ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

VALUTAZIONE DI DERIVATI CON METODI DI TEORIA DEI GIOCHI

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
PAOLO MARSILI

III° Sessione
Anno Accademico 2008-09

Capitolo 1

Esposizione del metodo

1.1 Introduzione

La *teoria dei giochi* è la scienza che studia i comportamenti di più individui che interagiscono per i più svariati motivi. Questa scienza, nata il secolo scorso con il primo teorema di *minimax* di Von Neumann, è cresciuta rapidamente fino a diventare una parte importante della teoria economica. Essa si è rivelata essere molto utile nei campi più disparati oltre a quello economico-finanziario: dalla strategia militare alla politica, dalla biologia alla psicologia, dall'informatica alla sociologia e perfino nello sport. Il suo maggiore utilizzo rimane comunque in ambito economico-finanziario come strumento fondamentale nell'analisi di alcuni importanti aspetti di essa, come l'organizzazione industriale, la finanza di impresa e l'intermediazione finanziaria. Nonostante la sua crescita, negli ultimi anni, la teoria dei giochi ha trovato alcune difficoltà di metodo nel maneggiare incertezza e timing decision nei modelli dinamici. Questa è una dura limitazione per l'analisi strategica di questioni nella finanza decisionale, dove incertezza e rischio sono particolarmente importanti.

La *teoria delle opzioni* è riferita alla valutazione di una opzione, e più in generale alla valutazione di ogni altro strumento derivato. Fin dagli studi pionieristici di Black e Scholes, e di Merton, la teoria delle opzioni ha trovato applicazioni in molte aree dell'economia. Un esempio è dato dai prezzi di titoli societari, che sono essenzialmente strumenti derivati (o crediti potenziali) sul valore attivo dell'impresa.

Il tema di questa tesi è un procedimento, la *valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi*, che combina questi due potenti strumenti della matematica e della finanza, per permettere o facilitare l'analisi delle dinamiche di problemi decisionali fra piu persone sotto condizioni di continuità ed incertezza. Vedremo anche in maniera esemplare come il metodo può essere usato per analizzare alcuni problemi schematizzati nella teoria della finanza aziendale e di intermediazione finanziaria.

L'intuizione alla base del metodo, che sto per presentare, è di separare la *valutazione* dei payoffs dall'analisi delle *interazioni strategiche.* Mentre i primi possono essere trattati con la teoria delle opzioni, gli altri possono essere indirizzati con la teoria dei giochi. Le applicazioni schematiche del metodo sono:

- *la determinazione dei prezzi* degli strumenti derivati e dei titoli societari quando gli agenti economici possono avere comportamenti strategici.
- l'analisi degli *effetti di incentivazione* di alcuni comuni accordi contrattuali finanziari, e
- la progettazione dei *contratti di incentivazione* volti a risolvere i conflitti di interesse tra gli operatori economici.

Prima di presentare il metodo nei dettagli e passare poi agli esempi nei capitoli successivi, vediamo alcuni concetti base della teoria dei giochi della teoria delle opzioni.

1.2 Le basi della teoria dei giochi: induzione a ritroso ed equilibrio perfetto nei sottogiochi

In teoria dei giochi, interazione strategiche fra agenti (e più in generale fra giocatori) vengono solitamente analizzati tramite l'aiuto di un *albero del gioco.* Un albero del gioco è una rappresentazione grafica delle possibili scelte dei giocatori ad ogni momento, la sequenza in cui queste scelte vengono fatte, e i payoffs risultanti da ogni combinazione di scelte. Una *strategia* per un dato giocatore è una regola che dica quale azioni deve compiere ad ogni fase del gioco.

Consideriamo la struttura ad albero del gioco nella Figura 1.1. É un esempio semplificato di gioco in cui i giocatori compiono a turno una sola scelta ed in base a queste scelte si determinano payoff differenti. Al tempo iniziale (che chiameremo periodo 1), il Giocatore 1 sceglie o la strategia U o la strategia D. Al periodo 2, dopo la scelta del Giocatore 1, è il Giocatore 2 a scegliere o la strategia L o la strategia R. Al periodo 3, i payoff sono determinati in base alle scelte dei due giocatori, tramite una coppia (x, y) la cui prima componente è il payoff del Giocatore 1 e la seconda componente il payoff del Giocatore 2. In gioco di questo tipo viene detto ad *informazione perfetta* il che significa che non solo ogni giocatore conosce le mosse di ogni altro giocatore, ma anche che ogni giocatore sa che ogni altro giocatore conosce le mosse di ogni giocatore.

Quale strategia ogni giocatore è portato a scegliere? Per rispondere a questa domanda può essere usato il principio della *induzione a ritroso.* Ovvero ogni gioco (ad informazione perfetta) può essere risolto partendo dall'ultima decisione che deve essere fatta, che sostituiremo con il suo valore ottimale. Quindi nell'esempio appena fatto prima si sceglie qual è la decisione migliore per il Giocatore 2 nell'ultimo passo del gioco sostituendo nell'albero i payoff corrispondenti alla scelta migliore e poi lavoriamo a ritroso per trovare

