

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI UNA NANA BIANCA

Relatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Bruno Martinico

Sessione III
Anno Accademico 2013/2014

Abstract

Il seguente lavoro di tesi descrive un modello fisico di nana bianca all'equilibrio partendo da dati empirici tipici per tali stelle.

Si schematizza la stella come una sfera di gas He completamente ionizzato di densità uniforme, a temperatura $T = \text{const}$ e soggetta ad un potenziale gravitazionale centrale. Il gas si costituisce di una parte degenere relativistica (elettroni) ed una parte classica ideale (gli ioni). Si procede ricavando le relazioni essenziali per determinare le proprietà di un gas di Fermi degenere relativistico, mostrando come, al limite di Boltzmann, descrivano anche il caso classico. La trattazione teorica è progressivamente supportata dalle stime dei parametri caratteristici delle due componenti del gas per verificare le loro condizioni fisiche e stimare l'importanza dei rispettivi contributi all'intero sistema. Si procede quindi all'esposizione dell'equilibrio tra pressione degenere ed attrazione gravitazionale ponendo particolare attenzione alla relazione raggio-massa. Infine si discutono le condizioni entro le quali un sistema fisico con tali caratteristiche può sussistere, con esplicito riferimento al limite di Chandrasekhar.

Indice

1	Generalità di una Nana Bianca	1
2	Gas di Fermi degenere relativistico	5
	Pressione ed energia interna	6
2.1	Gas di elettroni	8
2.2	Gas di nuclei di He	9
3	Equilibrio della stella	11
4	Conclusioni	13
A	Calcolo degli integrali di Pressione ed Energia Interna	15
	Bibliografia	17

Capitolo 1

Generalità di una Nana Bianca

Una regola empirica studiata da Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russel nel 1910 dichiara che la luminosità di una stella è proporzionale alla lunghezza d'onda principale emessa (i.e al suo colore), con circa la stessa costante di proporzionalità per tutte le stelle. Tale corrispondenza si esplicita graficamente nell'omonimo diagramma, di cui si mostra una versione schematica e sommaria.

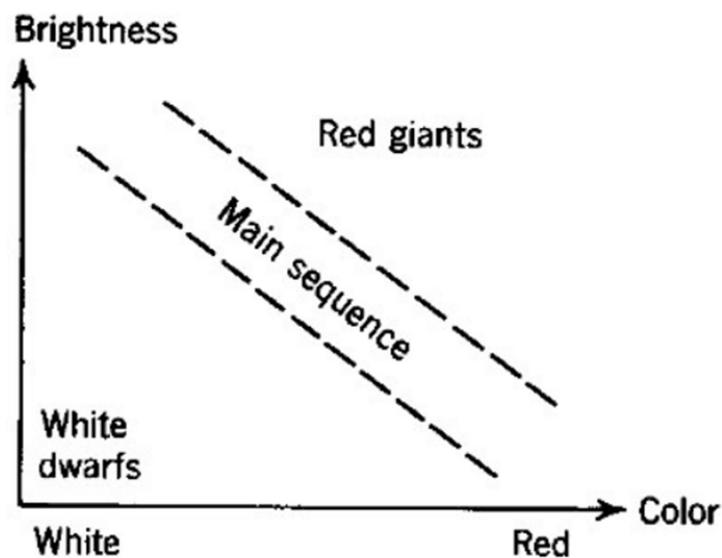


Figura 1.1: Diagramma Hertzsprung-Russel

In esso si nota un maggior addensamento delle stelle in una regione diagonale detta sequenza principale (SP). Vicino all'origine degli assi si collocano le Nane Bianche, il cui nome deriva dal confronto con le stelle della SP: presentano, in generale, un raggio molto più piccolo e a parità di luminosità hanno temperature molto più alte (più "bianche"). Uno studio dettagliato della loro composizione porta alla conclusione

che la loro bassa luminosità è dovuta all'esaurimento della riserva di idrogeno (principale fonte di energia della stella) completamente convertitosi in elio. Le nane bianche fanno parte dei cosiddetti oggetti astronomici compatti (tra cui compaiono buchi neri e stelle di neutroni), e cioè caratterizzati da una densità di materia molto maggiore rispetto alle stelle ordinarie. Al loro interno le reazioni nucleari sono completamente cessate, e come conseguenza di ciò la sola agitazione termica del gas costituente non è sufficiente a contrastare il collasso gravitazionale. A quest'ultimo si oppone invece la pressione esercitata dalla materia degenere mantenendo la stella in equilibrio.

