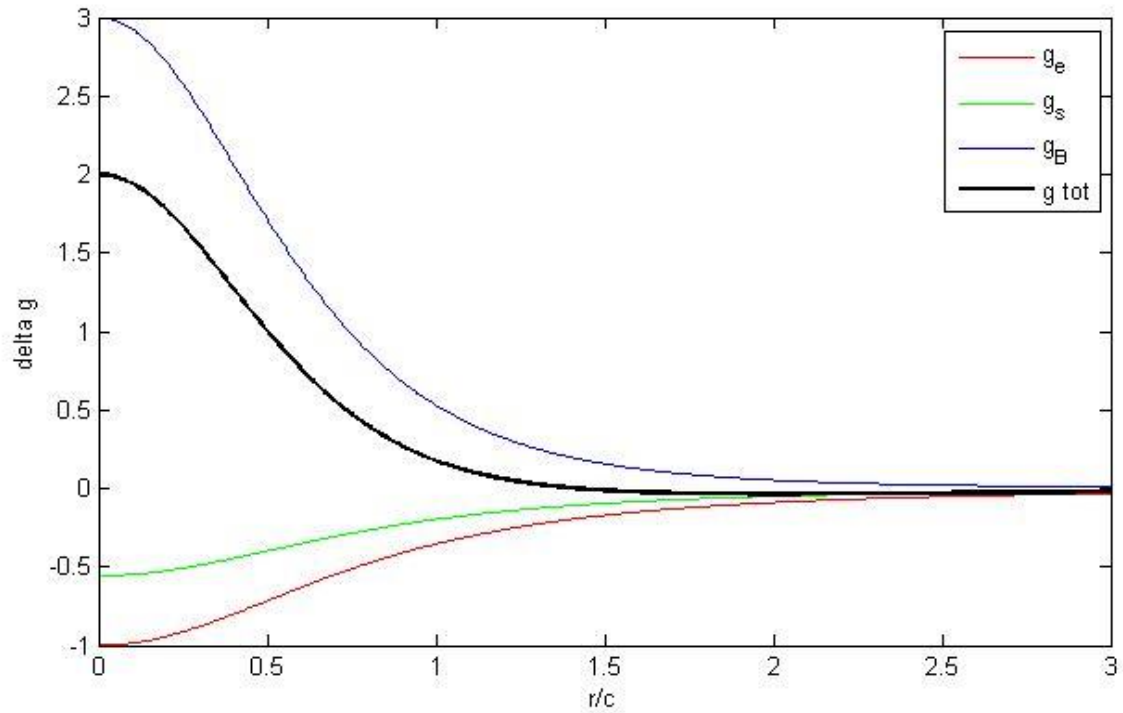
$$\Delta g_{B0} = -2\pi G\rho_0 u_{z0} = G\rho_0 \frac{Ph}{2\mu} \left[ \frac{3c^3 (1-2\nu)}{R^5 \nu} \right] \quad (3.75)$$

$$\Delta g_S = \frac{-Gc\rho_0(1-2\nu)(1+\nu)Ph}{6\mu R^3(1-\nu)\nu}$$

$$\Delta g_{intr} = \frac{Gc\rho_{intr}(1-2\nu)(1+\nu)Ph}{6\mu R^3(1-\nu)\nu} \quad (3.76)$$

Nel caso in cui non vi sia intrusione di massa nella sorgente:

$$\Delta g_{totale} = -G\rho_0 Ph \frac{(1-2\nu)}{2\nu\mu} \left( \frac{c}{R^3} - \frac{3c^3}{R^5} \right) \quad (3.77)$$



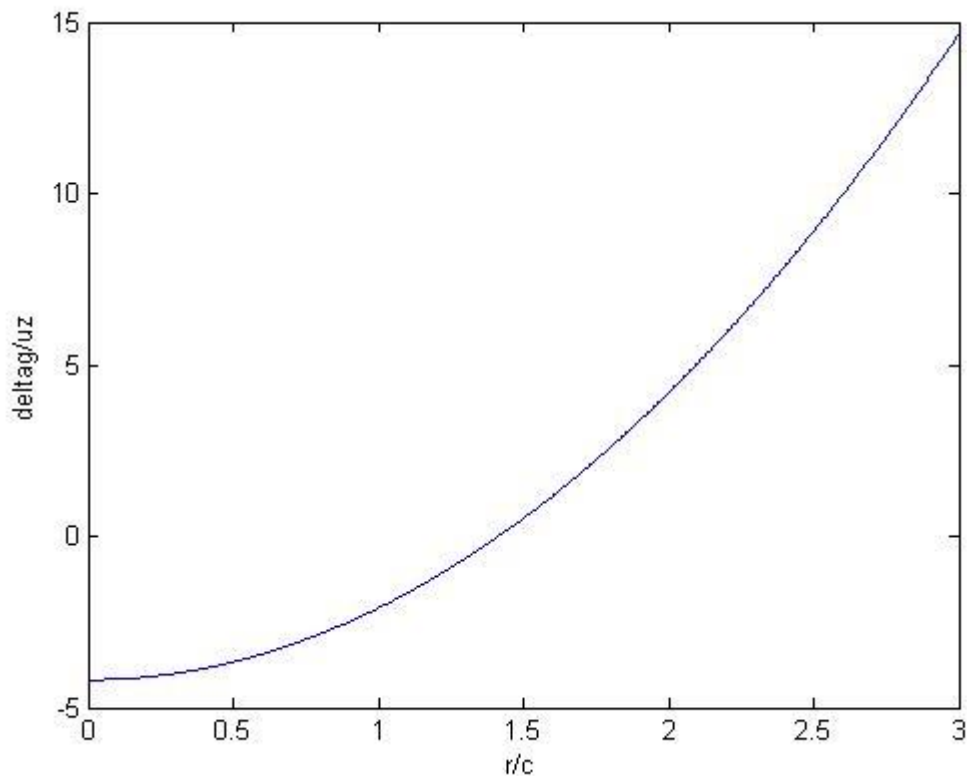
**Figura 3.11.** Andamento di tutti i contributi di variazione di gravità per crack orizzontale descritti in precedenza, normalizzati per una costante  $\frac{PG\rho_0 h'}{c\mu}$

Vediamo il rapporto tra la differenza di gravità e lo spostamento verticale nel caso *massless*:

$$\frac{\Delta g_\varepsilon}{u_{z0}} = 2\pi G\rho_0 \frac{R^2}{3c^2} \quad (3.78)$$

$$\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}} = 2\pi G\rho_0 \left( \frac{R^2}{3c^2} - 1 \right) \quad (3.79)$$

In questo caso un  $\Delta g_{tot}$  positivo può spiegare una presurizzazione a massa costante ( $\rho_{intr} = 0$ ) dovuta ad esempio a input di calore o a processi di differenziazione interna. Un  $\Delta g_{tot}$  negativo può invece essere associato a deflazione della sorgente senza uscita di massa.



**Figura 3.12.** *Variazione di gravità diviso lo spostamento verticale in superficie normalizzata rispetto a una costante  $G\rho_0$ .*

### 3.5 Caso dislocazione tensile sul piano verticale

Questo caso è analogo al precedente, con la differenza che si orienta lungo  $\mathbf{n}$  l'asse  $x$  anziché l'asse  $z$ . Ne consegue che

$$M_{ij} = -bA_{\Sigma} \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad (3.80)$$

e quindi se l'intensità del dipolo lungo  $y$  e  $z$  è  $P$ , lungo la direzione  $x$  sarà  $P \frac{1-\nu}{\nu}$ .

Combinando al solito le quantità calcolate per i singoli dipoli e tenendo conto della maggiore intensità di quello lungo  $x$  si ha:



Gli spostamenti in superficie

$$u_{z0} = \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{Ph}{4\pi\mu} \left[ \frac{-(1 - 2\nu)(R^2 - c(R + c))}{R^3(R + c)} - x^2 \left( \frac{3c}{R^5} + \frac{-(1 - 2\nu)(2R + c)}{(R + c)^2 R^3} \right) \right] \quad (3.81 a)$$

$$u_{x0} = \frac{Ph}{4\pi\mu\nu} \left[ -\frac{1}{R^3} + \frac{3x^2}{R^5} - \frac{(1 - 2\nu)(3Rx^2 - 3R^2(c + R) + x^2c)}{(R + c)^3 R^3} \right] - \frac{Phx}{4\pi\mu} \left[ \frac{2\nu}{R^3} + \frac{3(x^2 - y^2 - c^2)}{R^5} - \frac{(1 - 2\nu)(3R(x^2 - y^2) - 2R^2(c + R) + (x^2 - y^2)c)}{(R + c)^3 R^3} \right] \quad (3.81 b)$$

$$u_{y0} = \frac{Ph}{4\pi\mu\nu} \left[ -\frac{1}{R^3} + \frac{(1 - 2\nu)}{R(R + c)^2} + \frac{3x^2}{R^5} - \frac{(1 - 2\nu)x^2(3R + c)}{(R + c)^3 R^3} \right] - \frac{Phy}{4\pi\mu} \left[ \frac{2\nu}{R^3} + \frac{3(x^2 - y^2 - c^2)}{R^5} + \frac{(1 - 2\nu)(3R(y^2 - x^2) - 2R^2(c + R) + (y^2 - x^2)c)}{(R + c)^3 R^3} \right] \quad (3.81c)$$

Differenze di gravità

$$\Delta g_\varepsilon = -G\rho_0 Ph \frac{(1 - 2\nu)}{2\mu} \left( \frac{c}{R^3} + \frac{(x^2 - y^2)(c + 2R)}{(c + R)^2 R^3} + \frac{1}{\nu} \left( \frac{1}{(c + R)R} - \frac{x^2(c + 2R)}{(c + R)^2 R^3} \right) \right) \quad (3.82)$$

$$\Delta g_{B0} = \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{\text{Ph}G\rho_0}{2\mu} \left[ \frac{-(1 - 2\nu)(-R^2 + c(R + c))}{R^3(R + c)} + x^2 \left( \frac{3c}{R^5} - \frac{(1 - 2\nu)(2R + c)}{(R + c)^2 R^3} \right) \right] \quad (3.83)$$

$$\Delta g_S = \frac{-Gc\rho_0(1 - 2\nu)(1 + \nu)\text{Ph}}{6\mu R^3(1 - \nu)\nu}$$

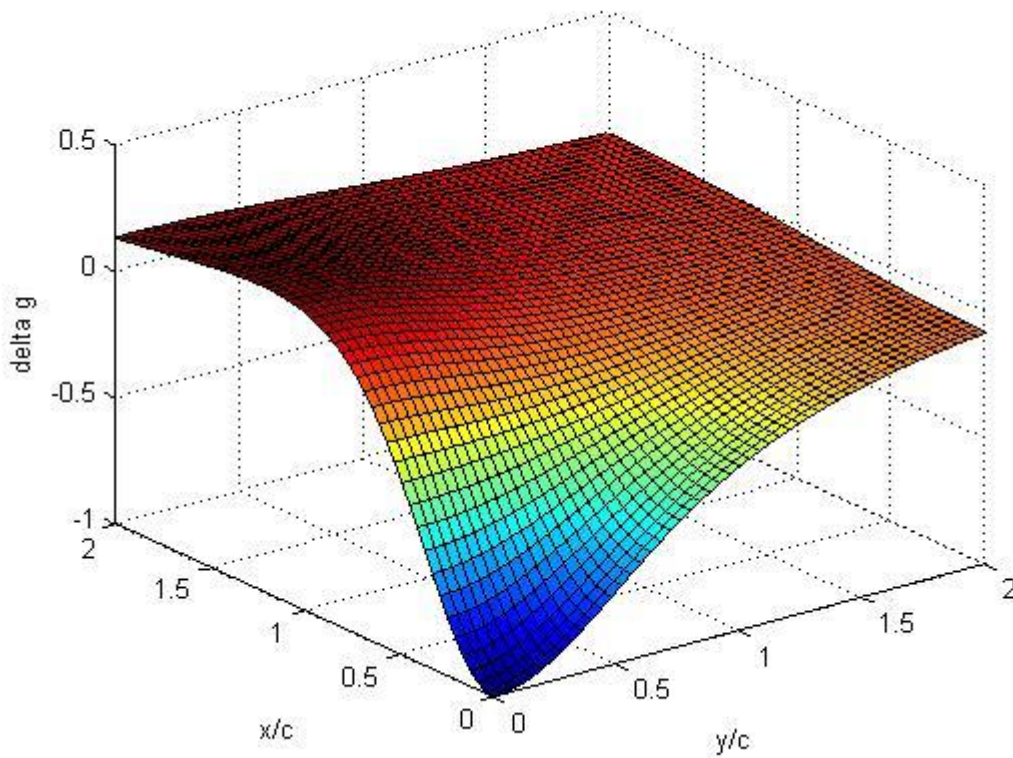
$$\Delta g_{intr} = \frac{Gc\rho_{intr}(1 - 2\nu)(1 + \nu)\text{Ph}}{6\mu R^3(1 - \nu)\nu} \quad (3.84)$$

