Alma Mater Studiorum · Universitá di Bologna

FACOLTÁ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Il teorema di Seifert-Van Kampen e le sue applicazioni

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Federico Wolenski

Sessione III
Anno Accademico 2008-2009

A Marina, per aver dato una luce nuova ad ogni cosa.

Introduzione

Il teorema di Seifert-Van Kampen è uno strumento utilissimo per il calcolo del gruppo fondamentale di spazi topologici: si basa sull'idea di costruire il primo gruppo di omotopia di uno spazio come prodotto amalgamato del primo gruppo di omotopia di aperti che lo compongono.
Per dare una trattazione sufficientemente completa di tale risultato abbiamo introdotto vari argomenti della topologia, come il concetto di omotopia, di rivestimento e ovviamente di gruppo fondamentale. Abbiamo poi fornito degli essenziali strumenti algebrici, come il prodotto libero e il prodotto amalgamato di gruppi.
La seconda parte della tesi è dedicata ai vari enunciati del teorema e alle rispettive dimostrazioni.
Nell'ultima parte del nostro lavoro abbiamo presentato alcuni semplici ma significativi esempi di applicazione del teorema.

Indice

Capitolo 1

Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico

1.1 Omotopia di archi

Introdurremo ora il concetto di *Omotopia*, che può essere visualizzato intuitivamente tramite la nozione di "equivalenza di forme", con un senso più ampio di quello di omeomorfismo.
Due spazi sono "omotopi" se possono essere deformati in maniera continua uno nell'altro: non si richiede più la presenza di una biiezione fra i due spazi.
In $\mathbb{R}^2$ ad esempio due sottoinsiemi connessi sono equivalenti in senso omotopico fondamentalmente se "hanno lo stesso numero di buchi".
In questo modo, analizzando le lettere della parola OMOTOPIA come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, possiamo considerare equivalenti le lettere O,P,A, in quanto hanno un unico buco, e le lettere M,T,I, in quanto non ne hanno nessuno.

Impegnamoci ora a dare una formalizzazione matematica di questo concetto.

Definizione 1.1.1. Dati X, Y spazi topologici e due funzioni continue $f_0, f_1 : X \to Y$, diciamo che f_0 *è omotopa a* f_1 e scriveremo $f_0 \approx f_1$ se esiste un'omotopia, ovvero una funzione continua $F : X \times I :\to Y$ tale che

$$F(x,0) = f_0(x) \qquad e \qquad F(x,1) = f_1(x) \;\; \forall x \in I. \tag{1.1}$$

Similmente, se $A \subset X$ è un sottoinsieme per cui $f_{0|A} = f_{1|A}$, diciamo che f_0 *è omotopa a* f_1 *relativamente ad* A *sottoinsieme di* X se l'omotopia F ha la proprietà aggiuntiva

$$F(a,t) = f_0(a) = f_1(a) \quad \forall a \in A, \;\; \forall t \in I \tag{1.2}$$

In tal caso scriveremo $f_0 \approx_A f_1$.

Proposizione 1.1.2. *La relazione* $\approx_A$ *è di equivalenza.*

Dimostrazione. $\approx_A$ è banalmente riflessiva.
Se $f_0 \approx_A f_1$, ovvero esiste un'omotopia $F : X \times I :\to Y$ tale che $F(x,0) =$

$f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$, allora $F(x, 1-t)$ è certamente un'omotopia che rende simmetrica la relazione.
Infine se $f_0 \approx_A f_1$ con omotopia F e $f_1 \approx_A f_2$ con omotopia G, allora risulta $f_0 \approx_A f_2$ con omotopia

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, (2t-1)) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

H è sicuramente continua poichè $F(x,1) = f_1(x) = H(x,0)$ e dunque $\approx_A$ è transitiva.

□

Definizione 1.1.3. Due spazi topologici X,Y sono *omotopicamente equivalenti* se esistono $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che

$$g\,f \approx id_X \qquad e \qquad f\,g \approx id_Y \tag{1.3}$$

f e g sono dette *equivalenze omotopiche.*

Due spazi omeomorfi sono anche ovviamente omotopicamente equivalenti, ma non vale il viceversa. Uno spazio omotopicamente equivalente ad un punto è detto *contraibile.*

Proposizione 1.1.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio convesso.*
Allora X è contraibile.

Dimostrazione. preso $x_0 \in X$, consideriamo le funzioni $c_{x_0} : X \to \{x_0\}, x \mapsto x_0$ e l'immersione $i : \{x_0\} \to X$.
Risulta che $c_{x_0}\,i = id_{\{x_0\}}$ e che $i\,c_{x_0} \approx id_X$ con omotopia

$$F(x,t) = xt + x_0(1-t)$$

poichè X è convesso

□

Dunque $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente ad un suo punto qualunque, ma non è certo omeomorfo ad esso (il punto è compatto mentre $\mathbb{R}^n$ non lo è).

Proposizione 1.1.5. *Sia X uno spazio topologico contraibile a x_0 e $f : Z \to X$ una funzione a valori in X. Allora f è omotopa alla funzione costante $\varepsilon_{x_0} : Z \to X$, $\varepsilon_{x_0}(z) = x_0\ \forall z \in Z$.*

Dimostrazione. Sia F l'omotopia fra $i\,c_{x_0}$ e id_X, allora Ff è l'omotopia tra f e ε_{x_0}. □

Proposizione 1.1.6. *L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. la relazione è chiaramente riflessiva e simmetrica, occupiamoci dunque di dimostrare la transitività.
Supponiamo X omotopicamente equivalente a Y con equivalenze omotopiche $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ e Y omotopicamente equivalente a Z con equivalenze omotopiche $f' : Y \to Z$ e $g' : Z \to Y$. Siano poi date le omotopie $F : gf \approx id_X$,

$G : fg \approx id_Y,\ \ F' : g'f' \approx id_Y,\ \ G' : f'g' \approx id_Z.$
Otteniamo un'omotopia $H : gg'f'f \approx id_X$

$$H(x,t) = \begin{cases} gF'(f(x), 2t) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x, 2t-1) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

risulta $H(x,0) = gg'f'f,\ \ H(x,1) = F(x,1) = id_X$
H(x,t) è continua perchè $H(x, \frac{1}{2}) = gF'(f(x),1) = F(x,0) = gf$

Similmente otteniamo un'omotopia $H' : f'fgg' \approx id_Z$

$$H'(x,t) = \begin{cases} f'G(g'(x), 2t) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G'(x, 2t-1) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

□

Definizione 1.1.7. Sia X spazio topologico e $A \subset X$.
A è detto *retratto di* X se esiste una funzione continua, detta retrazione, $r : X \to A$ tale che $ri = id_A$, dove $i : A \to X$ è l'inclusione di A in X.

Definizione 1.1.8. Sia X spazio topologico e $A \subset X$.
A è detto *retratto forte di deformazione di* X se esiste una retrazione $r : X \to A$ tale che $ir \approx_A id_X$.
Tale condizione equivale a richiedere che esista un'omotopia $F : X \times I \to X$ con $F(x,0) \in A$ e $F(x,1) = x\ \forall x \in X$ e $F(a,t) = a\ \forall a \in A$.

Per chiarire quest'ultimo concetto si noti che la circonferenza è un retratto forte di deformazione del cilindro e del nastro di Möbius.

Proposizione 1.1.9. *Sia X spazio topologico e $A \subset X$ retratto forte di deformazione di X.*
Allora A e X sono omotopicamente equivalenti.

Dimostrazione. detta $r : X \to A$ la retrazione e $i : A \to X$ l'immersione, risulta $ir \approx id_X$ e $ri = id_A$ □

Utilizzando quest'ultimo asserto e la proprietà transitiva dell'equivalenza omotopica possiamo affermare che

Osservazione 1.1.10. Il cilindro è omotopicamente equivalente al nastro di Möbius.

questo risultato segue immediatamente dalla proposizione 1.1.9 e dalla proprietà transitiva dell'equivalenza omotopica.

Introduciamo ora il concetto di *arco* e di *prodotto di archi.*

Definizione 1.1.11. Dato X spazio topologico chiamiamo *arco in* X qualsiasi funzione continua $f : [0,1] \to X$.

Per semplificare la notazione d'ora in poi indicheremo con I l'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$ di $\mathbb{R}$.

Definizione 1.1.12. Dati X spazio topologico e f, g due archi in X tali che $f(1) = g(0)$, definiamo il prodotto $f * g$ come

$$f * g = \begin{cases} f(2x) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x-1) & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Si noti come il concetto di prodotto coincida con quello di "concatenazione": $f*g$ è l'arco ottenuto percorrendo prima tutto f e poi tutto g "a velocità doppia".

D'ora in poi consideremo due archi equivalenti se appartenenti alla stessa classe di equivalenza della relazione $\approx_{\{0,1\}}$, ovvero se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$, in altri termini se esiste una deformazione di un arco nell'altro che mantiene il punto di partenza e quello di arrivo.
Per semplificare la notazione indicheremo $\approx_{\{0,1\}}$ con $\sim$.
Introdurremo ora una serie di proposizioni che ci saranno utili per definire il Gruppo Fondamentale. Non ci dilungheremo nelle dimostrazioni, ma daremo solo le omotopie che giustificano gli asserti.

Proposizione 1.1.13. *Il prodotto di archi è una* congruenza *rispetto a $\sim$. Ovvero, dati f, f', g, g' archi in X spazio topologico, tali che $f(1) = g(0)$ e $f'(1) = g'(0)$,*

$$se\ \ f \sim f'\ \ e\ \ g \sim g',\ allora\ \ f * g \sim f' * g'. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. detta F l'omotopia fra f e g e G l'omotopia fra f' e g', l'omotopia fra $f * g$ e $f' * g'$ è data da

$$H(x,t) = \begin{cases} F(2x,t) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ G(2x-1,t) & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

□

Proposizione 1.1.14. *Dati f, g, h tre archi in X spazio topologico, tali che $f(1) = g(0)$, $g(1) = h(0)$, risulta $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.*

Dimostrazione. notiamo che

$$(f * g) * h = \begin{cases} f(4x) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ g(4x-1) & se\ \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ h(2x-1) & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f * (g * h) = \begin{cases} f(2x) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(4x-2) & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ h(4x-3) & se\ \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

L'omotopia cercata risulta essere

$$F(x,t) = \begin{cases} f(\frac{4x}{1+t}) & se\ 0 \leq x \leq \frac{t+1}{4} \\ g(4x-t-1) & se\ \frac{t+1}{4} \leq x \leq \frac{t+2}{4} \\ h(\frac{4x-t-2}{2-t}) & se\ \frac{t+2}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

□

Proposizione 1.1.15. *Dato f arco in X con punto iniziale x_0 e punto finale x_1, allora $\varepsilon_x * f \sim f$ con ε_{x_0} arco costante in x_0 e $f * \varepsilon_{x_1} \sim f$.*

Dimostrazione. diamo solo l'omotopia fra $\varepsilon_{x_0} * f$ e f: la seconda si ricava in modo del tutto simile.

$$F(x,t) = \begin{cases} x_0 & se\ 0 \leq x \leq \frac{1-t}{2} \\ f(\frac{2x-1+t}{1+t}) & se\ \frac{1-t}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

□

Proposizione 1.1.16. *Dato f arco in X con punto iniziale x_0 e punto finale x_1, allora $f * \overline{f} \sim \varepsilon_{x_0}$ e $\overline{f} * f \sim \varepsilon_{x_1}$, dove con $\overline{f}$ intendiamo l'arco f percorso in senso opposto, ovvero $f(1-x)$.*

Dimostrazione. dimostriamo solamente che $f * \overline{f} \sim \varepsilon_{x_0}$: risulta:

$$(f * \overline{f}) = \begin{cases} f(2x) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2-2x) & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

L'omotopia cercata è

$$F(x,t) = \begin{cases} f(2x(1-t)) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f((2-2x)(1-t)) & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

□

1.2 Il funtore π_1

Definizione 1.2.1. Sia X spazio topologico e $x_0 \in X$.
Sia poi $\Omega(X, x_0) = \{$*archi in X chiusi in x_0, ovvero tali che $f(0) = f(1) = x_0$*$\}$
Definisco *gruppo fondamentale di X in x_0 o primo gruppo di Omotopia il gruppo:*

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/\sim \tag{1.6}$$

L'operazione di $\pi_1(X, x_0)$ è ovviamente il prodotto di archi. Risulta inoltre dalle proposizioni della sezione precedente che in $\pi_1(X, x_0)$ l'operazione è associativa, l'elemento neutro è $[\varepsilon_{x_0}]$ e l'inverso di $[f]$ è $[\overline{f}]$.

L'importanza del gruppo fondamentale verrà chiarita dal prossimo teorema:

Lemma 1.2.2. *Siano X, Y spazi topologici, $\varphi : X \to Y$ una funzione continua, allora $\forall x_0 \in X$*

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0)), \qquad \varphi_*([f]) = [\varphi f] \tag{1.7}$$

è un omomorfismo di gruppi fondamentali, detto omomorfismo indotto da φ. .

Dimostrazione. risulta $\varphi_*(\varepsilon_{x_0}) = [\varphi \varepsilon_{x_0}] = [\varepsilon_{\varphi(x_0)}]$
inoltre $\varphi_*([f] * [g]) = \varphi_*([f * g]) = [\varphi(f * g)] = [\varphi(f)] * [\varphi(g)] = \varphi_*([f]) * \varphi_*([g])$. □

Lemma 1.2.3. *Sia $id_X : X \to X$ l'applicazione identica, allora $id_{X*} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è l'omomorfismo identico.*

Dimostrazione. $id_{X*}([f]) = [id_X f] = [f]$ dunque è l'omomorfismo identico. □

Lemma 1.2.4. *Siano $\varphi : X \to Y, \psi : Y \to Z$ funzioni continue tra spazi topologici e $x_0 \in X$, allora, dette $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ e $\psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, \psi(x_0))$*

$$(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_* \tag{1.8}$$

Dimostrazione. risulta $(\psi\varphi)_*([f]) = [\psi\varphi f] = \psi_*([\varphi f]) = \psi_*(\varphi_*([f])) = \psi_*\varphi_*[f]$. □

Teorema 1.2.5. *Se $\varphi : X \to Y$ è un omeomorfismo di spazi topologici, $\varphi' : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ è un isomorfismo di gruppi fondamentali.*

Dimostrazione. poichè $\varphi^{-1}\varphi = id_X$ e $\varphi\varphi^{-1} = id_Y$ dal lemma risulta

$$(\varphi^{-1})_*\varphi_* = id_{\pi_1(X,x_0)} \text{ e } \varphi_*(\varphi^{-1})_* = id_{\pi_1(Y,\varphi(x_0))}.$$

Dunque $(\varphi^{-1})_* = \varphi_*^{-1}$ e φ_* è un isomorfismo. □

Da quest'ultimo teorema si deduce la grande importanza del Gruppo Fondamentale: esso è uno strumento per trattare problemi topologici per via algebrica e rappresenta dunque l'idea che sta alla base della Topologia Algebrica.
Il risultato notevole è che se due spazi hanno gruppi fondamentali non isomorfi non possono essere omeomorfi, ovvero ad oggetti topologici equivalenti posso associare oggetti algebrici equivalenti.
Non vale però il passaggio inverso: vedremo esempi di spazi non omeomorfi con gruppi fondamentali isomorfi.

Per le proprietà finora enunciare risulta che π_1 è un funtore, ovvero uno strumento che permette di trasportare oggetti e morfismi di una categoria in oggetti e morfismi di un'altra categoria.
Vista l'importanza della teoria delle categorie in topologia algebrica diamo una breve formalizzazione di tale concetto:

Definizione 1.2.6. Una *categoria* A consiste di:

i un insieme $Ob(A)$, i cui elementi sono detti *oggetti*

ii un insieme $Mor_A(X, Y)$ per ogni coppia di oggetti (X, Y). Gli elementi di tale insieme sono detti *morfismi* tra X e Y nella categoria A

iii una funzione, detta *legge di composizione* $\phi_{X,Y,Z} : Mor_A(X, Y) \times Mor_A(Y, Z) \to Mor_A(X, Z)$ per ogni terna di oggetti X, Y, Z, tale che $\phi_{X,Y,Z}(f, g) = gf$

iv per ogni oggetto X un elemento speciale $id_X \in Mor_A(X, X)$ detto *identità*

Si suppone inoltre che vengano rispettati i seguenti assiomi:

1. la composizione è associativa
2. l'identità agisce come elemento neutro per la composizione

Definizione 1.2.7. Siano A,B due categorie, un $funtore$ da A in B si indica con $F : A \to B$ e consiste di due funzioni (entrambe indicate con F):

1. sugli oggetti, che ad ogni elemento X di $Ob(A)$ associa uno ed un solo oggetto $F(X)$ di $Ob(B)$

2. sui morfismi, definita come $F : Mor_A(X,Y) \rightarrow Mor_B(F(X),F(Y))$ per ogni coppia di oggetti X,Y di $Ob(A)$

É ora chiaro come π_1 sia un funtore dalla categoria degli spazi topologici puntanti alla categoria dei gruppi, poichè

1. ad ogni spazio topologico X, fissato $x_0 \in X$, associa il gruppo fondamentale $\pi_1(X,x_0)$

2. ad ogni funzione φ tra due spazi topologici X,Y, fissato $x_0 \in X$, associa $\varphi_* : \pi_1(X,x_0) :\rightarrow \pi_1(Y,\varphi(x_0))$

1.3 Proprietà di π_1

Vediamo ora alcuni teoremi importanti sul Gruppo Fondamentale di spazi con proprietà particolari.
Consideriamo prima di tutto il caso di uno spazio connesso per archi.

Lemma 1.3.1. *Sia X spazio topologico e $x,y \in X$. Se esiste un arco f da x a y, allora $\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y)$.*

Dimostrazione. l'isomorfismo è dato da $u_f : [g] \mapsto [\overline{f} * g * f]$
u_f è banalmente un omomorfismo ed inoltre ha inversa $u_{\overline{f}}$, dunque è bigettivo. □

Teorema 1.3.2. *Dato uno spazio topologico X connesso per archi risulta*

$$\pi_1(X,x) \simeq \pi_1(X,y) \;\; \forall\, x,y \in X. \tag{1.9}$$

Dimostrazione. segue dal lemma. □

Vediamo ora il caso di uno spazio ottenuto dal prodotto cartesiano di altri due spazi.
D'ora in poi, dato uno spazio topologico connesso per archi, eviteremo di indicare il punto di cui consideriamo il gruppo fondamentale poichè per il teorema 1.3.2 è ininfluente per le considerazioni contenute in questa sezione.

Teorema 1.3.3. *Dati X,Y spazi topologici connessi per archi, risulta*

$$\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y). \tag{1.10}$$

Dimostrazione. date le proiezioni $p_X : X \times Y \rightarrow X$ e $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$, definiamo l'isomorfismo
$\varphi_* : \pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(Y), \;\; [f] \mapsto ([p_X(f)],[p_Y(f)])$. □

Diamo ora un asserto che ci permetterà di dimostrare che il funtore π_1 non agisce anche in maniera inversa, ovvero che in genere non associa ad oggetti algebrici equivalenti oggetti topologici equivalenti.