Questi corpi celesti costituiscono solitamente la fase finale dell'evoluzione di una stella: il calore residuo al suo interno verrà progressivamente irradiato e la stella si raffredderà fino a diventare un corpo inerte nell'universo, nana nera, mantenendo inalterata la sua struttura interna.

Il modello esposto di seguito fu studiato in dettaglio da Chandrasekhar negli anni 1931-1935. La prima ricerca in merito fu condotta da Fowler nel 1926 il quale constatò che il gas di Fermi di una nana bianca è completamente degenere, mentre Anderson (1929) e Stoner (1929-1930) realizzarono la validità della trattazione relativistica.

Nella seguente trattazione si vuole descrivere un modello ideale di nana bianca all'equilibrio, lontano dalle fasi evolutive limitrofe.

La vita evolutiva di una stella dipende fortemente dalla propria massa. Le condizioni in cui può formarsi una nana bianca sono le seguenti:

- stelle di sequenza principale con $0.08M_{\text{sun}} < M < 0.26M_{\text{sun}}$, completamente convettive (non radiative), tutto il loro idrogeno sarà convertito in elio e terminato il processo di fusione inizierà il collasso gravitazionale fino alla fase nana bianca;
- giganti rosse¹ con $M < 3 M_{\text{sun}}$ le cui condizioni di temperatura non permettono la prosecuzione dei processi di fusione; espellono perciò gli strati più esterni e il nucleo residuo ha le condizioni per diventare nana bianca (costituita in piccolissima percentuale di carbonio).

Il nostro sole giace nel range di massa di una possibile nana bianca. Se bruciasse completamente la sua riserva di idrogeno in elio diventerebbe una stella degenere di raggio 2700Km, ma non prima di passare attraverso la fase evolutiva di gigante rossa.

Il modello di nana bianca che ci apprestiamo ad esporre si basa su dati astronomici tipici per una stella di questo tipo:

- Densità $\rho = 10^{10} \text{ kg/m}^{-3}$;
- Massa $M = 10^{30} \text{ kg} \approx M_{\text{sun}}$;

¹Stadio evolutivo successivo a quello di sequenza principale.

- Temperatura centrale $T = 10^7\text{K}$.

Una nana bianca è una massa sferica di elio ad altissime densità e temperature. Tali temperature corrispondono ad un'energia termica $kT \approx 1\text{KeV}$ che, confrontata con l'energia di seconda ionizzazione per atomo di elio $E_{2i} = 0.3\text{KeV}$, esplicita la completa ionizzazione del gas; esso risulta quindi composto da una componente di nuclei di elio e una di elettroni.

Il gas di elettroni è modellizzabile tramite il gas degenero di Fermi relativistico, come suggeriscono le stime del parametro di degenerazione e dell'energia di Fermi (alle densità e temperature di cui sopra). Inoltre la temperatura di Fermi ($\epsilon_f = kT_f$) è molto più alta della temperatura della stella, perciò il gas è altamente degenero e si comporta esattamente come un gas di elettroni allo zero assoluto. Invece il gas di nuclei può essere trattato alla stregua di un gas ideale verificando la condizione di non degenerazione.

L'equilibrio della stella è ottenuto dalla contrapposizione dell'enorme pressione di degenerazione esercitata dagli elettroni allo stato fondamentale e l'attrazione gravitazionale che mantiene la stella. Mentre per il calcolo della pressione totale del gas è possibile trascurare il contributo dei nuclei di elio, per la stima dell'energia gravitazionale è la componente degli elettroni a poter essere trascurata (data la loro massa esigua rispetto a quella dei nucleoni).

In tale trattazione viene inoltre trascurato a priori qualsiasi contributo dovuto alla radiazione².