Per il caso *massless*:

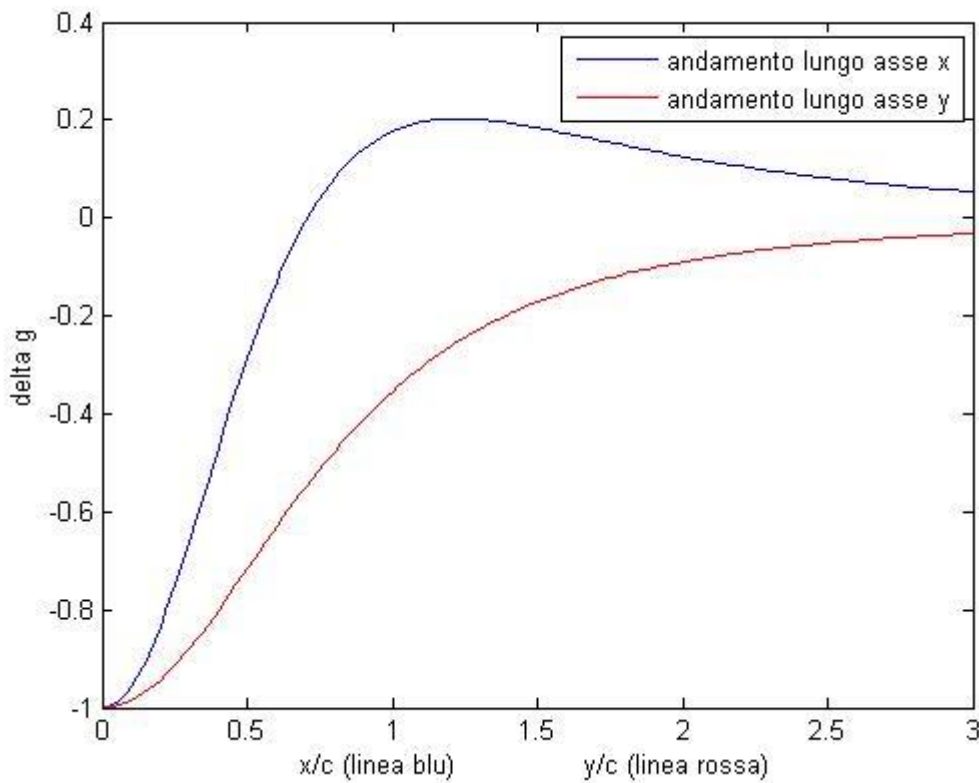
$$\Delta g_{totale} = \text{Ph}G\rho_0 \frac{1 - 2\nu}{2\mu\nu} c \left[ \left( \frac{3x^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right) \right] \quad (3.85)$$

$$\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$$

$$= -2\pi G\rho_0 \left( \frac{\nu(c(c + R)^2 + x^2(c + 2R))R^2 + R^2c^2(c + 2R) - R^5}{(2\nu - 1)R^2(-x^2(2R + c) + (R + c)(R^2 - c(R + c))) - x^2 3c(R + c)^2} + 1 \right) \quad (3.86)$$



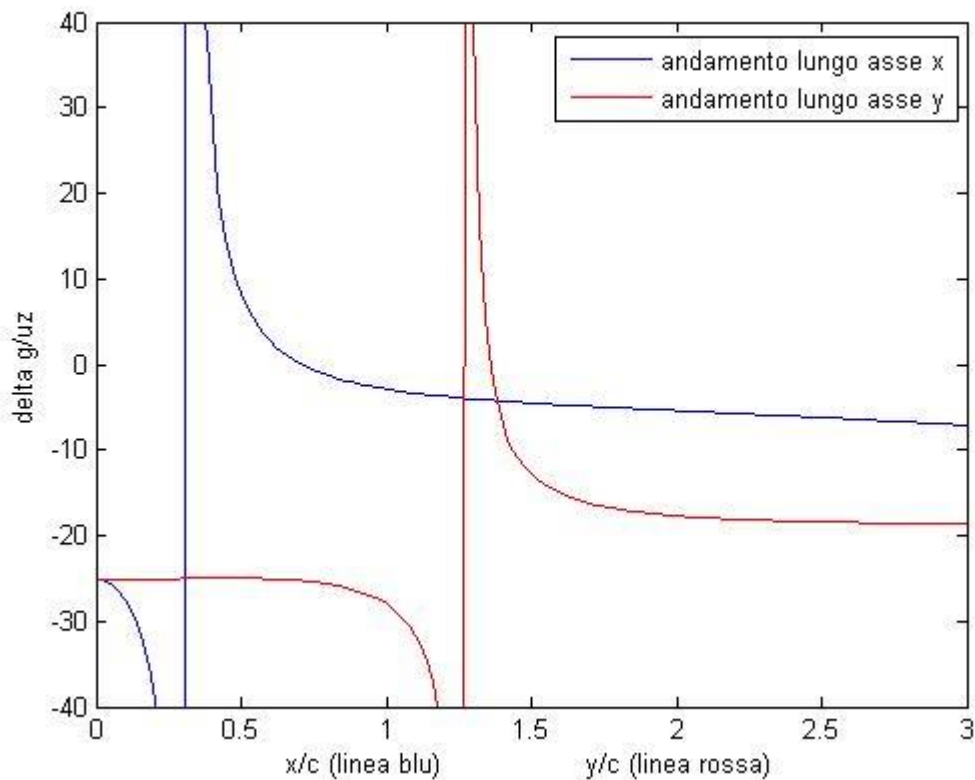
**Figura 3.13.** *Visione 3D dell'andamento della variazione di gravità totale*



**Figura 3.14.** *Andamento lungo l'asse x e y della variazione di gravità totale*

Come prevedibile non è possibile studiare l'andamento radiale della differenza di gravità non essendoci simmetria cilindrica. Per questo motivo si rappresenta una figura in 3D (figura 3.13) per avere una visione generale e due grafici 2D (figura 3.14) per studiare l'andamento lungo x posto y=0 e viceversa. I valori delle differenze di gravità sono stati tutti normalizzati per una costante  $\frac{PG\rho_0 h'}{c\mu}$ .

In seguito riportiamo l'andamento lungo l'asse x e y di  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$ . Poiché la funzione  $u_{z0}$  si annulla per valori di x e y in cui  $\Delta g_{tot} \neq 0$ , nei grafici si osservano andamenti tendenti all'infinito.



**Figura 3.15.** Andamento lungo l'asse x e y del rapporto tra variazione di gravità totale e spostamento verticale in superficie normalizzato rispetto a una costante  $G\rho_0$ .

## 4. GRAVIMETRIA E CASI REALI

In questo capitolo ci si occuperà di come vengono compiute le misure di gravità e si vedrà quali sono gli strumenti impiegati per effettuarle. Si illustreranno anche due casi in cui il calcolo di  $g$  e il rilevamento degli spostamenti della superficie terrestre hanno contribuito ad una migliore comprensione di certi fenomeni geofisici.

### 4.1 Gravimetria

La scienza che si occupa della misura dell'intensità del campo gravitazionale terrestre è la gravimetria. Gli studi in questo ambito permettono anche di ricavare informazioni sulla composizione del nostro pianeta e sulle variazioni di densità delle rocce.

Lo strumento di misura che permette di calcolare l'accelerazione di gravità è il *gravimetro*. Esistono due tipi di gravimetri: *relativi* ed *assoluti*. I Gravimetri assoluti misurano la gravità locale in unità assolute, solitamente i gals ( $cm/s^2$ ); i gravimetri relativi invece confrontano i valori di gravità registrati in diversi punti.

#### 4.1.1 Gravimetri relativi

Questo tipo di gravimetro è utilizzato per studiare la differenza del valore dell'accelerazione di gravità tra luoghi e/o tempi diversi (misure *relative* di gravità). In una delle sue forme più semplici, il gravimetro contiene una massa attaccata ad una molla. L'attrazione gravitazionale fa sì che la massa allunghi o comprima la molla e la variazione di lunghezza della molla riflette l'attrazione gravitazionale esercitata sull'oggetto.

Sono in uso due tipi di sistemi, quelli *statici* e quelli *astatici*. Nei primi lo spostamento della massa è misurato direttamente mediante amplificazione meccanica o ottica, nei sistemi astatici invece si lavora vicino al punto di instabilità del sistema meccanico elastico, ottenendo grandi spostamenti per piccole variazioni di gravità. La sensibilità di questi strumenti è di dell'ordine di  $10^{-8} m/s^2$ .

Un'altra classe di strumenti in uso sono i *gravimetri relativi superconduttori*, il cui principio di misura si basa su una sfera superconduttrice in niobio, raffreddata con elio liquido, tenuta in levitazione da un campo magnetico creato dalla corrente in

due bobine superconduttrici. La posizione della sfera è mantenuta stabile compensando la forza generata dall'accelerazione di gravità tramite un sistema contro-reazionato sulla corrente delle bobine. La sensibilità di questo tipo di strumenti è molto alta ( $10^{-10} m/s^2$ ) e la deriva molto bassa ( $10^{-7} m/s^2$ ).

#### 4.1.2 Gravimetri assoluti

Per effettuare misure assolute dell'accelerazione di gravità è necessario utilizzare i *gravimetri assoluti*, strumenti che si basano sullo studio della caduta libera dei gravi. Questi dispositivi funzionano misurando direttamente l'accelerazione di una massa durante la sua caduta, in un ambiente in cui si sono predisposte le condizioni di vuoto. La massa contiene un retroriflettore che riflette una parte di un fascio generato da un interferometro di Michelson. E' possibile poi ricavare l'accelerazione della massa contando le frange di interferenza ed effettuando misure di tempo.

Prendendo ad esempio il gravimetro IMGC, impiegato tra l'altro per il monitoraggio dei Campi Flegrei che tratteremo in seguito, la misura che viene effettuata consiste nella registrazione della traiettoria (spazio-temporale) seguita da un grave lanciato nel vuoto

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

La ricostruzione della traiettoria fornisce i coefficienti della parabola e quindi è possibile ricavare  $g$  dal coefficiente del termine di secondo grado con una precisione dell'ordine di  $10^{-8} m/s^2$ .