Lemma 1.3.4. *Siano X,Y spazi topologici, $\varphi,\psi : X \rightarrow Y$ due funzioni continue ed omotope con omotopia F.*
Poniamo $f \equiv F(x_0,t) : I \rightarrow Y$ l'arco da $\varphi(x_0)$ a $\psi(x_0)$. Risulta allora

$$\psi_* = u_f \varphi_*. \tag{1.11}$$

Dimostrazione. si tratta di dimostrare che $\forall\ [g] \in \pi_1(X, x_0)$, $[\psi g] = [\overline{f} * \varphi g * f]$, ovvero $\psi g \sim \overline{f} * \varphi g * f$. L'omotopia è data da:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x_0, 1 - 4x(1-t)) & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ F(g(4x-1), t) & se\ \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 1 + 2(x-1)(1-t)) & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

□

Teorema 1.3.5. *Dati X, Y spazi topologici omotopicamente equivalenti, detta $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica, allora $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. essendo X, Y omotopicamente equivalenti, sappiamo dalla definizione che $gf \sim id_X$, dunque,utilizzando il risultato del lemma precedente, possiamo ricavare $g_* f_* = u_f id_{X*}$, dove sia u_f che id_{X*} sono degli isomorfismi. Risulta allora che f_* è iniettiva e g_* è suriettiva.
Da $fg \sim id_Y$ si ricava in modo del tutto simile che g_* è iniettiva e f_* è suriettiva, dunque f_* è l'isomorfismo cercato. □

Dall'osservazione precedente siamo dunque in grado di affermare che $\pi_1(M) \simeq \pi_1(C) \simeq \pi_1(S^1)$ dove M è il nastro di Möbius, C è il cilindro e S^1 è la circonferenza.

Corollario 1.3.6. *Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico contraibile è il gruppo banale.*

Dimostrazione. segue immediatamente dalla proposizione 1.1.5. □

Siamo ora in grado di presentare un esempio illuminante: abbiamo visto che $\mathbb{R}^n$ è contraibile, ovvero omotopicamente equivalente ad un suo qualunque punto x_0. Dal teorema risulta allora che $\pi_1(\mathbb{R}^n) \simeq \pi_1(x_0) = \{1\}$.
Tuttavia $\mathbb{R}^n$ non è certo omeomorfo al punto.

Definizione 1.3.7. Uno spazio topologico X si dice *semplicemente connesso* se è connesso per archi e se $\pi(X)$ è il gruppo banale, ovvero se ogni arco è omotopo all'arco costante.

Si noti che ogni spazio contraibile è semplicemente connesso, ma non vale l'inverso: un esempio illuminante è dato da S^n, $n > 1$.

1.4 Rivestimenti

Definizione 1.4.1. Dati $\tilde{X}, X$ spazi topologici e $p : \tilde{X} \to X$ continua, la coppia $(\tilde{X}, p)$ si dice *rivestimento banale di X* se $\tilde{X}$ può essere scritto come unione disgiunta di aperti $\tilde{X}_i$ e p ristretta a $\tilde{X}_i$ è un omeomeomorfismo su X.

Definizione 1.4.2. Dati $\tilde{X}, X$ spazi topologici e $p : \tilde{X} \to X$ continua, la coppia $(\tilde{X}, p)$ si dice *rivestimento di X* se

i p è suriettiva

ii $\forall x \in X \exists V$ intorno aperto di x tale che $p^{-1}(V) = \cup_{i\in I} U_i$ con $\{U_i\}_{i\in I}$ famiglia di aperti di $\tilde{U}$ tali che

- $U_i \cap U_j = \varnothing$ se $i \neq j$
- p ristretta a U_i è un omeomorfismo da U_i in V $\forall i \in I$

La condizione (ii) equivale a dire che ogni $x \in X$ è *uniformemente rivestito.*

Definizione 1.4.3. Diremo che un rivestimento $(\tilde{X}, p)$ è connesso se lo spazio $\tilde{X}$ è connesso.

Proposizione 1.4.4. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X, allora p è aperta.*

Dimostrazione. sia $\tilde{U}$ un aperto di $\tilde{X}$ e $p(\tilde{U}) \subset X$. Consideriamo $x \in p(\tilde{U})$ e sia $\tilde{x} \in \tilde{U}$ tale che $x = p(\tilde{x})$.
Poichè x è uniformemente rivestito, $\exists\, V$ intorno aperto di x e $\exists\, U_i$ aperto di $\tilde{X}$ tale che $\tilde{x} \in U_i$ e $p|_{U_i} : U_i \to V$ è un omeomorfismo.
Notiamo che $U_i \cap \tilde{U}$ è aperto in $\tilde{X}$, $p(U_i \cap \tilde{U})$ è aperto in V e dunque in X. Poichè questo è vero per un generico $x \in p(\tilde{U})$ allora $p(\tilde{U})$ è unione di aperti e quindi è aperto.

□

Proposizione 1.4.5. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X, allora X ha la topologia quoziente relativa a p.*

Dimostrazione. basti notare che p è suriettiva, continua e aperta. □

Definizione 1.4.6. Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X e $f : Y \to X$ continua. Definiamo *sollevamento di f* una funzione $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ continua e tale che $p\tilde{f} = f$.

Lemma 1.4.7. *Numero di Lebesgue*

Sia X uno spazio topologico compatto e metrizzabile con metrica d.
Per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ esiste un numero $\delta > 0$, detto numero di Lebesgue del ricoprimento*, tale che ogni sottoinsieme di X con diametro minore di δ è interamente contenuto in un U_i.*

Dimostrazione. Essendo X compatto, supponiamo che I sia un insieme finito.

$$\text{Poniamo poi } \forall i \in I, f_i : X \to \mathbb{R},\ \ f_i(x) = inf_{y\in X-U_i}(d(x,y)),$$
$$\text{sia poi } f(x) = max_{i\in I}(f_i)$$

Poichè le f_i sono funzioni continue, anche f è una funzione continua, ed inoltre $f(x) > 0 \ \ \forall x \in X$: in caso contrario si avrebbe $f_i(x) = 0 \ \ \forall i \in I$ e dunque $x \in X - U_i$ $\forall i \in I$ che è assurdo perchè $\{U_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento di X.
Essendo f una funzione continua su un compatto, ammette minimo positivo, che chiamiamo δ.
Verifichiamo che il numero δ verifica la proprietà dell'asserto: sia S un sottoinsieme di X con diametro minore di δ, allora $\forall x \in S$ risulta $f(x) > \delta$ e dunque $f_k > \delta$ per qualche $k \in I$: questo significa $x \in U_k$, ma ogni altro $y \in S$ ha distanza minore o uguale a δ da x, e dunque $y \in U_k$ e $S \subset U_k$.

□

Lemma 1.4.8. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X, Y uno spazio topologico connesso, $f : Y \to X$ continua e $\tilde{f}, \tilde{f}'$ due sollevamenti di f.*
Se esiste $y_0 \in Y$ tale che $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$ allora $\tilde{f} = \tilde{f}'$.

Dimostrazione. sia $\tilde{Y} = \left\{ y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y) \right\} \neq \varnothing$, poichè $y_0 \in \tilde{Y}$.
Y è connesso, allora se dimostriamo che $\tilde{Y}$ è aperto e chiuso, risulta $Y = \tilde{Y}$ e dunque l'asserto è provato.
Dimostriamo che $\tilde{Y}$ è aperto mostrando che per un generico $y \in \tilde{Y}$ esiste un intorno aperto di y interamente contenuto in $\tilde{Y}$. Poichè $f(y) \in X$ e $f(y)$ è uniformemente rivestito, esistono V intorno aperto di $f(y)$ e U_i aperto in $\tilde{X}$ tali che $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y) \in U_i$ e $p|_{U_i} : U_i \to V$ è un omeomorfismo. Risulta $y \in \tilde{f}^{-1}(U_i)$ e $\forall\, y' \in \tilde{f}^{-1}(U_i)$ aperto in $\tilde{X}$, $y' \in \tilde{Y}$ poichè $p|_{U_i}$ è iniettiva.
Dimostriamo allo stesso modo che il complementare di $\tilde{Y}$ è aperto: sia $y \in C(\tilde{Y})$, allora, detta $\{U_i\}$ la famiglia di aperti di $\tilde{X}$ ciascuno dei quali omeomorfo tramite p a V intorno aperto di $f(y)$, risulta necessariamente $\tilde{f}(y) \in U_i$ e $\tilde{f}'(y) \in U_j$ con $i \neq j$. $\tilde{f}^{-1}(U_i) \cap \tilde{f}'^{-1}(U_j)$ è un intorno aperto di y interamente contenuto in $C(\tilde{Y})$. □

Teorema 1.4.9. *Teorema di Sollevamento di archi*
Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X e $f : I^n \to X$, dove $I^n = I \times I \times \cdots \times I$ n volte.
Sia $\tilde{x} \in p^{-1}(f(\boldsymbol{0}))$.
Esiste ed è unica una funzione $\tilde{f} : I^n \to \tilde{X}$ tale che $\tilde{f}(\boldsymbol{0}) = \tilde{x}$ e $\tilde{f}$ è un sollevamento di f.

Dimostrazione. dimostriamo il teorema solo nel caso $n = 1$. L'unicità segue dal secondo lemma: I è connesso e due sollevamenti di f devono assumere lo stesso valore $\tilde{x}$ in $\mathbf{0}$.
Rimane da dimostrare solo l'esistenza del sollevamento $\tilde{f}$: consideriamo un ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di X tale che $\forall\, i \in I$, $(p^{-1}(U_i), p\,|_{p^{-1}(U_i)})$ sia un rivestimento banale di U_i.
Consideriamo poi il ricoprimento $\left\{f^{-1}(U_i)\right\}_{i \in I}$ di I, e sia δ il suo numero di Lebesgue: possiamo costruire una successione $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_{n-1} < b_n = 1$ tale che $(b_i - b_{i-1}) < \delta$ e dunque $f([b_{i-1}, b_i]) = f(I_i) \subset U_{k_i}$ per un certo $k_i \in I$.
Procediamo per induzione: supponiamo di aver definito $\tilde{f}$ su $[0, b_i]$: consideriamo il punto $\tilde{f}(b_i)$ contenuto nell'aperto $p^{-1}(U_{k_{i+1}})$, che si proietta omeomorficamente su $U_{k_{i+1}}$. Usando l'inverso di questo omeomorfismo possiamo definire $\tilde{f}$ sull'intervallo $[b_i, b_{i+1}]$ con punto iniziale $\tilde{f}(b_i)$.

□

Corollario 1.4.10. *(Teorema di monodromia)*
Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Siano f, f' due archi chiusi su $x_0 \in X$ tali che $f \sim f'$ con omotopia F. Fissato $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ e detti $\tilde{f}$ un sollevamento di f e $\tilde{f}'$ un sollevamento di f' con $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = \tilde{x}$, risulta $\tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1)$.

Dimostrazione. per il teorema esiste ed è unica $\tilde{F} : I \times I \to \tilde{X}$ sollevamento di F che risulta essere un'omotopia fra $\tilde{f}$ e $\tilde{f}'$, infatti $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}$ e $\tilde{F}(x, 1) = \tilde{f}'$.
Inoltre $\tilde{F}(1, t) \in p^{-1}(x_0)$. Essendo x_0 uniformemente rivestito, ogni elemento di $p^{-1}(x_0)$ appartiene ad un diverso aperto U_i disgiunto dagli altri; poichè I è connesso e $\tilde{F}(1, t)$ continua, $\tilde{F}(1, I)$ deve essere connesso e dunque $\tilde{F}(1, I)$ è costante.

□

Diamo ora una generalizzazione del risultato del teorema precedente analizzando il sollevamento di funzioni continue $f : Y \to X$ dove X e Y sono generici spazi connessi per archi.

Teorema 1.4.11. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X e $f : Y \to X$ funzione continua con X e Y connessi per archi.*
Siano poi $y_0 \in Y$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tali che $f(y_0) = p(\tilde{x}_0)$.
Esiste $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ tale che $p\tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ se e solo se

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \tag{1.12}$$

Corollario 1.4.12. *Nelle ipotesi precedenti, se Y è semplicemente connesso, il sollevamento $\tilde{f}$ esiste sempre ed è unico.*

1.5 Azioni, Rivestimenti e Gruppo Fondamentale

Introduciamo ora un concetto che ci permetterà di approfondire le relazioni tra i rivestimenti ed il gruppo fondamentale

Definizione 1.5.1. Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e X un insieme, si dice che G *agisce a destra su* X se esiste un'*azione* $\circ : X \times G :\to X$ tale che:

i $x \circ 1_G = x \qquad \forall x \in X$

ii $(x \circ g) \circ h = x \circ (g \cdot h) \qquad \forall g, h \in G, \ x \in X$

In modo del tutto simile possiamo definire l'*azione a sinistra* di un gruppo su uno spazio topologico: le definizioni che seguiranno varranno ugualmente anche per le azioni a sinistra.

Si noti che il concetto di azione di un gruppo su uno spazio topologico può essere esteso a quello di azione di un gruppo su un insieme, senza modificarne la definizione.

Definizione 1.5.2. Dato G gruppo e X spazio topologico, diciamo che G *agisce liberamente su* X se G agisce su X e $\forall g \in G, g \neq 1_G, x \in X, \ x \circ g \neq x$.

Definizione 1.5.3. Dato G gruppo e X spazio topologico, diciamo che G *agisce transitivamente su* X se G agisce su X e $\forall x, y \in X \ \exists g \in G$ tale che $x \circ g = y$.

Definizione 1.5.4. Siano X spazio topologico, G gruppo che agisce a destra su X, X è un *G-spazio* se $\theta_g : X \to X, \ \ x \mapsto x \circ g$ è continua $\forall \, g \in \ G$.

Osservazione 1.5.5. si noti che se X è un G-spazio θ_g risulta essere un omeomorfismo, poichè ha inversa continua. $\theta_{g^{-1}}$.

Definizione 1.5.6. Siano X spazio topologico, G gruppo che agisce a destra su X, chiamiamo *spazio di orbite* X/G, ovvero X quozientato con la relazione di equivalenza

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \ \exists \, g \ \in \ G \textit{ tale che } y = x \circ g. \tag{1.13}$$

Definizione 1.5.7. Siano X spazio topologico, G gruppo che agisce a destra su X, diciamo che G *agisce in modo propriamente discontinuo* se $\forall\, x \in X\, \exists\, V$ intorno aperto di x tale che $(V \circ g) \cap (V \circ g') = \varnothing \;\; \forall g \neq g'$.

Proposizione 1.5.8. *Se G è un gruppo finito che agisce liberamente su uno spazio di Hausdorff X, allora la sua azione è propriamente discontinua.*

Proposizione 1.5.9. *Sia X un G-spazio, con G che agisce in modo propriamente discontinuo, allora, detta p la proiezione canonica, (X, p) è un rivestimento di X/G e lo chiamo G-rivestimento.*

Dimostrazione. sia $x \in X/G$, risulta $p^{-1}(x) = \{x \circ g \mid g \in G\}$.
Poichè G agisce in modo propriamente discontinuo, $\exists V$ intorno aperto di x tale che $\{V \circ g \mid g \in G\} = \{U_i\} = p^{-1}(V)$ è composto da aperti tutti con intersezione nulla.
Poichè inoltre X è un G-spazio, $p\,|_{U_i} \equiv \theta_g : U_i \to V$ è un omeomorfismo $\forall\, g \in G$. □

Proposizione 1.5.10. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X, con $\tilde{X}$ connesso per archi. Sia poi $x \in X$ e $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}) = x$.
Allora è definita l'azione destra di $\pi_1(X, x)$ su $p^{-1}(x)$*

$$\circ : p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x), \qquad (\tilde{x'}, [f]) \mapsto \tilde{f}(1) \tag{1.14}$$

dove $\tilde{f}$ è l'unico sollevamento di f con punto iniziale $\tilde{x}$.

Dimostrazione. risulta che

- $\tilde{x'} \circ [\varepsilon_x] = \tilde{x'}$
- $(\tilde{x'} \circ [f]) \circ [g] = \tilde{x'} \circ ([f * g])$

□

Teorema 1.5.11. *Sia X un G-spazio su cui G agisce con azione a sinistra $\circ : X \times G \to X$ in modo propriamente discontinuo; fissato $\tilde{x} \in X$ e $x \in X/G$ tale che $p(\tilde{x}) = x$, risulta:*

$$\pi_1(X/G, x)/p_*(\pi_1(X, \tilde{x})) \simeq G. \tag{1.15}$$

Dimostrazione. consideriamo l'omomorfismo $\psi : \pi_1(X/G, x) \to G, \;\; [f] \mapsto g$, dove g è l'elemento del gruppo tale che $\tilde{f}(1) = g \circ \tilde{x}$ ed $\tilde{f}$ è il sollevamento di un qualsiasi elemento di $[f]$ con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$: per il teorema di Monodromia ψ è ben definita.
Vediamo che ψ è un omomorfismo di gruppi: per farlo consideriamo $l_a(f)$ un sollevamento di f che inizia in a. Ponendo $a = \tilde{f}(1) = g_f \circ \tilde{x}$ risulta:

$$(f \tilde{*} f')(1) = (\tilde{f} * l_a(f'))(1) = l_a(f')(1) = g_f \circ ((\tilde{f'})(1)) = g_f \circ (g_{f'} \circ \tilde{x}) = (g_f g_{f'}) \circ \tilde{x}$$

Allora $\psi([f] * [f']) = g_f g_{f'} = \psi([f])\psi([f'])$. Inoltre ψ è chiaramente suriettiva: $\forall g \in G$ consideriamo l'arco $\tilde{f}$ in $\tilde{X}$ da $\tilde{x}$ a $g \circ \tilde{x} \in p^{-1}(x)$; risulta che $[p\tilde{f}] \in \pi_1(X, x)$ e $\psi([p\tilde{f}]) = g$.
Infine il nucleo di ψ è composto dagli elementi di $\pi_1(X/G, x)$ che ammettono sollevamento $\tilde{f}$ con $\tilde{f}(1) = \tilde{x}$. Tale sottogruppo è dato proprio da $p_*(\pi_1(X, \tilde{x}))$

e l'asserto del teorema segue dal teorema fondamentale sugli omomorfismi di gruppi.

□

Corollario 1.5.12. *Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso risulta*

$$\pi_1(X/G, x) \simeq G. \tag{1.16}$$

Osservazione 1.5.13. L'ultimo asserto ci fornisce uno strumento molto utile per calcolare direttamente il gruppo fondamentale di $S^1 \cong \mathbb{RP}^1$.
Poichè $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con azione libera sinistra di $\mathbb{Z}$ sullo spazio di Hausdorff $\mathbb{R}$, $(n, x) \mapsto n + x$, risulta $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.
Allo stesso modo, poichè $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2$ e S^n per $n > 1$ è semplicemente connesso, $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$.

1.6 Rivestimenti Regolari e Universali

Teorema 1.6.1. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X e sia $x \in X$.*
Allora $\forall\, \tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $\quad p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ è sottogruppo di $\pi_1(X, x)$.

Dimostrazione. è sufficiente dimostrare che $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, x)$ e' iniettiva.
Sia $[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ tale che $[p\tilde{f}] = [\varepsilon_x]$, ovvero $p\tilde{f} \sim \varepsilon_x$ con omotopia F: possiamo ottenere un sollevamento $\tilde{F}$ tale che $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x}$ e $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{f}$, $\tilde{F}(x, 1) = \varepsilon_{\tilde{x}}$.
Dunque $\tilde{F}$ è l'omotopia fra $\tilde{f}$ e $\varepsilon_{\tilde{x}}$ e p_* è iniettiva. □

Lemma 1.6.2. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento connesso di X connesso per archi.*
$\forall\, \tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in\ \tilde{X}\ \exists f$ arco in X da $p(\tilde{x_0})$ a $p(\tilde{x_1})$ tale che

$$u_f(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})) \tag{1.17}$$

In particolare $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$ è sottogruppo normale di $\pi_1(X, p(\tilde{x_0}))$ se e solo se $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}))$ è sottogruppo normale di $\pi_1(X, p(\tilde{x_1}))$.