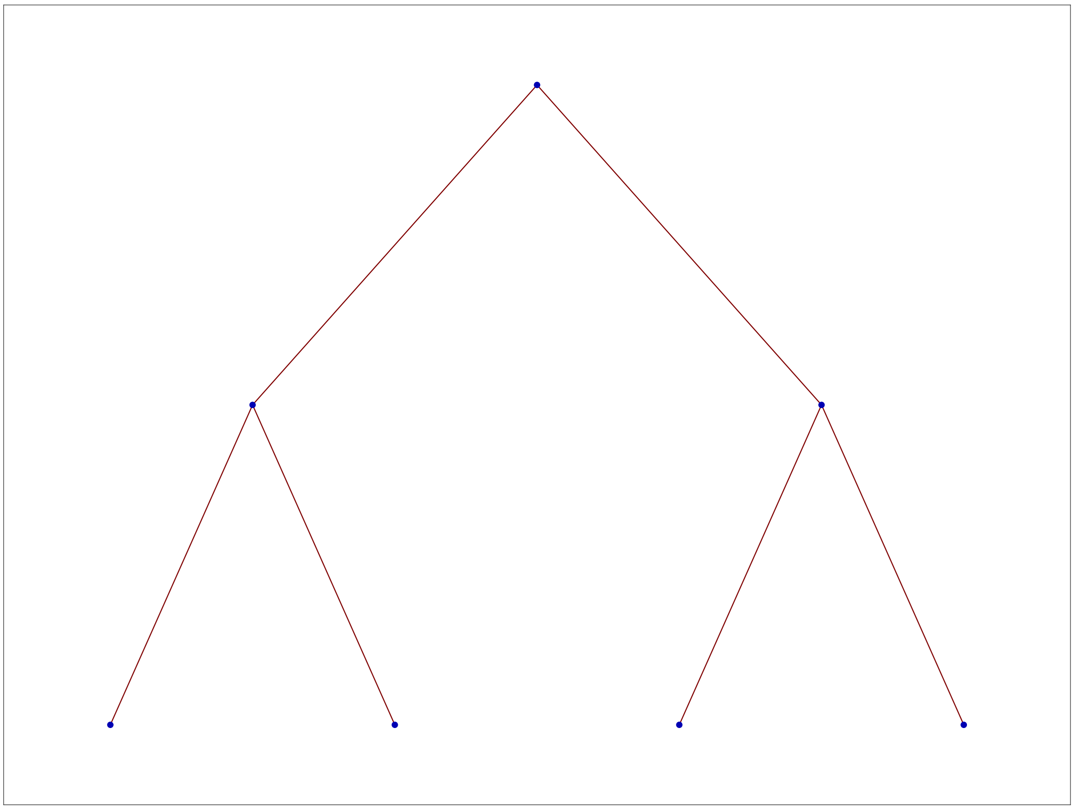

Figura 1.1: Esempio di albero del gioco

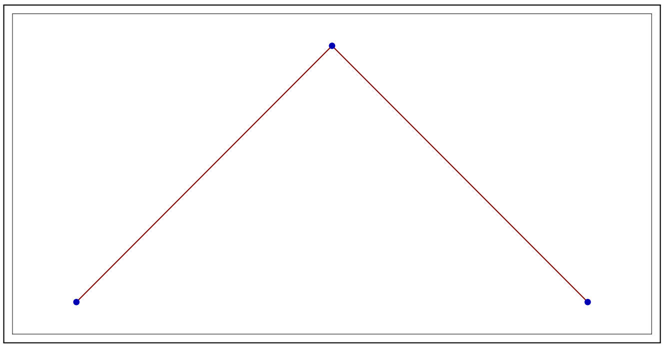

Figura 1.2: Il gioco della Figura 1.1 dopo che il sottogioco è stato sostituito con le decisioni ottimali nell'ultimo passo del gioco

la scelta ottimale per il Giocatore 1. Riferendoci all'esempio consideriamo il nodo di sinistra: a questo nodo il Giocatore 2 avrà un payoff di 1 se sceglierà L, e 0 se sceglierà R. Quindi ovviamente sceglierà L; similarmente, nel nodo di destra, la strategia ottimale per il Giocatore 2 è quella di scegliere R, poichè gli garantisce un payoff di 2 invece che di 1 (condizione che si verifica se sceglie L). Sostituendo questi valori nell'albero del gioco originale della Figura 1.1 produce un albero del gioco ancora più semplice raffigurato nella Figura 1.2.

È ora chiaro come trovare la soluzione del problema. Al periodo 1, il Giocatore 1 può scegliere tra un payoff di 2 (strategia U) e un payoff di 3 (strategia D). Quindi, sceglierà D. In sostanza, sostituendo nel gioco la strategia ottimale del Giocatore 2 prima di trovare la strategia ottimale significa che, nel fare la sua scelta, il Giocatore 1 *anticipa* la susseguente scelta ottimale del Giocatore 2. Questa è la sintesi dell'induzione a ritroso.

Come detto prima, l'induzione a ritroso può essere applicata a giochi ad *informazione perfetta*. In un gioco ad informazione perfetta, tutti gli insiemi di informazioni sono formati da un solo elemento; i giocatori compiono le loro scelte uno per volta e ognuno conosce tutte le precedenti mosse quando prende le proprie decisioni. Questo è ovviamente il caso del gioco descritto sopra dove il Giocatore 1 prima fa la sua scelta tra U e D, e poi il Giocatore 2 sceglie tra L e R, *sapendo* cosa il Giocatore 1 ha scelto nel primo passaggio del gioco.

Consideriamo ora il gioco raffigurato in Figura 1.3. Il sottogioco sulla destra è un gioco a scelta simultanea. Nel momento in cui deve fare la sua decisione, il Giocatore 2 *non* sa cosa il Giocatore 1 ha scelto. Quindi, l'induzione a ritroso non può essere usata per determinare la scelta ottimale del Giocatore 1. L'idea dell'induzione a ritroso può, comunque, essere estesa per risolvere anche questo tipo di giochi.

Analizziamo solo il sottogioco sulla destra. Se siamo arrivati a quel punto, allora ogni giocatore sceglierà una strategia con probabilità 1/2, il che produce un payoff atteso di 0 (questa viene solitamente chiamata strategia mista). Il sottogioco può quindi essere rimpiazzato con il suo payoff di equilibrio (0,0), il che ci riconduce al gioco in Figura 1.4,

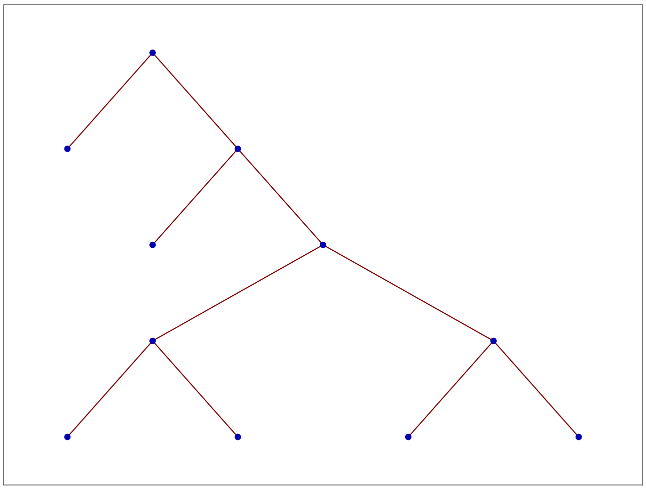

Figura 1.3: Esempio di gioco ad informazione imperfetta

che può ora essere risolto usando l'induzione a ritroso come abbiamo fatto per il gioco della Figura 1.1. Per far ciò, notiamo che se raggiungiamo il nodo di destra, il Giocatore 2 sceglierà L, ottenendo quindi un payoff di 1 invece di 0 se avesse scelto R. Nel fare la sua scelta al primo passo del gioco, il Giocatore 1 anticiperà la conseguente scelta del Giocatore 2 e il conseguente payoff di 3. Poichè questo è maggiore del payoff 2 che si avrebbe scegliendo L, egli sceglierà R. In condizioni di equilibrio, il Giocatore 1 sceglierà R e il Giocatore 2 sceglierà L; il sottogioco a scelta simultanea sulla destra in questo caso non verrà raggiunto.

L'idea che ogni sottogioco può essere rimpiazzato con il suo payoff di equilibrio è detta *equilibrio perfetto nei sottogiochi.* Notiamo che in un gioco finito a informazione perfetta, l'induzione a ritroso e l'equilibrio perfetto nei sottogiochi sono equivalenti.