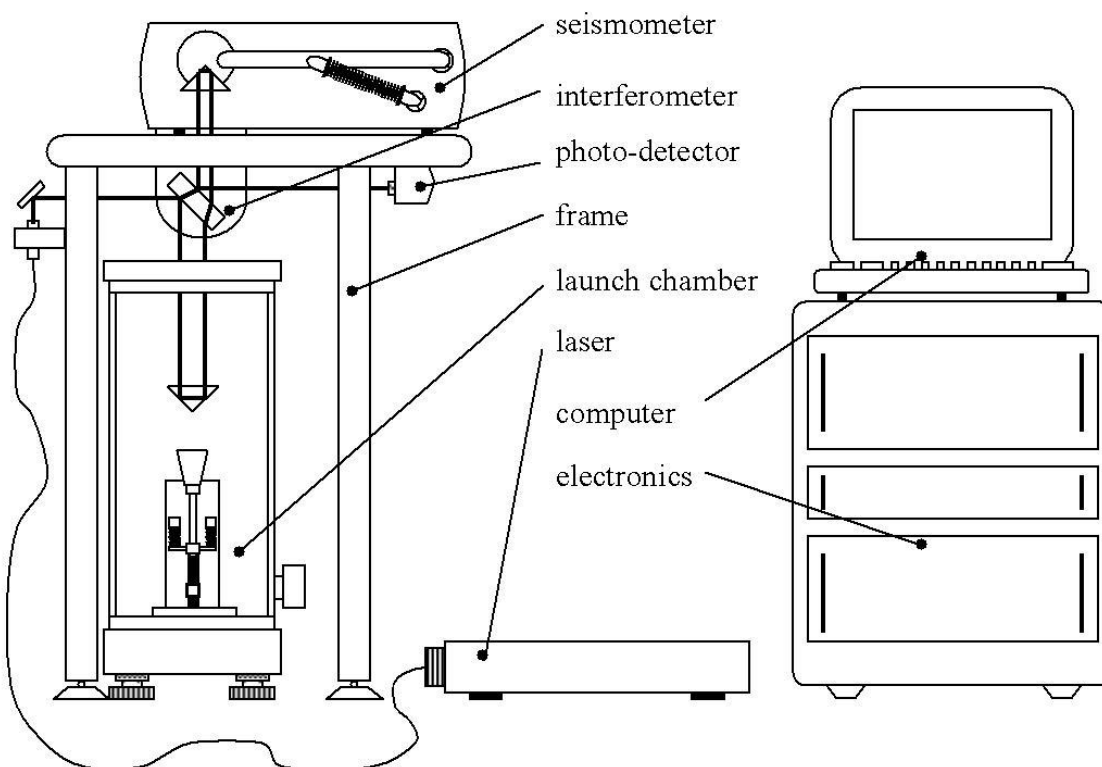
Il gravimetro IMGC attualmente in uso è denominato IMGC02 ed è l'unico gravimetro che sfrutta sia il moto di salita che quello di discesa dell'oggetto (*rise and fall*) al fine di ridurre gli errori di misura. L'oggetto in questione è costituito da un (prisma a forma di triedro capace di riflettere qualsiasi raggio di luce incidente in direzione opposta e parallela al raggio entrante) e da un apposito bicchierino di alluminio in modo da ottenere una corrispondenza tra il baricentro meccanico e il centro ottico dell'oggetto.

Una slitta, grazie a un motorino passo passo e ad un sistema di quattro molle, si occupa di lanciare verso l'alto l'oggetto e di raccoglierlo durante la caduta.

Un fascio di luce laser è quindi utilizzato per misurare la posizione dell'oggetto durante l'intera traiettoria di volo, con metodi interferometrici. Il segnale

dell'interferometro è registrato da un fotomoltiplicatore con un campionamento fornito da un orologio atomico al Rubidio. L'affidabilità della misura è quindi garantita da quest'ultimo strumento (per il tempo) e dal laser (per lo spazio).

Un software permette di ripetere il lancio per lunghe sessioni di misura della durata media di 7-8 ore, con una frequenza di lancio di 0.3 Hz e quindi un totale di circa 1800 lanci ogni sessione.

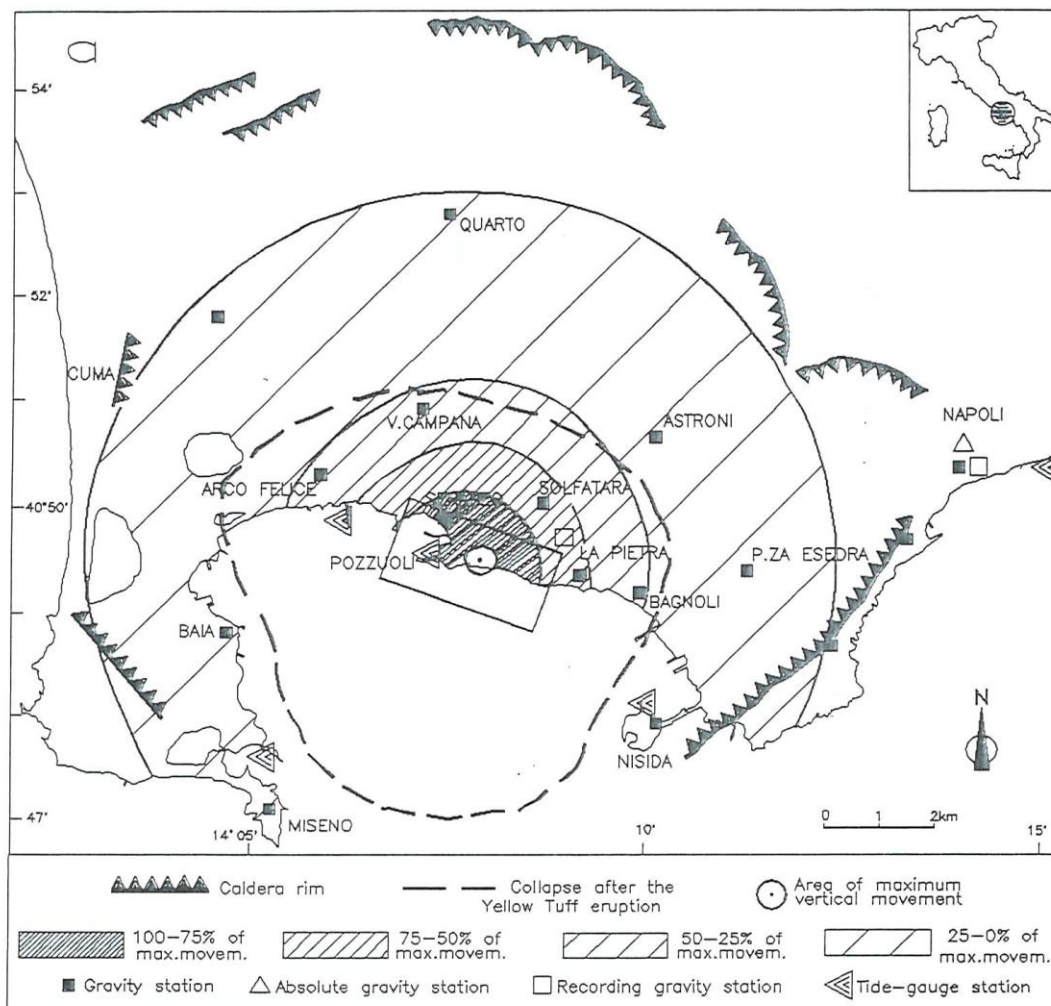


**Figura 4.1.** *Rappresentazione schematica del sismometro IMGC02*

## 4.2 Campi Flegrei

I Campi Flegrei sono da sempre noti per essere una regione avente un'intensa attività geodinamica caratterizzata da vulcanismo attivo, intense emissioni geotermiche, sciami sismici, sollevamenti del suolo e subsidenza. Poiché questa è una regione densamente abitata si sono svolti studi di diverso tipo al fine di definire un modello che stabilisca quali siano le caratteristiche vulcaniche e strutturali dell'area. Questi studi hanno previsto analisi di tipo sismico, geodetico, gravimetrico, magnetico e geochimico.

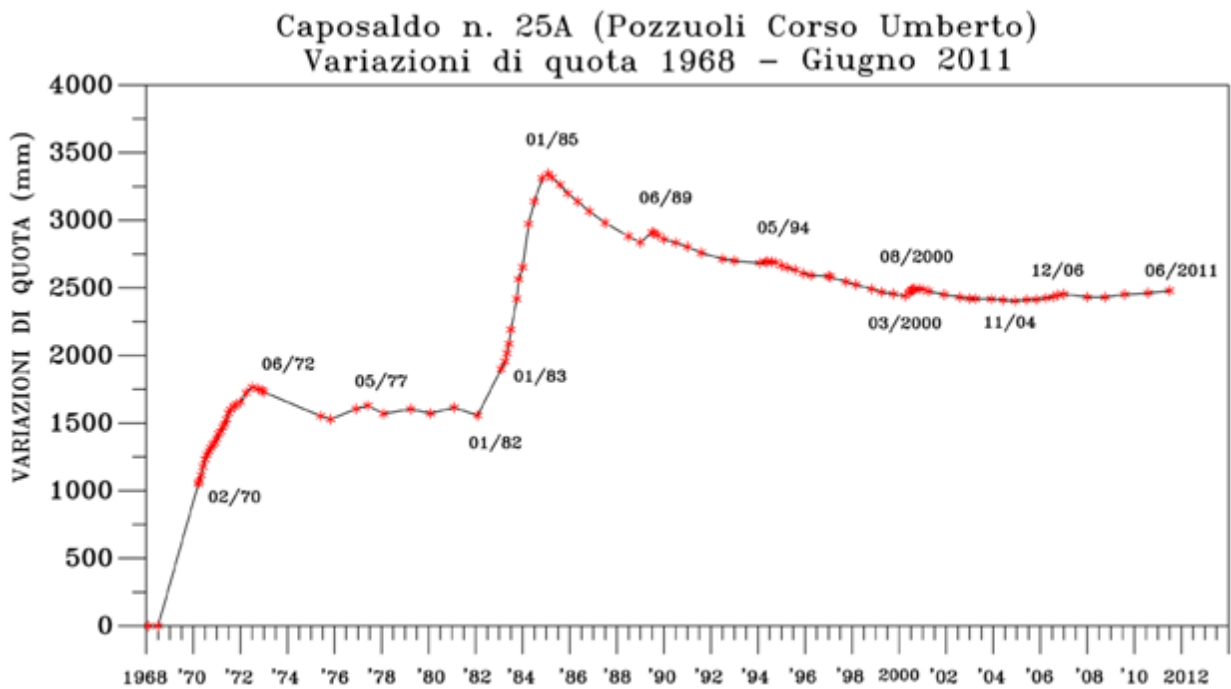
La struttura principale è costituita da una caldera collassata all'incirca 35.000 anni fa, avente una forma circolare di diametro di circa 12km. Negli anni '80 si riteneva, in base all'evoluzione degli eventi eruttivi, che fosse presente una camera magmatica a bassa profondità con le caratteristiche di un sistema chiuso nel quale il volume si va progressivamente riducendo a causa del raffreddamento e delle eruzioni. I dati provenienti da carotaggi e indagini geofisiche suggerivano che il tetto della camera magmatica fosse ad una profondità 3-4 km sotto il centro della caldera. Indagini di tomografia sismica più recenti (Zollo et al. 2008) mostrano un esteso serbatoio magmatico ad una profondità di 7-8 km dal quale si verificano episodicamente intrusioni più superficiali (5 km e secondo alcuni, fino a 3 km di profondità), responsabili dei fenomeni bradisismici.



**Figura 4.2. Mappa dei Campi Flegrei**



Considerando i dati dell'ultimo secolo provenienti dalla stazione di Serapeo, durante il quale si sono potute effettuare misure quantitative del fenomeno di sollevamento e subsidenza, fino al 1968 si è misurato uno spostamento verso il basso del terreno ad una velocità di 15mm all'anno; nei successivi 20 anni si sono registrati due grandi e rapidi fenomeni di sollevamento del suolo, immediatamente seguiti da subsidenza. Tali fenomeni, avvenuti nel 1970-72 e 1982-84 hanno fatto registrare presso la città di Pozzuoli un sollevamento massimo rispettivamente di 170 cm e 180 cm. Il campo di spostamento verticale è stato essenzialmente concentrico e con raggio di circa 6-7 km, mentre l'area di sollevamento/subsidenza è stata caratterizzata da una simmetria a campana. I fenomeni di sollevamento sono stati accompagnati da intensa attività sismica e da grandi spostamenti orizzontali del suolo.