Dimostrazione. sappiamo che, dato un arco g da x_0 a x_1, risulta $u_g(\pi_1(\tilde{X}, x_0)) = \pi_1(\tilde{X}, x_1)$ e dunque $p_*(u_g(\pi_1(\tilde{X}, x_0))) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, x_1))$.
Ponendo $f = pg$ risulta verificato l'asserto.

□

Teorema 1.6.3. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X connesso per archi.*
L'insieme

$$\Omega = \left\{ p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \mid \tilde{x} \in p^{-1}(x) \right\} \tag{1.18}$$

è una classe di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X, x)$.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che Ω è un insieme di sottogruppi di $\pi_1(X, x)$.
Dimostriamo che questi sottogruppi sono tutti nella stessa classe di coniugio.
Sappiamo dal lemma che esiste f arco in X tale che $u_f(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}))$, ma poichè $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x$, f è un arco chiuso in x e dunque

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})) = [\overline{f}]p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))[f] \qquad \text{con } [f]\ \in \pi_1(X, x)$$

Sia poi $H \subset \pi_1(X,x)$, $H = [\overline{g}]p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0}))[g]$ con $[g] \in \pi_1(X,x), \tilde{x_0} \in p^{-1}(x)$. Per il lemma risulta $H = p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1}))$ dove $\tilde{x_1} = \tilde{g}(1)$ e $\tilde{g}$ è sollevamento di g con punto iniziale $\tilde{x_0}$; dunque $H \in \Omega$.

□

Definizione 1.6.4. Un rivestimento connesso $(\tilde{X},p)$ di X si dice *regolare o rivestimento di Galois* se $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))$ è normale in $\pi_1(X,p(\tilde{x}))\ \forall\, \tilde{x} \in \tilde{X}$.

Grazie al lemma 1.6.2 questa definizione risulta essere ben posta.

Si noti che ogni rivestimento $(\tilde{X},p)$ di X con $\tilde{X}$ semplicemente connesso è regolare e che se $\pi_1(X)$ è abeliano ogni rivestimento $(\tilde{X},p)$ è regolare.

Definizione 1.6.5. Siano $(\tilde{X}_1,p_1)$,$(\tilde{X}_2,p_2)$ due rivestimenti di X.
Definiamo *morfismi di rivestimenti* da $\tilde{X}_1$ a $\tilde{X}_2$ tutti i sollevamenti di p_1, ovvero tutte le funzioni continue $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tali che $p_2\varphi = p_1$.
Un morfismo di rivestimenti è un *isomorfismo* se è bigettivo e se la sua inversa è ancora un morfismo di rivestimenti.

Definizione 1.6.6. Chiamiamo $Aut(\tilde{X},p)$ il gruppo degli automorfismi di un rivestimento $(\tilde{X},p)$ di X, dotato del prodotto di composizione.

Osservazione 1.6.7. $Aut(\tilde{X},p)$ agisce su $\tilde{X}$ con azione sinistra $\circ : Aut(\tilde{X},p) \times \tilde{X} \to \tilde{X},\ \ \varphi \circ x = \varphi(x)$.

Teorema 1.6.8. *Sia $(\tilde{X},p)$ un rivestimento connesso di X.*

$$\text{Dati } \tilde{x}_1,\tilde{x}_2 \in \tilde{X}, \text{ esiste } \varphi \in Aut(\tilde{X},p) \text{ tale che } \varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$$
$$\text{se e solo se}$$
$$p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) \ \text{ e } p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)).$$

Dimostrazione. la prima implicazione è molto semplice: se esiste φ con le proprietà richieste, allora $p(\tilde{x}_2) = p(\varphi(\tilde{x}_1)) = p(\tilde{x}_1)$ e $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)) = p_*(\varphi_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))) = p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))$.
Per l'implicazione inversa, sappiamo dal teorema 1.4.11 che esistono due morfismi di rivestimenti $\alpha,\beta : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tali che $\alpha(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ e $\beta(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$ e dunque $\beta(\alpha(\tilde{x}_1)) = \tilde{x}_1$ e $\alpha(\beta(\tilde{x}_2)) = \tilde{x}_2$. Per l'unicità del sollevamento risulta $\beta\alpha = \alpha\beta = id_{\tilde{X}}$ e dunque α è l'isomorfismo cercato.

□

Teorema 1.6.9. *Sia $(\tilde{X},p)$ un rivestimento di X, con $\tilde{X}$ connesso e localmente connesso per archi.*
$Aut(\tilde{X},p)$ agisce su $\tilde{X}$ in modo propriamente discontinuo.

Dimostrazione. sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$, V un aperto uniformemente rivestito di $p(\tilde{x})$ e U_i un aperto omeomorfo a V e contenente $\tilde{x}$. Vediamo che U_i è proprio l'aperto per cui si verifica che $Aut(\tilde{X},p)$ agisce in modo propriamente discontinuo mostrando che se esiste $\varphi \in Aut(\tilde{X},p)$ tale che $U_i \cap \varphi(U_i) \neq \varnothing$ allora $\varphi \equiv id_{\tilde{X}}$.
Consideriamo $u \in U_i \cap \varphi(U_i)$, allora $u, \varphi^{-1}(u) \in U_i$ e poichè $p : U_i \to V$ è iniettiva, $u = \varphi^{-1}(u)$. Dall'unicità del sollevamento risulta $\varphi \equiv id_{\tilde{X}}$. □

Corollario 1.6.10. *Un rivestimento connesso $(\tilde{X},p)$ di X è regolare se e solo se $Aut(\tilde{X},p)$ agisce transitivamente sulle fibre di p.*

Dimostrazione. sappiamo che $\left\{p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})) \mid \tilde{x} \in p^{-1}(x)\right\}$ è una classe di coniugio di sottogruppi di $\pi_1(X,x)$, dunque affinchè $(\tilde{X},p)$ sia regolare i sottogruppi di tale classe devono coincidere. Dal teorema 1.6.8 vediamo che questo si verifica se e solo se esiste $\varphi \in Aut(\tilde{X},p)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 \;\; \forall\, \tilde{x}_1, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$, ovvero se e solo se $Aut(\tilde{X},p)$ agisce transitivamente sulle fibre di p. □

Teorema 1.6.11. *Sia $(\tilde{X},p)$ un rivestimento connesso di X.*
Se $Aut(\tilde{X},p)$ agisce transitivamente sulle fibre di p si verifica

$$\tilde{X}/Aut(\tilde{X},p) \cong X \tag{1.19}$$

e

$$\pi_1(X,p(\tilde{x}))/p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})) \simeq Aut(\tilde{X},p) \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}. \tag{1.20}$$

Dimostrazione. il primo asserto si verifica tramite la proprietà universale del quoziente. Denotiamo con q la proiezione al quoziente e notiamo che p è continua e costante sulle fibre, infatti se $\tilde{x} \sim \tilde{y}$, ovvero esiste $\varphi \in Aut(\tilde{X},p)$ tale che $y = \varphi(x)$, allora $p(y) = p(\varphi(x)) = p(x)$. Quindi esiste ed è unica $\tilde{p} : \tilde{X}/Aut(\tilde{X},p) \to X$ tale che $\tilde{p}q = p$; essendo poi p aperta e suriettiva e q aperta, anche $\tilde{p}$ è aperta e suriettiva.
Infine è chiaro che se $Aut(\tilde{X},p)$ agisce transitivamente sulle fibre di p, se $\tilde{p}([\tilde{x}_1]) = \tilde{p}([\tilde{x}_2])$, di conseguenza $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2)$ e $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sono nella stessa fibra di p, dunque $[\tilde{x}_1] = [\tilde{x}_2]$ e $\tilde{p}$ è iniettiva.
$\tilde{p}$ è l'omeomorfismo cercato.
Il secondo asserto è una conseguenza diretta del teorema 1.5.11.

□

Corollario 1.6.12. *Se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso si verifica*

$$\pi_1(X) \simeq Aut(\tilde{X},p) \tag{1.21}$$

E dunque $\pi_1(X)$ agisce in modo propriamente discontinuo con azione sinistra su $\tilde{X}$.

Definiamo quindi l'azione $\diamond$ di $\pi_1(X)$ corrispondente a quella di $Aut(\tilde{X},p)$:

$$\diamond : \pi_1(X) \times \tilde{X} \to \tilde{X}, \quad ([\sigma], z) \mapsto \tilde{x} \circ (\sigma * p\gamma)$$

dove $\tilde{x} \in \tilde{X}$ è fissato e $p(\tilde{x}) = x$, γ è un arco in $\tilde{X}$ da z a $\tilde{x}$ e $\tilde{x} \circ (\sigma * p\gamma)$ è il punto finale del sollevamento di $(\sigma * p\gamma)$ con punto iniziale $\tilde{x}$. L'azione è indipendente dalla scelta di γ se $p_*(\tilde{X},\tilde{x})$ è sottogruppo normale di $\pi_1(X,x)$: tale condizione è di sicuro verificata nel caso in cui $\tilde{X}$ è semplicemente connesso.
Si noti che a differenza dell'azione di $\pi_1(X,x)$ su $p^{-1}(x)$, questa è un'azione sinistra, poichè:

$$[\sigma * \delta] \diamond z = \tilde{x} \circ ((\sigma * \delta) * p\gamma) = \tilde{x} \circ (\sigma * (\delta * p\gamma)) = [\sigma] \diamond ([\delta] \diamond z)$$
$$\text{in quanto}$$
$$(\sigma * \delta) * p\gamma) \sim \sigma * (\delta * p\gamma)$$

Per chiarire le definizioni formali appena introdotte diciamo che nel caso in cui $\tilde{X}$ sia semplicemente connesso $\pi_1(X)$ e $Aut(\tilde{X},p)$ agiscono allo stesso modo su $\tilde{X}$, "spostando" ogni punto all'interno della sua fibra.

Teorema 1.6.13. *Sia G gruppo che agisce con azione a sinistra in modo propriamente discontinuo su X. Allora (X, p) con p proiezione canonica è un rivestimento regolare di X/G e risulta*

$$G \simeq Aut(X, p). \tag{1.22}$$

Dimostrazione. abbiamo già visto che sotto queste ipotesi (X, p) è un rivestimento di X/G, dobbiamo verificare che sia regolare, ovvero, per un asserto precedente, che $Aut(X, p)$ agisca transitivamente sulle fibre di p. Se $y, z \in p^{-1}(x)$, allora $\exists g \in G$ tale che $y = g \circ z$ e dunque $y = \theta_g(z)$ con θ_g isomorfismo di rivestimenti, poichè $p\,\theta_g = p$. Dunque (X, p) è un rivestimento regolare.
Infine l'isomorfismo è dato da $\psi : G \to Aut(X, p), \quad g \mapsto \theta_g$.
Si noti poi come l'isomorfismo fosse evidente dagli asserti precedenti, poichè sotto le ipotesi di (X, p) rivestimento regolare di X/G otteniamo

$$G \simeq \pi_1(X/G, p(x))/p_*(\pi_1(X, x)) \simeq Aut(X, p).$$

□

Diamo ora la definizione di un altro importante tipo di rivestimento:

Definizione 1.6.14. Un rivestimento $(\tilde{X}, p)$ di X si dice *universale* se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso.

Corollario 1.6.15. *Sia G gruppo che agisce con azione a sinistra in modo propriamente discontinuo su X semplicemente connesso. Allora*

$$G \simeq \pi_1(X/G) \simeq Aut(X, p). \tag{1.23}$$

Un'importante proprietà dei rivestimenti universali è la seguente:

Proposizione 1.6.16. *Siano $(\tilde{X}, p)$ e $(\tilde{X}', p')$ due rivestimenti universali di X: allora $\tilde{X} \cong \tilde{X}'$.*

Dimostrazione. dal corollario 1.4.12 sappiamo che esiste ed è unico f sollevamento di p tale che $p'f = p$ e f' sollevamento di p' tale che $pf' = p'$. Risulta allora $f' = f^{-1}$ e f è l'omeomorfismo cercato. □

Definizione 1.6.17. Sia X spazio topologico. X si dice *semilocalmente semplicemente connesso* se ogni punto x di X possiede un intorno connesso per archi V tale che $i_*(\pi_1(V)) = \{1\}$ in $\pi_1(X)$ dove $i : V \to X$ è l'inclusione.

Teorema 1.6.18. *Sia X spazio topologico connesso per archi. X possiede un rivestimento universale $(\tilde{X}, p)$ se e solo se X è semilocalmente semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Diamo la costruzione del rivestimento universale a partire da uno spazio semilocalmente semplicemente connesso X.
Prendiamo come spazio ricoprente $\tilde{X}$ il gruppoide di omotopia degli archi in X con punto iniziale $x \in X$ (ovviamente la relazione di equivalenza considerata è $\approx_{\{0,1\}}$) e sia $p([\gamma]) = \gamma(1)$.
Dotiamo $\tilde{X}$ della topologia che ha per base di aperti gli insiemi

$$[U, \alpha] = \{[\beta * \alpha] \text{ } con \text{ } \beta \text{ } arco \text{ } in \text{ } U\}$$

dove α è un arco in X con punto iniziale x e U è un aperto di X contenente $\alpha(1)$: si verifica che quella appena data è una topologia ben definita.
p è sia continua: sia U un aperto di X, allora se $[\alpha] \in p^{-1}(U)$, evidentemente $[U, \alpha] \subset p^{-1}(U)$ e dunque $p^{-1}(U) = \cup_{[\alpha] \in p^{-1}(U)}[U, \alpha]$ ed è aperto. p è inoltre evidentemente suriettiva, in quanto X è connesso per archi.
Dato un punto $y \in X$ dobbiamo ora trovare un aperto V_y che contenga y e che sia uniformemente rivestito: vediamo che si tratta proprio dell'aperto tale che $i_*(\pi_1(V_y)) = \{1\}$ (X è semilocalmente semplicemente connesso). Sappiamo che $p^{-1}(V_y) = \cup_{[\alpha] \in p^{-1}(V_y)}[V_y, \alpha]$ e quest'unione è digiunta dato che se $[\delta] \in [V_y, \alpha] \cap [V_y, \beta]$ allora $[V_y, \alpha] = [V_y, \beta]$, in quanto se $[\delta] \in [U, \alpha]$ allora $[U, \alpha] = [U, \delta]$.
$p|_{[V_y,\alpha]}$ è iniettiva: se $p([\gamma]) = p([\delta])$ allora γ e δ hanno gli stessi estremi e $\overline{\alpha} * \gamma * \overline{\delta} * \alpha$ è un arco in V_y, dunque è omotopo all'arco costante e $[\gamma] = [\delta]$.
$p|_{[V_y,\alpha]}$ è anche aperta e quindi un omeomorfismo.
Per verificare che $\tilde{X}$ sia semplicemente connesso vediamo come sollevare un arco α in X: poniamo

$$\alpha_s(t) = \alpha(ts),\ s \in I \text{ e sia } \tilde{\alpha} : I \to \tilde{X},\ s \mapsto [\alpha_s]$$

$\tilde{\alpha}$ è continuo ed è evidente che $p\tilde{\alpha} = \alpha$, dunque è il sollevamento cercato.
Sia poi $[\beta] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$: risulta $\beta = \widetilde{p\beta}$ e $[p\beta] = \widetilde{p\beta}(1) = \beta(1) = \tilde{x}(1) = [\varepsilon_x]$. Allora per il teorema sul sollevamento di cammini omotopi si ottiene

$$\beta = \widetilde{p\beta} \sim \tilde{\varepsilon_x} = \tilde{x} \text{ e } [\beta] = 1$$

Quindi $\tilde{X}$ è semplicemente connesso poichè chiaramente anche connesso per archi.

Diamo ora la dimostrazione dell'implicazione inversa. Sia $x \in X$ e sia V l'intorno di x uniformemente rivestito: dato $U_i \subset \tilde{X}$, $p|_{U_i} : U_i \to V$ è un omeomorfismo e dunque $p|_{U_i *}$ un isomorfismo.
Risulta allora $\pi_1(V) = \{1\}$ e $i_*(\pi_1(V)) = \{1\}$. □

Teorema 1.6.19. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento universale di X, dato $x \in X$,esiste una biiezione tra $\pi_1(X, x)$ e $p^{-1}(x)$.*

Dimostrazione. fissato $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, la biiezione è data da $\varphi : \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$, $[f] \mapsto \tilde{f}(1)$ con $\tilde{f}$ sollevamento di f tale che $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$. φ è ben definita per il teorema di monodromia ed ammette inversa $\psi : p^{-1}(x) \to \pi_1(X, x)$, $\tilde{x}_1 \mapsto [f]$ dove $[f] = [p\tilde{f}]$ e $[\tilde{f}]$ è un arco da $\tilde{x}$ a $\tilde{x}_1$. $\tilde{f}$ esiste perchè X è connesso per archi ed è omotopo a qualsiasi altro arco con gli stessi estremi perchè X è semplicemente connesso, dunque ψ è ben definita. □

Teorema 1.6.20. *Se su $p^{-1}(x)$ è definita un'operazione di gruppo "+" tale che*

$$(\tilde{x'} \circ [f]) \circ [g] = (\tilde{x'} \circ [f]) + (\tilde{x'} \circ [g]) \qquad \forall [f], [g] \in \pi_1(X, x),\ \tilde{x'} \in p^{-1}(x) \quad (1.24)$$

esiste un isomorfismo di gruppi tra $\pi_1(X, x)$ e $p^{-1}(x)$.

Dimostrazione. con questa condizione aggiuntiva la φ definita nel teorema 1.6.19 è anche un omomorfismo di gruppi e dunque un isomorfismo. Infatti, dai risultati della proposizione precedente:

- $\varphi([\varepsilon_x]) = \tilde{x} \circ [\varepsilon_x] = [\varepsilon_x]$

- $\varphi([f]*[g]) = \varphi([f*g]) = \tilde{x}\circ([f*g]) = (\tilde{x}\circ[f])\circ[g] = (\tilde{x}\circ[f]) + (\tilde{x}\circ[g]) = \varphi([f]) + \varphi([g])$.

□

Osservazione 1.6.21. Dai risultati del teorema 1.6.19 e dell'ultimo corollario si ricava $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ con il rivestimento $(\mathbb{R}, e^{i2\pi x})$.

Teorema 1.6.22. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento universale di X connesso e localmente connesso per archi.*
$\forall H$ sottogruppo di $\pi_1(X)$, $(\tilde{X}, p_H)$ è il rivestimento universale di $\tilde{X}/H$, dove p_H è la proiezione canonica.
Inoltre $\pi_1(\tilde{X}/H) = H$.

Dimostrazione. sappiamo che $\pi_1(X)$ agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$, dunque lo stesso varrà anche per H, in quanto suo sottogruppo.
Segue quindi dagli asserti precedenti che $(\tilde{X}, p_H)$ è un rivestimento di $\tilde{X}/H$ e che $\pi_1(\tilde{X}/H) = H$. □

É utile chiarire le idee con l'esempio della circonferenza.
Sappiamo che $(\mathbb{R}, e^{i2\pi x})$ è il rivestimento universale di $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e che $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \simeq Aut(\mathbb{R}, e^{i2\pi x})$, che consta di tutte le traslazioni di $\mathbb{R}$ per un intero: dall'asserto del teorema segue che per ogni $n\mathbb{Z}$ sottogruppo di $\mathbb{Z}$, $(\mathbb{R}, p_n)$ è il rivestimento universale di $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ dove p_n è la proiezione canonica.