Il modello idealizzato a cui convergono le precedenti considerazioni è il seguente: una nana bianca è un sistema di N elettroni allo stato fondamentale che a tali densità può essere trattato relativisticamente. Gli elettroni si muovono su un fondo di $N/2$ nuclei di elio immobili che forniscono l'attrazione gravitazionale necessaria a contrastare la pressione degenero e mantenere la stella compatta. La trattazione sintetizza elementi di meccanica quantistica, teoria gravitazionale classica e meccanica relativistica.

²La temperatura in una nana bianca è così alta che nelle collisioni elettrone-elettrone possono essere create coppie elettrone-positrone che si annichilano emettendo radiazione. Inoltre all'equilibrio ci sarà un certo numero di coppie elettrone-positrone ed una certa quantità di radiazione presente. Si pensa che i neutrini, creati in tali collisioni e annichilazioni, interagendo molto debolmente con la materia non contribuiscano all'equilibrio termico del resto del sistema, ma producano un costante flusso di energia uscente.

Capitolo 2

Gas di Fermi degenere relativistico

Il modello del gas di Fermi degenere relativistico descrive le proprietà fisiche un gas di fermioni relativistici in condizione di basse temperature e alte densità. Si considera il gas un sistema Gran-canonicò all'equilibrio termico e lontano dalle transizioni di fase le cui proprietà termodinamiche sono completamente determinate dall'equazione per il potenziale Gran-canonicò

$$\Phi(T, V, \mu) = U - TS - \mu N = -PV = -kT \log Z_{gc}(T, V, \mu) \quad (2.1)$$

in cui compaiono la temperatura T , il volume V , l'entropia S , la pressione P , il numero di particelle totale del sistema N , l'energia interna U , la costante di Boltzmann k , il potenziale chimico μ e la funzione di partizione Gran-canonicò Z_{gc} .

Si procede dunque con il calcolo di Z_{gc}

$$\log Z_{gc} = \sum_k \log(1 + z \exp\{-\beta \epsilon_k\}), \quad (2.2)$$

dove $\beta = 1/kT$ e $z = \exp(\beta\mu)$, e dell'equazione per μ

$$N(T, V, z) = \sum_k \langle n_k \rangle^{FD} = \sum_k \frac{1}{z^{-1} \exp\{\beta \epsilon_k\} + 1} \quad (2.3)$$

con $\langle n_k \rangle^{FD}$ corrispondente al numero di occupazione medio per il k -esimo stato.

Le somme (2.2), (2.3) si eseguono su tutti gli stati di momento di singola particella e gli autostati di energia corrispondenti sono relativistici. La relazione ϵ_k - p_k è:

$$\epsilon_k = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p_k}{mc} \right)^2} - 1 \right] \quad (2.4)$$

con m massa della particella, c velocità della luce, p_k momento della particella.

Le somme precedenti sugli stati di momento di singola particella possono essere scritte come integrali su tutti i momenti poichè nel limite del continuo gli stati sono

arbitrariamente vicini tra loro

$$\log Z_{\text{gc}} = g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \log(1 + z \exp\{-\beta\epsilon\}), \quad (2.5)$$

$$N(T, V, z) = \sum_k \langle n_k \rangle^{FD} = g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty p^2 dp \frac{1}{z^{-1} \exp\{\beta\epsilon\} + 1} \quad (2.6)$$

con h costante di Planck e g fattore di degenerazione dovuto allo spin dei fermioni. Ma a $T = 0$ gli $\langle n_k \rangle^{FD}$ sono descritti da una funzione gradino Θ così definita:

$$\langle n_k \rangle_{T=0}^{FD} = \Theta(\epsilon_f - \epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } \epsilon_f \leq \mu \\ 0 & \text{se } \epsilon_f > \mu \end{cases} \quad (2.7)$$

con ϵ_f livello di Fermi; e i due integrali si riducono a

$$\log Z_{\text{gc}} = g \frac{4\pi V}{h^3} \frac{\beta}{3} \int_0^{p_f} p^3 dp \frac{d\epsilon}{dp} \quad (2.8)$$

$$N(T, V, z) = g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 dp = g \frac{4\pi V}{3h^3} p_f^3 \quad (2.9)$$

dove p_f è il momento relativo all'energia di Fermi che si ricava esplicitamente dall'ultima equazione

$$p_f = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N h^3}{V g} \right)^{1/3}. \quad (2.10)$$

Questa corrisponde alla determinazione del potenziale chimico $\mu = \epsilon_f(p_f)$ in funzione del numero di particelle e del volume a $T = 0$.