**Figura 4.3.** *Variazioni di quota registrate presso la città di Pozzuoli*

La maggioranza degli autori che ha proposto un modello per questi episodi suggerisce la presenza di una sorgente ad una profondità di circa 3km sotto il centro della caldera, poche centinaia di metri a est di Pozzuoli. In base alle caratteristiche dello spostamento verticale la geometria più semplice per descrivere la sorgente è

quella sferica o rettangolare di dimensioni orizzontali 1.5 e 3 km (Corrado et al., 1976-1977; Berrino et al., 1984; Dvorak and Berrino, 1991).

Durante il fenomeno di sollevamento si ritiene che la parte superiore della sorgente sia rappresentata dalla cima del corpo magmatico soggetto ad un aumento della pressione interna, la seguente diminuzione di pressione avrebbe poi generato subsidenza a causa della riduzione del volume della sorgente. L'iniziale aumento di pressione nella camera magmatica può essere dovuto a input di nuova massa, differenziazione interna senza aggiunta di nuova massa o all'aumento della pressione di poro nel sistema geotermale soprastante.

Come già esposto nell'introduzione per studiare la redistribuzione di massa avvenuta alle profondità della sorgente è necessario studiare il residuo di gravità, cioè la variazione di gravità misurata, corretta per lo spostamento verticale apportando la correzione in aria libera, che per quest'area assume il valore di  $-0.290 \pm 0.005$  mGal/m ( $1Gal = 1 \cdot 10^{-2} m/s^2$ ).

La rete gravimetrica dei Campi Flegrei negli anni '80 contava una decina di stazioni. Le più grandi variazioni di gravità si sono sempre registrate nella stazione Serapeo, vicino all'area di massimo spostamento verticale. I più grandi valori di residuo sono stati invece osservati nelle stazioni Solfatara e La Pietra cioè nell'area in cui si è registrato anche il massimo gradiente orizzontale di spostamento verticale, il massimo spostamento orizzontale e la maggiore attività sismica durante il sollevamento.

E' conveniente descrivere l'ultima crisi bradisismica considerando tre intervalli di tempo principali: la fase di sollevamento (gennaio 1982- dicembre 1984); la fase di rapida subsidenza (gennaio 1985- dicembre 1987) e la fase di subsidenza più lenta (da gennaio 1988). In tutti e tre gli intervalli di tempo i dati collezionati nelle varie stazioni hanno evidenziato un andamento decrescente delle variazioni di gravità andando dal centro della caldera verso l'esterno, seguendo lo stesso comportamento dello spostamento verticale; inoltre il residuo massimo è stato osservato in corrispondenza della parte a nord-est della sorgente presa come modello (Berrino 1994). Si è notato invece che il valore del residuo presente ai confini della caldera è generalmente piccolo e che i grandi valori di residuo registrati da alcune stazioni siano quasi certamente dovuti a fenomeni locali. E' importante notare come nell'intera area non si siano registrati residui significativi durante la fase di subsidenza più lenta: questo conferma l'ipotesi che dalla fine del 1987 sia

terminata l'attività vulcanica che causava l'immissione di nuovo materiale magmatico.

Elenchiamo in seguito quanto osservato presso la stazione di Serapeo:

- 1) Da novembre 1982 a maggio 1983 si è verificato un rapido aumento del valore residuo e un incremento di massa di  $0.7 \cdot 10^{11}$  kg (40% del totale). questa fase coincide con il massimo della velocità del suolo e con l'inizio dell'attività sismica.
- 2) Da giugno 1983 ad aprile 1984 il residuo aumenta a tasso costante indicando un cambiamento del volume della sorgente a tasso costante
- 3) Da aprile 1984 a gennaio 1985 l'andamento del residuo mostra una piccola attenuazione. Questo calo è seguito da un massimo di attività sismica e da un movimento del suolo pressoché nullo.
- 4) Da gennaio 1985 a ottobre 1985 non cambia il residuo e l'attività sismica cessa
- 5) Da ottobre 1985 a maggio 1986 il residuo mostra un rapido calo interpretato da Berrino (1994) in termini di drenaggio di massa di  $0.9 \cdot 10^{11}$  kg
- 6) Da maggio 1986 a gennaio 1991 il residuo di gravità appare generalmente costante nonostante la presenza di alcune fluttuazioni

I residui più significativi nelle stazioni di Serapeo, Solfatarà e La Pietra mostrano un comportamento molto simile. Il fenomeno osservato all'inizio del 1983 a Serapeo fu osservato anche a La Pietra anche se non completamente. Nell'area di Solfatarà si sono registrati due episodi da giugno a settembre 1983 e da gennaio a aprile 1984 corrispondenti rispettivamente ad un aumento e al raggiungimento del massimo dell'attività sismica. I fenomeni osservati a Solfatarà coincidono con un'attenuazione dei residui nelle altre stazioni e potrebbe indicare una iniezione di massa locale e ristretta.

Durante il fenomeno di sollevamento il rapporto  $\Delta g/\Delta h$  fatto registrare a Serapeo è in ottimo accordo con la media delle altre stazioni mentre non lo è più durante la fase di subduzione. Questo differente comportamento è probabilmente dovuto a valori estremamente piccoli di gravità e sollevamento per le stazioni poste ai margini della caldera, che come conseguenza comporta errori relativi molto grandi. Un'ulteriore causa di questo fenomeno è il fatto che il sollevamento e l'abbassamento della superficie terrestre sono avvenuti a velocità diverse.

Nelle stazioni di Serapeo, Solfatara e Bagnoli si può stabilire che le variazioni di gravità sono dovute ad un puro effetto Bouguer; per la stazione Arco Felice il rapporto  $\Delta g/\Delta h$  indica un semplice effetto di aria libera, infine nella stazione di La Pietra, posta a est del punto di massima deformazione verticale, è possibile individuare anche una variazione di massa.

Ci sono diversi modi per quantificare, a partire da questi dati, la variazione netta di massa sotto la superficie:

Berrino in un lavoro del 1984 considera il volume e l'estensione areale del sollevamento, ipotizzando che la profondità della sorgente non sia superiore ai 3km. La densità della sorgente è calcolata dalle proprietà fisiche del materiale all'interno della caldera e, usando il volume di sollevamento, si ricava un aumento di massa di  $2 \cdot 10^{11}$  kg. Il valore di densità si è ricavato usando la relazione tra gravità totale osservata, variazione di elevazione e correzione in aria libera:

$$\frac{\Delta g}{\Delta h} = \frac{\delta g}{\delta h} - 2\pi G\rho \frac{1 + \mu}{1 + 2\mu}$$

Un altro modello che si adatta ugualmente bene suggerisce che la sorgente della deformazione sia un "sill" rettangolare a 3 km di profondità. Lo spessore di tale intrusione è stato calcolato indirettamente dai dati sulla gravità ed è risultato essere di 13m durante il periodo di intrusione della massa.

Durante la rapida fase di subduzione si è registrata una perdita di massa di  $0.9 \cdot 10^{11}$  kg, pari a circa il 50% dell'aumento di massa registrato durante il sollevamento, mentre l'abbassamento totale della superficie è risultata essere il 30% del valore osservato per il sollevamento totale.

La relazione  $\Delta g/\Delta h$  e i risultati della deformazione del suolo e di osservazioni sismiche suggeriscono quindi, in base al modello di sorgente isotropa (Mogi 1958) che il fenomeno bradisismico sia stato causato da una sorgente in espansione a densità costante ( $\rho_{intr} = \rho$ ), posta nella parte centrale della caldera, poche centinaia di metri a est di Pozzuoli. La sorgente sarebbe ad una profondità di 3 km per cui si ritiene che il fenomeno interessi la parte superiore della camera magmatica per cui il fenomeno di variazione di massa è interpretabile in termini di intrusione e successivo drenaggio di magma. Analisi sul cambiamento dei residui di gravità al passare del tempo suggeriscono che una piccola immissione di magma è avvenuta alcuni mesi dopo l'inizio del sollevamento e fu seguita da una crescente

attività sismica. A partire dal giugno 1983 è stata rilevata una immissione costante di magma nella parte est dell'area. Due intrusioni di magma più piccole sono state inoltre rilevate nel confine nordorientale.

Questi apporti di magma si sono verificati in regioni di:

a) massimo gradiente orizzontale di spostamento verticale

b) massima deformazione orizzontale del suolo

c) massimo numero di eventi sismici

I meccanismi focale per la maggior parte dei terremoti localizzati intorno a Solfatara sono stati di tipo normale. Questa regione corrisponde a quella indicata da Di Vito (1985) come area a massimo rischio di eruzione. Ne segue che l'attività magmatica/vulcanica è localizzata nell'area di massima attività tettonica.

La geometria costante della deformazione verticale, l'analisi sismica che indica un movimento del magma senza migrazioni significative e il fatto che i cambiamenti geochimici siano avvenuti a una profondità di 400m suggerisce che l'apporto di magma dedotto dai dati di gravità è solo laterale e che si è verificato un movimento molto piccolo o addirittura nullo del magma verso l'alto. Infine il rapporto  $\Delta g/\Delta h$  durante la subsidenza indica un calo della massa: un drenaggio del magma senza attività sismica e con movimento del suolo più lento può essere attribuito ad una riduzione della pressione all'interno della sorgente, con una conseguente riduzione del suo volume. Questo processo può essere stato agevolato dalla rimozione di fluidi da un sistema idrotermale profondo.

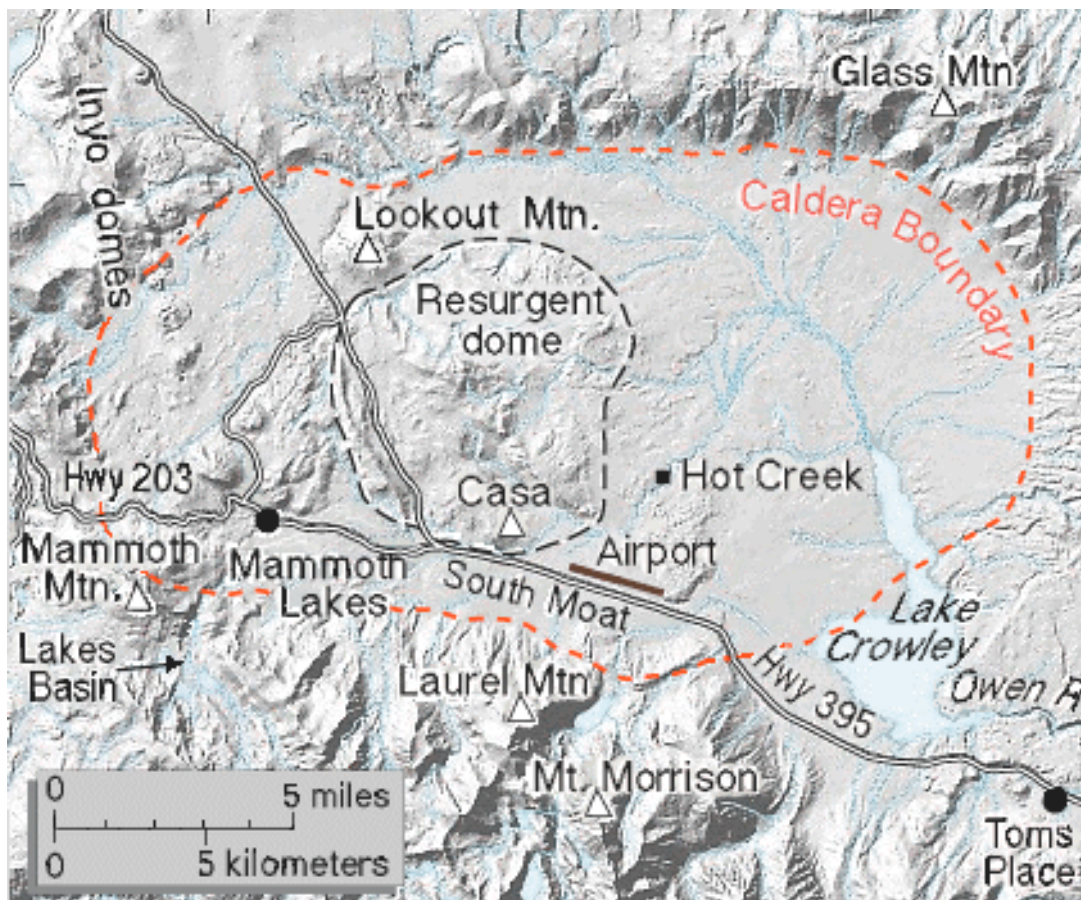
### **4.3 Long Valley Caldera**

L'area vulcanica della Long Valley in California è stata attiva negli ultimi 3 milioni di anni, ed in particolare le eruzioni avvenute tra 2.1 e 0.8 milioni di anni fa portarono alla formazione della Glass Mountain nella parte nord-est della caldera. Le eruzioni della Glass Mountain raggiunsero il massimo dell'intensità 760.000 anni fa con un evento che portò al collasso del tetto della camera magmatica e la conseguente formazione della Long Valley Caldera, avente forma ovale di dimensioni 17x32 km. Nel periodo che va da 760.000 a 600.000 anni fa si verificò un sollevamento del terreno in corrispondenza della caldera e l'eruzione di flussi di lave riolitiche hanno

portato alla formazione di un duomo lavico (*resurgent dome*). Nel maggio 1980 si è verificato un intenso sciame sismico e il periodo di instabilità persiste tuttora, con fenomeni sismici e sollevamento del duomo nella zona centrale della caldera. Dopo un rapido incremento del tasso di deformazione tra l'estate e l'autunno del 1997 la caldera è stata relativamente inattiva, senza significative deformazioni.

