

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

**RAPPRESENTAZIONI LINEARI
DI $SL_3\mathbb{C}$**

Tesi di Laurea in Geometria Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Alessandra Tosi

III^a Sessione
Anno Accademico 2008/2009

Alla mia famiglia

Introduzione

La struttura di gruppo di Lie reale è caratterizzata dalla coesistenza di due strutture che ad un primo sguardo sembrano non avere molto in comune: la struttura di gruppo e la struttura di varietà differenziabile. Sophus Lie, matematico norvegese del diciannovesimo secolo, aveva introdotto questi nuovi concetti per sviluppare una teoria per la risoluzione di equazioni differenziali a derivate parziali e non poteva immaginare che gli sviluppi dei suoi studi sarebbero stati ben più ampi. La teoria dei gruppi di Lie, infatti, non solo ha legami con geometria differenziale, topologia algebrica e analisi, bensì ha preso piede anche in altri campi di ricerca, dalla teoria della relatività alla fisica delle particelle.

In questo elaborato introduco la teoria dei gruppi di Lie reali partendo da definizioni e proprietà fondamentali, dando per note le conoscenze di base di algebra lineare, topologia e geometria differenziale. Poiché risulta che ogni gruppo di Lie è il quoziente di un gruppo di Lie semplicemente connesso per un sottogruppo discreto contenuto nel centro di quest'ultimo, non è riduttivo limitarsi a trattare gruppi di Lie semplicemente connessi, come farò in questo elaborato.

Nel capitolo iniziale presento vari esempi di gruppi di Lie e, dopo aver definito la struttura di algebra di Lie astratta, metto in luce come questa possa essere associata in maniera naturale ad un gruppo di Lie. I legami tra algebra e gruppo, infatti, risultano di fondamentale importanza e permettono di ricondurre in una certa misura lo studio di un gruppo di Lie G allo studio della sua algebra \mathfrak{g} .

Nel secondo capitolo espongo i fatti di base della teoria delle rappresentazioni, il mio scopo è indagare i possibili modi in cui un dato gruppo o algebra di Lie agisce su uno spazio vettoriale. Tali risultati verranno applicati all'algebra di Lie $sl_3\mathbb{C}$.

Nel terzo capitolo costruisco esplicitamente le rappresentazioni irriducibili finito dimensionali, richiamando il metodo proposto da Fulton ed Harris in [2]. Il primo passo è quello di individuare una sottoalgebra di Cartan che permetta di decomporre lo spazio studiato nella somma diretta di autospazi per la rappresentazione aggiunta. Una volta trovate le radici relative agli autospazi, si studiano le simmetrie del sistema di radici attraverso il gruppo di Weyl. Si cercano quindi teoremi di esistenza ed unicità di rappresentazioni irriducibili con peso massimale dato. Dopo aver osservato il comportamento di $SL_2\mathbb{C}$ e di $SL_3\mathbb{C}$, si può generalizzare la stessa costruzione a $SL_n\mathbb{C}$.

In questo elaborato mi avvalgo anche di numerosi esempi espliciti con i quali mostro, nel dettaglio, la struttura delle suddette rappresentazioni.

Indice

Introduzione	i
1 Gruppi di Lie ed algebre di Lie	1
1.1 Gruppi di Lie	1
1.1.1 Definizioni ed esempi	1
1.1.2 Proprietà topologiche	3
1.2 Algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie	5
1.2.1 Definizione di algebra di Lie	5
1.2.2 Relazioni tra algebra e gruppo	9
2 Rappresentazioni di algebre di Lie semisemplici	13
2.1 Rappresentazioni	13
2.1.1 Definizioni ed esempi	13
2.1.2 Rappresentazione aggiunta	15
2.2 Algebre di Lie semisemplici	16
2.2.1 Classificazione di algebre di Lie	17
2.2.2 Sottoalgebre di Cartan e Gruppo di Weyl	20
3 Rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$	23
3.1 Rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$	23
3.2 Rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$	27
3.3 Generalizzazione per n maggiore di 3	41
Bibliografia	45

Capitolo 1

Gruppi di Lie ed algebre di Lie

In questo capitolo si introducono i Gruppi di Lie e le Algebre di Lie. Partendo da alcuni esempi, si descrive la struttura generale di tali oggetti e se ne enunciano le proprietà generali, sia topologiche che differenziali.

1.1 Gruppi di Lie

1.1.1 Definizioni ed esempi

Un gruppo G è detto *gruppo di Lie* se è dotato simultaneamente di due strutture compatibili tra loro: la struttura di gruppo e la struttura di varietà differenziabile. La compatibilità è data dalla differenziabilità delle operazioni di moltiplicazione e di inverso della struttura di gruppo

$$\times : G \times G \rightarrow G$$

$$i : G \rightarrow G$$

Si ottengono analoghe definizioni per *gruppo di Lie complesso* (rispettivamente *gruppo di Lie algebrico*) sostituendo alla struttura di varietà differenziabile quella di varietà complessa (rispettivamente di varietà algebrica).

Una *mappa* o *morfismo* tra due gruppi di Lie G e H è un omomorfismo di gruppi $\rho : G \rightarrow H$ differenziabile.

Esempio 1.1. Alcuni esempi di gruppi di Lie:

- $G = GL(V)$, gruppo degli automorfismi di V spazio vettoriale reale. Se $\dim(V) = n$, allora $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$ e per verificare la differenziabilità delle operazioni è sufficiente osservare che la struttura di varietà differenziabile su G è data, in maniera ovvia, dalla struttura indotta da \mathbb{R}^{n^2} su $GL_n\mathbb{R}$.
- $G = SL(V)$ gruppo degli automorfismi di V , spazio vettoriale reale, che preservano una forma volume. Vale $SL(V) \cong SL_n(\mathbb{R})$, gruppo delle matrici a determinante 1. $SL(V)$ è sottogruppo di Lie di $GL(V)$.
- $G = O(V)$ gruppo degli automorfismi di V , spazio vettoriale reale, che preservano una forma bilineare simmetrica. Nel caso di una forma bilineare definita positiva, si ha che $O(V) \cong O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$ gruppo ortogonale reale. $O(V)$ è sottogruppo di Lie di $GL(V)$ e per mostrarlo basta considerare la mappa $F : A \mapsto {}^tAA - I$: applicando il teorema della funzione implicita, infatti, si ha come conseguenza che l'insieme $F^{-1}(0)$ è una sottovarietà chiusa di $GL_n(\mathbb{R})$. Si osserva inoltre che $O(V)$ ha due componenti connesse una delle quali è il sottogruppo $SO(V) = O(V) \cap SL(V)$.
- $G = U(V)$ gruppo degli automorfismi di V , spazio vettoriale complesso, che preservano un prodotto interno Hermitiano definito positivo H . $U(V) \cong U_n(\mathbb{C})$, gruppo delle matrici unitarie complesse. Analogamente ai casi precedenti, $GL(V) \cong GL_{2n}(\mathbb{C})$ e $U(V)$ è un suo sottogruppo di Lie reale e compatto.
- $G = Sp(V)$ gruppo degli automorfismi di V , spazio vettoriale reale di dimensione pari $2n$, che preservano una forma bilineare antisimmetrica non degenera. Analogamente al caso precedente si ha che $Sp(V) \cong Sp_n(\mathbb{R})$, gruppo delle matrici simplettiche reali. $Sp(V)$ è sottogruppo di Lie di $GL(V) \cong GL_{2n}(\mathbb{R})$.
- G gruppo discreto numerabile è banalmente un gruppo di Lie.

1.1.2 Proprietà topologiche

Si introducono alcune importanti proprietà dei gruppi di Lie che non dipendono dalla struttura di varietà differenziabile ma solo dalla più generale struttura di varietà topologica. Si può dimostrare infatti che, considerando un gruppo G dotato di struttura di varietà topologica e di due operazioni continue i e μ , allora ci si riconduce univocamente ad una struttura differenziabile. Per una trattazione più approfondita si rimanda a [2], [3].

Proposizione 1.1.1. *Sia G un gruppo di Lie, sia G^0 la componente connessa di G contenente l'elemento neutro e . Allora G^0 è un sottogruppo normale di G .*

Corollario 1.1.2. *Il gruppo G/G^0 con la topologia quoziente è un gruppo discreto.*

Ci si chiede ora come sono fatti i sottogruppi normali discreti di un gruppo di Lie semplicemente connesso.

Proposizione 1.1.3. *Un sottogruppo $H \triangleleft G$ discreto di un gruppo di Lie G semplicemente connesso è contenuto nel centro $Z(G)$. In particolare, il gruppo fondamentale di un gruppo di Lie connesso è commutativo.*

La costruzione di un gruppo di Lie può essere analizzata anche da un altro punto di vista. Considerando una mappa di rivestimento ed una varietà topologica connessa, infatti, è possibile definire su quest'ultima un'unica struttura di gruppo di Lie. Analizziamo di seguito tale procedimento.

Si osserva che, dato un gruppo di Lie G , per ogni elemento $g \in G$ fissato, l'applicazione di *moltiplicazione a sinistra*

$$\begin{aligned} L : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh \end{aligned}$$

è un diffeomorfismo e, analogamente, lo è la *moltiplicazione a destra* $R(h) = hg$. Tali mappe sono omomorfismi di G^0 con la sua immagine.

Proposizione 1.1.4. *Sia G un gruppo di Lie connesso, sia $U \subset G$ un intorno aperto dell'elemento neutro. Allora U genera G come gruppo.*

Questa proposizione implica che ogni mappa $\rho : G \rightarrow H$ tra gruppi di Lie connessi è determinata dal suo comportamento in un intorno aperto dell'elemento neutro in G . In altre parole, ρ è determinata dal suo germe in $e \in G$.

Corollario 1.1.5. *Se G è un gruppo di Lie connesso allora non esistono sottogruppi propri di G aperti.*

Osservazione 1. Si osserva che se G è compatto allora il quoziente G/G^e è finito in quanto uno spazio compatto localmente connesso ha un numero finito di componenti connesse.

Si enuncia di seguito un teorema che ha come implicazione una importante proprietà di relazione tra morfismi di gruppi di Lie e morfismi di algebre di Lie.

Teorema 1.1.6. *Sia G un gruppo di Lie connesso e sia \tilde{G} il rivestimento universale di G come varietà differenziale*

$$\pi : \tilde{G} \rightarrow G$$

Scelto un elemento $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$, esiste su \tilde{G} un'unica struttura di gruppo di Lie che rende π un omomorfismo di gruppi di Lie.

In particolare, $\pi^{-1}(e) = \ker(\pi)$ è un sottogruppo incluso nel centro $Z(\tilde{G})$.

Dagli enunciati precedenti si conclude che:

Ogni gruppo di Lie connesso è il quoziente di un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso per un sottogruppo discreto contenuto nel centro.

Questo permette di ricondurre la classificazione dei gruppi di Lie connessi alla classificazione dei gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi ed alla classificazione dei sottogruppi discreti contenuti nei loro centri.