Pressione ed energia interna

Si vogliono ora ottenere le espressioni per le funzioni di stato P ed U utili ai fini della trattazione.

Si inserisce perciò $d\epsilon/dp$ nell'integrale per la funzione di partizione e considerando la relazione $\log Z_{\text{gc}} = PV/kT$ si ha

$$P = \frac{4\pi g}{3h^3} \int_0^{p_f} mc^2 \frac{\left(\frac{p}{mc}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2\right]^{1/2}} p^2 dp \quad (2.11)$$

Ci si può inoltre calcolare l'espressione per l'energia interna del sistema (a $T = 0$) semplicemente combinando l'equazione per ϵ_f e l'espressione per gli autovalori di energia:

$$N = \sum_k \langle n_k \rangle^{FD} \quad U = \sum_k \epsilon_k \langle n_k \rangle^{FD} \quad (2.12)$$

$$U = \frac{4\pi gV}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 dp mc^2 \left(\left[1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right) \quad (2.13)$$

Gli integrali (2.13) e (2.11) si risolvono per sostituzione, sfruttando le proprietà delle funzioni iperboliche. Per il calcolo esplicito si veda l'appendice A.

Si ottengono i seguenti risultati

$$P = \frac{g\pi m^4 c^5}{6h^3} A(y_f) \quad (2.14)$$

$$U = \frac{g\pi V m^4 c^5}{6h^3} B(y_f) \quad (2.15)$$

con le funzioni $A(y)$, $B(y)$ definite come

$$A(y) = \sqrt{1+y^2}(2y^3 - 3y) + 3 \operatorname{arcsinh} y \quad (2.16)$$

$$B(y) = 8y^3(\sqrt{1+y^2} - 1) - A(y) \quad (2.17)$$

e $y_f = p_f/mc$.

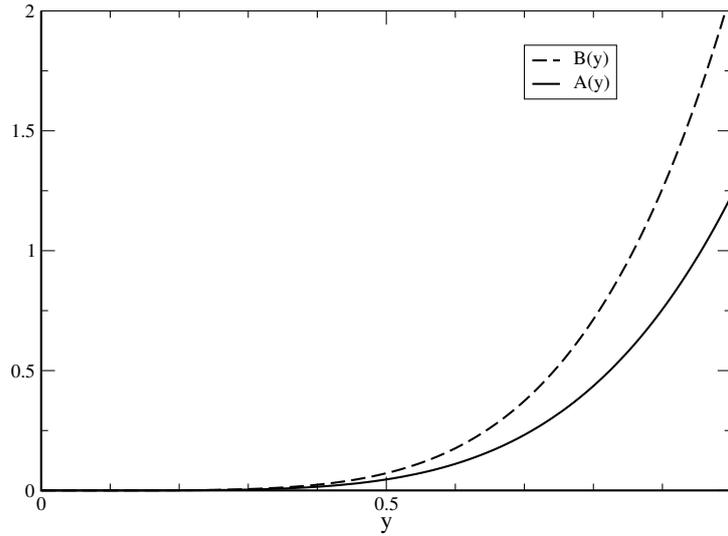


Figura 2.1: Andamento delle funzioni $A(y)$ e $B(y)$.

2.1 Gas di elettroni

Si vuole stimare il contributo del gas di elettroni degeneri alla pressione dell'intero sistema. Per verificare le condizioni fisiche del gas di cui ci occupiamo bisogna valutare il parametro di degenerazione η , la condizione di gas freddo $\frac{kT}{\epsilon_f} \ll 1$ e l'energia di Fermi.

A tal proposito si fanno le seguenti considerazioni.