Teorema 1.6.23. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento universale di X connesso e localmente connesso per archi.*
$\forall H$ sottogruppo di $\pi_1(X, x)$ esiste (Y, q) rivestimento di X e $y \in Y$ tale che

$$q_*(\pi_1(Y, y)) = H. \tag{1.25}$$

Dimostrazione. Poniamo $Y = \tilde{X}/H$, allora p induce l'applicazione

$$q : \tilde{X}/H \to \tilde{X}/\pi_1(X) \cong X, \quad [x]_H \mapsto p(x)$$

q è ben definita: detta H' l'immagine di H tramite l'isomorfismo tra $\pi_1(X)$ e $Aut(\tilde{X}, p)$, notiamo che $x \sim_H y$ se e solo se $x \sim_{H'} y$ ed essendo H' sottogruppo di $Aut(\tilde{X}, p)$, se e solo se esiste $\varphi \in Aut(\tilde{X}, p)$ tale che $p(y) = p(\varphi(x)) = p(x)$.
q è chiaramente suriettiva ed è anche un rivestimento di X.
Poniamo poi $y \in q^{-1}(x)$, allora $q_*(\pi_1(Y, y)) = H$ poichè q_* è iniettiva e dal teorema precedente $\pi_1(Y, y) = H$.

□

Corollario 1.6.24. *Sia X uno spazio connesso e localmente semplicemente connesso con rivestimento universale $(\tilde{X}, p)$.*
Esiste una biiezione tra i sottogruppi di $\pi_1(X)$ ed i rivestimenti connessi di X; in particolare i rivestimenti regolari corrispondono a sottogruppi normali.
Ogni rivestimento $(\tilde{X}', p')$ è nella forma $(\tilde{X}/H, p')$ dove H è un certo sottogruppo di $\pi_1(X)$ e p' è la mappa indotta da p su $\tilde{X}/H$.

Dimostrazione. l'asserto segue dal teorema precedente e dal fatto che per ogni rivestimento $(\tilde{X}, p)$ di X, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ è sottogruppo di $\pi_1(X, x)$ con $p(\tilde{x}) = x$. □

Poichè la circonferenza è localmente semplicemente connessa, abbiamo una biiezione tra i sottogruppi $n\mathbb{Z}$ ed i rivestimenti di S^1:

- per $n = 0$ otteniamo il rivestimento universale $(\mathbb{R}/0\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}, e^{i2\pi x})$
- per $n = 1$ otteniamo l'omeomorfismo $p : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, $[x] \mapsto e^{i2\pi x}$: tramite la proprietà universale del quoziente si può verificare che p è un omeomorfismo.
- per $n > 1$ otteniamo il rivestimento $(\mathbb{R}/n\mathbb{Z}, z^n)$: z^n è la mappa indotta da $e^{i2\pi x}$ su $\mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ e considerando S^1 in $\mathbb{C}$ si può interpretare z^n come la rotazione di n volte l'argomento. Segue che $z^n{}_*$ manda l'arco $[f]$ che consiste nel percorrere una volta S^1 nell'arco $z^n{}_*([f])$ che consiste nel percorrere n volte S^1. Dunque:
$$z^n{}_*(\pi_1(S^1)) = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \tag{1.26}$$
Inoltre
$$Aut(S^1, z^n) = \pi_1(S^1)/z^n{}_*(\pi_1(S^1)) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n \tag{1.27}$$
In particolare gli elementi di $Aut(S^1, z^n)$ sono gli n prodotti $\gamma^k * z$ dove γ è la radice n-esima dell'unità e $k = 1, \dots, n$.

Teorema 1.6.25. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento universale di X.*
Siano H,K sottogruppi di $\pi_1(X, x)$ tali che $H \subset K$. Detti $(\tilde{X}/H, q_H)$, $(\tilde{X}/K, q_K)$ i rispettivi rivestimenti di X e $y_H \in {q_H}^{-1}(x)$, $y_K \in {q_K}^{-1}(x)$ allora la proiezione canonica $p_{H,K} : \tilde{X}/H \to \tilde{X}/K$ è un rivestimento e dunque

$$p_{H,K*}(\pi_1(\tilde{X}/H, y_H)) \text{ è sottogruppo di } \pi_1(\tilde{X}/K, y_K).$$

Quest'ultimo teorema ci permette di completare il quadro: a sottogruppi più piccoli di $\pi_1(X)$ corrispondono rivestimenti più grandi di X.
In particolare, nel caso della circonferenza:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, \tilde{x}) \arrow[d, "p_n"'] \arrow[ddd, bend right=60, "e^{i2\pi x}"'] & \{1\} \\
(\mathbb{R}/n\mathbb{Z}, [\tilde{x}]_n) \arrow[d, "p_{n,m}"'] \arrow[dd, bend left=60, "z^n"] & n\mathbb{Z} \\
(\mathbb{R}/m\mathbb{Z}, [\tilde{x}]_m) \arrow[d, "z^m"'] & m\mathbb{Z} \\
(S^1, x) & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

con $\{1\} \subset n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

dove $m, n \in \mathbb{N}$, m divide n.

Avremo necessità di considerare anche G-rivestimenti di X non connessi.
La generalizzazione del Corollario 1.6.24 a questo caso è data dal seguente teorema.

Teorema 1.6.26. *Sia X spazio semilocalmente semplicemente connesso con rivestimento universale $(\tilde{X}, u)$ e G un gruppo.*
Si verifica la corrispondenza biunivoca:

$$Hom(\pi_1(X,x), G) \leftrightarrow \{G - rivestimenti\ di\ X\} / isomorfismi.$$

Dimostrazione. Per dimostrare il lemma dobbiamo prima di tutto vedere come, dato un G-rivestimento (Y, p) si possa costruire un morfismo e viceversa come, dato un morfismo $\phi : \pi_1(X, x) \to G$, si possa costruire un G-rivestimento.

Sia dunque (Y, p) un G-rivestimento di X (per quanto è stato definito in precedenza si avrà che Y è un G-spazio con azione a sinistra e che $Y/G \cong X$), un morfismo, fissato $y \in Y$ tale che $p(y) = x$, è il seguente:

$$\tilde{\phi}([\sigma]) = g \text{ tale che } \tilde{\sigma}(1) = y \circ [\sigma] = gy$$

per quanto è stato visto in precedenza $\tilde{\phi}$ è ben definito ed è anche un morfismo di gruppi.

Consideriamo ora un morfismo $\phi : \pi_1(X, x) \to G$ e costruiamo $\tilde{Y}$ come segue

$$\tilde{Y} = (\tilde{X} \times G)/\pi_1(X, x)$$

dove il quoziente è effettuato tramite l'azione sinistra

$$\circledcirc : \pi_1(X,x) \times (\tilde{X}, G) \to (\tilde{X}, G), \quad ([\sigma], (z, g)) \mapsto ([\sigma] \diamond z, g \cdot \phi([\sigma]^{-1}))$$

si intende che $\diamond$ rappresenta l'azione sinistra di $\pi_1(X, x)$ su $\tilde{X}$ e $\cdot$ è l'operazione del gruppo.
Con l'azione così definita in $\tilde{Y}$ si verifica che

$$[([\sigma] \diamond z, g)] = [(z, g \cdot \phi([\sigma]))]$$

Il gruppo G agisce su $\tilde{Y}$ con l'azione

$$\bullet : G \times \tilde{Y}, \quad (h, [z, g]) \mapsto [z, h \cdot g]$$

Poniamo infine $\tilde{p} : \tilde{Y} \to X, \quad [z, g] \mapsto u(z)$. Si verifica che $\tilde{Y}/G \cong X$, che u è compatibile con la proiezione al quoziente tramite tale omeomorfismo e che G agisce in modo propriamente discontinuo. In particolare dimostriamo quest'ultima proprietà.
Sia $x \in X$ e N un aperto contenente x uniformemente rivestito dal rivestimento universale. Esiste un isomorfismo di rivestimenti tra $u^{-1}(N)$ e $N \times \pi_1(X, x)$ (dato che $\pi_1(X, x)$ agisce su $\tilde{X}$, l'isomorfismo manda $[\sigma] \diamond \tilde{n}$ in $(n, [\sigma])$, con $n \in N$ e $\tilde{n} \in u^{-1}(n)$): tale isomorfismo comporta l'omeomorfismo

$$\tilde{p}^{-1}(N) \cong ((N \times \pi_1(X, x)) \times G)/\pi_1(X, x)$$

Introduciamo poi l'ulteriore omeomorfismo

$$\varphi : ((N \times \pi_1(X, x)) \times G)/\pi_1(X, x) \to N \times G, \quad [(x, [\sigma]), g] \mapsto (x, g \cdot \phi([\sigma]))$$

Vediamo che si tratta di un omeomorfismo: è ben definito poichè manda l'elemento equivalente $([\gamma] \diamond (x, [\sigma]), g \cdot \phi([\gamma^{-1}])) = ((x, [\gamma] * [\sigma]), g \cdot \phi([\gamma^{-1}]))$ in $(x, g \cdot \phi([\gamma^{-1}]) \cdot \phi([\gamma * \sigma])) = (x, g \cdot \phi([\sigma]))$. Inoltre è chiaramente suriettivo e iniettivo, continuo e aperto.
Abbiamo quindi dimostrato l'omeomorfismo

$$\tilde{p}^{-1}(N) \cong N \times G$$

che ci permette di dire che gli aperti $N \times g$ con $g \in G$ della preimmagine di N sono tutti disgiunti e omeomorfi a N.

Completiamo ora la dimostrazione mostrando come, dato un morfismo ϕ ed un morfismo $\tilde{\phi}$ costruito a partire dal G-rivestimento $(\tilde{Y}, \tilde{p})$ a sua volta costruito a partire da ϕ, si abbia $\phi = \tilde{\phi}$.
$\tilde{\phi}$ è stato costruito a partire da $[\tilde{x}, 1] \in \tilde{Y}$ tale che $\tilde{p}([\tilde{x}, 1]) = u(\tilde{x}) = x$.

$$\tilde{\phi}([\sigma]) \cdot [\tilde{x}, 1] = [\tilde{x}, 1] \circ [\sigma] = [[\sigma] \diamond \tilde{x}, 1] = [\tilde{x}, 1 \cdot \phi([\sigma])] = \phi([\sigma])$$

da cui segue $\phi = \tilde{\phi}$.

Inversamente sia (Y, p) un G-rivestimento: dobbiamo verificare che sia isomorfo al rivestimento $(\tilde{Y}, \tilde{p})$ costruito a partire dal morfismo $\tilde{\phi}$ a sua volta costruito a partire da (Y, p).
Invece di cercare un morfismo da $\tilde{Y}$ a Y possiamo più semplicemente cercare un morfismo da $\tilde{X} \times G$ a Y che sia costante sulle fibre dell'azione di $\pi_1(X, x)$; in particolare per la costruzione del rivestimento universale vista nel capitolo 1 possiamo anche identificare $\tilde{X}$ con il gruppoide di omotopia di archi in X con punto iniziale x, che indichiamo con $\pi_1(X, x, y)$.
Dunque poniamo, dato $y \in Y$ tale che $p(y) = x$

$$\varphi : \pi_1(X, x, y) \times G \to Y, \;\; ([\gamma], g) \mapsto g \cdot (y \circ [\gamma]) = (g \cdot y) \circ [\gamma]$$

dove $y \circ [\gamma]$ è il punto finale del sollevamento dell'arco γ secondo il rivestimento (Y, p) a partire dal punto iniziale y. Verifichiamo che φ sia costante sulle fibre, ovvero che dia lo stesso valore nel punto equivalente $([\sigma] * [\gamma], g \cdot \tilde{\phi}([\sigma]^{-1}))$:

$$\begin{gathered} \varphi(([\sigma] * [\gamma], g \cdot \tilde{\phi}([\sigma]^{-1}))) = (g \cdot \tilde{\phi}([\sigma]^{-1})) \cdot (y \circ ([\sigma] * [\gamma]) = \\ ((g \cdot \tilde{\phi}([\sigma]^{-1})) \cdot (y \circ [\sigma])) \circ [\gamma] = (g \cdot ((y \circ [\sigma^{-1}]) \circ [\sigma])) \circ [\gamma] = \\ (g \cdot (y \circ ([\sigma^{-1}] * [\sigma]))) \circ [\gamma] = (g \cdot y) \circ [\gamma]) \end{gathered}$$

Inoltre φ è chiaramente un morfismo di rivestimenti, in quanto

$$p(\varphi([[\sigma], g])) = p(g \cdot (y \circ [\gamma])) = \tilde{p}(([[\sigma], g])) = u([\sigma])$$

φ infine è per forza un isomorfismo in quanto (Y, p) e $(\tilde{Y}, \tilde{p})$ sono entrambi dei G-rivestimenti.

□

Capitolo 2

Presentazioni di Gruppi, Gruppi liberi e prodotti liberi e amalgamati

2.1 Presentazioni di Gruppi

Definizione 2.1.1. Sia S un insieme, definiamo *parola nell'alfabeto* $S \cup S^{-1}$ la sequenza finita

$$s_1 s_2 \cdots s_n \tag{2.1}$$

dove $s_i \in S \cup S^{-1} \forall i = 1, \ldots, n$
Indichiamo con $P(S)$ l'insieme delle parole nell'alfabeto di S.

Introduciamo poi la *parola vuota di lunghezza zero* e la indichiamo con 1. Per convenzione abbreviamo un blocco di m simboli consecutivi a con a^m ed un blocco di m simboli consecutivi a^{-1} con a^{-m}.
In questo modo la parola $a^3b^2b^{-1}a^{-2}$, dati $a, b \in S$ corrisponde a $aaabbb^{-1}a^{-1}a^{-1}$ ma non a $aaaba^{-1}a^{-1}$.
L'inverso W^{-1} della parola W data da 2.1 è la parola

$$s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} \cdots s_1^{-1} \tag{2.2}$$

Date poi due parole $W = s_1 s_2 \cdots s_n$ e $U = s'_1 s'_2 \cdots s'_r$ definiamo il loro prodotto WU come

$$s_1 s_2 \cdots s_n s'_1 s'_2 \cdots s'_r \tag{2.3}$$

Chiaramente $(WU)^{-1} = U^{-1}W^{-1}$.

La costruzione di parole a partire da elementi di un insieme ha un'utilità ben precisa: rappresentare il prodotto formale di elementi di un gruppo.
Vediamo come:

Proposizione 2.1.2. *Dato un gruppo G, ed una mappa $\alpha : S \to G$ con $\alpha(s_1) = g, \alpha(s_2) = h, \alpha(s_3) = k, \ldots,$ allora diciamo che tramite α s_1 definisce g, s_2 definisce h, s_3 definisce k, $\ldots$,s_1^{-1} definisce g^{-1}, s_2^{-1} definisce h^{-1},*

s_3^{-1} *definisce* k^{-1}, *...,.*
Tramite α *si può definire una mappa* $\phi : P(S) \to G$ *tale che*

$$\forall W \in P(S),\ W = s_1 s_2 \ldots s_r, \quad \phi(W) = \alpha(s_1)\alpha(s_2)\ldots\alpha(s_r) \qquad (2.4)$$

Tramite ϕ *la parola* W *definisce l'elemento in* G *dato da*

$$g_1 g_2 \cdots g_n \qquad (2.5)$$

dove s_i *definisce* g_i. *La parola vuota definisce l'elemento* 1 *di* G.

Se ogni elemento di G è definito da qualche parola nell'alfabeto in S (ϕ è suriettiva), allora gli elementi di S sono detti *simboli generatori per* G *tramite* α e g, h, k sono detti *elementi generatori* per G.
Una parola U che definisce l'elemento neutro 1 in G è detta *relatore* e l'equazione $U = V$ è detta *relazione* se UV^{-1} è un *relatore*.
Dato qualsiasi gruppo, la parola vuota e le parole $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b, \ldots$, $\forall a, b, \ldots \in S$ sono sempre relatori e sono chiamati *relatori triviali*.
Supponiamo che U,V,Z, ... siano relatori per G. Diciamo che la parola W è *derivabile da* $U, V, Z, \ldots$, se le seguenti operazioni, applicate un numero finito di volte, mutano W nella parola vuota:

(i) *L'inserimento di una delle parole* U,U^{-1},V,V^{-1},Z,Z^{-1}, *... o di uno dei relatori triviali in mezzo a due simboli consecutivi qualsiasi di W,o all'inizio di W, o alla fine di W.*

(ii) *L'eliminazione di una delle parole* U,U^{-1},V,V^{-1},Z,Z^{-1}, *... o di uno dei relatori triviali, se si trovano all'interno di W.*

É chiaro che se una parola W è derivabile dai relatori U,V,Z, ..., allora W è un relatore. Le operazioni (*i*) e (*ii*) infatti, applicate ad una parola, non cambiano l'elemento del gruppo da essa rappresentato. Dunque, se da W si ottiene la parola nulla, W deve rappresentare l'elemento neutro.

Se ogni relatore è derivabile dai relatori $U, V, Z, \ldots$, allora chiamiamo $R = \{U, V, Z, \ldots\}$ un *insieme completo di relatori* per il gruppo G sull'insieme di simboli generatori S.

Definizione 2.1.3. Dato un gruppo G sull'insieme di generatori $S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$, se $R = \{U, V, Z, \ldots\}$ è un insieme completo di relatori, chiamiamo

$$\langle s_1, s_2, s_3, \ldots ; U, V, Z, \ldots \rangle \qquad (2.6)$$

una *presentazione* di G, e scriviamo

$$G = \langle s_1, s_2, s_3, \ldots ; U, V, Z, \ldots \rangle. \qquad (2.7)$$

Se sia l'insieme dei generatori che l'insieme completo di relatori sono finiti, diciamo che il gruppo G ammette una *presentazione finita.*

Diamo ora una fondamentale caratterizzazione delle presentazioni di gruppi:

Proposizione 2.1.4. *Ogni gruppo* G *ammette una presentazione*

Dimostrazione. una presentazione triviale di G può essere costruita prendendo un distinto simbolo generatore per ogni elemento del gruppo e considerando tutti i relatori su questi simboli come appartenenti all'insieme completo di relatori.
La tavola di moltiplicazione di G fornisce un'altra presentazione: considerando sempre un distinto simbolo generatore per ogni elemento di G, possiamo definire relatori tutte le parole di lunghezza tre della forma abc^{-1} dove a, b, c sono tali che $ab = c$.
Dobbiamo ora dimostrare che tale insieme di relatori sia completo, ovvero che ogni relatore possa essere derivato, tramite le operazioni (i) e (ii) da tali parole di lunghezza tre. Consideriamo dunque il relatore generico

$$W = s_1 s_2 \cdots s_n$$

Per prima cosa eliminiamo gli esponenti negativi presenti in W operando come segue:
supponiamo che b^{-1} sia presente in W, allora esiste un simbolo generatore, che chiamiamo c, che definisce lo stesso elemento di b^{-1}. In questo modo,considerando che e definisca l'elemento neutro di G, bce^{-1} appartiene al nostro insieme di relatori. Possiamo dunque inserire bce^{-1} alla destra di b^{-1} in W ottenendo $b^{-1}bce^{-1}$; cancelliamo dunque $b^{-1}b$ ottenendo ce^{-1}; inseriamo eee^{-1} alla destra di ce^{-1} ottenendo $ce^{-1}eee^{-1}$ e cancelliamo $e^{-1}e$ e ee^{-1} ottenendo c.
Dunque b^{-1} è stata rimpiazzata da c in W tramite le operazioni (i) e (ii).
Occupiamoci ora di ridurre la lunghezza di W: se a e d sono simboli consecutivi in W, troviamo il relatore della forma adq^{-1}. Inseriamo qq^{-1} alla destra di ad ottenendo $adqq^{-1}$, cancelliamo adq^{-1} ottenendo q.
Continuando in questo modo possiamo ridurre la lunghezza di W con le operazioni (i) e (ii) fino ad ottenere una parola di lunghezza uno, costituita da un unico simbolo generatore. Essendo W un relatore, questo simbolo deve definire l'elemento neutro di G, ovvero deve essere e. Inseriamo allora ee^{-1} alla destra di e ottenendo eee^{-1} che possiamo cancellare in quanto appartenente all'insieme di relatori che abbiamo definito.
In questo modo otteniamo la parola vuota.