Sono state individuate molte sorgenti di deformazione, le principali sono l'intrusione di magma sotto il *resurgent dome* e intrusione laterale nell'area sud della caldera.

Una delle domande fondamentali che riguardano la geodinamica della Long Valley è che cosa causi l'instabilità presente nell'area della caldera. Per rispondere a questo quesito si sono effettuati moltissimi studi geodetici e gravimetrici che hanno portato a descrivere la sorgente di deformazione come un ellissoide pressurizzato allungato verticalmente, avente rapporto tra gli assi compreso tra 0.25 e 0.65 e densità  $\rho_{intr}$  tra 1180 e 2330  $Kg/m^3$ .



**Figura 4.4.** Mappa della Long Valley Caldera

Al fine di ottenere un modello più generale è possibile ipotizzare una sorgente distribuita che non sia stabilita a priori ma che venga man mano descritta attraverso l'analisi dati. In questo modo la geometria risultante dal modello ci potrà fornire informazioni riguardo le strutture geologiche che controllano i processi magmatici e idrotermali all'interno della caldera. Questo modello si ottiene suddividendo il volume al di sotto della caldera in tante piccole celle, ognuna delle quali può essere interessata da una variazione di volume. Il campo di spostamento in superficie sarà la conseguenza della variazione di volume di ciascuna cella. Si assume che il mezzo in esame si comporti in maniera elastica nell'intervallo di tempo in cui si effettuano osservazioni. Attraverso un'adeguata distribuzione di dati è possibile stimare la distribuzione delle variazioni di volume all'interno della griglia di celle e quindi le variazioni di volume sotto la Long Valley Caldera. La più grande variazione di volume si sviluppa lungo la direzione est-ovest ad una profondità di 5-7 km; vi è inoltre presente un'altra componente di variazione di volume che si estende verso nord a partire da quella appena descritta. La variazione di volume negli strati più profondi è molto più piccola ma simile per caratteristiche.

Quest'ultimo modello permette inoltre di approfondire la relazione tra deformazione e sismicità. Secondo l'odierna interpretazione le sorgenti di deformazione dominanti che contribuiscono alla deformazione e alla sismicità all'interno della caldera includono:

- 1) espansione asismica di una sorgente posta all'incirca 6km al di sotto il *resurgent dome*
- 2) espansione sismica di una sorgente più profonda (10-20km) sotto un'area denominata South Moat Seismic Zone (SMSZ)
- 3) attivazione nella SMSZ di una serie di faglie trascorrenti (*strike-slip*).

L'interpretazione dei dati raccolti suggerisce che la maggior parte dell'attività sismica della caldera di magnitudo 3 o più è concentrata ad una profondità compresa tra i 4 km e gli 8 km, poco più a sud rispetto all'area soggetta alla massima variazione di volume.

La relazione tra variazione di volume sotto la superficie terrestre, presenza di faglie e terremoti può essere dovuto al fatto che le faglie si comportino come condotti per il passaggio di fluidi e gas al di sotto della caldera, rappresentando quindi aree ad alta permeabilità; un'altra interpretazione è quella delle faglie come zone in cui si

concentra la deformazione. E' chiaro che le due interpretazioni non sono in contrasto tra loro, i due fenomeni possono verificarsi contemporaneamente.

Le misure di gravità effettuate durante gli eventi descritti, cioè tra il 1980 e il 1997, non contribuiscono in maniera significativa alla descrizione del fenomeno, in quanto solamente poche misure presentano un rapporto segnale/rumore accettabile; la maggior parte di esse infatti è probabilmente influenzata più da variazioni locali che dall'intrusione di massa. Per lo sviluppo dei modelli descritti le misure di tipo geodetico hanno invece ricoperto un ruolo fondamentale.



## 5. APPLICAZIONI AI CAMPI FLEGREI

### 5.1 Evento di sollevamento del suolo

Nei fenomeni descritti nel capitolo 4, Berrino (1994) ipotizza che gli episodi di sollevamento avvenuti tra il 1982 e 1984 presso i Campi Flegrei siano dovuti a una sorgente isotropa. Il sollevamento massimo registrato è di 180 cm mentre la profondità della sorgente è stimata essere di 3km.

Considerando il caso isotropo, si ha che la differenza totale di gravità residua registrata è

$$\Delta g_{tot} = \frac{Gc\rho_{intr}(1-2\nu)Ph}{2\mu R^3(1-\nu)} \quad (5.1)$$

Per cui

$$\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}} = \frac{\pi G\rho_{intr}}{(1-\nu)}$$

Si noti che tutte le formule del capitolo 3 relative agli spostamenti sono utilizzate cambiate di segno, al fine di ottenere valori positivi per spostamenti verso l'alto ed avere quindi una rappresentazione grafica più intuitiva del fenomeno.

Nel caso dei Campi Flegrei è possibile ricavare tale valore dalle misure effettuate (Berrino 1994), facendo la sottrazione tra il valore medio registrato nelle diverse stazioni di misura di (5.1) e la correzione in aria libera utilizzata per i Campi Flegrei:

$$\frac{\pi G\rho_{intr}}{(1-\nu)} = -(213 \pm 6) + (290 \pm 5) = 77 \pm 8 \mu Gal/m$$

per cui

$$\rho_{intr} = (2.8 \pm 0.3) \cdot 10^3 kg/m^3 \quad (5.2)$$

Si è già accennato, nel capitolo 3, al fatto che l'ipotesi di sorgente isotropa presenti alcuni problemi nella descrizione di fenomeni reali. In questo caso infatti occorre ipotizzare una fuoriuscita di massa dalla sorgente deformativa durante il periodo di abbassamento del suolo che segue al sollevamento.

### 5.1.1 Caso 1: una sola sorgente di deformazione

Si è ipotizzato dunque che la sorgente non fosse isotropa, ma fosse una dislocazione sul piano orizzontale, descritta nel paragrafo 3.4.

Partendo dall'equazione 3.62 per la sorgente isotropa

$$u_{z0} = \frac{Ph}{2\pi\mu} \left[ \frac{c(1-2\nu)}{R^3} \right]$$

si cercano i valori di  $P'h'$  e  $c'$ , posto  $\nu=0.25$ , che rendano l'andamento dello spostamento verticale dovuto a una dislocazione orizzontale (3.73 b)

$$u'_{z0} = \frac{P'h'}{4\pi\mu} \left[ \frac{3c'^3(1-2\nu)}{R'^5 \nu} \right]$$

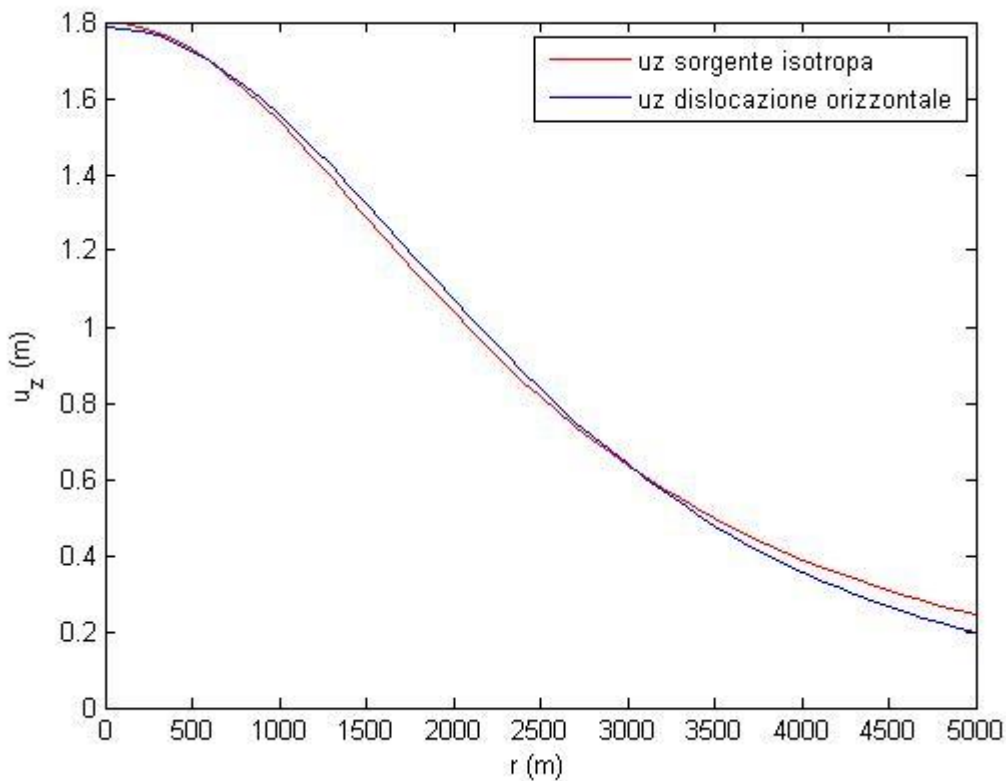
il più possibile simile a quello della 3.62.

I valori che si ottengono sono

$c'=4.2$  km;

$P'h'/Ph=0.3242$ .

In figura 5.1 sono riportati entrambi gli andamenti per una sorgente istropa e per una dislocazione orizzontale.



**Figura 5.1.** Andamento del sollevamento del suolo in funzione della distanza per il caso di sorgente isotropa e dislocazione orizzontale. In questo grafico valori positivi nell'asse delle ordinate indicano uno spostamento verso l'alto.

E' inoltre possibile stimare la densità della massa che è penetrata nella sorgente nel caso di dislocazione orizzontale.