1.3 Le basi della valutazione delle opzioni: l'equazione generale dei derivati

Consideriamo un opzione (o più in generale un derivato) con sottostante S il cui valore segue un moto Browniano geometrico, cioè una soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t \ , \tag{1.1}$$

dove $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ sono rispettivamente *il coefficiente di drift (o deriva)* e *la deviazione standard istantanea* del processo e $\mathrm{d}W_t$ denota è un moto Browniano standard (processo di Wiener). Un moto Browniano geometrico è quindi, un processo stocastico $S \in \mathbb{L}^2$, lo

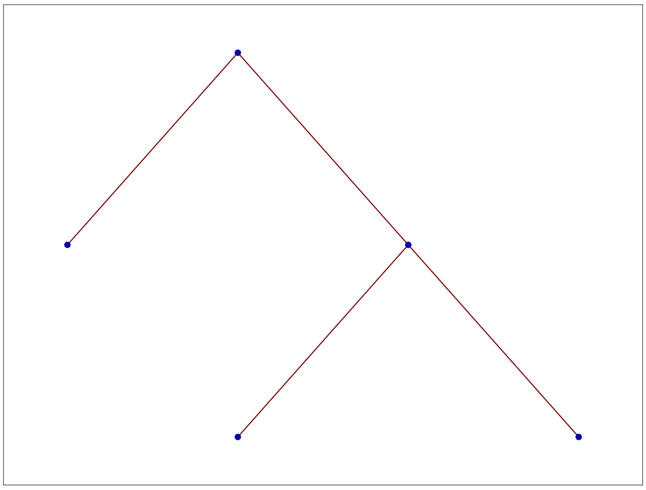

Figura 1.4: Il gioco della Figura 1.3 dopo che il sottogioco sulla destra è stato sostituito con il suo payoff di equilibrio

spazio dei processi progressivamente misurabili[1] in $L^2([0,T] \times \Omega)$, tale che

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s \,\mathrm{d}s + \sigma \int_0^t S_s \,\mathrm{d}W_s \;. \tag{1.2}$$

Il processo S può essere determinato esplicitamente nella forma $S_t = f(t, W_t)$ con $f = f(t,x) \in C^{1,2}$. Infatti applicando la formula di Itô e imponendo la (1.1), otteniamo

$$\begin{aligned}\left(\partial_t f(t,W_t) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,W_t)\right)\mathrm{d}t + \partial_x f(t,W_t)\mathrm{d}W_t \\ = \mu f(t,W_t)\mathrm{d}t + \sigma f(t,W_t)\mathrm{d}W_t.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dall'unicità della rappresentazione di un processo di Itô deduciamo che, per $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, vale

$$\begin{cases} \partial_x f(t,x) = \sigma f(t,x), \\ f(t,x) + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,x) = \mu f(t,x) \;. \end{cases} \tag{1.4}$$

Per la prima equazione, esiste una funzione $g = g(t)$ tale che

$$f(t,x) = g(t)e^{\sigma x} \tag{1.5}$$

[1] un processo si dice progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ se, per ogni t, $X\mid_{[0,t]\times\Omega}$ è $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-misurabile.

e inserendo la (1.5) nella seconda equazione otteniamo

$$g' + \frac{\sigma^2}{2} g = \mu g \tag{1.6}$$

da cui si ottiene $g(t) = g(o)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$. In definitiva vale

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} \ , \tag{1.7}$$

e applicando la formula di Itô, è facile verificare che S in (1.7) è effettivamente soluzione dell'equazione (1.1). Il moto Browniano geometrico venne utilizzato Black, Merton e Scholes nei classici lavori sulla valutazione d'arbitraggio delle opzioni. Esso si applica bene alla modellizzazione della valutazione di opzioni, in quanto una quantità che segue un moto browniano geometrico può assumere soltanto valori positivi, il che riflette la natura del prezzo di un'attività finanziaria. Di seguito assumeremo che i valori delle attività che consideriamo seguiranno un moto Browniano geometrico.

Ora denotiamo con S il valore attuale del sottostante, t il tempo, r il tasso di interesse senza rischio continuamente composto, a il payout a favore dei titolari del sottostante per unità di tempo, e b sia il payout a favore dei titolari del derivato per unità di tempo. Sia $F(S,t)$ il valore del derivato. Ora, come mostrato da Merton, F deve soddisfare l'equazione lineare alle derivate parziali

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (rS - a)F_S + F_t - rF + b = 0 \ , \tag{1.8}$$

dove i pedici della F indicano le derivate parziali nelle variabili. A questo punto è importante sottolineare che il valore di *ogni* derivato con sottostante S deve soddisfare l'equazione (1.8); derivati diversi differiscono solo in termini di condizione al bordo a cui i loro prezzi sono soggetti.

Ci sono diverse tipi di condizioni al bordo, ma due sono le più comuni. Nel primo caso, che tipicamente compare per derivati con una predeterminata maturità T, la condizione al bordo prende la forma generica

$$F(S,T) = \overline{F}(S) \ , \tag{1.9}$$

dove $\overline{F}(S)$ denota il payoff a favore del possessore del derivato come funzione del valore del sottostante alla maturazione T. Il secondo caso tipico di condizione al bordo è il cosiddetto problema *a frontiera libera*, che di solito compare per derivati senza una predeterminata maturazione. Questi derivati (come le opzioni Americane) vengono tipicamente esercitati in un punto casuale nel tempo, generalmente il primo momento in cui il valore del sottostante raggiunge un certo livello $\overline{S}$. In questo caso la condizione al bordo assume la forma

$$F(\overline{S}) = \overline{F}(\overline{S}) \ , \tag{1.10}$$

dove $\overline{F}(\overline{S})$ denota il payoff ricevuto dal proprietario del derivato al momento dell'esercizio.

L'equazione (1.8) contiene un certo numero di *parametri*, e sarà soggetta alle *condizioni al bordo* come la (1.9) o la (1.10). Questi fattori saranno la base per l'analisi condotta in questa presentazione. La *valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi* illustrata qui si occupa di incentivi degli agenti finanziari per influenzare i *parametri* o le *condizioni al bordo* di opzioni presenti nelle attività economiche.

1.4 Il procedimento della valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi

Il procedimento della *valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi* è un tentativo di *combinare* la teoria dei giochi e valutazione dei derivati. Usando la valutazione dei derivati, si può ottenere un valore in assenza di arbitraggio per i payoffs delle parti economicamente interessate. Questi valori sono poi inseriti nel gioco strategico tra le parti, il quale può quindi essere analizzato più realisticamente e (a volte, ma non sempre) più facilmente.

La sintesi del metodo può essere riassunta in una procedura a tre passi:

1. Primo, viene definito il gioco. Le azioni dei giocatori, la sequenza delle loro scelte e i risultanti payoff vengono specificate.

2. Secondo, i futuri possibili payoff dei giocatori vengono stimati usando la teoria della valutazione dei derivati. Tutte le possibili azioni dei giocatori entrano nelle formule come *parametri.*

3. Infine, partendo dall'ultimo periodo (ovvero l'ultima decisione che deve essere presa), il gioco viene risolto secondo le strategie ottimali per i giocatori usando l'induzione a ritroso o le informazioni perfette nei sottogiochi.

In effetti, la valutazione delle opzioni con metodi di teoria dei giochi sostituisce la massimizzazione dell'*utilità attesa* incontrata in modelli classici di teoria dei giochi con la massimizzazione del valore di un *opzione* che dà ai giocatori il valore in assenza di arbitraggi dei payoff e può quindi essere considerato come una alternativa all'utilità attesa. Più dell'approccio con l'utilità attesa, l'approccio con la valutazione dei derivati ha il vantaggio che dà automaticamente il *valore temporale dei soldi* e il *prezzo del rischio* nel conto.

La maggiore forza del metodo, comunque, sta nel *separare* la valutazione del problema (Passo 2), dall'analisi dell'interazione strategica tra i giocatori (Passo 3). Questa funzione è molto utile per l'analisi, perchè problemi decisionali complessi in condizioni di incertezza possono essere risolti utilizzando applicando procedure di ottimizzazione classica (minimizzazione e massimizzazione) per il valore dell'opzione. L'analisi poi spesso si riduce per trovare una condizione di primo ordine per un massimo o un minimo nel valore dell'opzione ad ogni stadio del gioco.