□

Corollario 2.1.5. *Ogni gruppo G finito ammette una presentazione finita.*

Dimostrazione. Risulta evidente dalla precedente costruzione della presentazione tramite la tavola di moltiplicazione. □

Sembra ora naturale porsi il problema inverso, ovvero se dato un insieme qualsiasi di simboli S ed un insieme R di relatori composto da parole $U, V, Z, \ldots$ di simboli in S, esista un gruppo G tale che

$$G = \langle S; R \rangle$$

A questo proposito introduciamo la relazione $\sim$ sull'insieme delle parole nell'alfabeto di S:

$$W_1 \sim W_2 \Leftrightarrow W_2 \textit{ si ottene da } W_1 \textit{ tramite le operazioni (i) e (ii)} \tag{2.8}$$

É chiaro, dalle proprietà delle operazioni (i) e (ii), che la relazione $\sim$ è *riflessiva, simmetrica e transitiva*, dunque *di equivalenza*.

Indicando poi con $[W]_\sim$ la *classe di equivanza* di W, possiamo notare come $\sim$ sia una *congruenza* rispetto al prodotto di parole, infatti:

$$[W_1]_\sim \cdot [W_2]_\sim = [W_1 W_2]_\sim \tag{2.9}$$

Possiamo ora enunciare il seguente risultato fondamentale:

Teorema 2.1.6. *L'insieme G delle classi di equivalenza delle parole nell'alfabeto di S definite dalla relazione $\sim$ è un gruppo con la moltiplicazione definita da* 2.9.
Inoltre attraverso la mappa $\alpha : S \to G$ tale che

$$s_1 \mapsto [s_1]_\sim, s_2 \mapsto [s_2]_\sim, s_3 \mapsto [s_3]_\sim, \ldots \tag{2.10}$$

G ha la presentazione $\langle S; R\rangle$
Infine, se G' è un gruppo con la stessa presentazione, risulta $G \simeq G'$.

Dimostrazione. Occupiamoci innanzi tutto di dimostrare che G sia un gruppo: sicuramente il prodotto definito da 2.9 è associativo per l'associatività del prodotto di parole.
La classe $[1]_\sim$ della parola vuota costituisce poi l'elemento neutro.
Infine l'inverso della classe $[W]_\sim$ è la classe $[W^{-1}]_\sim$, infatti $[W]_\sim \cdot [W^{-1}]_\sim = [W \cdot W^{-1}]_\sim$ e, attraverso l'eliminazione di relatori triviali, WW^{-1} può essere ridotta alla parola vuota. In questo modo $WW^{-1} \sim 1$ e $[W \cdot W^{-1}]_\sim = [1]_\sim$.
Abbiamo dunque visto che G è un gruppo. Dimostriamo ora che $\langle S; R\rangle$ è la sua presentazione.
Sicuramente le classi di equivalenza degli elementi di S, tramite la mappa 2.10, sono un insieme di generatori per G, infatti data $[W]_\sim \in G$, $[W]_\sim = [s_1 s_2 \cdots s_r]_\sim$ con $s_i \in S \,\forall\, i = 1, \ldots, r$, risulta $[W]_\sim = [s_1]_\sim [s_2]_\sim \cdots [s_r]_\sim$.
Dimostriamo ora che le classi di equivalenza degli elementi di R costituiscono un insieme di relatori di G: se $U \in R$ allora $U \sim 1$ e $[U]_\sim = [1]_\sim$, dunque U è un relatore.
Sia poi W un relatore per G: si ha che $W \sim 1$ e dunque per definizione W è derivabile dall'insieme R di relatori. Risulta che R è un insieme completo di relatori per G.
Per dimostrare l'ultima affermazione del Teorema, supponiamo che G' abbia la presentazione $\langle S; R\rangle$ tramite la mappa $\alpha' : S \to G'$tale che

$$s_1 \mapsto g', s_2 \mapsto h', s_3 \mapsto k', \ldots$$

Allora la mappa $\phi : P(S) \to G'$ tale che

$$\forall\, W \in P(S),\ W = s_1 s_2 \ldots s_r, \phi(W) = \alpha'(s_1)\alpha'(s_2)\ldots\alpha'(s_r) = g'h'k' \ldots \tag{2.11}$$

è l'isomorfismo cercato tra G e G'.
Prima di tutto dimostriamo che ϕ è ben definita: se dati $W_1 = s_1 \cdots s_m$ e $W_2 = s'_1 \cdots s'_n$; è $W_1 \sim W_2$ deve risultare $\alpha'(s_1)\ldots\alpha'(s_m) = \alpha'(s'_1)\cdots\alpha'(s'_n)$.
Se $W_1 \sim W_2$ allora $W_1 W_2^{-1}$ può essere ridotta a $W_2 W_2^{-1}$ e successivamente

alla parola vuota attraverso le operazioni (i) e (ii). Dunque $W_1W_2^{-1}$ è derivabile da $U, V, Z, \dots$ e quindi è un relatore in G'. Infine $\alpha'(s_1)\dots\alpha'(s_m) = \alpha'(s'_1)\cdots\alpha'(s'_n)$.
Vediamo ora che ϕ è iniettiva (si tratta di fare il ragionamento inverso di quello appena svolto): supponiamo che $\alpha'(s_1)\dots\alpha'(s_m) = \alpha'(s'_1)\cdots\alpha'(s'_n)$, allora $W_1W_2^{-1}$ è un relatore in G' e dunque è derivabile da $U, V, Z, \dots$ e può essere ridotta alla parola vuota tramite (i) e (ii). In questo modo W_1 può essere scritta come $W_1W_2^{-1}W_2$ e successivamente come W_2.
Dunque $W_1 \sim W_2$ e ϕ è iniettiva.
Poichè gli elementi di S sono generatori per G', ϕ è suriettiva.
Infine ϕ è chiaramente un omomorfismo e dunque risulta essere l'isomorfismo cercato.

□

Corollario 2.1.7. *Due gruppi qualsiasi con la stessa presentazione $\langle S; R\rangle$ sono isomorfi.*

Dimostrazione. entrambi i gruppi risultano essere isomorfi allo stesso gruppo delle classi di equivalenza di parole in S. □

Per concludere la sezione presentiamo il seguente risultato:

Proposizione 2.1.8. *Due gruppi isomorfi, G e G', possono avere presentazioni diverse.*

Dimostrazione. poniamo $G = \langle a, b; baba^{-1}\rangle$ e $G' = \langle a, c; a^2c^2\rangle$
Definiamo $\alpha : \{a, b\} \to G'$ come $\alpha(a) = a$, $\alpha(b) = ca$
Estendiamo α a $\varphi : G \to G'$ come $\varphi(a_1b_1 \cdots a_rb_r) = \alpha(a_1)\alpha(b_1)\cdots\alpha(a_r)\alpha(b_r)$
poichè $\varphi(baba^{-1}) = caacaa^{-1} = ca^2c = c(a^2c^2)c^{-1} = cc^{-1} = 1$, φ è ben definita e per definizione è un omomorfismo di gruppi.
Similmente definiamo $\alpha' : \{a, c\} \to G$ come $\alpha'(a) = a$, $\alpha'(c) = ba^{-1}$
Estendiamo α' a $\varphi' : G' \to G$ come $\varphi'(a_1c_1 \cdots a_rc_r) = \alpha'(a_1)\alpha'(c_1)\cdots\alpha'(a_r)\alpha'(c_r)$
Risulta che φ' è l'inversa di φ e dunque i due gruppi sono isomorfi.

□

2.2 Esempi di presentazioni

Vediamo ora alcuni esempi di presentazioni di gruppi per familiarizzare con i concetti introdotti nella sezione precedente.

1. $\langle\{x\}\,;\varnothing\rangle \simeq \mathbb{Z}$

   l'isomorfismo risulta chiaro introducendo la mappa $x \mapsto 1$
   Successivamente vedremo come $\mathbb{Z}$ sia un esempio di *gruppo libero.*

2. $\langle\{x\}\,;\{x^n\}\rangle \simeq \mathbb{Z}_n$

   questo gruppo consiste delle parole $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.
   Data infatti una qualsiasi parola x^m, so che $\exists q, r \in \mathbb{Z}$ con $r < n$ tali che $m = qn + r$. Allora $x^m = x^{qn+r} = (x^n)^q x^r = x^r$ in quanto $x^n = 1$.

3. $\langle\{x, y\}\,;\{xyx^{-1}y^{-1}\}\rangle \simeq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

   la relazione $xyx^{-1}y^{-1}$ fornisce la proprietà commutativa all'operazione del gruppo: basta osservare che si ottiene $x^a y^b = y^b x^a$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ e dunque una generica parola $W = x^{a_1}yb_1x^{a_2}yb_2\cdots x^{a_n}yb_n$ può essere espressa come $W = x^a y^b$ con $a = \sum_{i=1}^n a_i$ e $b = \sum_{i=1}^n b_i$.

   Dunque con la mappa $x \mapsto (1, 0); y \mapsto (0, 1)$ si ottiene l'isomorfismo cercato.

4. $\langle\{x, y\}\,;\{x^4, y^2, xyx^{-1}y^{-1}\}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$

   similmente all'esempio precedente, grazie alla relazione $xyx^{-1}y^{-1}$, possiamo ridurre ogni parola $W = x^{a_1}yb_1x^{a_2}yb_2\cdots x^{a_n}yb_n$ nella forma $W = x^a y^b$, in quanto l'operazione risulta essere commutativa.
   Notiamo però che risulta $x^4 \sim 1$ e $y^2 \sim 1$. Utilizzando lo stesso ragionamento del secondo esempio possiamo dunque affermare che l'esponente a può assumere solo i valori $0, 1, 2, 3$ e l'esponente b i valori $0, 1$.
   tramite la mappa $x \mapsto (1, 0), y \mapsto (0, 1)$ otteniamo l'isomorfismo cercato.

5. $\langle\{x, y\}\,;\{x^2, y^3, x^{-1}yxy^{-2}\}\rangle \simeq S_3$

   ponendo la mappa $x \mapsto (12), y \mapsto (123)$ sicuramente le relazione sono rispettate.
   Inoltre facciamo vedere che si tratta di un isomorfismo dandone la mappa esplicita:

$$\begin{cases} \text{parola vuota} \mapsto \text{id} \\ x \mapsto (12) \\ y \mapsto (123) \\ y^2 \mapsto (132) \\ xy \mapsto (23) \\ xy^2 \mapsto (13) \end{cases}$$

2.3 Gruppi liberi

Definizione 2.3.1. Un gruppo G si dice *gruppo libero* se ammette la seguente presentazione

$$\langle S; \varnothing\rangle \tag{2.12}$$

ovvero se ha come insieme di generatori un insieme qualsiasi e come insieme di relatori l'insieme vuoto: in questo modo gli unici relatori di G sono i relatori triviali.

Un primo esempio di gruppo libero è dato da $\mathbb{Z}$: esso infatti è generato dal singoletto $\{x\}$ e non ha relatori.
Notiamo che per ogni insieme S esiste il gruppo libero da esso generato, ed è, banalmente, $\langle S; \varnothing\rangle$

Proposizione 2.3.2. *Dato un gruppo non libero con presentazione $\langle S; R\rangle$ ($R \neq \varnothing$), ed il gruppo libero $\langle S; \varnothing\rangle$ sullo stesso insieme di generatori, si ha*

$$\langle S; R\rangle \simeq \frac{\langle S; \varnothing\rangle}{< R >} \tag{2.13}$$

dove con $< R >$ intendiamo la chiusura normale di R, ovvero l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di $\langle S; \varnothing\rangle$ contenenti R, che risulta essere il sottogruppo normale generato da R.

Proposizione 2.3.3. *Dato un gruppo non libero con presentazione $\langle S; R\rangle$ ($R \neq \varnothing$), ed il gruppo libero corrispondente $\langle S; \varnothing\rangle$ sullo stesso insieme di generatori, si ha la proiezione*

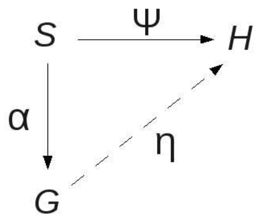
$$p : \langle S; \varnothing\rangle \to \langle S; R\rangle \simeq \frac{\langle S; \varnothing\rangle}{< R >}, \qquad p(x) = [x]. \tag{2.14}$$

Dimostrazione. La proiezione al quoziente è un omomorfismo di gruppi. □

Come esempio possiamo osservare la proiezione del gruppo libero $\mathbb{Z} \simeq \langle \{x\}\,; \varnothing\rangle$ in $\mathbb{Z}_6 \simeq \langle \{x\}\,; x^6\rangle \simeq \frac{\langle \{x\};\varnothing\rangle}{<x^6>}$ $\quad x \mapsto [x]_6$.

Enunciamo ora un risultato fondamentale:

Teorema 2.3.4. Proprietà universale dei gruppi liberi
Dato G gruppo libero sull'insieme di generatori S, detta α la mappa tramite la quale S genera G, per ogni gruppo H e per ogni $\psi : S \to H$, $\exists\,!\,\eta : G \to H$ omomorfismo di gruppi tale che $\psi = \eta\alpha$.



Dimostrazione. Dato G gruppo libero con presentazione $\langle S; \varnothing\rangle$, da 2.4 sappiamo che data $\alpha : S \to G$ tale che $s_i \mapsto g_i$, con g_i elemento generatore di G $\exists\, \phi : P(S) \to G$ che associa a $W = s_1 \cdots s_n$ l'elemento di G $(\alpha(s_1) \cdots \alpha(s_n))$. Risulta chiaro allora che $\eta : G \to H$ deve per forza essere definita come segue:

$$\eta(\alpha(s_1) \cdots \alpha(s_n)) = \psi(s_1) \cdots \psi(s_n) \tag{2.15}$$

In questo modo η è un omomorfismo di gruppi in quanto

$$\eta(\alpha(s_1) \cdots \alpha(s_p))\, \eta(\alpha(s'_1) \cdots \alpha(s'_q)) \;=\; \psi(s_1) \cdots \psi(s_p)\psi(s'_1) \cdots \psi(s'_q) \;=\; \eta(\alpha(s_1) \cdots \alpha(s_p)\alpha(s'_1) \cdots \alpha(s'_q))$$

Inoltre $\forall s \in S$ risulta $\psi(s) = \eta(\alpha(s))$.

□

Vediamo ora un esempio di gruppo non libero per il quale la suddetta proprietà non vale:
Sia $G = \mathbb{Z}_3 \simeq \langle \{x\}\, ; x^3 \rangle$ e sia $H = \mathbb{Z}_2 \simeq \langle \{x\}\, ; x^2 \rangle$.
Ponendo $\alpha(x) = [1]_3$ e $\psi(x) = [1]_2$ dovrebbe essere $\eta([1]_3) = [1]_2$, ma così definita η non è un morfismo di gruppi poichè $\eta([0]_3) = \eta([1]_3 + [2]_3) = \eta([1]_3) + \eta([2]_3) = [1]_2 + [0]_2 = [1]_2 \neq [0]_2$.
Si osservi invece come, ponendo $G = \mathbb{Z}$, η esiste ed è univocamente determinata.

Proposizione 2.3.5. *Due gruppi liberi G, G', generati dallo stesso insieme, sono canonicamente isomorfi. In particolare, detta α la mappa tramite la quale S genera G e α' la mappa tramite la quale S genera G', esiste un unico isomorfismo di gruppi $\eta : G \to G'$ tale che $\eta\alpha = \alpha'$.*

Dimostrazione. La prima parte della proposizione risulta chiara da 2.1.7, ma vogliamo comunque darne una dimostrazione usando la proprietà universale.
Sappiamo che esistono e sono uniche $\eta : G \to G'$ tale che $\eta\alpha = \alpha'$ e $\eta' : G' \to G$ tale che $\eta'\alpha' = \alpha$.
Risulta allora $\eta\eta'\alpha' = \alpha'$ e dunque $\eta\eta' = id$. Similmente $\eta'\eta = id$ e dunque η e' un isomorfismo. □

2.4 Prodotto libero di gruppi

Definizione 2.4.1. Definisco *Prodotto libero* $*_n G_n$ della famiglia di gruppi $G_n = \langle S_{G_n}; R_{G_n} \rangle$ il gruppo

$$*_n G_n = \langle S_{G_1} \cup S_{G_2} \cup \cdots S_{G_n}; R_{G_1} \cup R_{G_1} \cup \cdots R_{G_n} \rangle \tag{2.16}$$

I gruppi G_n sono chiamati *fattori liberi* di $*_n G_n$.

Per chiarire la definizione diciamo che il Prodotto libero di gruppi è un prodotto nel quale non si aggiungono relatori.
Data $W = g_1 \cdots g_n \in *_n G_n$ diciamo che W è *ridotta* se g_i e g_{i+1} appartengono a differenti fattori liberi $\forall i = 1, \ldots n-1$. In caso contrario infatti potremmo combiare g_i e g_{i+1} in un unico elemento del fattore libero G_i.
Risulta inoltre chiaro dalla definizione che il prodotto libero sia associativo.

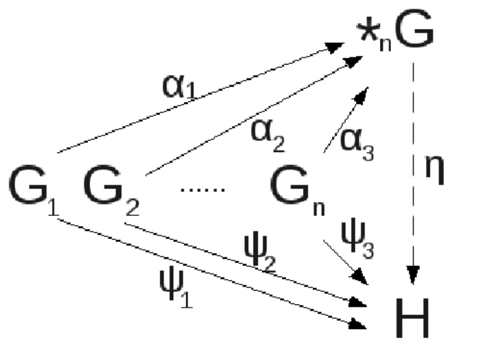
Diamo un esempio della differenza tra il prodotto libero ed il prodotto cartesiano di gruppi.
Sia $\mathbb{Z}_2 \simeq \langle \{x\}\, ; x^2 \rangle$. Il prodotto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ammette la presentazione $\langle \{x\}\, , \{y\}\, ; x^2, y^2, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$: abbiamo infatti aggiunto il relatore $xyx^{-1}y^{-1}$ poichè $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ è commutativo.
Dalla definizione, invece, il prodotto libero $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ammette la presentazione $\langle \{x\}\, , \{y\}\, ; x^2, y^2 \rangle$: esso è dunque costituito dal numero infinito di parole nella forma $x, y, xy, yx, xyx, yxy, xyxy, yxyx, \ldots$.

Proposizione 2.4.2. *Per famiglia di gruppi esiste il prodotto libero.*

Proposizione 2.4.3. *Il prodotto libero di gruppi liberi è un gruppo libero.*

Enunciamo ora la proprietà universale del Prodotto libero di gruppi:

Teorema 2.4.4. Proprietà universale del prodotto libero
Sia data una famiglia di gruppi G_n*, il suo prodotto libero* $*_n G_n$ *e le inclusioni* $\alpha_i : G_i \to *_n G_n \ \forall i = 1, \ldots, n$.
Sia poi dato un gruppo H *ed una famiglia di omomorfismi* $\psi_i : G_i \to H$*,* $i = 1, \ldots, n$.
Esiste ed è unico l'omomorfismo $\eta : *_n G_n \to H$ *tale che* $\psi_i = \eta\, \alpha_i \ \forall i = 1, \ldots, n$.