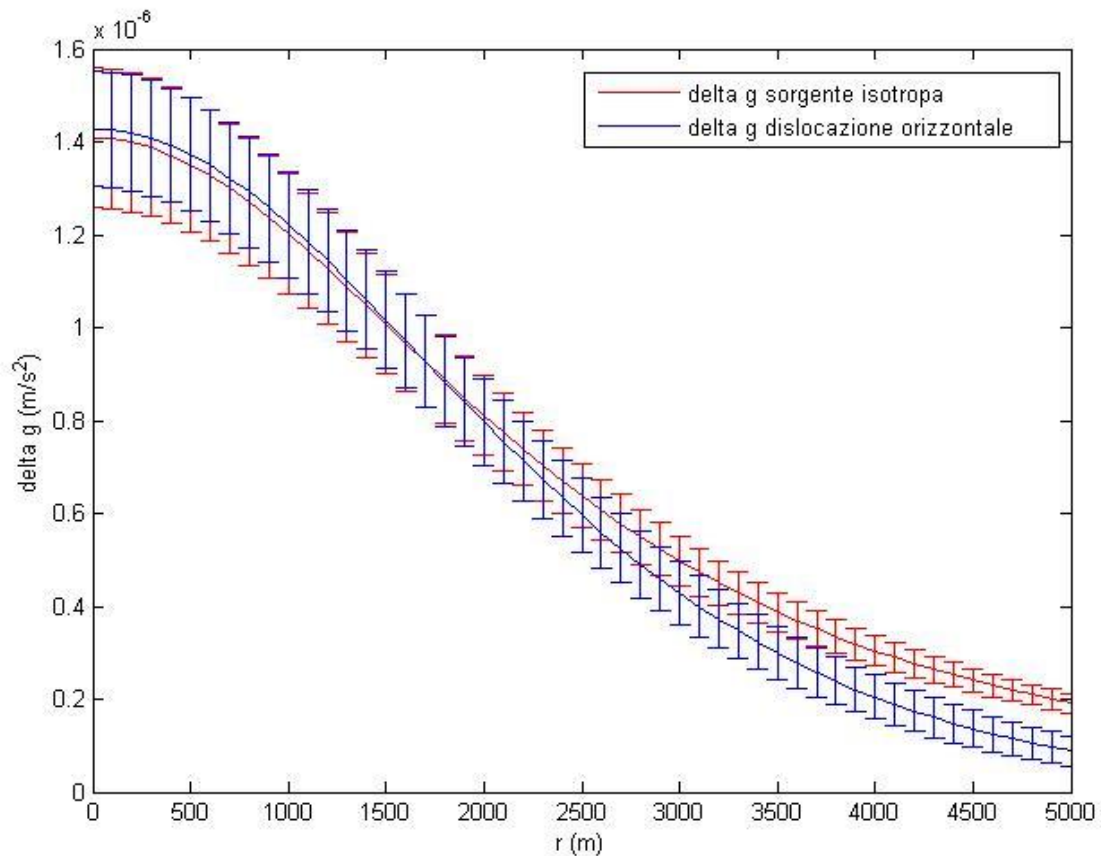
Nel caso la sorgente sia una dislocazione sul piano orizzontale

$$\Delta g'_{tot} = \frac{Gc'\rho'_{intr}(1-2\nu)(1+\nu)Ph}{6\mu R'^3(1-\nu)\nu} - G\rho_0 P'h' \frac{(1-2\nu)}{2\nu\mu} \left( \frac{c'}{R'^3} - \frac{3c'^3}{R'^5} \right) \quad (5.3)$$

con  $\rho_0 = 2500 \text{ kg/m}^3$

Cercando il  $\rho'_{intr}$  che renda il più possibile simili i valori di  $\Delta g_{tot}$  e  $\Delta g'_{tot}$  si ottiene  $\rho'_{intr} = (1.3 \pm 0.9) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Per calcolare l'incertezza su  $\rho'_{intr}$  si sono calcolati i valori che questa quantità assume quando si attribuiscono a  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$  i valori massimi e minimi entro l'incertezza calcolata ( $\frac{\Delta g_{tot}^{max}}{u_{z0}} = 85 \mu\text{Gal/m}$ ;  $\frac{\Delta g_{tot}^{min}}{u_{z0}} = 69 \mu\text{Gal/m}$ )



**Figura 5.2.** *Andamento del residuo dell'accelerazione di gravità in funzione della distanza per il caso di sorgente isotropa e dislocazione orizzontale a densità costante.*

Si noti come dalla figura 5.2 i contributi di differenza di gravità sono in buon accordo, i dati risultano non compatibili tra loro entro le incertezze solamente per distanze superiori ai 4km dal centro della caldera, dove la dislocazione orizzontale presenta valori inferiori alla sorgente isotropa.

### 5.1.2 Caso 2: due sorgenti di deformazione

#### a) Dislocazione orizzontale e sorgente isotropa in profondità

Nel caso 1 non si è considerata la provenienza della massa che va ad inserirsi nella sorgente. Ipotizziamo dunque che il trasferimento di massa avvenga da una

sorgente posta a 8 km (Zollo et al. 2008), di tipo isotropo. Lo spostamento verticale dovuto a tale fenomeno sarà dato da due componenti:

il termine dato dalla dislocazione orizzontale che genera sollevamento:

$$\frac{P'h'}{4\pi\mu} \left[ \frac{3c'^3 (1 - 2\nu)}{R'^5 \nu} \right]$$

ed il termine

$$- \frac{P''h''}{2\pi\mu} \left[ \frac{c''(1 - 2\nu)}{R''^3} \right]$$

dato dalla scomparsa, conseguente al trasferimento di massa in zone più superficiali, della sorgente a 8 km schematizzata come sorgente isotropa. Questo termine genera abbassamento del suolo.

Si ottiene allora

$$u_{z0 \text{ deep}} = \frac{P'h'}{4\pi\mu} \left[ \frac{3c'^3 (1 - 2\nu)}{R'^5 \nu} \right] - \frac{P''h''}{2\pi\mu} \left[ \frac{c''(1 - 2\nu)}{R''^3} \right] \quad (5.4)$$

Supponendo costante la densità nel passaggio dalla sorgente profonda a quella superficiale ne consegue che anche la variazione di volume delle due sorgenti dovrà essere uguale. Essendo per la dislocazione orizzontale

$$\Delta V' = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)P'h'}{6\mu(1 - \nu)\nu}$$

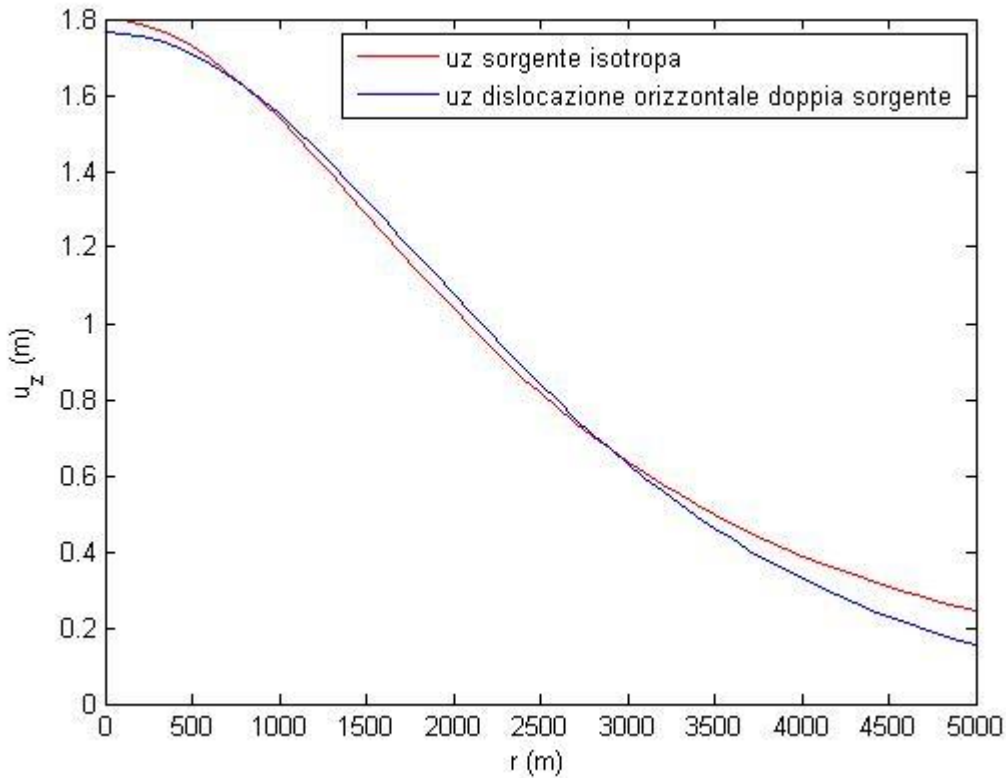
mentre per la sorgente isotropa

$$\Delta V'' = \frac{(1 - 2\nu)P''h''}{2\mu(1 - \nu)}$$

ne consegue che  $P''h'' = \frac{(1+\nu)P'h'}{3\nu}$ .

I valori che rendono l'andamento di  $u_{z0 \text{ deep}}$  il più simile possibile a  $u_{z0}$ , posto  $c''=8\text{km}$ , sono:

$c'=4.5 \text{ km}$ ;  $P''h''/Ph=0.4028$ .



**Figura 5.3.** Andamento del sollevamento del suolo in funzione della distanza per il caso di una sorgente isotropa e doppia sorgente costituita da dislocazione orizzontale e sorgente isotropa. In questo grafico valori positivi nell’asse delle ordinate indicano uno spostamento verso l’alto.

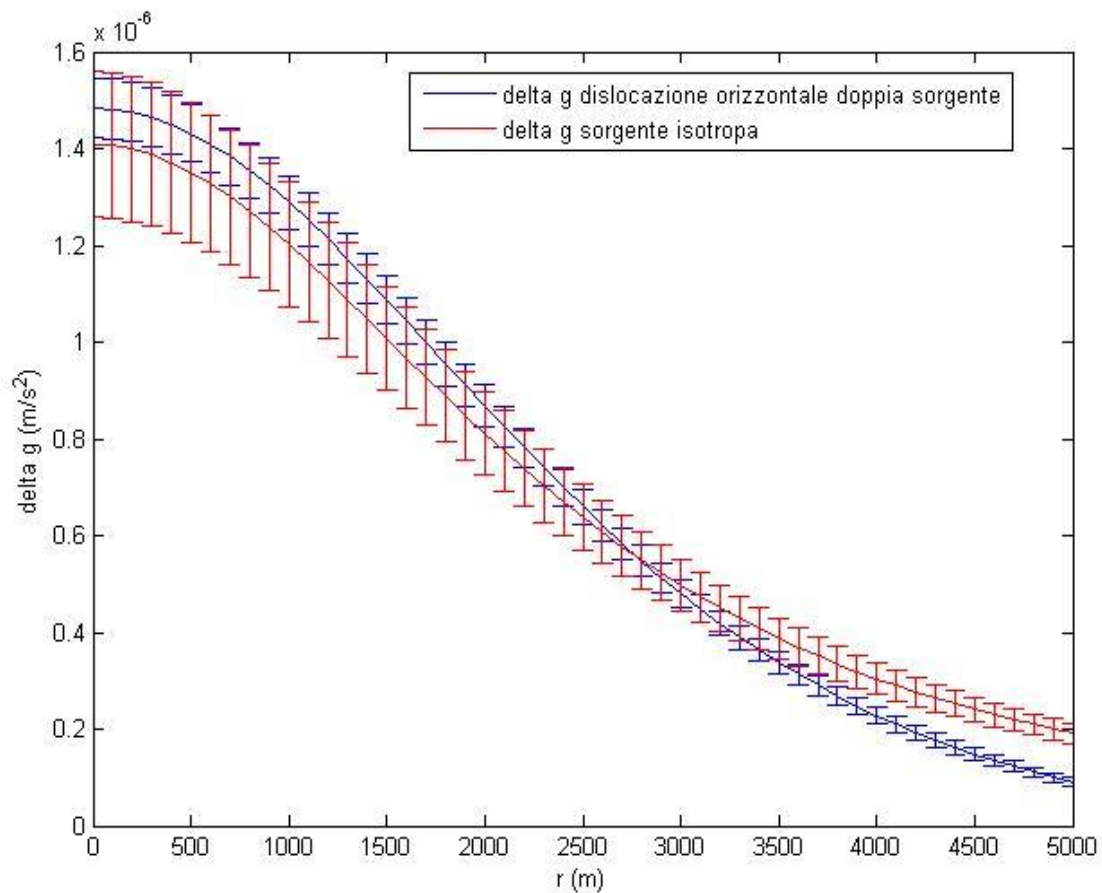
La differenza di gravità totale in questo caso è

$$\Delta g_{tot}^{2s} = \frac{Gc'\rho''_{intr}(1-2\nu)(1+\nu)P'h'}{6\mu R'^3(1-\nu)\nu} - G\rho_0 \frac{(1-2\nu)}{2\nu\mu} \left( \frac{c'}{R'^3} - \frac{3c'^3}{R'^5} \right) P'h' - \frac{Gc''\rho''_{intr}(1-2\nu)P''h''}{2\mu R''^3(1-\nu)} \quad (5.5)$$

I primi due termini corrispondono alla differenza di gravità dovuta alla sorgente posta a profondità  $c'$  in cui vi è stata intrusione di massa, l’ultimo invece indica il contributo dovuto all’estrusione di massa dalla sorgente profonda.