Ciascun atomo contribuisce alla massa totale della stella con due elettroni e quattro nucleoni. Se N è il numero di elettroni della stella si può scrivere

$$M \approx N(m_e + 2m_n) \approx 2m_n N \Rightarrow N \approx \frac{M}{2m_n} \quad (2.18)$$

poiché

$$m_e c^2 \approx 511 \text{keV} \quad m_n c^2 \approx 4 \text{GeV}, \quad (2.19)$$

quindi $m_e \gg m_n$, e per ciascun elettrone si hanno due masse nucleoniche. Inoltre si stima la densità degli elettroni nella stella come

$$n = \frac{N}{V} \approx \frac{M/2m_n}{M/\rho} \approx \frac{\rho}{2m_n} \approx 3 \cdot 10^{36} \frac{\text{electrons}}{\text{m}^3} \approx 3 \cdot 10^{-19} \frac{\text{electrons}}{\text{fm}^3} \quad (2.20)$$

e dalla (2.10)

$$p_f = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{N h^3}{V g} \right) \approx 0.9 \frac{\text{MeV}}{c}. \quad (2.21)$$

con $g = 2$ per gli elettroni. Inserendo quest'ultima nella relazione relativistica energia-momento si ottiene l'energia di Fermi (cinetica) $\epsilon_f \approx 0.5 \text{MeV}$. Se ne deduce che gli effetti relativistici non sono trascurabili (essendo l'energia di fermi paragonabile alla massa a riposo), ma poichè $kT \approx 1 \text{keV} \ll \epsilon_f$ vale l'approssimazione per $T = 0$ (gas freddo). Il parametro di degenerazione é:

$$\eta = n \lambda^3 = n_e \left(\frac{h^2}{2\pi m_e kT} \right)^{3/2} \approx 5.2 \cdot 10^{25} \gg 1 \quad (2.22)$$

Infine dalla pressione di Fermi (2.14), con $y_f = \frac{p_f}{mc} \approx 2$ e la funzione $A(y_f) \approx A(2) \approx 26.7$ rozzamente approssimata per $y \gg 2$, si ottiene

$$P_e = \frac{1}{24\pi^2} \frac{(mc^2)^4}{(\hbar c)^3} 26.7 \approx 10^{-19} \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}. \quad (2.23)$$

2.2 Gas di nuclei di He

Naturalmente il modello appena descritto riproduce il gas ideale di Fermi al limite non relativistico, il quale, a sua volta, fornisce le equazioni di stato del gas perfetto applicando il limite di Boltzmann. Per verificare che il gas di nuclei di He può essere efficacemente descritto dal modello del gas perfetto bisogna richiedere la condizione di non degenerazione:

$$\eta = n\lambda^3 = n_{\text{He}} \left(\frac{h^2}{2\pi m_n kT} \right)^{3/2} \approx 2.26 \cdot 10^{-2} \ll 1 \quad (2.24)$$

con $n_{\text{He}} = n_e/2$ ¹. Possiamo quindi procedere al calcolo delle funzioni di stato espandendo nel limite semiclassico in serie le (2.16) e (2.17) per $y \ll 1$

$$A(y) \approx \frac{8}{5}y^5 - \frac{4}{7}y^7 + \dots \quad y \ll 1 \quad (2.25)$$

$$B(y) \approx \frac{12}{5}y^5 - \frac{3}{7}y^7 + \dots \quad y \ll 1 \quad (2.26)$$

e limitandosi al primo ordine di approssimazione si ottengono

$$P = \frac{g\pi m^4 c^5}{6h^3} \frac{8}{5} \left(\frac{p_f}{mc} \right)^5 = \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi g}{5h^3 m} p_f^5 \right) \quad (2.27)$$

$$U = \frac{g\pi V m^4 c^5}{6h^3} \frac{12}{5} \left(\frac{p_f}{mc} \right)^5 = \left(\frac{2\pi V g}{5h^3 m} p_f^5 \right) \quad (2.28)$$

da cui $P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$ relazione valida in generale per tutti i gas ideali non relativistici (Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac, Bose-Einstein).