Esempio 1.2. Si considera il gruppo semplicemente connesso

$$SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Per vedere quali sono i gruppi di Lie che hanno $SU_2(\mathbb{C})$ come rivestimento universale si deve studiare il suo centro.

$$\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow b = 0, \vartheta = 0, \pi$$

Il centro è costituito da due elementi $Z(SU_2(\mathbb{C})) = \{I, -I\}$ ed i suoi sottogruppi discreti sono $\Gamma_1 = \{I\}$ e $\Gamma_2 = \{I, -I\}$. I possibili gruppi di Lie che hanno come rivestimento $SU_2(\mathbb{C})$ sono

$$\begin{aligned} SU_2(\mathbb{C})/\Gamma_1 &\cong SU_2(\mathbb{C}) \\ SU_2(\mathbb{C})/\Gamma_2 &\cong SO_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

In generale, per n primo il gruppo $SU_n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso ed è il rivestimento di due gruppi di Lie: $SU_n(\mathbb{C})$ e $PU_n(\mathbb{C})$, gruppo delle proiettività associate a $SU_n(\mathbb{C})$.

1.2 Algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie

Si può quindi definire la struttura di algebra di Lie e si osserverà in seguito come associare, in maniera naturale, un gruppo di Lie G ad una algebra di Lie \mathfrak{g} e viceversa.

1.2.1 Definizione di algebra di Lie

Sia K un campo con caratteristica uguale a zero. Si definisce *algebra di Lie* \mathfrak{g} di dimensione finita uno spazio vettoriale di dimensione finita su K dotato di un'applicazione *parentesi di Lie* $[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ che per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ verifica le seguenti proprietà:

(i) $[,]$ è bilineare

(ii) $[,]$ è antisimmetrica

(iii) vale l'identità di Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

L'algebra di Lie \mathfrak{g} si dice *abeliana* se vale $[X, Y] = 0$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Esempio 1.3. Un semplice esempio di algebra di Lie è dato dallo spazio vettoriale euclideo V di dimensione $n = 3$ con l'operazione $[v, w] := v \wedge w$.

Ad ogni gruppo di Lie G è possibile associare in modo naturale un'algebra di Lie \mathfrak{g} e segue da risultati generali¹, come ad esempio il teorema di Ado che verrà enunciato in seguito, che ad ogni algebra di Lie reale è associato un gruppo di Lie.

Si considerano, quindi, risultati legati alle proprietà provenienti dalla struttura differenziale del gruppo di Lie e si utilizzano nozioni quali quella di campo vettoriale e di spazio tangente.

Si considera il diffeomorfismo di *moltiplicazione a sinistra* per $g \in G$, con G gruppo di Lie:

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

Tale applicazione è continua, con inversa continua $L_{g^{-1}}$.

Si definisce ora un *campo vettoriale invariante a sinistra* come un campo su G tale che

$$X_{gh} = dL_g(X_h)$$

con dL_g applicazione che va da $T_h G$ a $T_{gh} G$ ² e X_{gh} valore del campo nel punto $g \cdot h$.

Si osserva che un campo vettoriale invariante a sinistra è univocamente determinato dal suo valore in un punto, ad esempio nell'elemento neutro e

$$X_g = dL_g(X_e)$$

¹Per una trattazione approfondita si consiglia [3]

²Spazio tangente al gruppo di Lie G nel punto h , rispettivamente $g \cdot h$.

Rimane però da dimostrare che tale campo vettoriale sia liscio e si procede verificandolo in un intorno U dell'elemento neutro.

Vale inoltre:

Teorema 1.2.1. *Lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra $\chi(G)$ è isomorfo allo spazio tangente a G nell'elemento neutro.*

Dimostrazione. L'isomorfismo cercato è l'applicazione

$$\begin{aligned} F : \chi(G) &\rightarrow T_e G \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

□

Osservazione 2. L'insieme di tutti i campi vettoriali su G è un'algebra di Lie di dimensione infinita ed il sottospazio vettoriale $\chi(G)$ dei campi vettoriali invarianti a sinistra è una sottoalgebra di Lie di dimensione finita. Dato che lo spazio tangente $T_e G$ è isomorfo a $\chi(G)$, come spazio vettoriale, si può utilizzare tale isomorfismo per definire una struttura di parentesi di Lie su $T_e G$.

Si premette la seguente definizione:

Definizione 1.1. Un *sottogruppo ad un parametro* in G è un omomorfismo di gruppi di Lie tra \mathbb{R} visto come gruppo di Lie con struttura additiva e G , tale che:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow G \\ \gamma(0) &= e \\ \gamma(s+t) &= \gamma(s)\gamma(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Inoltre se $X = \gamma'(0)$ con $X \in \mathfrak{g}$, i sottogruppi ad un parametro di G sono le curve integrali passanti per l'elemento neutro al tempo $t = 0$ dei campi invarianti a sinistra. L'esistenza è data dal fatto che i campi invarianti sono completi.

Si considera ora l'isomorfismo $F(X) = X_e$ del teorema precedente. Il primo passo è dimostrare che l'insieme dei campi invarianti a sinistra è chiuso

rispetto all'operazione parentesi di Lie. Siano \hat{X} e \hat{Y} due campi invarianti a sinistra con i rispettivi flussi $t \mapsto \gamma_{\hat{X}}(m, t)$ e $t \mapsto \gamma_{\hat{Y}}(m, t)$ passanti per un punto $m \in G$ in $t = 0$. Definisco ora

$$\begin{aligned} A_m : (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow G \\ t &\mapsto \gamma_{\hat{Y}}(\gamma_{\hat{X}}(\gamma_{\hat{Y}}(\gamma_{\hat{X}}(m, \sqrt{t}), \sqrt{t}), -\sqrt{t}) - \sqrt{t}) \end{aligned}$$

Per i campi invarianti a sinistra vale $\gamma_{\hat{X}}(gh, t) = g\gamma_{\hat{X}}(h, t)$, quindi:

$$A_g(t) = gA_e(t) = L_g(A_e(t)) \Rightarrow A'(0) = DL_g(A'(0)) = DL_g([\hat{X}, \hat{Y}]_e)$$

Dall'uguaglianza $[\hat{X}, \hat{Y}]_m = A'_m(0)$ segue che $[\hat{X}, \hat{Y}]$ è ancora un campo invariante a sinistra. Infine, per definire l'applicazione parentesi di Lie tra due vettori X e Y in T_eG è sufficiente considerare

$$[X, Y] = F([F^{-1}(X), F^{-1}(Y)])$$

Esempio 1.4. In relazione agli esempi di gruppi di Lie presentati precedentemente, si elencano alcune interessanti algebre di Lie.

- Si considera il gruppo di Lie $SL(V) \cong SL_n(\mathbb{R})$. Sia A_t una curva nel gruppo passante per l'elemento neutro al tempo zero e tale che $A'_0 = X$. Se v_1, \dots, v_n è una base di V , vale

$$A_t(v_1) \wedge \dots \wedge A_t(v_n) \equiv v_1 \wedge \dots \wedge v_n$$

differenziando in $t = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A_t(v_1) \wedge \dots \wedge A_t(v_n)) \\ &= \sum_i v_1 \wedge \dots \wedge X(v_i) \wedge \dots \wedge v_n \\ &= \text{Tr}(X) \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_n) \end{aligned}$$

Si conclude che $\mathfrak{sl}(V)$ è l'algebra di Lie degli endomorfismi dello spazio vettoriale V con traccia nulla.

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ è l'algebra delle matrici antisimmetriche, associata ai gruppi $O(V)$ ed $SO(V)$. Si considera infatti la curva A_t di $O_n(\mathbb{R})$ tale che

$A_0 = I$ e $A'_0 = X$. Sia $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica e siano $v, w \in V$, $B(A_t(v), A_t(w)) \equiv B(v, w)$. Derivando in $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} B(A_t(v), A_t(w)) \right|_{t=0} = B(X(v), w) + B(v, X(w)) \equiv 0$$

Se B è la forma quadratica standard, ossia $B(v, w) = {}^t v \cdot I \cdot w$, allora la relazione precedente implica

$$X + {}^t X = 0$$

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_n(\mathbb{R})$ è l'algebra delle matrici antihermitiane, associata ai gruppi $U(V)$ ed $SU(V)$. Si procede in maniera analoga al caso precedente, considerando la curva A_t di $U_n(\mathbb{R})$ tale che $A_0 = I$ e $A'_0 = X$. Sia $H : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un prodotto interno Hermitiano e siano $v, w \in V$. Derivando in $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} H(A_t(v), A_t(w)) \right|_{t=0} = H(X(v), w) + H(v, X(w)) \equiv 0$$

Se H è la forma Hermitiana data da $H(v, w) = {}^t \bar{v} \cdot I \cdot w$, allora la relazione precedente implica

$$X - {}^t \bar{X} = 0$$

1.2.2 Relazioni tra algebra e gruppo

Avendo a disposizione le definizioni di algebra di Lie e di morfismo tra algebre di Lie, si può ora enunciare un corollario al teorema (1.1.6).

Corollario 1.2.2. *Sia G un gruppo di Lie connesso e sia \tilde{G} il rivestimento universale di G come varietà differenziale $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$. Allora π è un omomorfismo di gruppi di Lie e l'applicazione*

$$D\pi : T_{\tilde{e}}\tilde{G} \rightarrow T_e G$$

è un isomorfismo di algebre di Lie.

Il problema che ci si pone ora è quello di determinare univocamente un morfismo tra gruppi di Lie a partire da un morfismo tra algebre di Lie.

A tal proposito si introduce la nozione di mappa esponenziale, che risulta essenziale per studiare le relazioni tra un gruppo di Lie e l'algebra di Lie ad esso associata. Sia

$$\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$$

un sottogruppo ad un parametro e sia X l'elemento dell'algebra \mathfrak{g} definito da

$$X = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t=0}$$

Definizione 1.2. Si definisce *mappa esponenziale* l'applicazione

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\rightarrow G \\ \exp(X) &= \gamma_X(e) \end{aligned}$$

Dall'unicità di γ_X , si ha che

$$\gamma_{(\lambda X)} = \gamma_X(\lambda t)$$

L'esistenza della mappa esponenziale viene dalla completezza dei campi invarianti a sinistra ed inoltre si verifica facilmente che \exp è l'unica mappa da \mathfrak{g} a G che porta 0 nell'elemento neutro e ed il cui differenziale nell'origine è la mappa identità:

$$(D\exp)_0 : T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \rightarrow T_eG \cong \mathfrak{g}$$

Da ciò segue che la mappa esponenziale è una mappa naturale, nel senso che per ogni applicazione $\phi : G \rightarrow H$, con G ed H gruppi di Lie, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{D\phi_e} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

commuta.