Ponendo  $\rho_0 = 2500 \text{ kg/m}^3$ , il valore di  $\rho''_{intr}$  che rende l'andamento di  $\Delta g_{tot}^{2S}$  il più possibile simile a quello di  $\Delta g_{tot}$  è:

$$\rho''_{intr} = (0.5 \pm 1.4) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$



**Figura 5.4.** Andamento del residuo di  $g$  in funzione della distanza per il caso di una sorgente isotropa e doppia sorgente costituita da dislocazione orizzontale e sorgente isotropa

Anche in questo caso emerge dalla figura 5.4 che i contributi della differenza di  $g$  sono in buon accordo, in particolare fino ad una distanza di circa 3.5 km dal centro della caldera.

## b) Due dislocazioni orizzontali

Ipotizzando che la sorgente posta a 8 km non sia isotropa ma una dislocazione orizzontale, ne consegue che il termine che genera abbassamento del suolo è dato da

$$\frac{P''h''}{4\pi\mu} \left[ -\frac{3c''^3 (1-2\nu)}{R''^5 \nu} \right]$$

Si ottiene allora

$$u_{z0\ deep} = \frac{P'h'}{4\pi\mu} \left[ \frac{3c'^3 (1-2\nu)}{R'^5 \nu} \right] - \frac{P''h''}{4\pi\mu} \left[ \frac{3c''^3 (1-2\nu)}{R''^5 \nu} \right] \quad (5.6)$$

Supponendo costante la densità nel passaggio dalla sorgente profonda a quella superficiale ne consegue che anche il volume delle due sorgenti dovrà essere uguale. Di conseguenza  $P''h'' = P'h'$ . Dunque

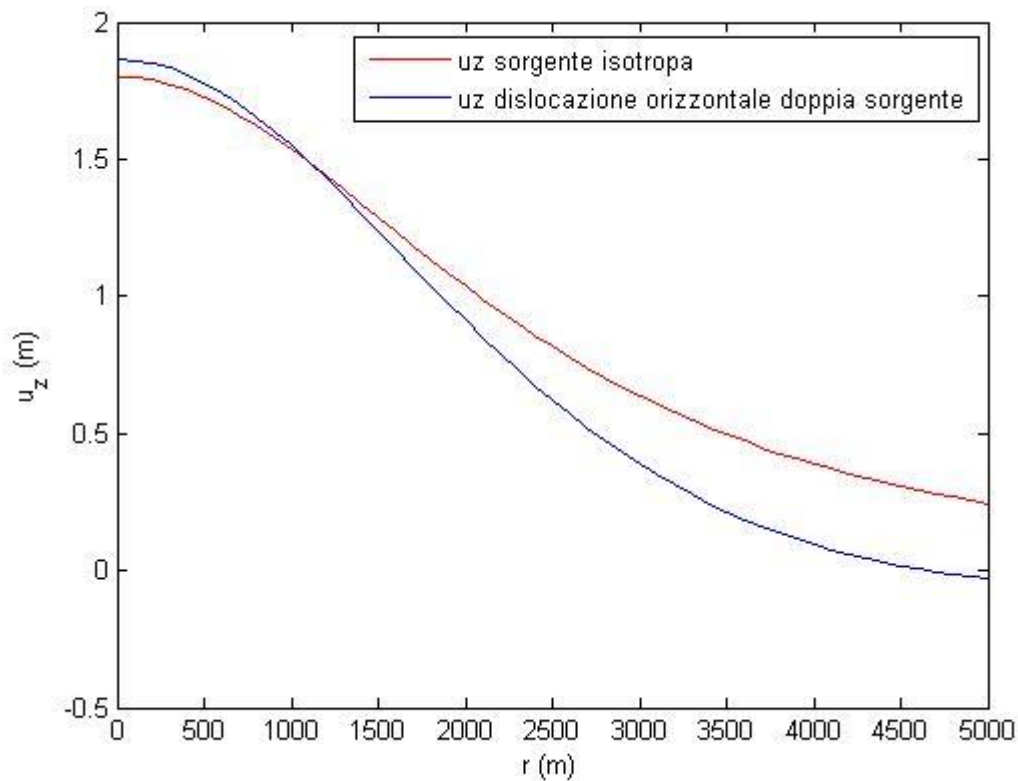
$$u_{z0\ deep} = \frac{P'h'}{4\pi\mu} \left[ 3 \left( \frac{c'^3}{R'^5} - \frac{c''^3}{R''^5} \right) \frac{(1-2\nu)}{\nu} \right] \quad (5.7)$$

I valori che rendono l'andamento di  $u_{z0\ deep}$  il più simile possibile a  $u_{z0}$ , posto  $c''=8\text{km}$ , sono:

$$c'=4.1 \text{ km}$$

$$P''h''/Ph=0.4372$$





**Figura 5.5.** Andamento del sollevamento del suolo in funzione della distanza per il caso di una sorgente isotropa e doppia dislocazione orizzontale. In questo grafico valori positivi nell'asse delle ordinate indicano uno spostamento verso l'alto

La differenza di gravità totale in questo caso è

$$\Delta g_{tot}^{2s} = \frac{Gc'\rho''_{intr}(1-2\nu)(1+\nu)P'h'}{6\mu R'^3(1-\nu)\nu} - G\rho_0 \frac{(1-2\nu)}{2\nu\mu} \left( \frac{c'}{R'^3} - \frac{3c'^3}{R'^5} \right) P'h' - \frac{Gc''\rho''_{intr}(1-2\nu)(1+\nu)P''h''}{6\mu R''^3(1-\nu)\nu} \quad (5.8)$$

I primi due termini corrispondono alla differenza di gravità dovuta alla sorgente posta a profondità  $c'$  in cui vi è stata intrusione di massa, l'ultimo invece indica il contributo dovuto all'estrusione di massa dalla sorgente profonda.

Posto  $\rho_0 = 2500 \text{ kg/m}^3$  si ottiene  $\rho''_{intr} = (-0.7 \pm 1.0) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Il valore di densità ottenuto, pur potendo teoricamente essere anche positivo entro l'incertezza, appare troppo piccolo per essere plausibile. Si può affermare dunque

che la descrizione del fenomeno mediante questo modello sia meno adatta rispetto ai casi descritti precedentemente.

## 5.2 Evento di subsidenza

Nei Campi Flegrei, durante la fase di abbassamento del suolo, si è registrato (Berrino 1994) un valore medio del rapporto tra variazione di gravità e spostamento verticale di  $(-0.13 \pm 0.02) \text{ mGal/m}$ .

Se la sorgente fosse isotropa, abbiamo già visto che da 5.1 si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}} &= \frac{\pi G \rho_{estr}}{(1 - \nu)} = -(0.13 \pm 0.02) + (0.290 \pm 0.005) \\ &= 0.16 \pm 0.02 \text{ mGal/m} \quad (5.9) \end{aligned}$$

e di conseguenza è necessario ipotizzare un' uscita di massa di densità

$$\rho_{estr} = (5.7 \pm 0.7) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \quad (5.10)$$

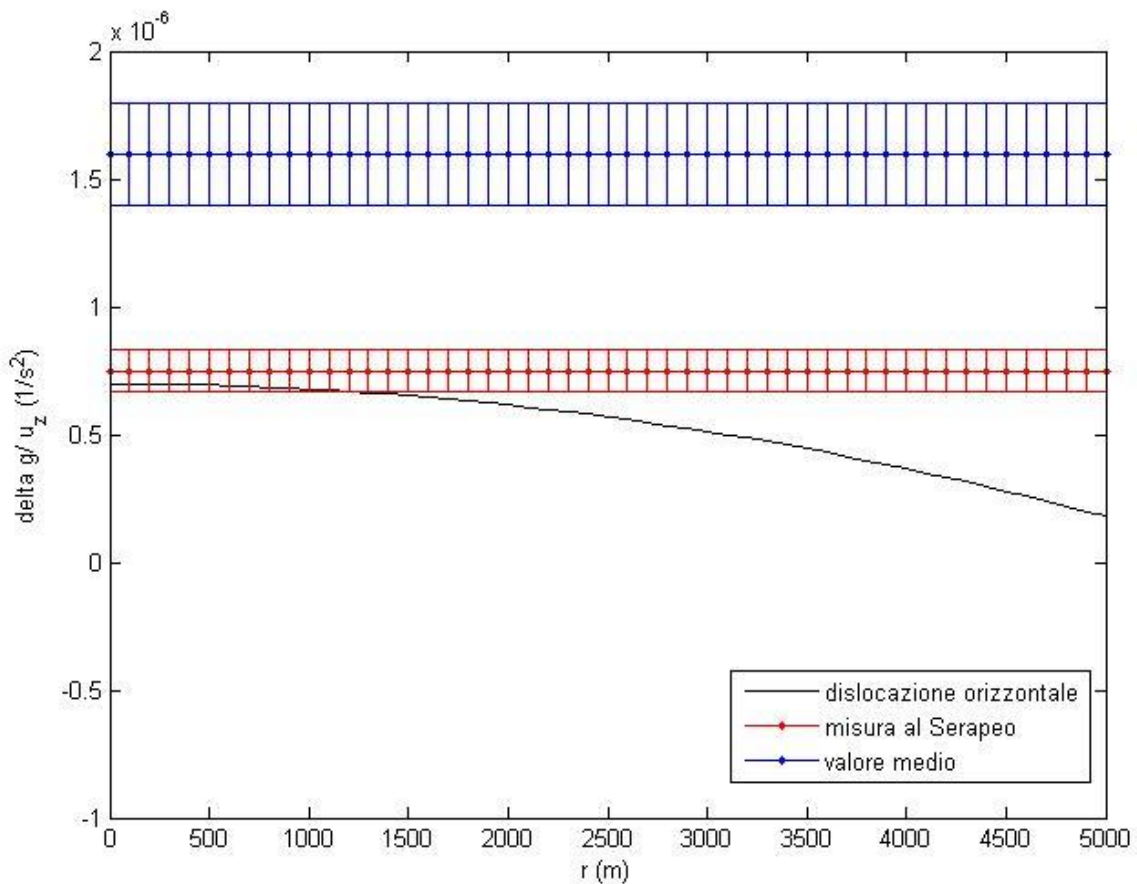
Nel caso di dislocazione orizzontale vale la 3.79 cambiata di segno, dal momento che in questo capitolo abbiamo deciso di orientare l'asse z verso l'alto per una comprensione più intuitiva del fenomeno:

$$\frac{\Delta g'_{tot}}{u'_{z0}} = -2\pi G \rho_0 \left( \frac{R^2}{3c^2} - 1 \right) \quad (5.11)$$

Il risultato della 5.9 si ottiene da una distribuzione di dati piuttosto eterogenea che porta tra l'altro ad una stima di  $\rho_{estr}$  troppo elevata da poter essere considerata verosimile. Se si considerano i valori di  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$  nelle stazioni di Serapeo  $((0.07 \pm 0.02) \text{ mGal/m})$ , La Pietra  $((0.10 \pm 0.08) \text{ mGal/m})$  e Solfatara  $((0.10 \pm 0.03) \text{ mGal/m})$  essi risultano decisamente minori rispetto alla media ed è ragionevole ritenere che questi dati siano più affidabili degli altri, dal momento che derivano da uno spettro di misure più ampio.