Per comprendere meglio come funziona il metodo, supponiamo la seguente struttura del gioco. Primo, il Giocatore 1 sceglie la strategia A. Una volta compiuta la scelta, il Giocatore 2 sceglie la strategia B. Queste strategie, insieme con le future evoluzioni del sottostante S e, in qualche caso, il tempo t, determinano i payoffs per ogni giocatore. Denotiamo con $G(A, B, S, t)$ e $H(A, B, S, t)$ il *valore attuale* privo di arbitraggio dei payoffs del Giocatore 1 e del Giocatore 2 come dato dalla valutazione delle opzioni, rispettivamente. Come menzionato in precedenza, questi valori si trovano risolvendo un equazione differenziale simile alla (1.8) soggetta alle appropriate condizioni al bordo. Le strategie A e B dei giocatori consistono nel scegliere uno dei parametri di questa equazione differenziale o la sue condizioni al bordo in modo da massimizzare il valore dei loro payoffs.

Nell'ultima parte del gioco, il Giocatore 2 sceglie la strategia B che massimizza il valore del suo payoff atteso $H(A, B, S, t)$, ovvero pone

$$\frac{\partial H(A, B, S, t)}{\partial B} = 0 \ , \tag{1.11}$$

a patto che B non sia una condizione al bordo. Risolvere questa condizione del primo ordine produce una strategia ottimale $\overline{B} = \overline{B}(A, S, t)$, che può dipendere dalla scelta della strategia A del Giocatore 1, come dal valore del sottostante S e del tempo t.

Quando compierà la sua decisione, il Giocatore 1 deve anticipare la conseguente scelta del Giocatore 2. Ovvero egli sceglie A in modo da massimizzare il valore del suo payoff, G, usando la condizione al primo ordine

$$\frac{\mathrm{d}G(A, \overline{B}, S, t)}{\mathrm{d}A} = \frac{\partial G(A, \overline{B}, S, t)}{\partial A} + \frac{\partial G(A, \overline{B}, S, t)}{\partial \overline{B}} \frac{\mathrm{d}\overline{B}(A, S, t)}{\mathrm{d}A} = 0 \tag{1.12}$$

che conduce ad una strategia ottimale $\overline{A} = \overline{A}(S, t)$, che ancora una volta può dipendere dal valore del sottostante S e del tempo t. Il termine

$$\frac{\partial G(A, \overline{B}, S, t)}{\partial \overline{B}} \frac{\mathrm{d}\overline{B}(A, S, t)}{\mathrm{d}A} \tag{1.13}$$

nella condizione di primo ordine dell'equazione precedente riflette l'effetto indiretto della scelta di strategia del Giocatore 1 nel suo payoff atteso che deriva dall'influenza che la sua scelta ha sulla strategia ottimale $\overline{B}$ del Giocatore 2. Questo racchiude l'essenza dell'induzione a ritroso, cioè che nel momento in cui fa la sua scelta, il Giocatore 1 deve anticipare quello che il Giocatore 2 farà successivamente.

1.5 Quando il metodo è appropriato?

Come detto prima l'intuizione alla base della *valutazione dei derivati con metodi di teoria dei giochi* sta nell'usare il valore di un opzione *al posto* dell'utilità attesa di ogni giocatore. Questo solleva naturalmente la questione di sapere quanto il valore dell'opzione sia un buona *proxy.* Ne segue che la risposta a questa domanda dipende da due fattori:

1. Primo, assumendo che il prezzo dell'opzione sia giusto, qual è la relazione tra il valore dell'opzione e l'utilità attesa del giocatore?

2. Secondo, in quali casi il valore dell'opzione sarà corretto?

1.5.1 Il legame tra il valore dell'opzione e l'utilità attesa

Siccome il valore dell'opzione è il valore presente del payoff del giocatore adattato con il rischio, di fatto traduce la *futura incertezza* dei payoffs nella *fiducia attuale* degli agenti (per agenti indichiamo ogni parte finanziaria presente in un gioco). Come risultato, c'è una relazione monotona crescente (ma non necessariamente lineare) tra il valore dell'opzione e l'utilità dell'agente. La conseguenza è che, a patto che il prezzo dell'opzione sia giusto, una scelta massimizzante dell'utilità dell'agente massimizza anche il valore dell'opzione e viceversa. Quindi, per lo scopo di analizzare le interazioni strategiche, il valore dell'opzione è un perfetta proxy del profitto atteso.

1.5.2 Quando il valore dell'opzione sarà corretta?

Poichè esiste una relazione monotona tra l'utilità attesa e il valore dell'opzione, a patto che il valore dell'opzione sia giusto, la questione di capire se la *valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi* è l'approccio modellizzante appropiato si riconduce a determinare se il prezzo dell'opzione è corretto. Questo sarà il caso solo in cui il tempo e gli adeguamenti dell'incertezza, impliciti nel metodo di valutazione delle opzioni usato, sono coerenti sia con la *struttura di informazione* di base sia con le *preferenze* degli agenti.

La letteratura ha determinato un numero di insiemi di condizioni sufficienti per cui le tecniche di valutazione delle opzioni qui usate risultano appropriate; condizioni in cui la densità per il prezzo neutrale al rischio del prezzo del sottostante ha una distribuzione log-normale. Questo è il caso in cui, ad esempio, il prezzo del sottostante segue moto Browniano geometrico e il tasso di interesse privo di rischio è costante (esattamente il caso delle equazioni di Black-Scholes), oppure il caso in cui la dotazione globale nell'economia segue un moto Browniano geometrico e gli investitori hanno una funzione di utilità con avversione al rischio costante (CRRA).

In contesti in cui la densità del prezzo neutrale al rischio non è log-normale, classiche tecniche gaussiane di valutazione dell'opzione non possono più essere usate per determinare il valore dell'opzione. Nonostante questo, la valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi rimane applicabile. L'unica differenza è che i prezzi delle opzioni devono essere determinati mediante altre tecniche di valutazione delle opzioni. Se questo non può essere fatto, allora i risultati ottenuti con il metodo, sotto l'implicita assunzione di log-normalità, dovrebbero essere ritenuti una approssimazione. Infatti, le strategie ottimali possono essere sensibili alla distribuzione del valore del sottostante.

È da notare che il metodo per essere applicabile non richiede che il sottostante sia commercializzato. È sufficiente che il valore di questo sottostante sia attraversato da titoli negoziati (il che equivale in pratica a richiedere che esiste un titolo negoziato il cui prezzo è mosso da uno stesso processo di Wiener $\mathrm{d}B_t$ del prezzo del sottostante), e che gli investitori possano scambiare questi titoli continuamente senza alcun costo di transazione. Questo perchè sotto queste condizioni, come mostrato da Brennan e Schwartz e notato poi da Mauer e Otto, può essere costruito un portafoglio continuamente ribilanciato e autofinanziante che replichi il sottostante. Anche se entrambe queste condizioni non saranno ovviamente soddisfatte nella pratica, l'implicazione è che il metodo può essere considerato come una buona approssimazione quando esistono beni di scambio che permettono di replicare da vicino il valore del sottostante a costi moderati.