Osservazione 3. La mappa esponenziale da $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ a $GL_n(\mathbb{R})$ è l'esponenziale di matrici definito come

$$e^X = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{k!}$$

Questa serie converge ad una matrice invertibile e^X con inversa e^{-X} .

L'importanza della mappa esponenziale emerge dal fatto che le sue proprietà ci permettono di trovare legami non solo tra un'algebra di Lie ed il gruppo di Lie ad essa associato, ma anche tra le rispettive sottostrutture. A tal proposito si enunciano alcuni interessanti teoremi che saranno utili nel corso della trattazione.

Teorema 1.2.3. *Sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie \mathfrak{g} . Allora esistono un gruppo di Lie H ed un omomorfismo di gruppi di Lie $\phi : \mathfrak{h} \rightarrow G$ tali che*

$$\mathfrak{h} = D\phi_e(T_e H)$$

con $H = \exp(\mathfrak{h})$ sottogruppo di G (non necessariamente chiuso).

In particolare si osserva che ogni algebra di Lie che è sottoalgebra di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie associata ad un qualche gruppo di Lie. Si ammette, senza dimostrarlo³, il seguente

Teorema 1.2.4 (Teorema di Ado). *Ogni algebra di Lie astratta è isomorfa ad una sottoalgebra di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.*

Teorema 1.2.5. *Data \mathfrak{g} algebra di Lie di dimensione finita, esiste un unico gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso G di cui \mathfrak{g} sia l'algebra associata. Tutti gli altri gruppi di Lie con la stessa algebra si ottengono come quozienti di G con un sottogruppo discreto del suo centro $Z(G)$.*

Teorema 1.2.6. *Sia G un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie associata \mathfrak{g} , sia H gruppo di Lie con algebra di Lie associata*

³Per la dimostrazione completa si suggerisce [2], appendice E.

h. Se $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ è un omomorfismo di algebre di Lie, esiste un unico $\Psi : G \rightarrow H$ omomorfismo di gruppi di Lie tale che

$$D\Psi = \psi$$

Capitolo 2

Rappresentazioni di algebre di Lie semisemplici

Nei paragrafi che seguono si introduce la teoria delle rappresentazioni dei gruppi di Lie che indaga i diversi modi in cui un gruppo dato G agisce su uno spazio vettoriale. Si evidenzia anche il legame tra rappresentazione di gruppo di Lie e rappresentazione di algebra di Lie con particolare attenzione ad argomenti quali la mappa esponenziale e la rappresentazione aggiunta. Si espongono inoltre le nozioni preliminari per affrontare la classificazione di algebre di Lie e ci si concentra sui risultati che riguardano le rappresentazioni di algebre di Lie semisemplici.

2.1 Rappresentazioni

2.1.1 Definizioni ed esempi

Una *rappresentazione* di un gruppo di Lie G è un omomorfismo di gruppi di Lie $\rho : G \rightarrow GL(V)$, con V spazio vettoriale. In questa trattazione ci si limita a considerare spazi V complessi e di dimensione finita.

Una definizione analoga si può fornire per la rappresentazione di un'algebra di Lie.

Data una rappresentazione (ρ, V) di un gruppo di Lie G , si definisce *sottorappresentazione* l'omomorfismo di gruppi di Lie $\rho' : G \rightarrow GL(W)$ insieme con il sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che W sia invariante per tutti i $\rho(g)$, $g \in G$. In altre parole $\rho(g)v = \rho'(g)v$ per ogni elemento g del gruppo e per ogni $v \in W$.

Esempio 2.1. Si considerano due rappresentazioni di G : (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) . Si fissano le basi $\{v_1, \dots, v_m\}$ di V_1 e $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ di V_2 , e si considera la base dello spazio $V_1 \oplus V_2$ data dai vettori $\{v_1, \dots, v_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$. Definendo ora, in modo naturale, la rappresentazione *somma diretta* di tali rappresentazioni

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$$

si ottiene che in queste basi (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) sono due sottorappresentazioni.

Osservazione 4. Si definisce in modo naturale il *prodotto tensoriale* di rappresentazioni come la rappresentazione $(\rho_1 \otimes \rho_2, V_1 \otimes V_2)$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(w_1 \otimes w_2) = (\rho_1(g)w_1) \otimes (\rho_2(g)w_2)$$

in cui (ρ_1, V_1) e (ρ_2, V_2) sono rappresentazioni di un gruppo di Lie G , $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è base di V_1 e $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ è base di V_2 , allora lo spazio vettoriale $V_1 \otimes V_2$ ha dimensione $n \cdot m$ ed una sua base è data dai vettori della forma $v_i \otimes \bar{v}_j$.

Esempio 2.2. Se V è rappresentazione di G , allora $Sym^m V$ è una sottorappresentazione di $V^{\otimes m}$.

Segue un primo esempio non banale di rappresentazioni.

Esempio 2.3. Sia $G = S^1$. Le rappresentazioni complesse irriducibili di S^1 hanno dimensione uguale a 1 e sono nella forma

$$\rho(e^{ix}) = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Le rappresentazioni di S^1 perciò sono parametrizzate dai numeri interi e si indica con V_n la rappresentazione associata ad $n \in \mathbb{Z}$. Si considera ora lo spazio V dei polinomi trigonometrici, sottospazio vettoriale dello spazio infinito

dimensionale delle funzioni $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$. Si ha che V è denso in $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ (rispetto alla topologia naturale in questo spazio) e vale la decomposizione

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$$

Questo corrisponde alla possibilità di esprimere una funzione periodica di periodo 2π a valori complessi come serie infinita di termini definito su ognuno degli spazi V_i

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{inx}$$

Tale sviluppo è noto come serie di Fourier.

2.1.2 Rappresentazione aggiunta

Un gruppo di Lie ha una rappresentazione naturale chiamata rappresentazione aggiunta. Per darne la definizione si premettono alcune nozioni.

Si definisce la mappa di *coniugio* per ogni elemento g del gruppo di Lie G

$$\begin{aligned} C_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Tale applicazione può essere vista come la composizione delle applicazioni *moltiplicazione a destra* e *moltiplicazione a sinistra* definite in precedenza. Vale che C_g è differenziabile ed invertibile, con inversa uguale a $C_{g^{-1}}$. Anche $(DC_g)_e : T_e G \rightarrow T_e G$ è invertibile.

In altre parole esiste una mappa

$$\begin{aligned} \Psi_- : G &\rightarrow GL(G) \\ g &\mapsto C_g \\ h &\mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Si può ora definire la *rappresentazione aggiunta del gruppo* G come segue:

$$\begin{aligned} Ad = (D\Psi_-)_e : G &\rightarrow GL(T_e G) \\ g &\mapsto (DC_g)_e \end{aligned}$$

in cui, come già visto, $T_e G = \mathfrak{g}$. Si vede inoltre che $Ad(G)$ è differenziabile in g ed è un omomorfismo: $Ad(g_1 g_2) = Ad(g_1) \circ Ad(g_2)$.

Un primo risultato interessante che deriva dallo studio della rappresentazione aggiunta è la seguente

Proposizione 2.1.1. *Se G è un gruppo di Lie connesso e $Z(G)$ è discreto, $Ad(G) \subseteq GL(T_e G)$ è un gruppo di Lie isomorfo a $G/Z(G)$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che il nucleo di Ad è il centro di G . □

A partire da Ad si può costruire la mappa

$$ad = (DAd)_e : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$$

detta *rappresentazione aggiunta dell'algebra* \mathfrak{g} . Esplicitamente vale

$$ad(X)(Y) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Per dimostrare tale uguaglianza si suppone \mathfrak{g} sottoalgebra di $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ senza perdere in generalità, come visto nel teorema di Ado (1.2.4). In tal caso vale che si può applicare il prodotto tra matrici nel calcolo di $Ad(g)(Y) = g \cdot Y \cdot g^{-1}$. Da ciò, se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ è una curva integrale passante per l'elemento neutro e in zero e tale che $\gamma'(t) = X$, allora

$$\begin{aligned} ad(X)(Y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma(t) \cdot Y \cdot \gamma(t)^{-1}) \\ &= \gamma'(0) \cdot Y \cdot \gamma(0)^{-1} + \gamma(0) \cdot Y \cdot (-\gamma(0)^{-1} \cdot \gamma'(0) \cdot \gamma(0)^{-1}) \\ &= X \cdot Y - Y \cdot X \end{aligned}$$

2.2 Algebre di Lie semisemplici

Si introducono ora alcune definizioni necessarie per affrontare una prima classificazione delle algebre di Lie.

2.2.1 Classificazione di algebre di Lie

Data \mathfrak{g} algebra di Lie, una sottoalgebra \mathfrak{h} si dice *ideale dell'algebra* se per ogni elemento $Y \in \mathfrak{h}$ e per ogni $X \in \mathfrak{g}$ vale

$$[Y, X] \in \mathfrak{h}$$

Si osserva che un particolare ideale dell'algebra \mathfrak{g} è il suo *centro* $Z(\mathfrak{g})$ definito come la sottoalgebra degli $X \in \mathfrak{g}$ tali che $[X, Y] = 0$ per ogni $Y \in \mathfrak{g}$.

Inoltre, vale che la struttura di ideale di un'algebra di Lie è collegata alla struttura di sottogruppo normale del corrispondente gruppo di Lie.

Si possono considerare due interessanti successioni di ideali associate ad ogni algebra di Lie: la *serie centrale*

$$\begin{aligned} D_1 \mathfrak{g} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ D_k \mathfrak{g} &= [\mathfrak{g}, D_{k-1} \mathfrak{g}] \end{aligned}$$

e la *serie derivata*

$$\begin{aligned} D^1 \mathfrak{g} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ D^k \mathfrak{g} &= [D^{k-1} \mathfrak{g}, D_{k-1} \mathfrak{g}] \end{aligned}$$

Definizione 2.1. Si classificano le algebre di Lie a seconda del comportamento delle successioni di ideali ad esse associate:

- (i) \mathfrak{g} è *nilpotente* se la serie centrale è definitivamente nulla, ovvero se esiste k tale che $D_k \mathfrak{g} = 0$; se il più piccolo intero che annulla la serie è 1, allora \mathfrak{g} si dice *abeliana*
- (ii) \mathfrak{g} è *risolubile* se la serie derivata è definitivamente nulla, ovvero se esiste k tale che $D^k \mathfrak{g} = 0$
- (iii) \mathfrak{g} è *semisemplice* se $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ e gli unici ideali risolubili sono gli ideali banali
- (iv) \mathfrak{g} è *semplice* se $\dim(\mathfrak{g}) > 1$ e \mathfrak{g} ha solo ideali banali

Si dice *radicale* il più grande ideale risolubile di un'algebra di Lie.

Si può dimostrare che *ogni algebra di Lie può essere scritta come somma diretta di un'algebra semisemplice e di una risolubile*. In questo elaborato ci si interessa in particolare alle algebre di Lie semisemplici e si cerca di analizzarne la struttura.