A questo punto, nota l'energia interna per il gas perfetto $U = 3/2 NkT$, si scrive la famigerata equazione di stato:

$$P = nkT. \quad (2.29)$$

Sostituendo alla temperatura T e alla densità di particelle n i valori del gas di nuclei di He si ottiene una stima del contributo alla pressione del sistema totale:

$$P_{\text{He}} = n_{\text{He}} kT \approx 1.5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3} \quad (2.30)$$

Confrontando le stime delle pressioni parziali si nota che il contributo elettronico supera di tre ordini di grandezza quello dei nuclei che pertanto viene trascurato in questa trattazione.

¹due elettroni per ciascun nucleo di elio.

Capitolo 3

Equilibrio della stella

A contrastare la pressione degli elettroni e mantenere la stella in equilibrio è la mutua attrazione gravitazionale delle componenti del gas a cui si attribuisce un'energia gravitazionale

$$E_g(R) = -\alpha \frac{GM^2}{R} \quad (3.1)$$

con α fattore aggiuntivo che tiene conto delle correzioni dovute alla densità non uniforme della stella e che per le nostre stime possiamo considerare dell'ordine dell'unità. Il relativo differenziale dovuto ad una incremento di volume della stella si scrive

$$dE_g = \frac{dE_g(R)}{dR} dR = \alpha \frac{GM^2}{R^2} dR. \quad (3.2)$$

Possiamo inoltre calcolare il decremento di energia della sfera di gas dovuto all'espansione di un volume dV :

$$dE_p = -PdV = -P(R)4\pi R^2 dR \quad (3.3)$$

in cui la pressione P è funzione del momento di Fermi, a sua volta funzione del volume, quindi del raggio $P(p_f(V(R)))$.

All'equilibrio termodinamico del sistema corrisponde un punto di minimo per l'energia libera F , ed essendo in condizioni $T = 0$ si può scrivere

$$F = E - TS = E \quad dF = dE = dE_p + dE_g = 0 \quad (3.4)$$

quindi

$$\alpha \frac{GM^2}{R^2} - P(R)4\pi R^2 = 0 \quad P(R) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} \quad (3.5)$$

Inserendo nell'ultima relazione l'espressione per la pressione di un gas di Fermi relativistico e per il momento di Fermi precedentemente ricavate si ottiene

$$A \left(\left(\frac{9\pi M}{8m_n} \right)^{1/3} \frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{1}{R} \right) = 6\pi\alpha \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \frac{1}{R} \right)^3 \frac{1}{m_e c^2} \frac{GM^2}{R} \quad (3.6)$$

dove la massa della stella M è misurata in unità di massa di nucleone m_n , il raggio della stella R in unità di lunghezza Compton degli elettroni $hc/m_e c^2$ e l'energia gravitazionale GM^2/R in unità di massa elettronica $m_e c^2$. In sintesi tale equazione relaciona meccanica quantistica, relatività speciale e teoria gravitazionale classica. Purtroppo non può essere risolta in modo esatto né per $R(M)$ né per $M(R)$. Si applicano pertanto metodi analitici nei casi limite, cioè per argomenti della funzione $A(y)$ molto grandi o molto piccoli, separatamente.

In primo luogo si nota che sostituendo i valori di M , m_n , hc , $m_e c^2$ l'argomento della funzione $A(y)$ è $y = 1$ per $R \approx 5 \cdot 10^6 \text{m}$. Sicché i due casi in cui valgono le approssimazioni si scrivono

$$y \ll 1 \quad \longrightarrow \quad R \gg 5 \cdot 10^6 \text{m} \quad (3.7)$$

$$y \gg 1 \quad \longrightarrow \quad R \ll 5 \cdot 10^6 \text{m} \quad (3.8)$$

con $y \propto 1/R$. Nel primo caso arrestando lo sviluppo al primo termine ($A(y) = 8/5 y^5$) si ottiene la relazione $R(M)$ per nane bianche costituite da elettroni non relativistici, valida per M piccole e grandi R .

$$R \approx \frac{3(9\pi)^{2/3}}{40\alpha} \frac{\hbar^2}{Gm_n^{5/3} m_e} M^{-1/3} \quad (3.9)$$