Quando non esistono beni di scambio che replicano sufficientemente da vicino il sottostante dell'opzione che deve essere valutata, argomenti di replicazione non possono più essere usate per determinare il prezzo privo di arbitraggi dell'opzione. Tuttavia, tecniche con misure martingale equivalenti possono essere applicate. Però, la determinazione di misure martingale equivalenti o l'adeguamento del tasso di rischio necessari a valutare l'opzione diventano più difficili. Di conseguenza, i risultati ottenuti con il metodo devono essere trattati con cautela in questo caso.

1.6 Per quale tipologia di problemi il metodo è particolarmente adatto?

La valutazione delle opzioni con metodi di teoria dei giochi è particolarmente utile per l'investigazione di interazioni strategiche in cui una valutazione diretta dell'utilità attesa dei giocatori è poco maneggevole. Ciò si può verificare per una serie di motivi.

Il primo motivo è la presenza dell'*incertezza*. Ogni volta che l'incertezza è un fattore importante dei futuri payoffs dei giocatori, le tecniche di valutazione delle opzioni forniscono un modo conveniente per effettuare l'adeguamento del rischio per valutare questi payoffs correttamente, traducendo i futuri incerti payoffs in una misura comune, la ricchezza attuale. Oltre ai casi in cui appare necessario adeguare i payoffs per la presenza di alcuni rischi esterni, il metodo è estremamente adatto per l'analisi delle problematiche legate ai *comportamenti di assunzione di rischio* da parte degli agenti. Le questioni del rischio e del comportamento di assunzione di rischio sono un tema classico negli esempi dell'applicazione del metodo.

Il secondo fattore che può far si che una diretta valutazione dell'utilità attesa dei giocatori sia problematica è il *tempo*. Spesso, il problema non è tanto che i payoffs si realizzano ad un certo tempo dato nel futuro (nei casi senza incertezza sull'importo dei payoff, questo problema potrebbe essere gestito con facilità attraverso l'attualizzazione. Piuttosto, in molte situazioni, il problema è che il tempo a cui un dato payoff sarà percepito è *esso stesso incerto*. Il tempo del payoff potrebbe essere condizionato solo da incertezze esterne, o potrebbe anche dipendere da decisioni interne prese dai giocatori. La valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi è particolarmente adatto per valutare payoffs che si verificano in tempi casuali e per analizzare problemi come quelli di *timing* e di *arresto ottimale*. Il motivo è che la formula di valutazione dell'opzione incorporerà automaticamente la distribuzione del tempo in cui il payoff sarà ricevuto, cosi come l'appropriata attualizzazione e l'adeguamento del rischio. La decisione temporale ottimale del giocatore sarà quindi pari a scegliere la strategia di arresto che massimizza il valore di questa opzione. Ne daremo un semplice esempio nella prossima sezione.

Il terzo fattore che spesso rende molto preziosa la valutazione delle opzioni con metodi di teoria dei giochi è la presenza del *valore dell'opzione* nei payoffs dei giocatori, ovvero ogni volta che i payoffs sono funzioni non lineari del valore del sottostante. Questo può essere il caso sia perchè la struttura stessa dei payoffs è di per se non lineare, sia perchè i giocatori hanno la possibilità di prendere decisioni ottimali in futuro che influenzeranno i loro payoffs. Problemi di arresto ottimali, prima menzionati, sono solo un esempio di questo tipo di decisioni. Altri casi includono la possibilità per le imprese di espandere o contrarre le loro operazioni esistenti, ripagare i loro debiti o emettere altri debiti. In questo caso, le tecniche di valutazione delle opzioni si prenderanno automaticamente cura di tutte le problematiche relative alla stima. Qualsiasi futura decisione che i giocatori prenderanno appariranno come parametri nella formula della valutazione dell'opzione.

1.7 Un esempio: Determinazione del prezzo di un opzione Put perpetua

Un *opzioneput* è uno strumento derivato in base al quale l'acquirente dell'opzione compra il diritto, ma non l'obbligo, di vendere una certa quantita del sottostante ad un dato prezzo di esercizio (*strike*) e ad una data futura entrambe fissate. Consideriamo un intermediario finanziario attivo in un mercato competitivo che venda un opzione put perpetua con sottostante S il cui valore segue un moto Browniano geometrico (1.1) con un prezzo di esercizio X per l'investitore. Quale prezzo l'intermediario dovrà chiedere per l'opzione? La risposta alla domanda dipende dalla strategia di esercizio scelta dall'investitore, e può essere trovata applicando il metodo presentato finora.

1.7.1 Primo passo: La struttura del gioco

La struttura del gioco, raffigurata in figura 1.5, è la seguente. Al tempo iniziale l'intermediario vende l'opzione all'investitore ad un (certo) prezzo P_∞ che cercheremo di determinare. L'investitore poi tiene l'opzione finchè non decide di esercitarla. L'esercizio avverrà il primo momento in cui il valore del sottostante S raggiunge il valore $\overline{S}$, che useremo per denotare la strategia di esercizio ottimale dell'investitore. Nel momento di esercizio, il payoff dell'investitore è uguale alla differenza (positiva) il prezzo di strike X e il valore attuale del sottostante $\overline{S}$, ovvero il $\max[X - \overline{S}, 0]$.

1.7.2 Secondo passo: Valutazione dell'opzione per una data strategia di esercizio

Il secondo passo del metodo è quello di determinare il valore privo di arbitraggi di un opzione put perpetua, $P_\infty(S)$, *data* la strategia di esercizio $\overline{S}$ del possessore dell'opzione. Poichè l'opzione è perpetua, il suo valore non dipende esplicitamente dal tempo t e deve quindi soddisfare la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_\infty^{''} + rSP_\infty^{'} - rP_\infty = 0, \tag{1.14}$$

soggetta alle condizioni al bordo

$$P_\infty(\infty) = 0 \tag{1.15}$$

e

$$P_\infty(\overline{S}) = X - \overline{S} \ . \tag{1.16}$$

La prima condizione al bordo dice che l'opzione diventa priva di valore se il sottostante assumerà valori molto grandi. La seconda è il payoff dell'opzione al momento dell'esercizio