Una rappresentazione di un'algebra di Lie \mathfrak{g}

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

si dice *completamente riducibile* se ogni sottospazio vettoriale invariante per ρ ha un complementare che sia invariante, ossia se V è della forma $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, con W_i invarianti per ρ e tali che nessun loro sottospazio sia ρ -invariante.

Teorema 2.2.1. (*Completa riducibilità*) Sia (ρ, V) una rappresentazione di un'algebra di Lie semisemplice \mathfrak{g} e sia W un sottospazio vettoriale di V invariante per ρ . Allora esiste un sottospazio vettoriale $W' \subseteq V$ complementare a W ed invariante per ρ .

In altre parole, si afferma che un'algebra di Lie è semisemplice se e solo se ogni sua rappresentazione lineare è completamente riducibile.

Si ricorda, da teoremi generali di algebra lineare¹, che un endomorfismo di uno spazio vettoriale $A : V \rightarrow V$ può essere scritto in maniera unica come $A = A_s + A_n$, in cui A_s è detta parte semisemplice e A_n parte nilpotente. Più esplicitamente, la matrice associata all'endomorfismo A è simile alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

¹Consultare [4], capitolo XIV

in cui le matrici A_i sono dette blocchi di Jordan

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

e possono essere scritte come somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente.

Si osserva inoltre che vale

$$[A_s, A_n] = 0$$

Proposizione 2.2.2. *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie semisemplice sottoalgebra da $\mathfrak{gl}(V)$. Allora, ogni elemento $X \in \mathfrak{g}$ si scrive in modo unico come somma di un elemento nilpotente e di un elemento semisemplice e la parte semisemplice X_s e la parte nilpotente X_n sono ancora contenute in \mathfrak{g} .*

Corollario 2.2.3. *Se (ρ, V) è una rappresentazione di un'algebra semisemplice \mathfrak{g} , allora*

$$\begin{aligned} \rho(X)_s &= \rho(X_s) \\ \rho(X)_n &= \rho(X_n) \end{aligned}$$

Questo significa che un elemento semisemplice in una rappresentazione rimane semisemplice in tutte le rappresentazioni.

Per determinare se un'algebra di Lie è semisemplice si introduce la definizione di *forma invariante*. Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo K e sia $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow K$ una forma bilineare. Allora B è detta invariante se vale $B([X, Y], Z) + B(Y, [X, Z]) = 0$ per ogni X, Y, Z nell'algebra. È detta *Forma di Killing* la forma bilineare su \mathfrak{g} definita da

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(ad(X) \circ ad(Y) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g})$$

Tale forma è invariante e simmetrica.

Teorema 2.2.4. *(Criterio di Cartan-Killing). Una algebra di Lie \mathfrak{g} è semisemplice se e solo se la sua forma di Killing è non degenera.*

2.2.2 Sottoalgebre di Cartan e Gruppo di Weyl

Si dice *sottoalgebra di Cartan* \mathfrak{h} di \mathfrak{g} una sottoalgebra abeliana massimale tale che, per ogni elemento $H \in \mathfrak{h}$, la rappresentazione $ad(H)$ sia diagonalizzabile. Si può provare che tale sottoalgebra è abeliana e, di più, che i suoi elementi sono semisemplici.

La definizione di sottoalgebra di Cartan è ben posta per qualsiasi algebra, ma solo per le algebre semisemplici vale un teorema di unicità.

Proposizione 2.2.5. (*Decomposizione di Cartan*) *Ogni algebra di Lie semisemplice \mathfrak{g} può essere scomposta in somma diretta*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{R}^+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \right)$$

con \mathfrak{h} sottoalgebra di Cartan.

La sottoalgebra \mathfrak{h} agisce su \mathfrak{g} con la rappresentazione aggiunta ad e la sua azione è diagonalizzabile. In tal caso i funzionali $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ si presentano in numero finito e vengono detti *pesi della rappresentazione aggiunta* o anche *radici* dell'algebra di Lie \mathfrak{g} . Di conseguenza i corrispondenti autospazi \mathfrak{g}_α sono detti *spazi peso*. Ovviamente anche la sottoalgebra \mathfrak{h} stessa è un autospazio e corrisponde all'autovalore 0, anche se solitamente l'elemento 0 non è considerato una radice. Si denoterà con $\Omega \subset \mathfrak{h}^*$ l'insieme delle radici e si cercherà, in seguito, di rappresentare graficamente la struttura di una algebra di Lie mediante il diagramma delle sue radici.

Si enunciano ora alcune proprietà che risulteranno molto utili per l'analisi delle rappresentazioni lineari di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$:

- (i) Ogni spazio peso \mathfrak{g}_α ha dimensione 1.
- (ii) Ω genera una griglia inclusa in \mathfrak{h}^* di rango uguale a $\dim(\mathfrak{h})$.
- (iii) Ω è simmetrico rispetto all'origine, ossia: se α è radice allora lo è anche $-\alpha$.

Per esprimere la simmetria dello spazio delle radici, si considera l'involuzione W_α sullo spazio vettoriale \mathfrak{h}^* data dalla riflessione nell'iperpiano $\Omega_\alpha = \{\beta \in \mathfrak{h}^* : \langle H_\alpha, \beta \rangle = 0\}$ con asse la retta $\langle \alpha \rangle$:

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}\alpha = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

Si definisce *gruppo di Weil* dell'algebra a di Lie \mathfrak{g} il gruppo \mathfrak{W} generato da queste involuzioni. In termini di Forma di Killing, il gruppo di Weil è il gruppo generato dalle riflessioni nell'iperpiano perpendicolare alle radici dell'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Si suppone ora che (ρ, V) sia una rappresentazione dell'algebra di Lie semisemplice \mathfrak{g} con decomposizione di V in autospazi data da $V = \bigoplus V_\beta$. I pesi β che compaiono nella decomposizione possono essere suddivisi in classi di equivalenza modulo $\alpha \in \mathfrak{h}^*$

$$V = \bigoplus_{\beta} \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{\beta+n\alpha} \right)$$

e la somma diretta di autospazi di ogni classe di equivalenza risulta essere una sottorappresentazione di (ρ, V) . Segue che l'insieme dei pesi congruenti modulo α ad ogni β dato sono invarianti per l'involuzione W_α .

Proposizione 2.2.6. *Sia \mathfrak{W} il gruppo di Weyl di un'algebra di Lie semisemplice \mathfrak{g} e sia \mathfrak{h} una sottoalgebra di Cartan di \mathfrak{g} .*

- (i) *L'insieme dei pesi di ogni rappresentazione di \mathfrak{g} è invariante per \mathfrak{W} .*
- (ii) *La forma di Killing su \mathfrak{h} è invariante per \mathfrak{W} .*
- (iii) *Il gruppo di Weyl è un gruppo finito.*

Se si considera un funzionale lineare $l : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, allora è possibile suddividere l'insieme delle radici in $R = R^+ + R^-$, detti rispettivamente insieme delle *radici positive* e insieme delle *radici negative*. Si denota con $S \subset R$ l'insieme delle *radici semplici* che compaiono nella decomposizione, in tal modo ogni radice positiva o negativa e combinazione lineare a coefficienti interi di radici semplici.

Proposizione 2.2.7. *Il gruppo di Weyl \mathfrak{W} agisce in maniera semplicemente transitiva sulle possibili decomposizioni di R in radici positive e radici negative.*

Capitolo 3

Rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$

In questo capitolo si analizzano le rappresentazioni irriducibili e finite dimensionali dell'algebra di Lie di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ partendo dai risultati ottenuti per $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ e generalizzandoli ¹.

3.1 Rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$

Si cercano le rappresentazioni (ρ, V) irriducibili e finite dimensionali di $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Si considera la base dell'algebra data dagli elementi

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} [H, X] &= 2X \\ [H, Y] &= -2Y \\ [X, Y] &= H \end{aligned}$$

$\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ è un'algebra semisemplice quindi, se $X \in \mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ e (ρ, V) è una rappresentazione, allora

$$\begin{aligned} \rho(X)_s &= \rho(X_s) \\ \rho(X)_n &= \rho(X_n) \end{aligned}$$

¹Nella costruzione di tali algebre di Lie si segue la linea proposta da [2], pag 146-189.

in cui X_s ed X_n sono le parti semisemplice e nilpotente della Forma di Jordan (si veda il corollario (2.2.3)). In particolare, un elemento semisemplice rimane semisemplice in tutte le rappresentazioni

allora anche la sua parte diagonalizzabile X_s e la sua parte nilpotente X_n appartengono all'algebra. In particolare, l'azione di $\rho(H)$ sullo spazio V è diagonalizzabile e si ottiene la decomposizione

$$V = \bigoplus V_\alpha$$

in cui α appartiene ad una collezione di numeri complessi ed è tale che $\forall v \in V_\alpha$ vale ²:

$$H(v) = \alpha \cdot v$$

Gli spazi V_α si dicono autospazi per l'azione di H ed un vettore $v \in V_\alpha$ è detto autovettore di autovalore α .

Si studia ora l'azione di X e Y sui sottospazi V_α ; dato $v \in V_\alpha$ valgono:

$$\begin{aligned} H(X(v)) &= X(H(v)) + [H, X](v) \\ &= X(\alpha \cdot v) + 2X(v) \\ &= (\alpha + 2) \cdot X(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y(v)) &= Y(H(v)) + [H, Y](v) \\ &= Y(\alpha \cdot v) - 2Y(v) \\ &= (\alpha - 2) \cdot Y(v) \end{aligned}$$

Risulta, quindi, che se v è autovettore per H di autovalore α , allora $X(v)$ è autovettore per H di autovalore $\alpha + 2$ e $Y(v)$ è autovettore di autovalore $\alpha - 2$.

$$\begin{aligned} \rho(X) : V_\alpha &\rightarrow V_{\alpha+2} \\ \rho(Y) : V_\alpha &\rightarrow V_{\alpha-2} \end{aligned}$$

Dato che V ha dimensione finita, esiste un elemento n_0 , detto *elemento massimale*, tale che $n_0 = \max\{n | V_n \neq \{0\}\}$. Si considera un vettore non

²Per semplificare la notazione, nel seguito ci si riferisce alle rappresentazioni indicando solamente lo spazio vettoriale V in luogo della coppia (ρ, V) ed indicando con H l'elemento $\rho(H)$.

nullo $v \in V_{n_0}$, detto vettore di *peso massimale*, e sia m il massimo numero tale che $Y^m v \neq 0$. In queste ipotesi, vale il seguente enunciato:

Proposizione 3.1.1. *L'insieme dei vettori $\{v, Yv, Y^2v, \dots, Y^m v\}$ è una base per lo spazio vettoriale V .*

Dimostrazione. Essendo V una rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, è sufficiente mostrare che il sottospazio $W = \text{span}\{v, Yv, Y^2v, \dots, Y^m v\}$ è una sottorappresentazione di V . Preso un generico elemento $w = (a_0v + a_1Yv + a_2Y^2v + \dots + a_mY^m v) \in W$, si mostra che W è invariante per l'azione di H , X e Y .