Invece per $R \ll 5 \cdot 10^6 \text{m}$, arrestando lo sviluppo al secondo ordine ($A(y) = 2y^4 - 2y^2$) si ottiene

$$R \approx \frac{(9\pi)^{1/3}}{2} \frac{\hbar c}{m_e c^2} \left(\frac{M}{m_n} \right)^{1/3} \left(1 - \left(\frac{M}{M_0} \right)^{2/3} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

dove

$$M_0 = \frac{9}{64} \left(\frac{3\pi}{\alpha^3} \right)^{1/2} \left(\frac{\hbar c}{Gm_n^2} \right)^{3/2} \approx 10^{30} \text{kg} \quad (3.11)$$

costituisce il limite di Chandrasekhar. Esaminando la (3.10) si nota che non è possibile avere $M > M_0$ o si otterrebbe un valore immaginario per il raggio. La ragione fisica di questo risultato è che se la massa fosse maggiore del suddetto limite la pressione dovuta al principio di esclusione di Pauli non sarebbe sufficiente a contrastare il collasso gravitazionale, e la stella non sarebbe più in equilibrio.

Capitolo 4

Conclusioni

La relazione raggio-massa di una nana bianca, in accordo con il nostro modello è rappresentata graficamente in figura 4. Sulle ascisse si pone M/M_0 , sulle ordinate R in unità di lunghezza caratteristica, 3860km. La curva continua indica la soluzione esatta per un gas degenere e le relazioni (3.9) e (3.10) la descrivono bene per $M/M_0 \rightarrow 0, 1$; la curva tratteggiata è la soluzione asintotica per $M \rightarrow 0$; i cerchi danno l'idea delle dimensioni relative delle rispettive stelle.

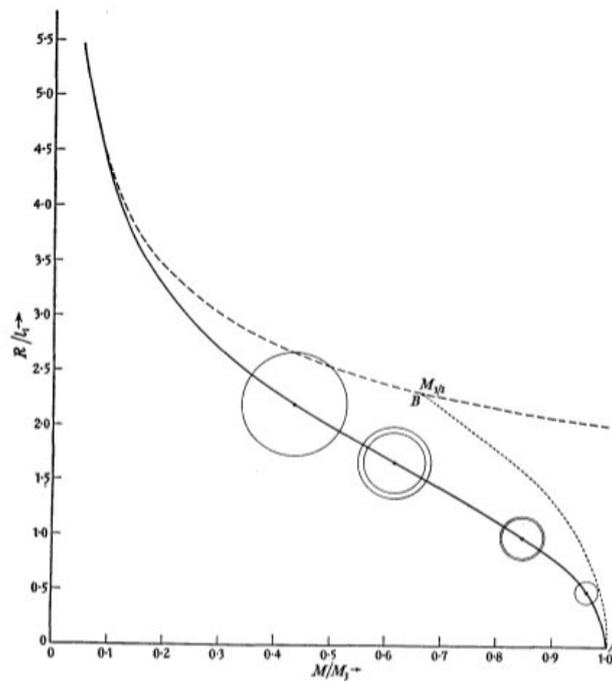


Figura 4.1: Relazione raggio-massa; [4, p. 438, Fig. 31]

Nella sua trattazione Chandrasekhar tenne conto del fattore di correzione α per

l'inomogeneità della stella e del grado di ionizzazione μ_e degli atomi di elio (numero di elettroni liberi per nucleo di elio $\mu_e \approx 2$) giungendo al valore

$$M_0 = 1.44 M_{\text{sun}} \quad (4.1)$$

Inoltre per M molto prossime a M_0 ed R prossimi al raggio di Schwarzschild (classicamente $R = 2GM/c^2$)¹ gli effetti dovuti alla relatività generale non sono più trascurabili.

Le osservazioni astronomiche confermano i risultati di questo modello per cui nessuna stella può diventare una nana bianca se il suo nucleo residuo ha massa maggiore al limite M_0 .

Uno degli esempi di nana bianca più vicini alla Terra (8*l.y.*) è Sirius B e si trova nel sistema binario di Sirio; invisibile ad occhio nudo (la compagna, Sirius A, è la stella più luminosa dell'emisfero Boreale) fu predetta da Bessel per giustificare l'osservazione della rotazione di Sirius A attorno ad un punto nello spazio aperto. Nel 1915 fu scoperta la sua alta temperatura, ed essendo la sua luce emessa molto fioca il raggio avrebbe dovuto essere molto piccolo, quindi avere densità molto elevate (confermate sperimentalmente nel 1925 dal redshift delle righe spettrali dovuto all'intenso campo gravitazionale). Alcune nane bianche sono soggette a una rapida rotazione (completamente trascurata in questa trattazione) che comporta ulteriore red-shift, e forti campi magnetici.