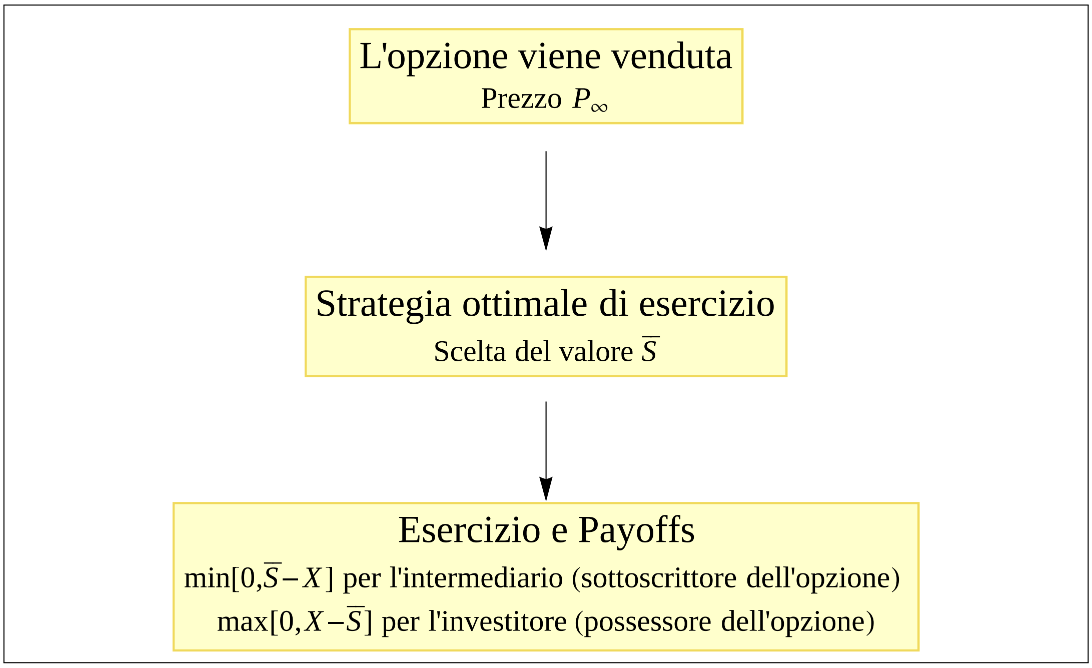

Figura 1.5: Struttura del gioco sulla valutazione dell'opzione. Nella prima fase, l'intermediario vende una opzione put perpetua all'investitore al prezzo P_∞. Poi l'investitore sceglie la sua strategia ottimale di esercizio $\overline{S}$. Infine, se l'investitore decide di esercitare l'opzione, riceve $X - \overline{S}$ dall'intermediario.

La soluzione generale all'equazione differenziale è

$$P_\infty(S) = \alpha_1 S + \alpha_2 S^{-\gamma} \ , \tag{1.17}$$

dove

$$\gamma \equiv \frac{2r}{\sigma^2} \ . \tag{1.18}$$

Dalla prima condizione al bordo, ricaviamo $\alpha_1 = 0$. La seconda richiede che

$$P_\infty(\overline{S}) = X - \overline{S} = \alpha_2 \overline{S}^{-\gamma} \ . \tag{1.19}$$

Risolvendo in α_2 otteniamo

$$\alpha_2 = (X - \overline{S})\overline{S}^{\gamma} \ . \tag{1.20}$$

Quindi, il valore dell'opzione put perpetua, *data* la strategia di esercizio $\overline{S}$ del possessore dell'opzione, è fornita dalla seguente espressione

$$P_\infty(S) = (X - \overline{S})\overline{S}^{\gamma} S^{-\gamma} = (X - \overline{S}) \left(\frac{S}{\overline{S}} \right)^{-\gamma} \ . \tag{1.21}$$

1.7.3 Terzo passo: Risolvere il gioco

A questo punto, la strategia di esercizio $\overline{S}$ dell'investitore è ancora sconosciuta. È un cosiddetto problema *a frontiera libera*. Ci sono fondamentalmente due approcci per calcolare la strategia.

Smooth Pasting

Il primo metodo è quello di richiedere che P_∞ soddisfi la cosiddetta condizione di smooth-pasting

$$\left. \frac{\partial P_\infty(S)}{\partial S} \right|_{S=\overline{S}} = \frac{\mathrm{d}\overline{P}_\infty}{\mathrm{d}\overline{S}} \ , \tag{1.22}$$

dove $\overline{P}_\infty$ denota il valore dell'opzione put al momento dell'esercizio come specificato dalla seconda delle due condizioni al bordo: $\overline{P}_\infty = X - \overline{S}$, che implica $\mathrm{d}\overline{P}_\infty/\mathrm{d}\overline{S} = -1$. Usando questo procedimento, la strategia ottimale può essere calcolata ponendo

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial P_\infty(S)}{\partial S}\right|_{S=\overline{S}} &= \frac{\partial}{\partial S}\left.\left((X-\overline{S})\left(\frac{S}{\overline{S}}\right)^{-\gamma}\right)\right|_{S=\overline{S}} \\
&= \left.\left(-\frac{\gamma}{S}(X-\overline{S})\left(\frac{S}{\overline{S}}\right)^{-\gamma}\right)\right|_{S=\overline{S}} \\
&= -\frac{\gamma}{\overline{S}}(X-\overline{S}) = \frac{\mathrm{d}\overline{P}_\infty}{\mathrm{d}\overline{S}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overline{S}}(X-\overline{S}) = -1 \ . \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

Risolvendo la condizione finale

$$\frac{\gamma}{\overline{S}}(X-\overline{S}) = 1 \qquad (1.24)$$

otteniamo per la strategia di esercizio $\overline{S}$

$$\overline{S} = \frac{\gamma}{1+\gamma}X \ . \qquad (1.25)$$

Strategia di esercizio che massimizza il valore

Un altro modo per trovare il valore a frontiera libera $\overline{S}$ è quello di richiedere che essa *massimizzi* il valore dell'opzione, ovvero che il possessore della stessa eserciti il suo diritto quando è *ottimale* farlo, ovvero ponendo

$$\frac{\partial P_\infty}{\partial \overline{S}} = -\left(\frac{S}{\overline{S}}\right)^{-\gamma} + \frac{\gamma}{\overline{S}}(X-\overline{S})\left(\frac{S}{\overline{S}}\right)^{-\gamma} = 0 \ . \qquad (1.26)$$

Semplificando, l'espressione diventa

$$\overline{S} = \gamma(X-\overline{S}) \ . \qquad (1.27)$$

Quindi, il valore del sottostante $\overline{S}$ nel momento in cui è ottimale esercitare l'opzione put perpetua è dato da

$$\overline{S} = \frac{\gamma}{1+\gamma}X \ , \qquad (1.28)$$

che è la stessa soluzione di quella data dal metodo smooth-pasting.

Legame tra i due approcci

Una domanda che naturalmente si pone è il legame tra la condizione di smooth-pasting e la determinazione della strategia di esercizio che massimizza il valore. Entrambi gli approcci sono correlati? Conducono sempre a risultati analoghi?

Merton ha mostrato che smooth-pasting è effettivamente implicato dalla massimizzazione del valore. Sia $f(x, \overline{x})$ una funzione differenziabile per $0 \le x \le \overline{x}$ e sia $\partial^2 f / \partial \overline{x}^2 < 0$. Poniamo $h(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{x})$, dove h è una funzione differenziabile di $\overline{x}$.

Sia $\overline{x} = \overline{x}^*$ il valore di $\overline{x}$ che massimizza f, cioè

$$\left. \frac{\partial f(x, \overline{x})}{\partial \overline{x}} \right|_{\overline{x}=\overline{x}^*} = 0 \ . \tag{1.29}$$

Ora consideriamo la derivata totale di f rispetto a $\overline{x}$ lungo il bordo $\overline{x} = \overline{x}^*$:

$$\mathrm{d}f = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\overline{x}} \mathrm{d}\overline{x} + \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \mathrm{d}\overline{x} \ . \tag{1.30}$$

Dalla definizione di h,

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\overline{x}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\overline{x}} + \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \ . \tag{1.31}$$

Ora, nel punto $\overline{x} = \overline{x}^*$, dalla (1.29) si ha $\partial f / \partial \overline{x} = 0$, e quindi

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\overline{x}} = \left. \frac{\partial f}{\partial \overline{x}} \right|_{x=\overline{x}} \ , \tag{1.32}$$

che la condizione di smooth-pasting.