Dimostrazione. l'unico modo per definire $\eta : *_n G_n \to H$ è evidentemente il seguente:

$$\eta : g_1 g_2 \cdots g_m \mapsto \psi_{\delta_1}(g_1)\psi_{\delta_2}(g_2) \cdots \psi_{\delta_m}(g_m) \ con \ g_i \in G_{\delta_i} \tag{2.17}$$

in questo modo η è un omomorfismo di gruppi, poichè:

$$\begin{aligned} \eta(g_1 g_2 \cdots g_p)\eta(g'_1 g'_2 \cdots g'_q) &= \\ \psi_{\delta_1}(g_1)\psi_{\delta_2}(g_2) \cdots \psi_{\delta_p}(g_p)\psi_{\delta'_1}(g'_1)\psi_{\delta'_2}(g'_2) \cdots \psi_{\delta'_q}(g'_q) &= \eta(g_1 g_2 \cdots g_p g'_1 g'_2 \cdots g'_q) \end{aligned}$$

Inoltre $\forall g_i \in G_i, \psi_i = \eta\alpha_i$.

Supponiamo infine che G' sia un altro gruppo che verifica tale proprietà universale e poniamo $\psi_i : G_i \to H \ \forall \, i = 1, \ldots, n$ le inclusioni. Allora ricaviamo $\eta\alpha_i = \psi_i$ e $\eta'\psi_i = \alpha_i$, da cui si vede che η è l'isomorfismo cercato. $\square$

In conclusione, per chiarire ulteriormente le idee, vediamo come tale proprietà universale non valga per il prodotto cartesiano.
Consideriamo $G_1 = G_2 = H = \mathbb{Z}_2$, siano $\alpha_i : G_i \to G_1 \times G_2$, $i = 1, 2$ le due inclusioni e $\psi_i : G_i \to H$, $i = 1, 2$ gli omomorfismi identità.
É evidente che $\eta : G_1 \times G_2 \to H$ con la proprietà $\psi_i = \eta\, \alpha_i$, $i = 1, 2$ non può esistere poichè dovrebbe essere in un caso la proiezione su G_1 e nell'altro la proiezione su G_2.

2.5 Prodotto amalgamato di gruppi

Definizione 2.5.1. Siano dati tre gruppi G_1, G_2, K e due omomorfismi iniettivi di gruppi $j_1 : K \to G_1$, $j_2 : K \to G_2$.
Definisco prodotto amalgamato $G_1 *_K G_2$ di G_1 e G_2 su K riferito alle inclusioni j_1, j_2 il gruppo:

$$G_1 *_K G_2 \simeq (G_1 * G_2)/N \tag{2.18}$$

Dove N è la chiusura normale di $\{j_1(k){j_2}^{-1}(k) \mid k \in K\}$.

Proposizione 2.5.2. *Se G_1 ha presentazione $\langle S_{G_1}; R_{G_1}\rangle$ e G_2 ha presentazione $\langle S_{G_2}; R_{G_2}\rangle$, allora $G_1 *_K G_2$ ha presentazione*

$$\langle S_{G_1} \cup S_{G_2}; R_{G_1} \cup R_{G_2} \cup \{j_1(k){j_2}^{-1}(k) \mid k \in K\}\rangle. \tag{2.19}$$

Possiamo vedere il prodotto amalgamato di due gruppi come un prodotto libero dove gli elementi $j_1(k)$ e $j_2(k)$ vengono identificati $\forall k \in K$.

Teorema 2.5.3. *Proprietà universale del prodotto amalgamato*
Sia $G_1 *_K G_2$ il prodotto amalgamato di G_1 e G_2 su K riferito alle inclusioni j_1, j_2 e siano date le inclusioni $i_1 : G_1 \to G_1 *_K G_2$ e $i_2 : G_2 \to G_1 *_K G_2$ tali che $i_1 j_1 = i_2 j_2$.
Per ogni dato gruppo H e per ogni coppia di omomorfismi $f_1 : G_1 \to H$, $f_2 : G_2 \to H$ tali che $f_1 j_1 = f_2 j_2$, allora esiste ed è unico l'omomorfismo $f : G_1 *_K G_2 \to H$ tale che $f i_1 = f_1$ e $f i_2 = f_2$.
Ogni gruppo che verifica questa proprietà è isomorfo a $G_1 *_K G_2$.

Dimostrazione. Verifichiamo che $G_1 *_K G_2$ soddisfi la proprietà universale:
Dalla proprietà universale del prodotto libero sappiamo che esiste ed è unica $f : G_1 * G_2 \to H$ tale che $f_1 = f i_1$ e $f_2 = f i_2$.
Consideriamo poi il morfismo f' indotto da f su $G_1 * G_2/N$: f' è ben definito poichè $f_1 j_1 = f_2 j_2$ e soddisfa le proprietà richieste. Se G' è un altro gruppo che verifica la proprietà universale, l'isomorfismo tra G' e $G_1 *_K G_2$, si trova allo stesso modo dell'isomorfismo fra $G_1 * G_2$ e H', dove H' è un gruppo che soddisfa la proprietà universale del prodotto libero. $\square$

Capitolo 3

Il teorema di Seifert-Van Kampen

Nel primo capitolo abbiamo visto vari asserti molto utili per il calcolo del gruppo fondamentale, ad esempio nel caso in cui lo spazio considerato fosse uno spazio di orbite, uno spazio semilocalmente semplicemente connesso, o fosse prodotto cartesiano di due spazi.
Vogliamo ora però introdurre il teorema di Seifert-Van Kampen, un risultato fondamentale per il calcolo del gruppo fondamentale di uno spazio topologico esprimibile come unione di suoi aperti.
L'idea alla base del teorema è quella di ricavare una "proprietà" (il gruppo fondamentale, appunto) dello spazio a partire dalle proprietà delle sue componenti, fancendone il prodotto, e infine sistemando il tutto lavorando sull'intersezione.
Per chiarire immediatamente le idee possiamo affermare che un corrispettivo più semplice del Teorema di Seifert-Van Kampen per gli spazi vettoriali può essere la formula di Grassmann:

$$dim(U+V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

nel senso che applica la stessa idea di calcolare la dimensione di $U+V$ sommando quella di U e V e poi sottraendo quella dell'intersezione.
Vedremo dunque vari enunciati del Teorema di Seifert-Van Kampen: un primo con ipotesi restrittive (lo spazio X deve essere semilocalmente semplicemente connesso), interessante perchè dimostrabile tramite le proprietà dei rivestimenti, ed un secondo ed un terzo più generali.

Teorema 3.0.4. *Seifert-Van Kampen*
Sia X uno spazio connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso, U,V due aperti connessi di X tali che $X = U \cup V$ e $U \cap V$ sia connesso e sia $x \in U \cap V$.
Allora

$$\pi_1(X,x) = \pi_1(U,x) *_{\pi_1(U \cap V,x)} \pi_1(V,x). \tag{3.1}$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo due lemmi.

Lemma 3.0.5. *Sia X spazio topologico unione di due aperti U e V. Un rivestimento di X si restringe a un rivestimento di U e a un rivestimento di V isomorfi nell'intersezione. Inversamente, dati un rivestimento $(\tilde{U}, p_1)$ di U, un rivestimento $(\tilde{V}, p_2)$ di V ed un isomorfismo di rivestimenti*

$$\varphi : {p_1}^{-1}(U \cap V) \to {p_2}^{-1}(U \cap V)$$

è possibile costruire un rivestimento $(\tilde{X}, p)$ di X "incollando" i due rivestimenti.

Dimostrazione. costruiamo lo spazio rivestente $\tilde{X}$ come l'unione di $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$, identificando i punti $u \in {p_1}^{-1}(U \cap V)$ con i punti $\varphi(u) \in {p_2}^{-1}(U \cap V)$ e definiamo la mappa p come

$$p(\tilde{x}) = \begin{cases} p_1(\tilde{x}) & se\ \tilde{x} \in \tilde{U} \\ p_2(\tilde{x}) & se\ \tilde{x} \in \tilde{V} \end{cases}$$

p è ben definita poichè se consideriamo il punto $\tilde{x} \in {p_1}^{-1}(U \cap V)$ $p_1(\tilde{x}) = p_2(\varphi(\tilde{x}))$ per ipotesi. p inoltre è anche chiaramente un rivestimento. L'asserto vale ovviamente anche se $(\tilde{U}, p_1)$ e $(\tilde{v}, p_2)$ sono dei G-rivestimenti. □

Lemma 3.0.6. *Sia (Y, p) un rivestimento di X connesso. Dati $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut(Y, p)$ tali che $\exists\, y_0 \in Y$ tale che $\varphi_1(y_0) = \varphi_1(y_0)$ allora $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.*

Dimostrazione. Notiamo che $p\varphi_1(y) = p(y) = p\varphi_2(y) \quad \forall y \in Y$. Dunque possiamo considerare φ_1, φ_2 come due sollevamenti di p. Poichè assumono lo stesso valore in un punto per il teorema dell'unicità dei sollevamenti risulta $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. □

Dimostrazione. (del Teorema di Seifert-Van Kampen)
dimostriamo l'asserto mostrando che $\pi_1(X, x)$ verifica la proprietà universale del prodotto amalgamato.
Siano $j_{1*}, j_{2*}, i_{1*}, i_{2*}$ le inclusioni dei gruppi fondamentali indotte dalle inclusioni degli spazi topologici come indicato nel grafico sottostante.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[dr, "i_{1*}"] \arrow[drr, "f_1"] & & \\
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \pi_1(X,x) \arrow[r, dashed, "f"] & H \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[ur, "i_{2*}"'] \arrow[urr, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Siano poi $f_1 : \pi_1(U, x) \to H$, $f_2 : \pi_1(V, x) \to H$ due omomorfismi tali che $f_1 j_{1*} = f_2 j_{2*}$.
Vogliamo dimostrare l'esistenza e l'unicità dell'omomorfismo $f : \pi_1(X, x) \to H$ tale che $f i_{1*} = f_1$ e $f i_{2*} = f_2$.
Notiamo che il morfismo f_1 corrisponde a un H-rivestimento $(\tilde{U}, p_1)$ di U e che il morfismo f_2 corrisponde a un H-rivestimento $(\tilde{V}, p_2)$ di V. Poichè $f_1 j_{1*} = f_2 j_{2*}$ le restrizioni dei due H-rivestimenti a $U \cap V$ sono isomorfe ed il fatto che $U \cap V$

sia connesso comporta che l'isomorfismo sia unico.
Possiamo dunque "incollare" $(\tilde{U}, p_1)$ e $(\tilde{V}, p_2)$ in un unico modo (per l'unicità dell'isomorfismo) ottenendo un H-rivestimento $(\tilde{X}, p)$ di X che corrisponde ad un morfismo $f : \pi_1(X, x) \to H$. Notiamo che $(\tilde{X}, p)$ si può ovviamente restringere ai due rivestimenti dai quali è stato costruito e questo comporta che $fi_{1*} = f_1$ e $fi_{2*} = f_2$.
Poichè $\pi_1(X, x)$ verifica la proprietà universale del prodotto amalgamato è isomorfo a $\pi_1(U, x) *_{\pi_1(U \cap V, x)} \pi_1(V, x)$.

□

Corollario 3.0.7. *Se U e V sono semplicemente connessi, allora*

$$\pi_1(X, x) = \{1\}.$$

Dimostrazione. segue banalmente dalla definizione di prodotto amalgamato.

□

Questo corollario ci fornisce uno strumento molto elegante per dimostrare che S^2 è semplicemente connesso.
Sia $U = \left\{(x, y, z) \in S^2 \mid z > -\frac{1}{2}\right\}$ e $V = \left\{(x, y, z) \in S^2 \mid z < \frac{1}{2}\right\}$: sia U che V sono semplicemente connessi in quanto omeomorfi a $\mathbb{R}^2$ e $U \cap V$ è connesso. Similmente si può dimostrare la semplice connessione di S^n, $n > 1$.

Corollario 3.0.8. *Se $U \cap V$ è semplicemente connesso, allora*

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$$

e le mappe di inclusione i_{1*} e i_{2*} sono iniettive.

Dimostrazione. segue direttamente dalla definizione di prodotto amalgamato.

□

Forniamo ora l'enunciato del teorema di Van Kampen senza l'ipotesi che lo spazio X debba essere semilocalmente semplicemente connesso.

Teorema 3.0.9. *Sia X spazio topologico unione di due aperti U_1 e U_2 connessi per archi, e tali che $U_1 \cap U_2$ sia connesso per archi. Sia poi $x \in U_1 \cap U_2$. Allora*

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(U_1, x) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x)} \pi_1(U_2, x).$$

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma delle inclusioni dei gruppi fondamentali indotte dalle inclusioni degli spazi topologici e siano φ_1 e φ_2 le inclusioni rispettivamete di $\pi_1(U_1, x)$ e di $\pi_1(U_2, x)$ nel prodotto amalgamato $\pi_1(U_1, x) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x)} \pi_1(U_2, x) = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_s \rangle$, dove $\pi_1(U_1, x) = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $\pi_1(U_2, x) = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ e $R_s = \left\{ j_1(\gamma) j_2(\gamma)^{-1} \mid \gamma \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x) \right\}$.

Si ha che $i_1 j_1 = i_2 j_2$ e $\varphi_1 j_1 = \varphi_2 j_2$. Per la proprietà del prodotto amalgamato sappiamo che esiste ed è unica la mappa ben definita
$\eta : \pi_1(U_1, x) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x)} \pi_1(U_2, x) \to \pi_1(X, x)$ tale che $\eta \varphi_k = i_k$, $k = 1, 2$, definita come segue:

$$\eta : s_1 s_2 \cdots s_m \mapsto i_{\delta_1}(s_1) i_{\delta_2}(s_2) \cdots i_{\delta_m}(s_m) \tag{3.2}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dr, "i_1"] & \\
\pi_1(U\cap V,x) \arrow[ur, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & \pi_1(U_1,x)*_{\pi_1(U_1\cap U_2,x)}\pi_1(U_2,x) \arrow[r, "\eta"] & \pi_1(X,x) \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[u, "\varphi_2"'] \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

con $i_{\delta_k}(s_k) = i_1(s_k)$ se $s_k \in \pi_1(U_1,x)$, $i_{\delta_k}(s_k) = i_2(s_k)$ se $s_k \in \pi_1(U_2,x)$.

Per dimostrare l'asserto del teorema vogliamo mostrare che tale mappa η sia suriettiva e iniettiva, ovvero che sia l'isomorfismo cercato. Dividiamo quindi la dimostrazione in due parti: nella prima ci occuperemo di verificare la suriettività di η e nella seconda di verificarne l'iniettività.

SURIETTIVITÀ

Poichè $\eta\varphi_1 = i_1$ e $\eta\varphi_2 = i_2$, per verificare la condizione richiesta è sufficiente verificare che il gruppo $\pi_1(X,x)$ sia generato dalle immagini di i_1 e i_2, ovvero che ogni elemento $[f]$ di $\pi_1(X,x)$ si possa scrivere come prodotto $i_{\delta_1}([f_1])i_{\delta_2}([f_2])\cdots i_{\delta_n}([f_n])$ di elementi di $\pi_1(U_1,x)$ e $\pi_1(U_2,x)$.
Consideriamo f arco chiuso in X di base x e sia $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ ricoprimento di I con numero di Lebesgue δ (si veda capitolo 1). Data la suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ con $t_i - t_{i-1} < \delta$ risulta che $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U_1$ o U_2. Si noti che non è restrittivo supporre $f(t_i) \in U_1 \cap U_2$, infatti se così non fosse si avrebbe che $f([t_{i-1}, t_{i+1}]) \subset U_1$ o U_2 e potrei eliminare tali t_i ottenendo una suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$ tale che $f(t_i) \in U_1 \cap U_2$.
Definiamo ora gli archi $f_i : I \to X$ da t_{i-1} a t_i come

$$f_i(t) = ((1-t)t_{i-1} + tt_i) \tag{3.3}$$

Dimostriamo che $f \sim f_1 * f_2 * \cdots * f_m$ procedendo per induzione.
Partiamo con il caso $m = 2$, ovvero con la suddivisione $0 = t_0 < t_1 < t_2 = 1$, allora sappiamo che

$$(f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t) = f(2tt_1) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1) = f(t_1 + (2t-1)(1-t_1) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Risulta immediato trovare l'omotopia tra f e $f_1 * f_2$ data da $F : I \times I \to X$ definita come

$$F(t,s) = \begin{cases} f((1-s)2tt_1 + st) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f((1-s)(t_1 + (2t-1)(1-t_1)) + st) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Supponiamo ora che l'asserto sia vero per il caso $m-1$ e verifichiamo che risulti tale anche per m.
Data la suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$, ponendo $s_1 = t_{m-1}$ otteniamo un'altra suddivisione $0 = s_0 < s_1 < s_2 = 1$. Per quanto appena visto si avrà che $f \sim g * h$ con $g(t) = f(ts_1)$ e $h(t) = f((1-t)s_1 + t) = f_m(t)$.
Sia ora

$$0 = \tfrac{t_0}{t_{m-1}} < \tfrac{t_1}{t_{m-1}} < \cdots < \tfrac{t_{m-1}}{t_{m-1}} = 1$$

una suddivisione di I in $m-1$ parti, allora per ipotesi induttiva si ha che

$$g \sim g_1 * g_2 * \cdots * g_{m-1}$$

con

$$g_i = g((1-t)\frac{t_{i-1}}{t_{m-1}} + t\frac{t_i}{t_{m-1}}) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i) = f_i \tag{3.4}$$

Allora

$$f \sim g * h \sim g_1 * g_2 * \cdots * g_{m-1} * h \sim f_1 * f_2 * \cdots * f_{m-1} * f_m \tag{3.5}$$

Per quanto abbiamo appena dimostrato risulta che $[f] = [f_1][f_2]\cdots[f_m]$, dove f_i è un arco da $f(t_{i-1})$ a $f(t_i)$ tutto contenuto in U_1 o U_2. Per verificare l'asserto però dobbiamo verificare che $[f] = [\beta_1][\beta_2]\cdots[\beta_m]$ dove $[\beta_i]$ è un elemento di $i_1(\pi_1(U_1, x))$ o di $i_2(\pi_1(U_2, x))$.
Per ipotesi $U_1 \cap U_2$ è connesso per archi, allora esiste un arco $\alpha_i(t)$ da x a $f(t_i)$ tutto contenuto in $U_1 \cap U_2$ e siano $\alpha_0(t) = \alpha_m(t) = x \ \forall t \in I$.
Per le proprietà dell'omotopia di archi si ha che

$$[f] = [\alpha_0][f_1][\overline{\alpha_1}][\alpha_1][f_1][\overline{\alpha_2}]\cdots[\alpha_{m-1}][f_1][\overline{\alpha_m}] =$$

$$= [\alpha_0 * f_1 * \overline{\alpha_1}][\alpha_1 * f_1 * \overline{\alpha_2}]\cdots[\alpha_{m-1} * f_1 * \overline{\alpha_m}] =$$

$$= [\beta_1][\beta_2]\cdots[\beta_m]$$

dove β_i è un arco di base x contenuto in U_1 o in U_2 e dunque appartenente a $i_1(\pi_1(U_1, x))$ o $i_2(\pi_1(U_2, x))$. Questo dimostra la suriettività di η.