$Hw \in W$ e $Yw \in W$ banalmente. Per vedere se $Xw \in W$ si osserva l'azione di X su $Y^k v$ per ogni k da zero a m :

$$\begin{aligned} X(Y(v)) &= [X, Y](v) + Y(X(v)) = H(v) + Y(0) = n_0 \cdot v \\ X(Y^2(v)) &= [X, Y](Y(v)) + Y(X(Y(v))) = H(Y(v)) + Y(n_0 \cdot v) \\ &= (n_0 - 2) \cdot Y(v) + n_0 \cdot Y(v) = 2(n_0 - 1) \cdot Y(v) \\ &\dots \\ X(Y^k(v)) &= (n_0 + (n_0 - 2) + (n_0 - 4) + \dots + (n_0 - 2k + 2)) \cdot Y^{k-1}(v) \\ &= k(n_0 - k + 1) \cdot Y^{k-1}(v) \end{aligned}$$

Per concludere, i vettori $\{v, Yv, Y^2v, \dots, Y^m v\}$, che sono diversi da zero per le ipotesi su m , sono autovettori di H con autovalori distinti e risultano, quindi, linearmente indipendenti. \square

Si osserva che, ponendo $k = m + 1$ nell'espressione precedente, vale

$$X(Y^{m+1}(v)) = (m + 1)(n_0 - m) \cdot Y^m(v) \quad \Leftrightarrow \quad m = n_0$$

quindi il peso massimale di una rappresentazione è un numero intero non negativo.

Corollario 3.1.2. *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste un'unica rappresentazione V irriducibile di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, con $\dim(V) = n + 1$. Di più, V è univocamente determinata dalla sua decomposizione in autospazi V_α con $\alpha = n, n - 2, \dots, -n + 2, -n$ e $\dim(V_\alpha) = 1$.*

Si conclude quindi che ogni rappresentazione V tale che tutti gli autovalori di H abbiano la stessa parità e si presentino con molteplicità uguale ad uno è necessariamente irriducibile; più in generale, il numero di fattori irriducibili di una qualsiasi rappresentazione di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ è esattamente la somma delle molteplicità di zero e uno come autovalori di H .

Esempio 3.1.

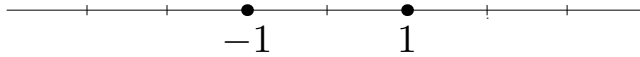
- $\mathbb{V}^0 = \mathbb{C}$, $\dim(\mathbb{V}^0) = 1$ è la *rappresentazione banale*.

- $\mathbb{V}^1 = \mathbb{C}^2$, $\dim(\mathbb{V}^1) = 2$, con

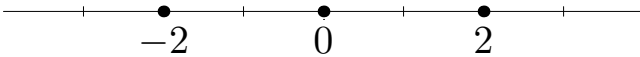
$$H(e_1) \mapsto e_1$$

$$H(e_2) \mapsto -e_2$$

è la *rappresentazione standard*.



- $\mathbb{V}^2 = \text{Sym}^2\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \cdot x^2 \oplus \mathbb{C} \cdot xy \oplus \mathbb{C} \cdot y^2$, è la *rappresentazione aggiunta*.



Più in generale, per la n -esima potenza simmetrica della rappresentazione standard $\text{Sym}^n\mathbb{V}$ con base $\{x^n, x^{n-1}y, \dots, xy^{n-1}, y^n\}$ vale

$$H(x^{n-k}y^k) = (n-k)H(x) \cdot x^{n-k-1}y^k + kH(y) \cdot x^{n-k}y^{k-1} = (n-2k) \cdot x^{n-k}y^k$$

quindi gli autovalori di H sullo spazio $\text{Sym}^n\mathbb{V}$ sono esattamente $n, n-2, \dots, -n+2, -n$, ognuno con molteplicità pari ad uno. Ne segue che:

Ogni rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ è una potenza simmetrica della rappresentazione standard $\mathbb{V} \cong \mathbb{C}^2$.

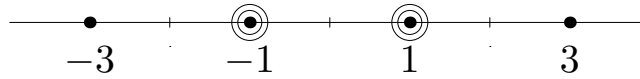
Considerando il prodotto tensoriale di due rappresentazioni irriducibili, può essere utile la *formula di Clebsch-Gordon*:

$$\mathbb{V}^m \otimes \mathbb{V}^n = \mathbb{V}^{m+n} \oplus \mathbb{V}^{m+n-2} \oplus \dots \oplus \mathbb{V}^{m-n} \quad m > n$$

Esempio 3.2. Si considera la rappresentazione $V = \mathbb{V}^2 \otimes \mathbb{V}^1$ e si studia la decomposizione in autospazi con relativi autovalori associati:

<i>autovalore</i>	<i>autospazio</i>
3	$\langle e_1^2 \otimes e_1 \rangle$
1	$\langle e_1^2 \otimes e_2 \rangle, \langle e_1 e_2 \otimes e_1 \rangle$
-1	$\langle e_2^2 \otimes e_1 \rangle, \langle e_1 e_2 \otimes e_2 \rangle$
-3	$\langle e_2^2 \otimes e_2 \rangle$

Graficamente si ottiene: e si osserva subito che tale rappresentazione può



essere scritta come somma diretta di due rappresentazioni irriducibili come segue:

$$\mathbb{V}^2 \otimes \mathbb{V}^1 = \mathbb{V}^3 \oplus \mathbb{V}^1$$

Dopo aver osservato il comportamento dei prodotti tensoriali di rappresentazioni, si fornisce ora una formula per decomporre l'ennesima potenza simmetrica di $Sym^2\mathbb{V}$:

$$Sym^n(sym^2\mathbb{V}) = \bigoplus_{\alpha} Sym^{2n-4\alpha}\mathbb{V} \quad \alpha \in 0, \dots, \frac{n}{2}$$

Esempio 3.3. Si considera la rappresentazione $V = Sym^n(Sym^2\mathbb{V})$. La sua decomposizione in fattori irriducibili è a

$$Sym^n(Sym^2\mathbb{V}) = Sym^{16}\mathbb{V} \oplus Sym^{12}\mathbb{V} \oplus Sym^8\mathbb{V} \oplus Sym^4\mathbb{V} \oplus \mathbb{C}$$

3.2 Rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$

Si cercano le rappresentazioni (ρ, V) irriducibili e finite dimensionalmente di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ procedendo per analogia con $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Si considera il sottospazio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$

delle matrici diagonali, $\dim(\mathfrak{h}) = 2$ con base:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Si ricorda che se un'algebra di Lie \mathfrak{g} è semisemplice allora si preserva la Forma di Jordan, cioè le parti diagonalizzabile e nilpotente di un elemento dell'algebra sono ancora contenute nell'algebra.

Osservando inoltre che due matrici diagonalizzabili che commutano sono diagonalizzabili simultaneamente, si può affermare che ogni rappresentazione irriducibile finito dimensionale (ρ, V) ammette una decomposizione

$$V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$$

$$H(v) = \alpha(H) \cdot v, \quad v \in V_{\alpha}$$

in cui α è uno scalare che dipende linearmente da H , ossia $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, e v è un autovettore per $H \in \mathfrak{h}$ (si dirà, più brevemente, che v è autovettore per \mathfrak{h}). La sottoalgebra abeliana $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ è tale che la sua azione su ogni \mathfrak{g} -modulo V sia diagonalizzabile, cioè si ha una decomposizione in somma diretta di V in autospazi V_{α} per \mathfrak{h} . Tale sottoalgebra è l'algebra di Cartan di \mathfrak{g} .

Tornando all'analogia con $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, si cercano ora gli autovettori dell'azione aggiunta di \mathfrak{h} su $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Si applica la decomposizione precedente alla rappresentazione aggiunta $(ad, \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}))$, ottenendo:

$$\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_{\alpha} \right) \quad (3.1)$$

quindi per ogni $H \in \mathfrak{h}$ e per ogni $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ si vuole ottenere

$$[H, Y] = ad(H)(Y) = \alpha(H) \cdot Y$$

La matrice H è della forma

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, 3$$

Si calcola $ad(H)(Y)$:

$$\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)y_{12} & (\lambda_1 - \lambda_3)y_{13} \\ (\lambda_2 - \lambda_1)y_{21} & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)y_{23} \\ (\lambda_3 - \lambda_1)y_{31} & (\lambda_3 - \lambda_2)y_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Il risultato del commutatore deve essere un multiplo della matrice Y . Affinché ciò accada, basta considerare le matrici E_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) con tutte le entrate nulle ad eccezione dell'entrata (i, j) che ha valore uguale ad 1. Infatti:

$$\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, E_{ij} \right] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$$

Definendo infine tre funzionali L_i per $i = 1, 2, 3$

$$L_i : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_i$$

si ottengono i sei funzionali $L_i - L_j$ che corrispondono agli indici α che appaiono nella decomposizione (3.1) di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, in cui gli autospazi $\mathfrak{g}_{L_i - L_j}$ sono generati dagli elementi E_{ij} .

In generale gli autovalori $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ dell'azione di \mathfrak{h} su una rappresentazione (ρ, V) di \mathfrak{g} sono detti pesi della rappresentazione, mentre i corrispondenti V_α sono gli spazi peso. L'insieme di questi autovalori verrà di seguito indicato con Ω .

Gli autovalori della rappresentazione aggiunta sono di particolare interesse e prendono il nome di radici dell'algebra di Lie. Le radici $L_i - L_j$ con $i < j$ sono radici positive, mentre quelle con $i > j$ sono negative. Lo spazio \mathfrak{h} ha peso 0.