¹Raggio critico caratteristico di ogni massa introdotto da Karl Schwarzschild nel 1916 quando scoprì la soluzione esatta per il campo gravitazionale al di fuori di una stella dotata di simmetria sferica.

Appendice A

Calcolo degli integrali di Pressione ed Energia Interna

Per calcolare gli integrali (2.11) ed (2.13) si opera una sostituzione, molto frequente in caso relativistico, $p = mc \sinh x$, da cui seguono $\epsilon = mc^2(\cosh x - 1)$ e $\frac{d\epsilon}{dp} = c \tanh x$. Ponendo in particolare il momento di Fermi $p_f = mc \sinh x_f$ i due integrali si riducono a

$$P = \frac{4\pi g m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{x_f} \sinh^4 x dx \quad (\text{A.1})$$

$$U = \frac{4\pi g V m^4 c^5}{h^3} \int_0^{x_f} (\cosh x - 1) \sinh^2 x \cosh^2 x \quad (\text{A.2})$$

che risultano facilmente risolvibili utilizzando le proprietà delle funzioni iperboliche:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x \\ \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x. \end{aligned}$$

Ad esempio per il primo integrando si ha:

$$\begin{aligned} \sinh^4 x &= \sinh^2 x (\cosh^2 x - 1) = \frac{1}{4} \sinh^2 2x - \sinh^2 x \\ &= \frac{1}{8} \cosh 4x - \frac{1}{2} \cosh 2x + \frac{3}{8} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{32} \sinh 4x - \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{3}{8} x \right); \end{aligned}$$

e per il secondo integrando

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x \sinh^2 x - \sinh^2 x \cosh^2 x &= \frac{1}{4} \sinh^2 2x - \sinh^2 x \cosh x \\
&= \frac{1}{8} \cosh 4x - \frac{1}{8} - \sinh^2 x \frac{d \sinh x}{dx} \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{32} \sinh 4x - \frac{x}{8} - \frac{1}{3} \sinh^3 x \right).
\end{aligned}$$

Esplicitando gli integrali in funzione del solo argomento:

$$\int_0^{x_f} \sinh^4 x \, dx = \frac{1}{8} (3x_f - 3 \sinh x_f \cosh x_f + 2 \sinh^3 x_f \cosh x_f) \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x_f} (\cosh x - 1) \sinh^2 x \cosh x \, dx \\
&= \frac{1}{8} \left(-x_f + \sinh x_f \cosh x_f + 2 \sinh^3 x_f \cosh x_f - \frac{8}{3} \sinh^3 x_f \right). \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

Per una soluzione più elegante si introducono le funzioni $A(y)$ e $B(y)$:

$$\begin{aligned}
y = \sinh x = \frac{p}{mc} &\quad \Rightarrow \quad y_f = \sinh x_f = \frac{p_f}{mc} \\
A(y) &= \sqrt{1 + y^2} (2y^3 - 3y) + 3 \operatorname{arcsinh} y \\
B(y) &= 8y^3 (\sqrt{1 + y^2} - 1) - A(y),
\end{aligned}$$

che permettono di esprimere le (A.3) ed (A.4) nella forma:

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_f} \sinh^4 x \, dx &= \frac{1}{8} A(y_f) \\
\int_0^{x_f} (\cosh x - 1) \sinh^2 x \cosh x \, dx &= \frac{1}{24} B(y_f)
\end{aligned}$$

da cui seguono naturalmente le (2.14) e (2.15).

Bibliografia

- [1] Greiner, Neise, Stöcker (1995), *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer.
- [2] Kerson Huang (1987), *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons.
- [3] Karttunen, Kröger, Oja, Poutanen, Donner (2003), *Fundamental Astronomy*, Springer.
- [4] S. Chandrasekhar (1957), *Stellar Structure*, Dover.