INIETTIVITÀ

Dobbiamo verificare che, data $\omega = s_1 s_2 \cdots s_n \in \pi_1(U_1, x) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x)} \pi_1(U_2, x)$ tale che $\eta(\omega) = i_{\delta_1}(s_1) i_{\delta_2}(s_2) \cdots i_{\delta_n}(s_n) = 1$, risulti $\omega = 1$, ovvero che si possa ridurre alla parola vuota tramite le relazioni R_1, R_2, R_s. Consideriamo allora gli archi f_k chiusi in x e contenuti in U_{δ_k} tali che $i_{\delta_k}(s_k) = [f_k]$ e definiamo l'arco $f : I \to X$ come la concatenazione degli f_k, $k = 1, \cdots, n$. Ovvero, posta la suddivisione di I

$$0 = t_0 < t_1 = \tfrac{1}{n} < t_2 = \tfrac{2}{n} < \cdots < t_{n-1} = \tfrac{n-1}{n} < t_n = 1$$

risulta

$$f_k(t) = f((1-t)t_{k-1} + tt_k)$$

Da quanto visto nella dimostrazione precedente della suriettività di η, risulta che

$$[f] = [f_1][f_2]\cdots[f_n] \text{ in } \pi_1(X, x)$$

ma $\eta(\omega) = [f_1][f_2]\cdots[f_n] = 1$, dunque esiste un'omotopia $F : I \times I \to X$ tra f e ε_x, tale che $F(t, 0) = f(t), F(t, 1) = F(0, s) = F(1, s) = x$. Sia ora δ il numero di Lebesgue del ricoprimento $\{F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2)\}$ e costruiamo la suddivisione di $I \times I$ in rettangoli $R_{i,j} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$ con

$$0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_\alpha = 1$$
$$0 = v_0 < v_1 < \cdots < v_\beta = 1$$

Supponiamo che la suddivisione $\{u_0, u_1, \cdots, u_\alpha\}$ sia un raffinamento della suddivisione $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ e che ogni rettangolo $R_{i,j}$ abbia diametro minore di δ, in modo che $F(R_{i,j}) \subset U_1$ o U_2 o $U_1 \cap U_2$.
Poichè in tutti e tre i casi $F(R_{i,j})$ è contenuto in uno spazio connesso per archi, che denotiamo $U_{i,j}$, possiamo trovare un arco $\psi_{i,j}$ da x a $F(u_i, v_j)$.
Definiamo inoltre gli archi $\varphi_{i,j}$ e $\gamma_{i,j}$ in $U_{i,j}$ nel modo seguente:

$$\varphi_{i,j} = F((1-t)u_{i-1} + tu_i, v_j)$$
$$\gamma_{i,j} = F(u_i, (1-t)v_{j-1} + tv_j)$$

Si noti che in $\pi_1(X, x)$ risulta:

$$[f] = [\varphi_{1,0}][\varphi_{2,0}]\cdots[\varphi_{\alpha,0}]$$
$$[\varepsilon_x] = [\varphi_{1,\beta}][\varphi_{2,\beta}]\cdots[\varphi_{\alpha,\beta}]$$

E gli archi $\varphi_{i,j-1} * \gamma_{i,j}$ e $\gamma_{i-1,j} * \varphi_{i,j}$ sono omotopi in $U_{i,j}$.
Infine definiamo gli archi chiusi di base x:

$$f_{i,j} = \psi_{i-1,j} * \varphi_{i,j} * \overline{\psi_{i,j}}$$
$$g_{i,j} = \psi_{i,j-1} * \gamma_{i,j} * \overline{\psi_{i,j}}$$

Risulta che gli archi $f_{i,j-1} * g_{i,j}$ e $g_{i-1,j} * f_{i,j}$ sono omotopi in $U_{i,j}$ in quanto lo sono $\varphi_{i,j-1} * \gamma_{i,j}$ e $\gamma_{i-1,j} * \varphi_{i,j}$. Allora per la proprietà dell'omotopia di archi ricaviamo

$$[f_{i,j-1}] = [g_{i-1,j}][f_{i,j}][\overline{g_{i,j}}] \tag{3.6}$$

Tale uguaglianza vale in $U_{i,j}$, ovvero in $\pi_1(U_1, x)$ o in $\pi_1(U_2, x)$ o in $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$ ed è quindi una conseguenza delle relazioni R_1 o R_2. Per questo motivo essa varrà anche in $\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_s\rangle$.
Si noti che, dato l'indice i_1 tale che $u_{i_1} = \frac{1}{n}$, sempre per una dimostrazione precedente, vale che

$$[f_1] = [f_{1,0}][f_{2,0}]\cdots[f_{i_1,0}]$$

e in $\langle S_{\delta_1} \mid R_{\delta_1}\rangle$ risulta

$$g_1 = [f_{1,0}][f_{2,0}]\cdots[f_{i_1,0}]$$

Ripetendo questo ragionamento per tutti gli s_i otteniamo

$$\omega = [f_{1,0}][f_{2,0}]\cdots[f_{\alpha,0}] \text{ in } \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_s\rangle$$

Ora, utilizzando l'uguaglianza 3.6, possiamo riscrivere ω in $\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_s\rangle$ come

$$\omega = [g_{0,1}][f_{1,1}]([\overline{g_{1,1}}][g_{1,1}])[f_{2,1}]([\overline{g_{2,1}}][g_{2,1}])\cdots[\overline{g_{\alpha-1,1}}][g_{\alpha-1,1}][f_{\alpha,1}][\overline{g_{\alpha,1}}]$$

con $g_{0,1} = g_{\alpha,1} = \varepsilon_x$ e $[g_{0,1}] = [g_\alpha, 1] = 1$. Vogliamo ora dimostrare che

$$[\overline{g_{k,1}}][g_{k,1}] = 1 \text{ in } \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_s \rangle$$

Se $[\overline{g_{k,1}}]$ e $[g_{k,1}]$ sono espresse entrambe come parole in S_1 o in S_2, allora l'uguaglianza precedente è una conseguenza banale delle relazioni R_1 o R_2. Se invece $[\overline{g_{k,1}}]$ è espressa come parola in S_1 e $[g_{k,1}]$ come parola in S_2, evidentemente $g_{k,1}$ sarà un arco in $U_1 \cap U_2$ e, detta γ la sua classe di equivalenza in $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$, si ha che $j_2(\gamma) = [g_{k,1}]$ e $j_1(\gamma^{-1}) = j_1(\gamma)^{-1} = [\overline{g_{k,1}}]$ e dunque l'uguaglianza è verificata per le relazioni di R_s.
Iterando tale procedimento si ottiene che

$$\begin{aligned} \omega &= [f_{1,1}][f_{2,1}] \cdots [f_{\alpha,1}] = \\ &= [f_{1,2}][f_{2,2}] \cdots [f_{\alpha,2}] = \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &= [f_{1,\beta}][f_{2,\beta}] \cdots [f_{\alpha,\beta}] = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il che conclude la dimostrazione.

□

Diamo infine un'ultima generalizzazione del teorema di Seifert-Van Kampen nel caso in cui lo spazio X sia unione di un numero finito n di aperti. In questo caso definiamo $j_{st} : \pi_1(U_s \cap U_t, x) \to \pi_1(U_s, x)$ l'inclusione indotta dall'inclusione degli spazi topologici.

Teorema 3.0.10. *Sia X spazio topologico unione di un numero finito n di aperti U_n connessi per archi, e tali che $U_r \cap U_s \cap U_t$, $\forall r, s, t = 1, \cdots, n$ sia connesso per archi. Sia poi $x \in \cap_{k=1,\cdots,n} U_k$. Allora*

$$\pi_1(X, x) = *_k \pi_1(U_k, x)/N$$

dove N è il sottogruppo normale generato da
$R_s = \left\{ j_{st}(\gamma) j_{ts}(\gamma)^{-1} \mid s, t = 1, \cdots n \text{ e } \gamma \in \pi_1(U_s \cap U_t, x) \right\}$.
Possiamo anche utilizzare la notazione equivalente

$$\pi_1(X, x) = \langle S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n \mid R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n \cup R_s \rangle.$$

Dimostrazione. Consideriamo il prodotto libero $*_k \pi_1(U_k, x)$ e la mappa

$$\theta : *_k \pi_1(U_k, x) \to \pi_1(X, x) \text{ tale che } \theta \varphi_k = i_k$$

Vogliamo verificare che tale mappa sia suriettiva e che il suo nucleo sia proprio N. La suriettività di θ si dimostra in modo del tutto simile a quello della suriettività di η del teorema precedente, l'unica differenza consiste nel considerare il ricoprimento $\left\{ f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \cdots, f^{-1}(U_n) \right\}$ di I.
In questo modo si ottiene che $[f] = [f_1][f_2] \cdots [f_m]$, dove f_m è un arco in U_{δ_m}: poichè per ipotesi $x \in \cap_{k=1,\cdots,n} U_k$ e le intersezioni degli aperti U_k sono a due a due connesse per archi, possiamo ancora trovare gli archi $\beta_k = \alpha_{k-1} * f_k * \overline{\alpha_k}$ tali che $[f] = [\beta_1][\beta_2] \cdots [\beta_m]$.

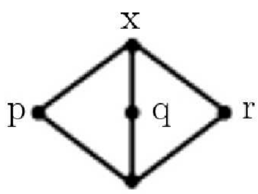
Anche la dimostrazione che N sia il nucleo di θ procede sulla falsariga della dimostrazione dell'iniettività di η: l'unico accorgimento consiste nel "deformare" i rettangoli $R_{i,j}$ dati dalle suddivisioni $0 = u_0 < u_1 < \cdots < u_\alpha = 1$, $0 = v_0 < v_1 < \cdots < v_\beta = 1$ in modo che ogni spigolo sia contenuto in al massimo tre rettangoli. In questo modo, con l'ipotesi che le intersezioni degli aperti U_k siano connesse per archi a tre a tre, possiamo sempre trovare gli archi $\psi_{i,j}$ da x a $F(u_i, v_j)$.

$\square$

Concludiamo il capitolo mostrando, tramite due esempi di errata applicazione del teorema di Seifert-Van Kampen, come l'ipotesi di connessione per archi dell'intersezione degli aperti sia assolutamente fondamentale.

- Si potrebbe essere tentati di calcolare il gruppo fondamentale di $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ in $x = (0, 1)$ applicando il teorema di Seifert-Van Kampen utilizzando gli aperti $U_1 = S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ e $U_2 = S^1 \setminus \{(1, 0)\}$.
  In questo modo risulterebbe che U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ avrebbero gruppo fondamentale banale e dunque $\pi_1(S^1, x)$ sarebbe il gruppo banale e non $\mathbb{Z}$.
  L'errore sta ovviamente nell'errata scelta degli aperti, che ha comportato che $U_1 \cap U_2$ non fosse connesso per archi contro le ipotesi del teorema.

- Vediamo ora un errore del tutto simile nel calcolo del gruppo fondamentale dello spazio X mostrato nella figura sottostante.



  Consideriamo due famiglie di aperti $\{U_i\}$ e $\left\{\tilde{U}_i\right\}$ con $U_1 = X \setminus \{p\}$, $U_2 = X \setminus \{q\}$, $\tilde{U}_1 = U_1$, $\tilde{U}_2 = U_2$ e $\tilde{U}_3 = X \setminus \{r\}$.
  Nel primo caso si otterrebbe $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, in quanto sia U_1 che U_2 sono omotopi a S^1 e $U_1 \cap U_2$ è contraibile.
  Nel secondo caso invece si avrebbe la conclusione discordante $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
  L'errore sta ovviamente nella scelta del ricoprimento $\left\{\tilde{U}_i\right\}$, in quanto l'intersezione dei tre aperti non è connessa per archi.

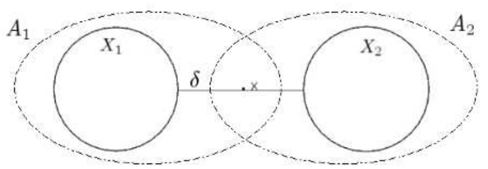
Capitolo 4

Applicazioni del teorema di Seifert-Van Kampen

Vediamo ora come applicare il teorema di Seifert-Van Kampen per calcolare il gruppo fondamentale di spazi topologici.
Considereremo una lista di spazi particolari e cercheremo, di volta in volta, di ricavare procedimenti generali applicabili a spazi dello stesso tipo. Nei nostri calcoli utilizzeremo le varie versioni del teorema esposte nel capitolo precedente.

4.1 “Wedge Sum“ di spazi

- Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ rappresentato in figura, costituito da due circonferenze, X_1 e X_2, unite da un segmento δ.



Poichè X è connesso per archi, il suo gruppo fondamentale è indipendente dal punto, ma per comodità poniamo x a metà di δ. Siano poi U_1 e U_2 gli aperti di X ottenuti dall'intersezione con gli aperti A_1 e A_2 di $\mathbb{R}^2$.
Come risulta dalla figura, U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ sono aperti e connessi per archi: dunque è possibile applicare il teorema di Seifert-Van Kampen. Notiamo che X_1 e X_2 sono dei retratti forti di deformazione rispettivamente di U_1 e U_2 e inoltre $U_1 \cap U_2$ è contraibile.
Dal teorema risulta allora

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(U_1, x) * \pi_1(U_2, x) = \pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

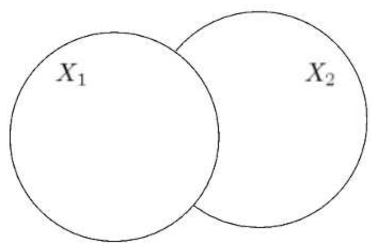
- Sia X lo spazio “a forma di otto” $X = A_1 \cup A_2$ con

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

Per calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$ con $x = (0, 0)$ consideriamo i due aperti $U_1 = X \setminus \{(-2, 0)\}$ e $U_2 = X \setminus \{(2, 0)\}$.
È evidente che gli aperti U_1,U_2,$U_1 \cap U_2$ siano connessi per archi e inoltre risulta che $U_1 \cap U_2$ sia semplicemente connesso, in quanto contraibile in x. Risulta poi che A_1 e A_2 siano retratti forti di deformazione rispettivamente di U_1 e U_2:tali spazi sono dunque omotopiacamente equivalenti ed hanno stesso gruppo fondamentale.
Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen risulta che $\pi_1(X, x) = \pi_1(U_1, x) * \pi_1(U_2, x)$, ovvero $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ gruppo libero su due generatori.

- Sia X lo spazio ottenuto attaccando due circonferenze X_1 e X_2 nel modo rappresentato nella figura seguente.



Applicando lo stesso procedimento degli esempi precedenti si dimostra che il suo gruppo fondamentale è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

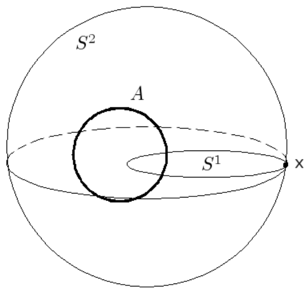
Notiamo che in tutti questi casi, poichè l'intersezione degli aperti è semplicemente connessa, il teorema di Seifert-Van Kampen ci dice che il gruppo fondamentale di X è il prodotto libero del gruppo fondamentale degli aperti.
Vediamo dunque di identificare una tipologia di spazi per la quale valga tale proprietà.

Definiamo “wedge sum” $\vee_i X_i$ di un insieme $\{X_i\}$ di spazi topologici connessi per archi con punto base $x_i \in X_i$ lo spazio quoziente dell'unione disgiunta $\amalg_i X_i$ dove tutti i punti base sono identificati in un punto che chiamiamo x.
Se ogni punto x_i è il retratto forte di deformazione di un aperto V_i di X_i,

allora X_i è il retratto forte di deformazione dell'aperto $U_i = X_i \vee_{i \neq j} V_j$ e l'intersezione di tutti gli U_i è contraibile.
Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen considerando $\vee_i X_i$ come l'unione degli U_i, risulta

$$\pi_1(\vee_i X_i, x) = *_i \pi_1(X_i, x) \tag{4.1}$$

- Sia X il complementare in $\mathbb{R}^3$ della circonferenza A.



In figura è illustrato un retratto forte di deformazione di X definito come $S^1 \vee S^2$, dove A è interno alla sfera S^2 e la circonferenza S^1 è concatenata con A.
La retrazione manda i punti di X fuori da S^2 sulla sfera ed i punti di X dentro S^2 sulla circonferenza o sulla sfera. Poichè X è connesso per archi, scegliamo di calcolare il gruppo fondamentale proprio nel punto x che unisce S^1 con S^2: essendo X e $S^1 \vee S^2$ omotopicamente equivalenti, per quanto visto nel primo capitolo il loro gruppo fondamentale sarà lo stesso e dunque ci impegnamo a calcolare $\pi_1(S^1 \vee S^2, x)$.
Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen risulta

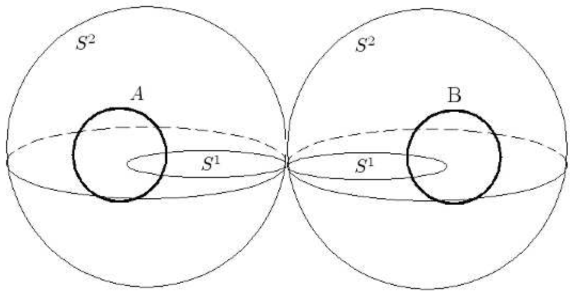
$$\pi_1(S^1 \vee S^2, x) = \pi_1(S^1, x) * \pi_1(S^2, x) = \pi_1(S^1, x)$$

essendo la sfera semplicemente connessa.
Concludiamo dunque che $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z}$.

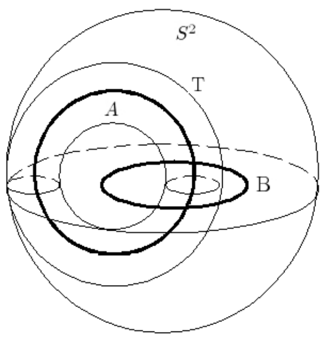
Passiamo ora al caso del complementare di due circonferenze A e B: è interessante notare come il gruppo fondamentale vari a seconda che siano concatenate oppure no.
Consideriamo dapprima il caso in cui siano disgiunte: lo spazio X ammette allora come retratto forte di deformazione la wedge sum $S^1 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^2$ mostrata in figura.

Applicando il procedimento precedente risulta

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(S^1 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^2, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$



Assumiamo ora che A e B siano concatenate: per calcolare il gruppo fondamentale di X dobbiamo considerare che un suo retratto forte di deformazione è la wedge sum di un toro e di una sfera.



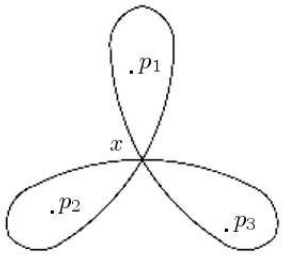
Sempre con lo stesso ragionamento otteniamo

$$\pi_1(X, x) = \pi_1((S^1 \times S^1) \vee S^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Consideriamo ora l'esempio di due spazi non ottenuti tramite wedge sum, ma tali che gli n aperti di cui sono unione abbiano intersezione semplicemente connessa.

- Sia X il complementare in $\mathbb{R}^2$ di n punti $p_1, \cdots p_n$ e $x \in X$.
  Per calcolare il gruppo fondamentale di X consideriamo la wedge sum $\vee_i \gamma_i$ in x di n archi chiusi $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ omeomorfi a S^1 tali che p_i sia dentro γ_i $\forall i = 1, \cdots, n$.
  In figura diamo l'esempio del caso $n = 3$.

  Risulta che X sia omotopicamente equivalente a $\vee_i \gamma_i$ e dunque per quanto visto $\pi_1(X, x)$ è il prodotto libero di n copie di $\mathbb{Z}$.

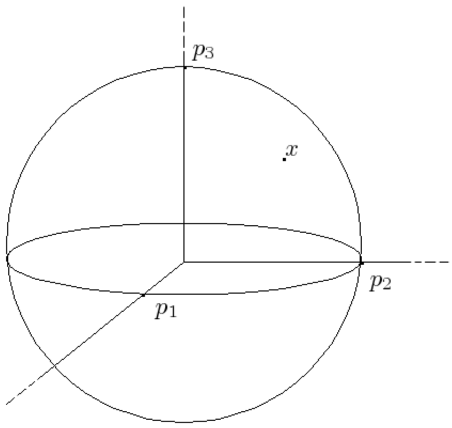


- Sia X il complementare in S^2 di n punti $p_1, \cdots p_n$ e $x \in X$.
  Dall'omeomorfismo tra S^2 meno un punto e $\mathbb{R}^2$ otteniamo l'omeomorfismo tra S^2 meno n punti e $\mathbb{R}^2$ meno n-1 punti.
  Dunque dal risultato dell'esempio precedente risulta che $\pi_1(X, x)$ è il prodotto libero di n-1 copie di $\mathbb{Z}$.