Per quanto riguarda il Serapeo il livello della falda acquifera è coincidente con il livello del mare, grazie alla vicinanza alla costa, come osservato durante il

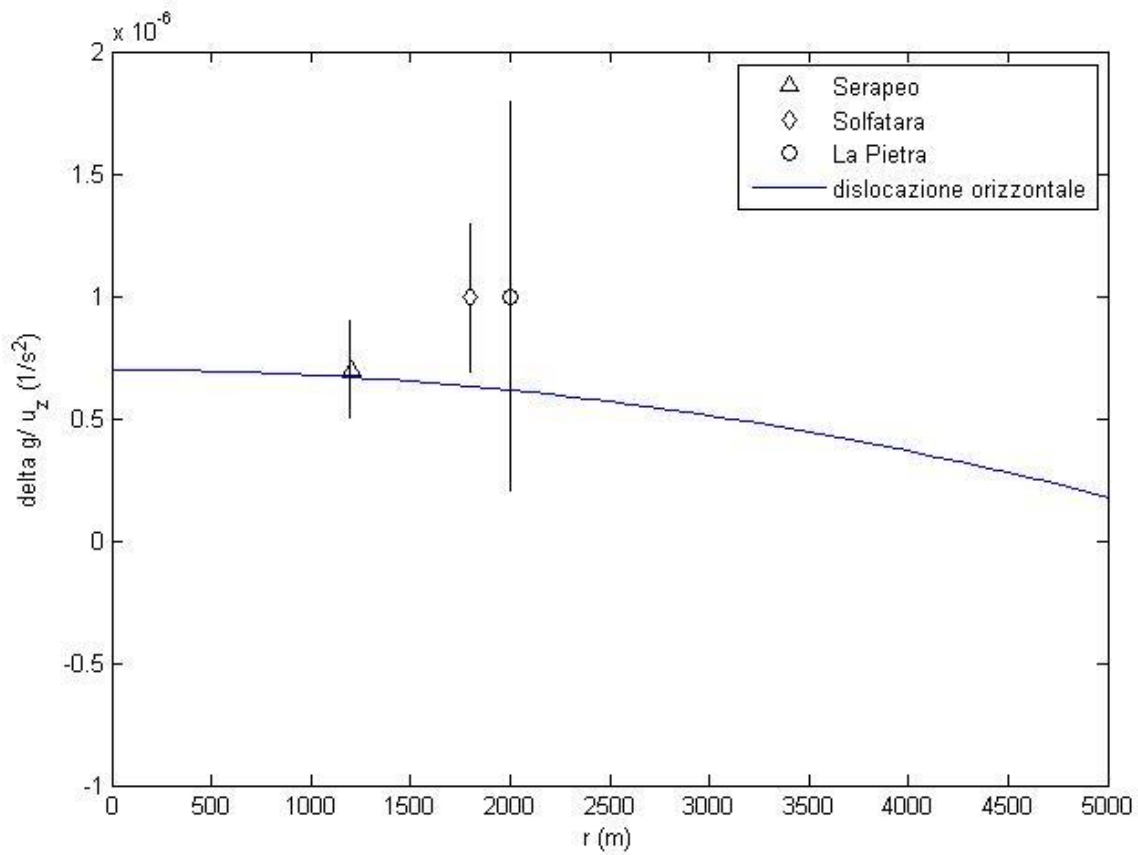
bradismo e questo rende i valori ivi registrati particolarmente attendibili. Nella maggior parte delle altre stazioni infatti il livello della falda non è stato monitorato.



**Figura 5.6.** Confronto tra l' andamento del rapporto tra differenza di gravità residua e sollevamento per la sorgente posta a 4.2km, il valore medio tra tutte le stazioni e quello calcolato al Serapeo.

Dalla figura 5.6 si nota come vi sia una differenza abbastanza marcata tra il  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$  dovuto alla depressurizzazione di una dislocazione orizzontale posta a 4.2 km e il valor medio calcolato tra tutte le stazioni. Se il valore di  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$  medio fosse uguale a quello calcolato ad esempio nella stazione di Serapeo, che come detto è possibile ritenere essere più verosimile di quello calcolato tramite la media delle stazioni, la dislocazione orizzontale sarebbe il modello giusto, entro le incertezze, per la

descrizione dell'abbassamento del suolo fino ad una distanza di circa 1.5 km dal centro della caldera.



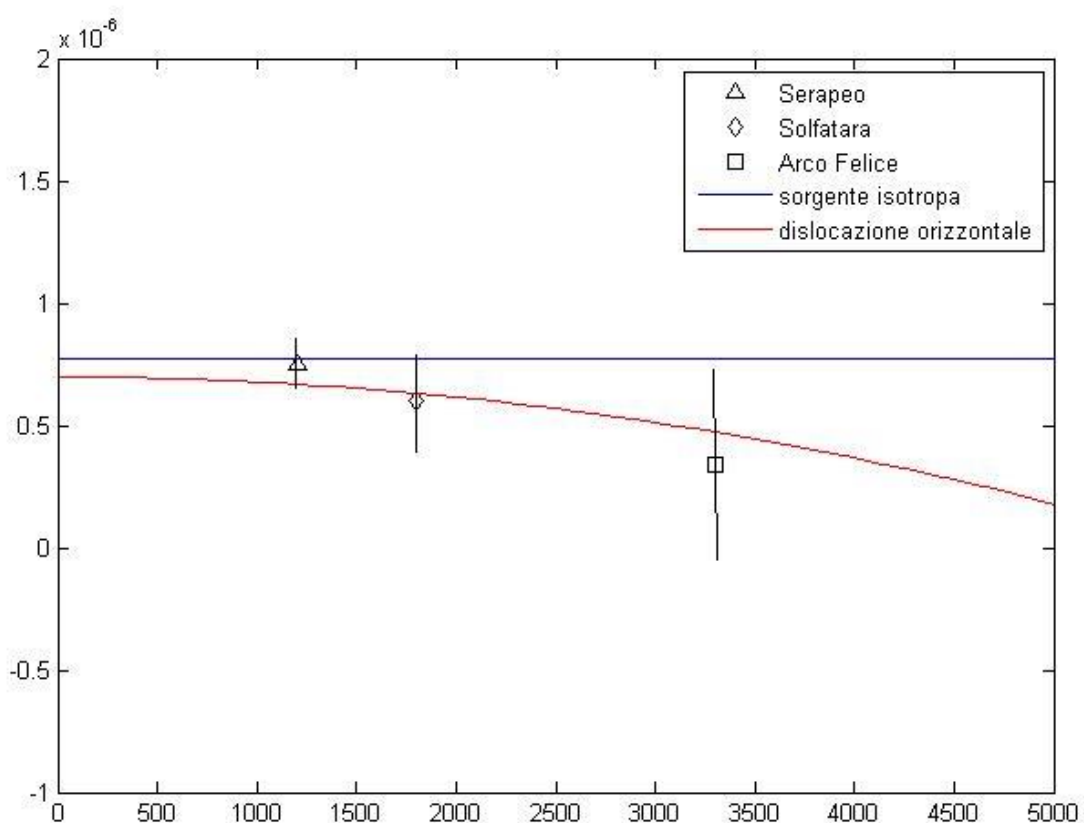
**Figura 5.7.** Confronto tra l'andamento del rapporto tra differenza di gravità residua e abbassamento per la sorgente posta a 4.2km e i valori registrati presso le stazioni di Serapeo, Solfatarata e La Pietra

Dalla figura 5.7 emerge come effettivamente dai valori calcolati presso le stazioni precedentemente citate sia plausibile ritenere che la sorgente sia una dislocazione orizzontale che va a "chiudersi" senza drenaggio di massa.

### 5.3 Conclusioni

Per il fenomeno di sollevamento del suolo si è dimostrato come utilizzando sorgenti deformative diverse da quella isotropa sia possibile stimare dei valori di  $\rho_{intr}$  più verosimili, anche se va detto che l'errore relativo è piuttosto ampio. Il valore calcolato per la sorgente isotropa appare infatti troppo elevato dal momento che la

densità del semispazio omogeneo considerato è addirittura minore di quella che dovrebbe andare ad inserirsi nella sorgente. L'utilizzo di una dislocazione orizzontale rappresenta inoltre piuttosto bene l'andamento decrescente del rapporto  $\frac{\Delta g_{tot}}{u_{z0}}$  all'aumentare della distanza dal centro della caldera. Il valore relativamente basso di  $\rho_{intr}$  ottenuto con la dislocazione orizzontale può essere spiegato con una presenza di volatili surriscaldati (acqua supercritica,  $CO_2$ ,  $SO_2$  etc.) essolti dal magma. Tuttavia occorre tener presente che il modello a semispazio omogeneo non tiene conto della stratificazione in densità e che quindi le stime di  $\rho_{intr}$  potrebbero subire correzioni notevoli se se ne tenesse conto, come mostrano alcuni modelli numerici



**Figura 5.8.** Confronto tra l'andamento del rapporto tra differenza di gravità residua e sollevamento per la sorgente isotropa e la dislocazione orizzontale. I valori registrati presso le stazioni di Serapeo, Solfatara e Arco Felice si adattano meglio alla curva rappresentante la dislocazione.

Per quanto riguarda la fase di abbassamento del suolo i dati in nostro possesso sono piuttosto eterogenei e poco precisi, nonostante ciò si è evidenziato come

probabilmente non sia necessario ipotizzare un' implausibile estrusione di massa da parte della sorgente. Una depressurizzazione della sorgente di dislocazione, rappresentata dal "chiudersi" di una dislocazione orizzontale a massa costante, risulta sicuramente essere la descrizione più adatta del fenomeno di subsidenza.

## ***Bibliografia***

Aki, K. and Richards, P.G., 1980. *Quantitative Seismology*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, USA.

Battaglia, M & Vasco D.W., 2005. The research for magma reservoirs in Long Valley Caldera: single versus distributed sources. *Geological Society, London, Special Publications*, 269, 173-180.

Berrino, G., Rymer, H., Brown, G.C., Corrado, G., 1992. Gravity-height correlations for unrest at calderas, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 53, 11-26.

Berrino, G., 1994. Gravity changes induced by height-mass variations at Campi Flegrei caldera. *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 61, 293-309.

Bonafede, M., Ferrari, C., 2009. Analytical models of deformation and residual gravity changes due to a Mogi source in a viscoelastic medium. *Tectonophysics* 471, 4-13.

Bonafede, M., Mazzanti, M., 1998. Modelling gravity variations consistent with ground deformation in the Campi Flegrei caldera (Italy). *J. Volcanol. Geotherm. Res.* 81, 137-157.

Bonafede, M. 1990. Axi-symmetric deformation of a thermo-poro-elastic half-space: inflation of a magma chamber. *Geophys. J. Int.* 103 (2), 298-299.

Fung, Y.C. 1965. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.

Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M., 1994. *Table of Integrals, Series, and Products*, Fifth Edition.

Mogi, K., 1958. Relations of the eruptions of various volcanoes and the deformation of the ground surface around them. *Bull. Earthq. Res. Inst. Tokio Univ.* 36, 99-134.

Mindlin, R. D., 1936. *Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid*, Department of Civil Engineering, Columbia University.

Okubo, S., 1991. Potential and gravity changes raised by point dislocations. *Geophys. J. Int.* 105, 573-586.

Zollo, A., Maercklin, N., Vassallo, M., Dello Iacono, D., Virieux, J., Gasparini, P., 2008.  
Seismic reflections reveal a massive melt layer feeding Campi Flegrei Caldera.  
Geophysical Research Letters 35

[www.inrim.it/res/res/grav.html](http://www.inrim.it/res/res/grav.html)



## ***Ringraziamenti***

Rivolgo al professor Bonafede un profondo ringraziamento per avermi dato la possibilità di realizzare tale lavoro ed avermi seguito con grande disponibilità. Grazie a lui ed alle sue indicazioni ho potuto apprendere nuove appassionanti cose e approfondire la conoscenza di altre.

Esprimo a tutta la mia famiglia, di cui Ilaria è già ora elemento primario, la riconoscenza per avermi appoggiato sempre e dato la forza per ultimare questa tappa del mio percorso di studi.

Ringrazio tutti i miei compagni di corso, grazie ai quali ho potuto condividere nel migliore dei modi la fatica e lo stress dello studio ma anche numerosi momenti di ilarità.

Un ringraziamento finale lo meritano Emanuele e Riccardo, ottimi compagni di laboratorio e ancor migliori come amici.