Come enunciato in precedenza, le radici possono essere espresse come somma di radici positive e di radici negative e, più in generale, come combinazione lineare intera delle radici semplici $\alpha_1 = L_1 - L_2$ e $\alpha_2 = L_2 - L_3$.

$$\begin{aligned} L_1 - L_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 & L_2 - L_1 &= -\alpha_1 \\ L_1 - L_2 &= \alpha_1 & L_3 - L_2 &= -\alpha_2 \\ L_2 - L_3 &= \alpha_2 & L_3 - L_1 &= -\alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned}$$

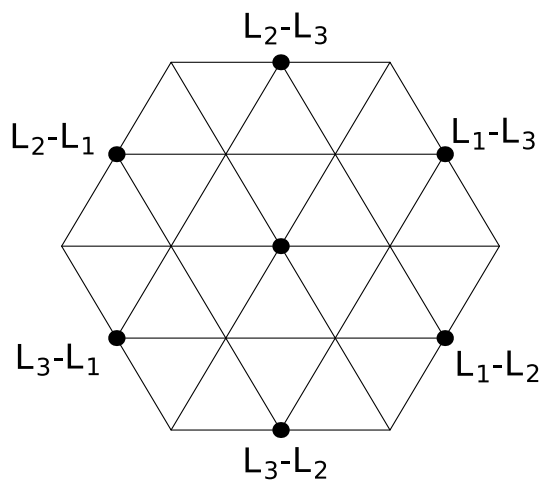
Resta ora da vedere come agiscono gli altri elementi dell'algebra di Lie. Si considera un elemento $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e ci si chiede dove viene mandato un vettore $Y \in \mathfrak{g}_\omega$ da $ad(X)$; segue il calcolo esplicito dell'azione di \mathfrak{h} su $ad(X)(Y)$:

$$\begin{aligned} [H, [X, Y]] &= [X, [H, Y]] + [[H, X], Y] = [X, \omega(H) \cdot Y] + [\alpha(H) \cdot X, Y] \\ &= (\alpha(H) + \omega(H)) \cdot [X, Y] \end{aligned}$$

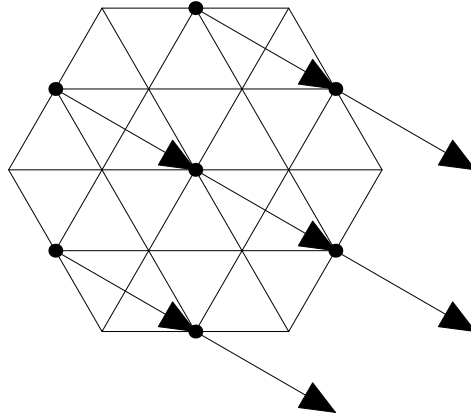
Quindi $ad(X)(Y) = [X, Y]$ è autovettore di \mathfrak{h} con autovalore $\alpha + \omega$:

$$ad(\mathfrak{g}_\alpha) : \mathfrak{g}_\omega \longrightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+\omega}$$

Osservazione 5. Rappresentando graficamente l'insieme Ω degli autovalori in una griglia del piano, si può interpretare l'azione di un sottospazio come una traslazione nella direzione dell'autovalore corrispondente.



Segue l'esempio corrispondente all'azione di \mathfrak{g}_α , con $\alpha = L_1 - L_2$:



Generalizzando ad una rappresentazione qualsiasi (ρ, V) con $V = \bigoplus V_\alpha$, si osserva che ogni spazio \mathfrak{g}_α agisce portando un autospazio V_ω in un altro autospazio della decomposizione. Se $v \in V_\omega$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, vale:

$$\begin{aligned} H(X(v)) &= X(H(v)) + [H, X](v) \\ &= X(\omega(H) \cdot v) + \alpha(H) \cdot X(v) \\ &= (\alpha(H) + \omega(H)) \cdot X(v) \end{aligned}$$

Quindi

$$\rho(\mathfrak{g}_\alpha) : \mathfrak{g}_\omega \longrightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+\omega}$$

Si osserva, quindi, che gli autovalori α che appaiono nella decomposizione di V sono combinazioni lineari delle radici $(L_i - L_j) \in \mathfrak{h}$. Di più, ogni spazio \mathfrak{g}_α ha dimensione 1.

Considerando l'insieme Ω dei pesi ω tali che $V_\omega \neq 0$, si può dire che tale insieme è finito poichè $\dim(V) < +\infty$. Si cerca, quindi, un elemento massimale. Per definire tale elemento, però, è necessario fissare una retta orientata del piano e scegliere poi, nel semipiano positivo, l'autovalore più lontano da tale retta. Ciò significa scegliere un funzionale lineare

$$l : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

esteso per linearità ad un funzionale

$$l : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

Per evitare ambiguità, si sceglie un l irrazionale rispetto alla griglia, in modo da non avere nucleo. Tale scelta, che inizialmente sembra essere arbitraria, si scoprirà essere semplicemente una scelta di orientazione del piano che, a causa delle simmetrie della griglia, non influirà sui risultati, proprio come accadeva per $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$.

Graficamente il piano viene diviso da una retta in due, una parte positiva ed una parte negativa (da cui la divisione di Ω in radici positive e radici negative). Dire che un elemento $\omega_{max} \in \Omega$ è un elemento massimale, significa dire che se $v \in V_{\omega_{max}}$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, allora un elemento del tipo $X(v) \in V_{\omega_{max}+\alpha}$ deve annullarsi nel caso in cui $l(\alpha) > 0$, altrimenti si arriverebbe ad un assurdo.

Definendo il funzionale

$$l(a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3) = aa_1 + ba_2 + ca_3$$

con

$$a + b + c = 0 \quad a > b > c$$

si ottiene che gli autospazi $\langle E_{ij} \rangle$ con $i < j$ corrispondono alle radici positive, mentre gli autospazi $\langle E_{ij} \rangle$ con $i > j$ corrispondono alle radici negative.

Di seguito sarà utile la seguente notazione:

$$H_{ij} = [E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$$

Se (ρ, V) è una rappresentazione irriducibile finito dimensionale di \mathfrak{sl}_3 , allora esiste un vettore $v \in V$ con le seguenti proprietà:

1. v è autovettore per \mathfrak{h} , con $v \in V_\alpha$ per qualche α
2. v è contenuto nel nucleo dell'azione di $\langle E_{12} \rangle, \langle E_{13} \rangle, \langle E_{23} \rangle$

Tale v è detto *primitivo* o *vettore di peso massimale*.

Teorema 3.2.1. *Sia (ρ, V) è una rappresentazione irriducibile finito dimensionale di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ e sia $v \in V$ un vettore di peso massimale. Allora V è generato dalle immagini di v sotto applicazioni successive degli operatori E_{21} , E_{31} e E_{32} .*

Dimostrazione. Sia W il sottospazio di V generato dalle immagini di v sotto applicazione della sottoalgebra di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ generata dagli operatori E_{21} , E_{31} e E_{32} . Si vuole mostrare che la sottorappresentazione W è invariante per $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, quindi coincide con tutto V . Banalmente v è nel nucleo di E_{12}, E_{23}, E_{13} . Ora si vede:

$$\begin{aligned} E_{12}(E_{21}(v)) &= E_{21}(E_{12}(v)) + [E_{12}, E_{21}](v) = 0 + \alpha([E_{12}, E_{21}]) \cdot (v) \in W \\ E_{23}(E_{21}(v)) &= E_{21}(E_{23}(v)) + [E_{23}, E_{21}](v) = 0 \in W \end{aligned}$$

Analogamente si mostra che $E_{32}(v)$ è contenuto in W . Infine per E_{31} basta osservare che è il risultato del commutatore $[E_{23}, E_{21}]$. \square

Si può mostrare anche qualcosa in più:

Proposizione 3.2.2. *Sia (ρ, V) è una rappresentazione finito dimensionale di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ e sia $v \in V$ un vettore di peso massimale. Allora la sottorappresentazione (ρ', W) di V , dove W è il sottospazio di V generato dalle immagini di v mediante applicazioni successive degli operatori E_{21} , E_{31} e E_{32} , è irriducibile.*

Dimostrazione. W è sottorappresentazione di V e W_α ha dimensione 1. Se per assurdo valesse $W = W' \oplus W''$, dato che W' e W'' devono commutare con l'azione di \mathfrak{h} si dovrebbe avere $W_\alpha = W'_\alpha \oplus W''_\alpha$, ma in tal caso uno di questi due spazi è zero, il che dimostra l'asserto.

Per mostrare l'invarianza del sottospazio W si considera una parola w_n di lunghezza al più n nelle lettere E_{21} ed E_{23} . Se W_n è il sottospazio generato dai vettori $w_n(v)$, si procede per induzione sulla lunghezza n . \square

Alla proposizione segue un importante enunciato:

Corollario 3.2.3. *Ogni rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ ha un unico vettore di peso massimale, determinato a meno di una costante moltiplicativa non nulla.*

Si cerca ora di risolvere un quesito posto in precedenza riguardo alla scelta di una direzione arbitraria e si studiano le eventuali simmetrie della griglia Ω .

Si considerano gli autospazi $V_{\alpha+n(L_2-L_1)}$ e $V_{\alpha+n(L_3-L_2)}$ generati rispettivamente da $(E_{21})^n(v)$ e $(E_{32})^n(v)$, con v autovettore di peso massimale α . Questi autospazi corrispondono ai punti sul bordo della griglia Ω , quindi ai possibili autovalori di V . Ci si chiede quindi quando tale successione di autospazi isomorfi a \mathbb{C} venga interrotta da uno spazio di dimensione zero. Per determinare il più piccolo m tale che $(E_{21})^m(v) = 0$, si richiama quanto visto nella sezione precedente riguardo le rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, in particolare:

Osservazione 6. Gli elementi E_{12} , E_{21} e $H_{12} = [E_{12}, E_{21}]$ generano una sottoalgebra di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ isomorfa a $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ tramite l'isomorfismo:

$$\begin{aligned} E_{12} &\mapsto X \\ E_{21} &\mapsto Y \\ H_{12} &\mapsto H \end{aligned}$$

Utilizzando una notazione che risulterà utile in seguito, tale sottoalgebra viene chiamata $\mathfrak{sl}_{L_1-L_2}$.

Per quanto detto in precedenza, considerando la decomposizione della rappresentazione $V = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$, il suo sottospazio

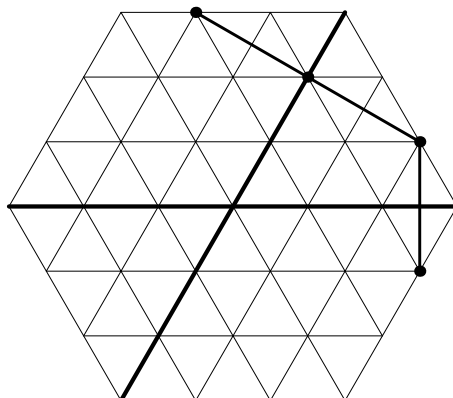
$$W = \bigoplus_k \mathfrak{g}_{\alpha+k(L_2-L_1)}$$

è invariante rispetto all'azione di $\mathfrak{sl}_{L_1-L_2}$ e ciò ci permette di osservare che gli autovalori di H_{12} su W sono simmetrici rispetto allo zero, quindi preservati dalla riflessione rispetto alla retta $\langle H_{12}, L \rangle = 0$ del piano \mathfrak{h}^* .

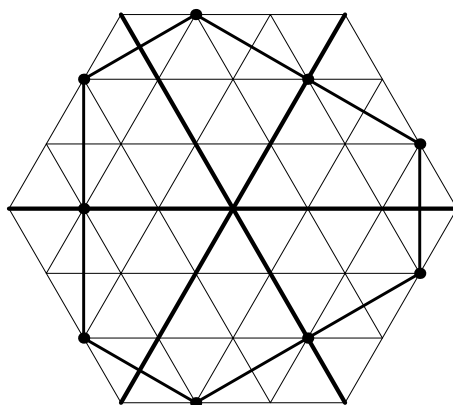
Questa costruzione si può ripetere anche per gli elementi E_{ij} , E_{ji} e $H_{ij} = [E_{ij}, E_{ji}]$, i quali generano una sottoalgebra $\mathfrak{sl}_{L_i-L_j} \subseteq \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ isomorfa ad $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ tramite un isomorfismo definito come sopra. Nel caso di $\mathfrak{sl}_{L_2-L_3}$ gli autovalori di H_{23} su W sono preservati dalla riflessione rispetto alla retta $\langle H_{23}, L \rangle = 0$ del piano \mathfrak{h}^* .