- Sia X il complementare in $\mathbb{R}^3$ dei 3 semiassi coordinati

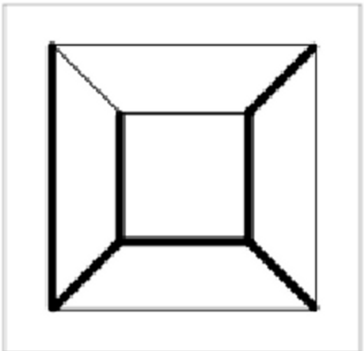
$$\{y = z = 0, x > 0\} \cup \{x = z = 0, y > 0\} \cup \{x = y = 0, z > 0\}$$

  e $x \in X$. Per calcolare $\pi_1(X, x)$ consideriamo che $S^2 \setminus \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ è omotopicamente equivalente a X.



  Dunque per quanto visto $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

- Sia X lo spazio mostrato nella figura sottostante, ovvero il grafo costituito dai 12 lati di un cubo.
  Sia T il sottospazio contraibile costituito dai lati rimarcati e siano $e_1 \cdots e_5$ i cinque lati di $X \setminus T$.
  Per calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$ con x un qualsiasi punto di T, consideriamo X come l'unione di cinque aperti $U_1, \cdots U_5$, ognuno dei quali definito come un intorno aperto di $T \cup e_i$ retratto forte di deformazione di $T \cup e_i$. In questo modo l'intersezione di due o più U_i è un retratto

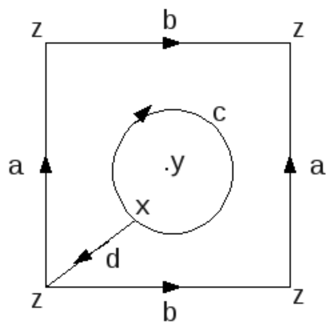


forte di deformazione di T e dunque è contraibile.
Le ipotesi del teorema di Seifert-Van Kampen sono rispettate, in quanto sia $\cap_{i=1,\cdots 5} U_i$, che tutti gli U_i sono connessi per archi.
Risulta quindi che $\pi_1(X,x) = *_i \pi_1(U_i,x)$ e poichè ognuno degli U_i è omotopicamente equivalente ad S^1, $\pi_1(X,x)$ è il prodotto libero di cinque copie di $\mathbb{Z}$.

4.2 Superfici

Utilizziamo ora il teorema di Seifert-Van Kampen per calcolare il gruppo fondamentale di varietà compatte e connesse di dimensione 2, ovvero di superifici.
Analizzeremo inizialmente superfici con gruppo fondamentale noto e poi vedremo casi inediti.

- Sia X un toro, vogliamo dimostrare tramite il teorema di Seifert-Van Kampen che il suo gruppo fondamentale, come avevamo ricavato in precedenza con altri metodi, è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
  Rappresentiamo X come un quadrato con i lati a,b identificati come nella figura sottostante e sia x il punto in cui vogliamo calcolare il gruppo fondamentale.



Chiamiamo y il centro del quadrato, c la circonferenza di centro y e passante per x e d il segmento da x a z. Siano poi $U_1 = X \setminus \{y\}$ e $U_2 = X \setminus (a \cup b)$: U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ sono aperti e connessi per archi. Notiamo che $U_1 \cap U_2$ è omotopicamente equivalente a S^1 e dunque il suo gruppo fondamentale sarà il gruppo libero su un generatore, che poniamo come la classe di equivalenza dell'arco γ ottenuto percorrendo c nel verso indicato in figura.
Consideriamo ora $\pi_1(U_1, x)$: poichè la figura "a forma di otto" precedentemente analizzata è un retratto forte di deformazione di U_1, $\pi_1(U_1, z)$ è il gruppo libero su due generatori $[\alpha]$ e $[\beta]$ dove α e β sono gli archi chiusi ottenuti percorrendo le due circonferenze.
Detto δ l'arco ottenuto percorrendo d da x a z, possiamo allora affermare che $\pi_1(U_1, x)$ sia il gruppo libero generato da $K_1 = [\delta * \alpha * \overline{\delta}]$ e $K_2 = [\delta * \beta * \overline{\delta}]$.
Infine il gruppo fondamentale di U_2 è il gruppo banale poichè U_2 è contraibile.
Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen, otteniamo che $\pi_1(X, x)$ è il gruppo generato da $\{K_1, K_2\}$ con la relazione

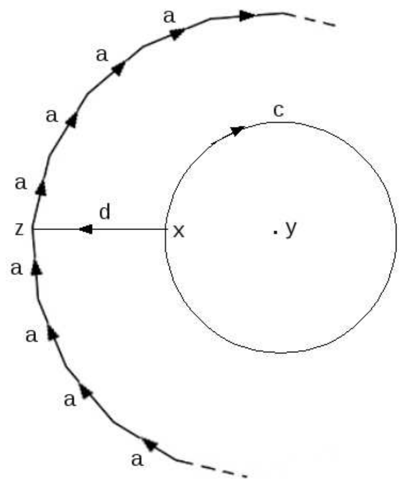
$$j_1(\gamma) = j_2(\gamma)$$
ovvero
$$j_1(\gamma) = [\delta * \alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta} * \overline{\delta}] =$$

$$= [\delta * \alpha * \overline{\delta}][\delta * \beta * \overline{\delta}][\delta * \overline{\alpha} * \overline{\delta}][\delta * \overline{\beta} * \overline{\delta}] =$$

$$= K_1 K_2 {K_1}^{-1} {K_2}^{-1} = j_2(\gamma) = 1$$

Pertanto $\pi_1(X, x) = \langle K_1, K_2 \mid K_1 K_2 {K_1}^{-1} {K_2}^{-1} = 1 \rangle$ che abbiamo già visto essere la presentazione di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- Sia ora X lo spazio ottenuto identificando gli n lati di una regione poligonale come nella figura sottostante.



Siano $U_1 = X \setminus \{y\}$ e $U_2 = X \setminus a$: U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ sono aperti e connessi per archi e dunque soddisfano le ipotesi del teorema.
Notiamo innanzitutto che la curva chiusa su z formata dai lati identificati del poligono è un retratto forte di deformazione di U_1 e dunque $\pi_1(U_1, z)$ è il gruppo libero generato da $[\alpha]$, dove α è il cammino ottenuto percorrendo a nel verso indicato in figura. Dunque $\pi_1(U_1, x)$ è il gruppo libero generato da $K = [\delta * \alpha * \overline{\delta}]$ con δ cammino ottenuto percorrendo d nel verso indicato.
Essendo $U_1 \cap U_2$ omotopo a S^1, si vede subito che $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$ è il gruppo libero generato da γ, cammino ottenuto percorrendo la circonferenza c.
Infine è chiaro che $\pi_1(U_2, x) = \{1\}$.
Calcoliamo ora l'insieme delle relazioni R_s:

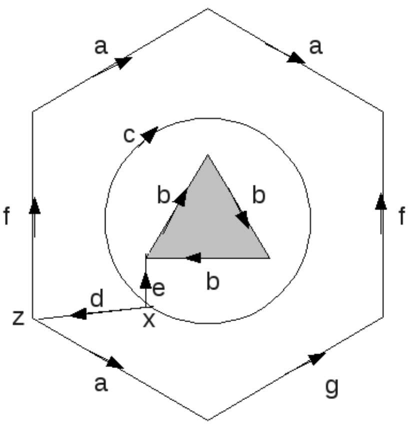
$$\varphi_1(\gamma) = \varphi_2(\gamma)$$
ovvero
$$[\delta][\alpha]^n[\overline{\delta}] = [\delta * \alpha * \overline{\delta}]^n = K^n = 1$$

In questo modo otteniamo che $\pi_1(X, x)$ ha presentazione $\{K \mid K^n = 1\}$, ovvero, per quanto visto nel capitolo 2, è isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.
Notiamo che nel caso $n = 2$ lo spazio che si ottiene è il piano proiettivo reale.

- Sia ora X lo spazio di identificazione della figura sottostante, costituito da un esagono a cui è stato tolto il triangolo centrale (colorato in grigio). Le

identificazioni sono date per i lati a,f,g,b.
Per applicare il teorema poniamo $U_1 = X \smallsetminus b$ e $U_2 = X \smallsetminus (a \cup f \cup g)$: U_1,U_2,$U_1 \cap U_2$ sono aperti e connessi per archi.

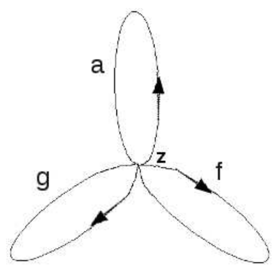
Siano α,φ,ψ,β i cammini ottenuti percorrendo rispettivamente a,f,g,b



nei versi indicati e δ,ϵ,γ i cammini ottenuti percorrendo d,e,c.

Poichè la figura sottostante è un retratto forte di deformazione di U_1, risulta che $\pi_1(U_1, x)$ è il gruppo libero con generatori

$$K_1 = [\delta * \alpha * \overline{\delta}],$$
$$K_2 = [\delta * \varphi * \overline{\delta}],$$
$$K_3 = [\delta * \psi * \overline{\delta}]$$



Diversamente dai casi precedenti, U_2 non è contraibile poichè la curva chiusa b è un suo retratto di deformazione e dunque $\pi_1(U_2, x)$ è il gruppo libero generato da $G = [\epsilon * \beta * \overline{\epsilon}]$.
Come nei casi precedenti $U_1 \cap U_2$ è omotopo a S^1 e dunque $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$ è il gruppo libero generato da γ.
Procediamo dunque al calcolo di R_s:

$$j_1(\gamma) = j_2(\gamma)$$
ovvero

$$\begin{gathered}[\delta * \varphi * \alpha * \alpha * \overline{\varphi} * \overline{\psi} * \overline{\alpha} * \overline{\delta}] = \\ = [\epsilon * \beta * \beta * \beta * \overline{\epsilon}] \\ \text{ovvero} \\ K_2 {K_1}^2 {K_2}^{-1} {K_3}^{-1} {K_1}^{-1} = G^3\end{gathered}$$

Otteniamo quindi che $\pi_1(X, x)$ ha presentazione

$$\langle K_1, K_2, K_3, G \mid K_2 {K_1}^2 {K_2}^{-1} {K_3}^{-1} {K_1}^{-1} = G^3 \rangle$$

Ma dalla relazione si evince che $K_3 = {K_1}^{-1} G^{-3} K_2 {K_1}^2 {K_2}^{-1}$ e dunque $\pi_1(X, x)$ è gruppo libero su tre generatori.

- Sia X il doppio toro, ovvero lo spazio ottenuto considerando due tori, togliendo un disco aperto da ognuno e "incollando" i bordi dei due buchi. Sia poi $x \in X$.

Volendo essere più rigorosi, possiamo definire il doppio toro X come somma connessa di due tori $T_1 \sharp T_2$

$$T_1 \sharp T_2 = ((T_1 \smallsetminus \mathring{S}_1) \cup (T_2 \smallsetminus \mathring{S}_2)) / \sim$$

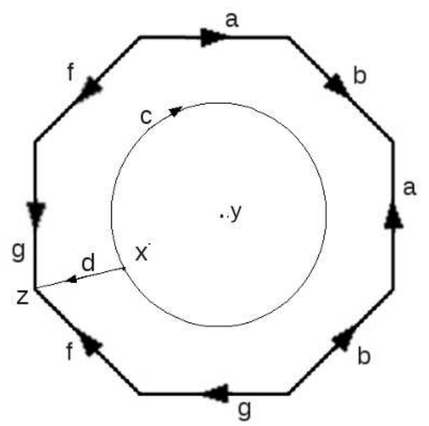
dove:

– $S_1 \subset T_1$ e $S_2 \subset T_2$ omeomorfi al disco $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\right\}$ con omeomorfismi $h_1 : S_1 \to D$ e $h_2 : S_2 \to D$.

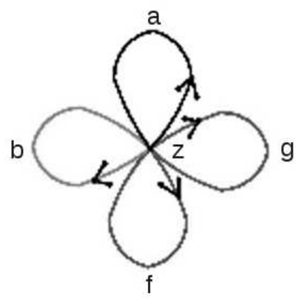
– $\sim$ è definita non banale solo sulla frontiera di S_1 e S_2, dove $x \sim {h_2}^{-1} h_1(x)$

Possiamo ottenere X identificando i lati di un ottagono a,b,f,g come nella figura sottostante.

Come negli esempi precedenti, sia y il centro dell'ottagono, d il segmento da x a z e c la circonferenza di centro y passante per x.
Operiamo il solito procedimento per calcolare il gruppo fondamentale: siano dati gli aperti $U_1 = X \smallsetminus \{y\}$ e $U_2 = X \smallsetminus \{a \cup b \cup f \cup g\}$: U_1,U_2,$U_1 \cap U_2$ risultano aperti e connessi per archi.
Notiamo poi che la wedge sum di quattro circonferenze è un retratto forte



di deformazione di U_1. Chiamando α,β,φ,ψ i cammini ottenuti percorrendo rispettivamente a,b,f,g nei versi indicati, otteniamo che $\pi_1(U_1, z)$ è il gruppo libero sui quattro generatori $[\alpha]$,$[\beta]$,$[\varphi]$,$[\psi]$.



Definendo δ come il cammino ottenuto percorrendo d nel verso indicato, otteniamo che $\pi_1(X, x)$ è il gruppo libero sui quattro generatori

$$
\begin{aligned}
K_1 &= [\delta * \alpha * \overline{\delta}] \\
K_2 &= [\delta * \beta * \overline{\delta}] \\
K_3 &= [\delta * \varphi * \overline{\delta}] \\
K_4 &= [\delta * \psi * \overline{\delta}]
\end{aligned}
$$

Essendo $U_1 \cap U_2$ omotopo a S^1, $\pi_1(U_1 \cap U_2, x) = \mathbb{Z}$ ed è generato da $[\gamma]$ con γ arco ottenuto percorrendo c nel verso indicato.
Infine chiaramente $\pi_1(U_2, x) = \{1\}$.
Applicando il teorema di Seifert-Van Kampen per calcolare R_s risulta:

$$j_1(\gamma) = j_2(\gamma)$$

ovvero

$$[\delta * \alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta} * \psi * \varphi * \overline{\psi} * \overline{\varphi}] = 1$$

ovvero

$$K_1 K_2 {K_1}^{-1} {K_2}^{-1} K_4 K_3 {K_4}^{-1} {K_3}^{-1} = 1$$

Risulta dunque che $\pi_1(X, x)$ ha presentazione

$$\langle K_1, K_2, K_3, K_4 \mid K_1 K_2 {K_1}^{-1} {K_2}^{-1} K_4 K_3 {K_4}^{-1} {K_3}^{-1} = 1 \rangle$$

Si noti che se invece X fosse stato la wedge sum di due tori, $T_1 \vee T_2$, $\pi_1(X, x)$ sarebbe stato il gruppo su quattro generatori G_1, G_2, G_3, G_4 con presentazione

$$\langle G_1, G_2, G_3, G_4 \mid G_1 G_2 {G_1}^{-1} {G_2}^{-1} = 1, G_3 G_4 {G_3}^{-1} {G_4}^{-1} = 1 \rangle$$

4.3 Oltre Van Kampen: la successione di Mayer - Vietoris

In questo capitolo abbiamo visto come il teorema di Seifert-Van Kampen sia molto utile per calcolare il gruppo fondamentale di spazi particolari.
Volendo però fornire applicazioni più "concrete" bisogna considerare il corrispettivo omologico: la successione di Mayer - Vietoris, utilissimo nel campo delle funzioni di taglia per il riconoscimento di immagini.
Le funzioni di taglia sono strumenti matematici definiti in Teoria della Taglia per permettere il confonto tra forme.
Una forma in tale ambito viene definita come una coppia (X, φ), detta coppia di taglia, dove X è uno spazio topologico compatto, localmente connesso e di Hausdorff che rappresenta l'oggetto di cui si vuole descrivere la forma, e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, detta funzione misurante, il cui ruolo è descrivere determinate proprietà geometriche di X.

Senza addentrarci nei dettagli, diremo che le funzioni di taglia vengono usate per il riconoscimento di immagini, onde sonore e sottoinsiemi di spazi euclidei e costituiscono dunque un campo di ricerca della visione artificiale.
Per darne un'idea molto generale, se con D indichiamo l'insieme $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < v\}$ e con X_u l'insieme di sotto-livello $\{x \in X : \varphi(x) \leq u\}$ per ogni $u \in \mathbb{R}$, data una coppia di taglia (X, φ), la funzione di taglia associata $\ell_{(X,\varphi)} : D \to \mathbb{N}$ è la funzione che associa ad ogni punto $(u, v) \in D$ il numero di componenti connesse in X_v che contengono almeno un punto in X_u.

Affrontando il problema del riconoscimento di forme, ci si può imbattere nel caso dell'occlusione parziale dell'immagine, ovvero nel caso in cui l'oggetto che si vuole riconoscere sia parzialmente nascosto da un altro nella stessa immagine.
In particolare sia X l'oggetto visibile, considerato uno spazio di Hausdorff localmente connesso. Sia $A \subset X$ l'oggetto che si vuole riconoscere e B l'oggetto in primo piano, che nasconde parzialmente A, A e B sono localmente connessi e tali che $X = A \cup B$.
Le forme di X,A,B sono descritte dalle funzioni di taglia $l_{(X,\varphi)}$,$l_{(A,\varphi|A)}$, $l_{(B,\varphi|B)}$ dove $\varphi : X \to \mathbb{R}$ è la funzione misurante.
Per dare un esempio riportiamo di seguito delle immagini su cui sono stati effettuati i test: A è il cammello sulla sinistra, B il rettangolo nero e X la figura sulla destra ottenuta dalla sovrapposizione di A e B.

Ricordiamo ora l'analogia tra il teorema di Seifert-Van Kampen e la successione di Mayer - Vietoris: nel caso in cui $A \cap B$ sia connesso per archi tale successione stabilisce un isomorfismo tra il gruppo di omologia di X e la somma diretta dei gruppi di omologia di A e B quozientata per un certo nucleo generato dalle immagini delle inclusioni di $A \cap B$ in A e in B.

Utilizzando la successione di Mayer - Vietoris è possibile dimostrare l'uguaglianza

$$l_{(X,\varphi)} = l_{(A,\varphi|A)} + l_{(B,\varphi|B)} - l_{(A\cap B,\varphi|A\cap B)}$$

Possiamo quindi dedurre che la funzione di taglia di X contiene informazioni delle funzioni di taglia di A, B e $A \cap B$: in questo modo possiamo risalire ad informazioni sull'oggetto A e dunque riconoscerlo.

Bibliografia

[1] Introduzione alla Topologia Algebrica; Czes Kosniowski. Zanichelli.

[2] Topologia; Marco Manetti. Springer-Verlag.

[3] Algebraic Topology, a first course; William Fulton. Springer-Verlag.

[4] Lezioni di Topologia elementare e di Geometria; Singer, Thorpe Boringhieri.

[5] Appunti di Topologia Algebrica; Claudio Procesi.

[6] A basic course in Algebraic Topology; Massey. Springer-Verlag.

[7] Combinatorial Group Theory; Magnus, Karrass, Solitar. J.Wiley and Sons.

[8] Teoria dei Gruppi; Baumslag, Chander. ETAS libri.