Ipotesi comportamentali alternative

Qual è quindi la differenza fra i due approcci se portano a conclusioni analoghe? La differenza si trova chiaramente nelle diverse ipotesi di comportamento da parte degli operatori economici. Mentre la condizione di smooth pasting è soltanto una proprietà matematica (tangenza) senza una giustificazione comportamentale diretta, la massimizzazione dei valori ha una chiara intuitiva base economica consistente nel comportamento ottimale degli agenti economici. Negli esempi sarà quindi preferita la massimizzazione del valore, sottolineando quindi che, i problemi analizzati sono giochi multi-personali in cui i giocatori si comportano in maniera ottimale. Comunque, lo stesso risultato si sarebbe ottenuto se avessimo usato invece la condizione di smooth pasting.

1.7.4 La soluzione

La soluzione al nostro problema di trovare quale prezzo l'intermediario dovrebbe chiedere per l'opzione può essere trovato nel modo seguente. Dal momento che il sottoscrittore dell'opzione prevede che l'investitore eserciterà l'opzione quando sarà ottimale farlo, egli chiederà per un prezzo pari al valore dell'opzione *assumendo che il possessore la eserciti in modo ottimale*, cioè, un prezzo pari al valore dato dalla (1.21) con le strategie die esercizio date da (1.25) e (1.28). Combinando queste espressioni danno

$$P_\infty(S) = (X - \overline{S}) \left(\frac{S}{\overline{\overline{S}}} \right)^{-\gamma} = \frac{X}{1+\gamma} \left(\frac{(1+\gamma)S}{\gamma X} \right)^{-\gamma} \quad , \tag{1.33}$$

che possiamo aspettarci quindi essere il prezzo di mercato di una opzione put perpetua. Questa soluzione era già stata ottenuta da Merton, che aveva implicitamente il metodo appena descritto.

1.8 Anticipazione degli esempi

Nei prossimi capitoli vedremo come la valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi può essere applicata a due problemi classici della finanza di impresa e dell'intermediazione finanziaria. Mentre gli esempi forniti qui sotto sono come tali di grande interesse, l'accento metodologico è ugualmente importante. Gli esempi trattati sono solo due dei molti in cui si applica il metodo

Nel capitolo 2, *Credito e Garanzie*, consideriamo due classici problemi della contrattazione finanziaria, ossia, il problema della traslazione del rischio e il problema dell'osservabilità, e vedremo che essi sono strettamente legati. L'analisi individua una soluzione di compromesso fondamentale tra i due problemi, mostrando che non esiste alcun contratto che risolva sia il problema di traslazione del rischio sia il problema dell'osservabilità contemporaneamente. Viene considerato poi il ruolo delle garanzie nel mitigare gli incentivi di traslazione del rischio del mutuatario e vengono discusse le implicazioni pratiche dei compromessi tra il problema della traslazione del rischio e dell'osservabilità per la finanza d'impresa.

Nel capitolo 3, *Corsa alle banche*, analizziamo gli effetti di questo importante fenomeno sulla politica di investimento e finanziamento di una banca. Dopo aver esaminato la decisione dei risparmiatori di ritirare i propri crediti dalle banche, viene valutato il patrimonio netto della banca come un opzione call di tipo knock-out (un opzione con due valori di strike: il primo definisce il livello in cui l'opzione cessa di esistere; il secondo il livello in cui l'opzione viene esercitata), e viene dimostrato che la possibilità di corsa agli sportelli disciplina la politica di investimenti della banca. La ragione è che gli azionisti della banca, anticipando la possibilità della corsa alle banche, riducono in maniera ottimale i rischi dei beni bancari al fine di ridurre la probabilità che queste corse agli sportelli avvengano. Quindi, i debiti esigibili possono essere intesi come un accordo contrattuale atto a scoraggiare gli azionisti della banca di impegnarsi in attività di traslazione del rischio. Viene analizzata la decisione degli azionisti di ricapitalizzare prima che questo fenomeno accada, ed è dimostrato che essi sono usualmente disposti a ricapitalizzare se una corsa agli sportelli è imminente. Viene esplorata la decisione iniziale ottimale di finanziamento della banca e viene mostrato che il ruolo primario del capitale della banca è quello di coprire i costi di liquidazione nel caso accada una corsa alle banche. Di conseguenza, l'impegno iniziale di capitale da parte degli azionisti è molto elevato, molto più grande dei costi di liquidazioni. Infine, vengono analizzate le condizioni per l'intermediazione finanziaria affinchè sia redditizia, e viene dimostrato che la somma necessaria per il pareggio da parte degli azionisti è molto grande, i maggiori costi delle attività di liquidazione, ed è proporzionale alla varianza istantanea delle attività della banca.

Capitolo 2

Applicazione del metodo: Credito e Garanzie

2.1 Introduzione

L'azzardo morale è una fonte di inefficienza, che è stata ampiamente studiata in economia e finanza. Nella contrattazione finanziaria, si verificano entrambe le forme classiche di azzardo morale, ciascuna delle quali ha dato luogo a problemi specifici di incentivazione:

- In una situazione di *azione nascosta*, l'agente prende un azione che non è osservata dal principale. Ad esempio, il mutuatario potrebbe tentare di influenzare la distribuzione di ritorno del suo progetto per aumentare il suo payoff atteso a spese del creditore. Questo è quello che viene solitamente chiamato problema della *traslazione del rischio* (o problema della attività di sostituzione).

- In contrapposizione, in una situazione di *informazione nascosta*, l'agente studia privatamente il vero stato del mondo prima di scegliere un'azione osservabile. Nel contesto della contrattazione finanziaria, il mutuatario è in genere l'unica persona che può osservare i profitti del progetto a costo zero. Nella misura in cui il suo pagamento promesso dipende dal ritorno del progetto realizzato, il mutuatario potrebbe avere un incentivo a sottovalutare il ritorno del progetto al fine di ridurre il suo pagamento al creditore. Questa forma di asimmetria di informazione dà luogo al così detto *problema di osservabilità*

Lo scopo di questo capitolo è analizzare i problemi della traslazione del rischio e dell'osservabilità usando gli strumenti forniti dall'analisi delle opzioni con metodi di teoria dei giochi e dimostrare in che modo sono collegati. Le impostazioni che useremo saranno volontariamente semplici con una prestabilita vita del contratto e un singolo pagamento dal mutuatario al creditore; situazioni più complicate possono essere elaborate a partire da queste.

La struttura del capitolo è la seguente. La Sezione 2.2 analizza il problema della *traslazione del rischio* usando un semplice contesto tra un agente principale (che chiameremo semplicemente principale) ed un agente secondario (che chiameremo semplicemente agente) in cui il principale presta denaro all'agente per un periodo di tempo finito e non può richiedere il prestito prima della maturazione. Estendendo l'intuizione base dei primi modelli che la convessità del payoff del mutuatario sia responsabile della traslazione del rischio, viene sviluppato un contratto evitando la traslazione del rischio. Viene mostrato che, nell'analisi in tempo continuo, esiste un infinito numero di contratti che presentano questa proprietà ad ogni punto nel tempo. Comunque, solo un di questi contratti è a prova di rinegoziazione nel senso che induce a prendere adeguati rischi per tutta la durata del prestito, indipendentemente dall'evoluzione del valore del progetto sottostante. Poichè evita una dispendiosa rinegoziazione, ci si può attendere che un tale contratto sia preferito da entrambi principale ed agente. Cosi scopriamo che questo contratto di incentivazione a prova di rinegoziazione è un contratto di condivisione lineare del rischio. La proprietà di linearità ha l'interessante intuitiva interpretazione di indurre il mutuante a comprare azioni nell'iniziativa finanziaria del mutuatario.