Si considera ora l'autospazio V_{β} , con $\beta = \alpha + (n-1)(L_2-L_1)$ in cui n è il più piccolo intero tale che $(E_{21})^n(v) = 0$ e v è un vettore di peso massimale α . Per $w \in V_{\beta}$ vale che $E_{21}(w) = 0$, quindi anche $E_{23}(w) = 0$ e $E_{13}(w) = 0$. Se il funzionale $l(a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3) = aa_1 + ba_2 + ca_3$ scelto in precedenza fosse

stato fissato con la proprietà $b > a > a$, il vettore di peso massimale sarebbe stato proprio w invece che v e gli autovalori della rappresentazione avrebbero presentato simmetrie rispetto alle rette $\langle H_{12}, L \rangle = 0$ e $\langle H_{13}, L \rangle = 0$ del piano \mathfrak{h}^* .



Si può continuare ancora questa costruzione per gli autovalori del tipo $\beta + k(L_3 - L_1)$ e così via fino a concludere il percorso del perimetro, come in figura:



Si denota con Ω_R la *griglia dei pesi* generata dai funzionali $L_i - L_j$, importante per mettere in evidenza le simmetrie degli autovalori.

Osservazione 7. Tutti gli autovalori di una rappresentazione irriducibile e finito-dimensionale di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ appartengono alla griglia $\Omega \subset \mathfrak{h}^*$ generata dai funzionali L_i e sono tra loro congruenti modulo Ω_R . In altre parole: i pesi della rappresentazione sono invarianti per il gruppo di Weyl \mathfrak{W} di \mathfrak{g} .

Si osserva inoltre che tale situazione è analoga a quella che si è presentata per $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$, in cui gli autovalori di H di una rappresentazione irriducibile finito dimensionale appartenevano ad una griglia $\Omega \cong \mathbb{Z}$ ed erano congruenti modulo $\Omega_R = 2\mathbb{Z}$, griglia generata dagli autovalori di H tramite la rappresentazione aggiunta.

Si nota che per $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ vale $\Omega/\Omega_R \cong \mathbb{Z}_2$, mentre per $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ vale $\Omega/\Omega_R \cong \mathbb{Z}_3$. Tale analogia si rivelerà essere una caratteristica generale di $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$.

Per concludere la descrizione dei punti della griglia, consideriamo ora anche i punti interni. Sia W un autospazio nella forma

$$W = \bigoplus_k \mathfrak{g}_{\beta+k(L_i-L_j)}$$

con $\beta = \alpha + k(L_i - L_j) \in \mathfrak{h}^*$. Allora W è ancora una rappresentazione non necessariamente irriducibile di $\mathfrak{sl}_{L_i-L_j}$. I valori di k tali che gli spazi $V_{\beta+k(L_i-L_j)} \neq 0$ formano una sequenza di numeri interi che permette di capire che ci sono anche autovalori contenuti all'interno dell'esagono nei punti di intersezione delle direzioni parallele al perimetro.

Proposizione 3.2.4. *Sia (ρ, V) una rappresentazione irriducibile e finito-dimensionale di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Allora, per un qualche autovalore $\alpha \in \Omega \subseteq \mathfrak{h}^*$, l'insieme degli autovalori di V è esattamente lo spazio dei funzionali lineari congruenti ad α modulo la griglia Ω_R ed appartenenti all'esagono (o al triangolo) i cui vertici sono immagini di α tramite il gruppo generato dalle riflessioni nelle rette $\langle H_{ij}, L \rangle = 0$.*

Avendo finora descritto le possibili configurazioni degli autovalori di una rappresentazione, si procede nell'analisi cercando di ottenere risultati specifici quanto quelli ottenuti per $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ enunciando alcuni teoremi di esistenza ed unicità delle rappresentazioni irriducibili.

Date due rappresentazioni $V = \bigoplus_i V_i$ e $W = \bigoplus_j W_j$ e dati due vettori $v \in V_\alpha$ e $w \in W_\beta$, in cui α e β sono i pesi massimali delle rappresentazioni, il prodotto tensoriale di tali rappresentazioni è ancora una rappresentazione. Se si considera il vettore $(v \otimes w) \in V \otimes W$, si osserva che il suo peso massimale

è pari a $\alpha + \beta$, infatti:

$$\begin{aligned} H(v \otimes w) &= H(v) \otimes w + v \otimes H(w) = \alpha v \otimes w + v \otimes \beta w \\ &= (\alpha + \beta)v \otimes w \end{aligned}$$

Segue subito che, considerando le potenze simmetriche $Sym^n V$ di una rappresentazione V come sopra, si ottiene che il vettore v^n della rappresentazione $Sym^n V$ ha peso massimale pari a $n\alpha$.

A questo punto risulta interessante chiedersi se esiste un teorema di unicità per le rappresentazioni irriducibili con peso massimale dato.

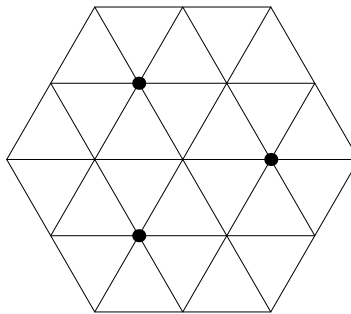
Teorema 3.2.5. *Per ogni coppia a, b di numeri interi con $a \geq 0, b \geq 0$ esiste un'unica rappresentazione irriducibile $\Gamma_{a,b}$ di \mathfrak{sl}_3 con peso massimale pari a $aL_1 - bL_3$.*

Esempio 3.4. Utilizzando la notazione appena introdotta, seguono alcuni esempi di rappresentazioni di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$:

- La *rappresentazione standard* su uno spazio vettoriale $\mathbb{V} \cong \mathbb{C}^3$ è $\Gamma_{1,0}$, i cui autovalori ed autospazi sono

<i>autovalore</i>	<i>autospazio</i>
λ_1	$\langle e_1 \rangle$
λ_2	$\langle e_2 \rangle$
λ_3	$\langle e_3 \rangle$

con $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di \mathbb{C}^3 .



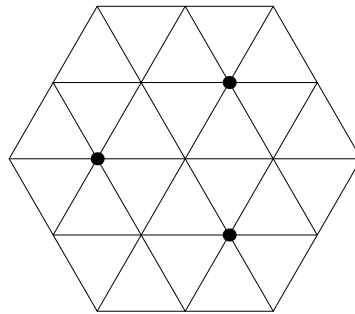
- La *rappresentazione duale* su $\mathbb{V} \cong \mathbb{C}^{3*}$ è $\Gamma_{0,1}$, i cui autovalori sono gli opposti di quelli della rappresentazione standard e l'autovalore massimo è: $-\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$.

<i>autovalore</i>	<i>autospazio</i>
$-\lambda_1$	$\langle e_1^* \rangle$
$-\lambda_2$	$\langle e_2^* \rangle$
$-\lambda_3$	$\langle e_3^* \rangle$

con $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ base duale canonica. Ciò si mostra facilmente passando dalla rappresentazione del gruppo alla rappresentazione dell'algebra, infatti:

$$\begin{aligned}
 (g\phi)(v) &= \phi(g^{-1}v) \\
 \frac{d}{dt} ((e^{tX})^{-1}v) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} ((I + tX)^{-1}v) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} ((I - tX - \frac{t^2 X^2}{2} - \dots)v) \Big|_{t=0} = -Xv
 \end{aligned}$$

con $g \in Sl_3\mathbb{C}$, $\phi \in \mathbb{C}^{3*}$, $v \in \mathbb{C}^3$, $X \in \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$.



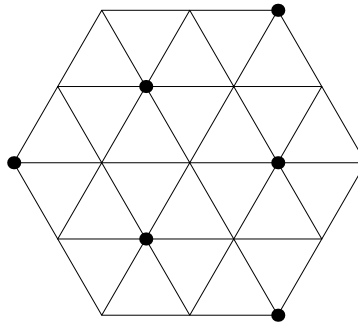
La rappresentazione duale è isomorfa all'algebra esterna $\wedge^2 V$.

<i>autovalore</i>	<i>autospazio</i>
$-\lambda_1$	$\langle e_2 e_3 - e_3 e_2 \rangle$
$-\lambda_2$	$\langle e_1 e_3 - e_1 e_2 \rangle$
$-\lambda_3$	$\langle e_1 e_2 - e_1 e_2 \rangle$

Si osserva inoltre che le rappresentazioni $\Gamma_{1,0}$ e $\Gamma_{0,1}$ possono essere portate una nell'altra dall'automorfismo di $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ dato da: $X \mapsto -^t X$.

- $\Gamma_{2,1}$ è la *rappresentazione aggiunta* che graficamente è già stata presentata nell'osservazione 5.
- $\Gamma_{0,2} \cong \text{Sym}^2\mathbb{V}^*$ ha i seguenti autovalori ed autospazi:

<i>autovalore</i>	<i>autospazio</i>
$-2\lambda_1$	$\langle e_1^* \otimes e_1^* \rangle$
$-\lambda_1 - \lambda_2$	$\langle e_1^* \otimes e_2^* \rangle$
$-\lambda_1 - \lambda_3$	$\langle e_1^* \otimes e_3^* \rangle$
$-2\lambda_2$	$\langle e_2^* \otimes e_2^* \rangle$
$-\lambda_2 - \lambda_3$	$\langle e_2^* \otimes e_3^* \rangle$
$-2\lambda_3$	$\langle e_3^* \otimes e_3^* \rangle$



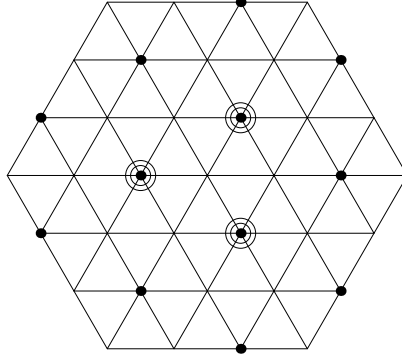
- In generale, vale: $\Gamma_{n,0} = \text{Sym}^n\mathbb{V}$ e $\Gamma_{0,n} = \text{Sym}^n\mathbb{V}^*$.

Ora, osservando che esiste un elemento $v \otimes w \in \text{Sym}^a\mathbb{V} \otimes \text{Sym}^b\mathbb{V}^*$ di peso massimale $a\lambda_1 - b\lambda_3$, si può dedurre che la rappresentazione irriducibile $\Gamma_{a,b}$ è contenuta nel prodotto tensoriale $\text{Sym}^a\mathbb{V} \otimes \text{Sym}^b\mathbb{V}^*$ e ci si propone di trovarla in due modi differenti.

Il primo metodo consiste nell'applicare l'enunciato della proposizione (3.2.2), costruendo esplicitamente la sottorappresentazione irriducibile attraverso successive applicazioni degli operatori E_{21} ed E_{32} .

Esempio 3.5. Si considera la rappresentazione $\mathbb{V} \otimes \text{Sym}^2\mathbb{V}^*$ di peso massimale $\lambda_1 - 2\lambda_3$ associato all'autospazio $\langle e_1 \otimes e_3^{2*} \rangle$.

<i>autovalore</i>	<i>autospazi</i>	<i>autovalore</i>	<i>autospazi</i>
$\lambda_1 - 2\lambda_2$	$\langle e_1 \otimes e_2^{2*} \rangle$	$-\lambda_1$	$\langle e_1 \otimes e_1^{2*} \rangle, \langle e_2 \otimes e_1^* e_2^* \rangle, \langle e_3 \otimes e_1^* e_3^* \rangle$
$\lambda_1 - 2\lambda_3$	$\langle e_1 \otimes e_3^{2*} \rangle$	$-\lambda_2$	$\langle e_2 \otimes e_2^{2*} \rangle, \langle e_1 \otimes e_1^* e_2^* \rangle, \langle e_3 \otimes e_2^* e_3^* \rangle$
$\lambda_2 - 2\lambda_3$	$\langle e_2 \otimes e_3^{2*} \rangle$	$-\lambda_3$	$\langle e_3 \otimes e_3^{2*} \rangle, \langle e_1 \otimes e_1^* e_3^* \rangle, \langle e_2 \otimes e_2^* e_3^* \rangle$
$\lambda_2 - 2\lambda_1$	$\langle e_2 \otimes e_1^{2*} \rangle$	$-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$	$\langle e_3 \otimes e_1^* e_2^* \rangle$
$\lambda_3 - 2\lambda_2$	$\langle e_3 \otimes e_2^{2*} \rangle$	$-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3$	$\langle e_2 \otimes e_1^* e_3^* \rangle$
$\lambda_3 - 2\lambda_1$	$\langle e_3 \otimes e_1^{2*} \rangle$	$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$	$\langle e_1 \otimes e_2^* e_3^* \rangle$



Si verifica facilmente che la rappresentazione irriducibile $\Gamma_{1,2}$ è generata da $v = e_1 \otimes e_3^{2*}$ sotto applicazioni successive di E_{21} ed E_{32} . Risulta interessante osservare che alcuni autovalori hanno molteplicità maggiore di 1, come ad esempio $(-\lambda_2)$:

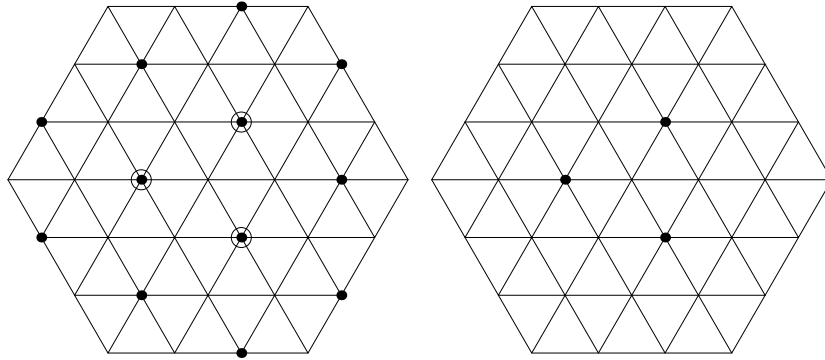
$$\begin{aligned}
E_{21} \circ E_{32} \circ E_{32}(e_1 \otimes e_3^{2*}) &= E_{21} \circ E_{32}(-e_1 \otimes 2(e_2^* e_3^*)) = \\
&= E_{21}(e_1 \otimes e_2^{2*}) = e_2 \otimes e_2^{2*} + e_1 \otimes 2(e_1^* e_2^*) \\
E_{32} \circ E_{32} \circ E_{21}(e_1 \otimes e_3^{2*}) &= E_{32} \circ E_{32}(e_2 \otimes e_3^{2*}) \\
&= E_{32}(e_3 \otimes e_3^{2*} - 2(e_2 \otimes e_2^* e_3^*)) = \\
&= -4e_3 \otimes e_2^* e_3^* + 2e_2 \otimes e_2^{2*}
\end{aligned}$$

Calcoli analoghi valgono per gli autovalori $(-\lambda_3)$ e $(-\lambda_1)$ e si ottiene:

$$\begin{aligned}
(-\lambda_3) : & \quad \langle E_{32} \circ E_{21}(v) \rangle, \langle E_{21} \circ E_{32}(v) \rangle \\
(-\lambda_2) : & \quad \langle E_{32} \circ E_{32} \circ E_{21}(v) \rangle, \langle E_{21} \circ E_{32} \circ E_{32}(v) \rangle \\
(-\lambda_1) : & \quad \langle E_{32} \circ E_{21} \circ E_{32} \circ E_{21}(v) \rangle, \langle E_{21} \circ E_{21} \circ E_{32} \circ E_{32}(v) \rangle
\end{aligned}$$

Si può concludere che tale rappresentazione è decomponibile in somma diretta di due rappresentazioni irriducibili:

$$\mathbb{V} \otimes \text{Sym}^2 \mathbb{V}^* \cong \Gamma_{1,2} \oplus \Gamma_{0,1}$$



Il secondo metodo utilizzato per costruire una rappresentazione irriducibile considera la contrazione

$$\begin{aligned} t_{a,b} : \text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b V^* &\rightarrow \text{Sym}^{a-1} V \otimes \text{Sym}^{b-1} V^* \\ (v_1 \cdot \dots \cdot v_a) \otimes (v_1^* \cdot \dots \cdot v_b^*) & \\ \mapsto \sum \langle v_i, v_j^* \rangle (v_1 \cdot \dots \cdot \hat{v}_j \cdot \dots \cdot v_a) (v_1 \cdot \dots \cdot \hat{v}_j^* \cdot \dots \cdot v_b^*) & \end{aligned}$$

e vale il seguente

Teorema 3.2.6. *Il nucleo della mappa $t_{a,b}$ è la rappresentazione irriducibile $\Gamma_{a,b}$, con peso massimale pari a $(aL_1 - bL_3)$.*

Si può quindi dedurre la decomposizione

$$\text{Sym}^a V \otimes \text{Sym}^b \wedge^2 V = \oplus \Gamma_{a-i,b-i}, \quad i = 0, \dots, b$$

3.3 Generalizzazione per n maggiore di 3

Si illustra ora come la precedente costruzione possa essere estesa a $sl_n \mathbb{C}$. Le rappresentazioni di $sl_n \mathbb{C}$, infatti, non presentano molte sorprese e possono essere costruite esplicitamente avvalendosi dei risultati teorici in parte

esposti nel secondo capitolo di questo elaborato (per una trattazione più approfondita si consiglia [2], *Lecture 15*, pp 211-237).

Il primo passo consiste nell'individuare una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$:

$$\mathfrak{h} = \{\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \dots + \lambda_n H_n : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0\}$$

in cui $H_1 = E_{ii}$ matrice diagonale che manda e_i in sè stesso ed e_j in zero, per $j \neq i$. Si osserva che gli elementi H_i non appartengono ad \mathfrak{h} .

Analizzando l'azione delle matrici diagonali sullo spazio delle matrici a traccia nulla si considerano gli endomorfismi di \mathbb{C} del tipo E_{ij} , associati alla matrice con tutte le entrate nulle ad eccezione dell'entrata ij , uguale ad uno. Vale

$$ad(\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \dots + \lambda_n H_n)(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j) \cdot E_{ij}$$

quindi E_{ij} è un *autovettore* per l'azione di \mathfrak{h} di *autovalore* $L_i - L_j \in \mathfrak{h}^*$. Le *radici semplici* sono nella forma $\alpha_i = L_i - L_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$ ed ogni radice si può scrivere come combinazione lineare intera di queste. Si fissa un funzionale lineare

$$\sum \lambda_i L_i \in \mathfrak{h}^*$$

e si osserva che per avere elementi integrali è necessario e sufficiente che gli elementi a_i siano tra loro congruenti modulo \mathbb{Z} .

Dato che in \mathfrak{h}^* la somma dei funzionali L_i è nulla, si ha che la griglia dei pesi è data da

$$\Omega = \mathbb{Z}\{L_1, \dots, L_n\} / (\sum L_i = 0)$$

Quindi la griglia dei pesi di $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ è generata dai vertici di un $(n-1)$ simpleso Δ centrato nell'origine e le radici sono differenze di coppie di tali vertici.

Si costruisce il gruppo di Weyl \mathfrak{W} , il quale è dato dalle riflessioni nell'iperpiano perpendicolare alla radice $L_i - L_j$ che scambia L_i ed L_j e che lasci solo solo l'elemento L_k . Il gruppo di Weyl, quindi, agisce come il gruppo simmetrico sui generatori L_i di \mathfrak{h}^* .

A questo punto si sceglie una direzione privilegiata, data dal funzionale

$$l : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$l \left(\sum_i a_i L_i \right) = \sum_i c_i a_i$$

con $a_i \geq 0$.

Prendendo in considerazione le rappresentazioni lineari, esistono teoremi di esistenza ed unicit  anche nel caso generale con n maggiore di 3 e, senza entrare ulteriormente nel dettaglio, si conclude che per ogni arbitraria $(n-1)$ -upla di numeri naturali $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ si denota con $\Gamma_{a_1, \dots, a_{n-1}}$ la rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{sl}_n \mathbb{C}$ con peso massimale

$$a_1 L_1 + a_2 (L_1 + L_2) + \dots + a_{n-1} (L_1 + \dots + L_{n-1}) =$$

$$= (a_1 + \dots + a_{n-1}) L_1 + \dots + a_{n-1} L_{n-1}$$

In conclusione, risulta

$$\Gamma_{a_1, \dots, a_{n-1}} = \Gamma_{a_1 L_1 + a_2 (L_1 + L_2) + \dots + a_{n-1} (L_1 + \dots + L_{n-1})}$$

Bibliografia

- [1] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras*, capitoli 4-6, XI, Springer-Verlag, Berlin 2002
- [2] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*, Graduate texts in Mathematics, vol. 222, Springer-Verlag New York inc., 2003
- [3] R. Godement, *Introduction a la théorie des groupes de Lie*, Publications mathématiques de l'Université Paris VII, 1982.
- [4] S. Lang, *Algebra*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag New York inc.
- [5] J-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, W.A. Benjamin, New york, 1965