Passando al problema dell'*osservabilità*, la Sezione 2.3 mostra che l'analisi di modelli in un periodo continua a valere anche in ambiente a tempo continuo. Ognivolta che il ritorno sul progetto del mutuatario non può essere osservato dal creditore, il pagamento contrattuale alla scadenza non può essere subordinato ad esso. Quindi, il contratto ottimale quando il ritorno del progetto è inosservabile è un contratto a debito. Di fronte ad un tale contratto, tuttavia, il mutuatario è incentivato ad assumere comportamenti di traslazione del rischio. Quindi siamo posti davanti ad una scelta fondamentale tra risolvere il problema della traslazione del rischio e risolvere il problema dell'osservabilità. Viene dimostrato che quando il contratto scelto è un contratto a debito, il problema della traslazione del rischio può essere attenuato con l'uso delle garanzie. Viene analizzato l'impatto dell'ammontare delle garanzie negli incentivi del mutuatario alla traslazione del rischio e viene mostrato che nel caso limite della totale copertura con garanzie del prestito, l'incentivo alla traslazione del rischio può essere completamente eliminato.

Infine, nella Sezione 2.4 si conclude il capitolo discutendo alcune conseguenze pratiche per le società di finanziamento del risultato generale che dice che non esiste un contratto che risolve *entrambi* contemporaneamente i problemi della traslazione del rischio e dell'osservabilità.

2.2 Il problema della traslazione del rischio

Un problema classico nella contrattazione finanziaria è il cosiddetto problema della traslazione del rischio. Questo problema, che in genere si pone nel contesto di un rapporto mutuante-mutuatario, rappresenta un incentivo per il mutuatario ad influenzare il rischio del suo progetto. Facendo questo, il mutuatario può aumentare il valore del suo payoff a scapito del mutuante. La traslazione del rischio è una delle fonti di debito di una agenzia documentate nella letteratura della finanza d'impresa.

I mutuatari (come gli intermediari finanziari) che sono consapevoli del fatto che i mutuanti hanno un incentivo ad incrementare il rischio dei loro progetti possono usare tre approcci basilari per risolvere il problema:

1. Il primo è semplicemente anticipare il comportamento del mutuatario e richiedere un tasso di interesse più alto per il prestito. Tuttavia l'aumento del tasso di interesse potrebbe essere non vantaggioso per i creditori a causa dei risultanti effetti di scelta avversa. L'intuizione è che quei mutuanti che acconsentiranno a tassi di interesse più alti sui loro prestiti saranno proprio quelli che non intendono rimborsare il prestito.

2. Il secondo approccio richiede che l'intermediario controlli attentamente il mutuatario per evitare che prenda rischi eccessivi. Il problema nell'uso di questo approccio è che l'attività di monitoraggio aumenta i costi delle attività di prestito. La conseguenza è che alcuni progetti di investimento che sarebbero stati intrapresi, in assenza del problema della traslazione del rischio, non saranno effettuati se il problema della traslazione del rischio è presente.

3. Il terzo approccio richiede che l'intermediario elabori un contratto che induce il mutuatario a comportarsi correttamente senza bisogno di monitorarlo. Grazie ai risparmi derivanti dai costi di interesse e di monitoraggio, quest'ultimo approccio nel risolvere il problema della traslazione del rischio sembra interessante e ci si può aspettare che prevalga nella pratica ogni volta sia plausibile.

L'obbiettivo di questa sezione è di analizzare la struttura del problema della traslazione del rischio usando la valutazione di derivati con metodi di teoria dei giochi, per dimostrare come può essere elaborato un contratto di incentivazione che garantisca che il mutuatario non assuma rischi inopportuni, e considerare le proprietà di un contratto di questo tipo.

2.2.1 Il modello

Consideriamo un intermediario finanziario (che chiameremo anche mutuante o principale) che presta denaro ad un mutuatario (o agente) per investirli in uno o più progetti che sono disponibili solo per il mutuatario. Assumiamo che il mutuante non possa osservare la scelta del progetto del mutuatario (o che farlo abbia costi proibitivi), e che quindi non possa accertarsi del rischio del progetto.

Al tempo iniziale, tutti i progetti hanno lo stesso (equo) prezzo S_0, ma differenti rischi. Il valore dei progetti si evolveranno seguendo ciascuno un moto Browniano geometrico.

Assumiamo inoltre che il mutuatario può, in ogni momento, cambiare idea e passare ad un altro progetto senza alcun costo ulteriore. Notiamo che questa ipotesi implicitamente richiede che tutti i progetti disponibili abbiano un profitto costante in scala in modo che la somma investita nel nuovo progetto sia sempre uguale alla somma ottenuta dal liquidare il vecchio progetto. In alternativa, si può pensare ad un modello che coinvolga un solo progetto, ma con molte strategie di mercato alternative ciascuna con differente grado di rischio che possono essere modificate con il passare del tempo. Formalmente, dato un qualsiasi momento t nel tempo, l'agente può scegliere di investire tutti i fondi in uno qualsiasi di una serie di progetti, $i = 1, \ldots, I$, il cui valore dinamico è dato da

$$\mathrm{d}S_i = \mu_i S_i \mathrm{d}t + \sigma_i S_i \mathrm{d}B_{i,t} \ . \tag{2.1}$$

Notiamo che poichè tutti i progetti sono equamente quotati, per il mutuatario sarà indifferente investire in uno qualsiasi di essi. Se così non fosse, si presenterebbe un problema di traslazione del rischio.

Per semplicità, assumiamo che tutti i progetti hanno un termine fissato T e che il loro valore casuale finale, $\overline{S}_i$, è osservabile sia dal mutuatario che dal mutuante. Assumiamo che entrambi concordino alla fine del periodo in una singola somma di pagamento al principale $f(\overline{S}_i)$. Infine assumiamo che mutuatario e mutuante non abbiano altre attività. Allora, il pagamento *effettivo* del mutuatario al mutuante al tempo T, ovvero il payoff per il mutuante Π_L, qualunque cosa sia stata concordata prima, è dato da

$$\Pi_L(\overline{S}_i) = \min[\overline{S}_i, f(\overline{S}_i)] \ . \tag{2.2}$$

Il payoff per il mutuatario è uguale alla differenza tra profitto totale del progetto e la somma pagata al mutuante,

$$\begin{aligned} \Pi_B(\overline{S}_i) &= \overline{S}_i - \Pi_L(\overline{S}_i) = \overline{S}_i - \min[\overline{S}_i, f(\overline{S}_i)] \\ &= \max[0, \overline{S}_i - f(\overline{S}_i)] \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

La Figura 2.1 riassume la struttura di questo gioco. Al primo passo, viene stipulato il contratto finanziario. Il mutuante cede una somma pari a D_0 al mutuatario con la promessa che al termine del contratto al tempo T, quest'ultimo pagherà al principale l'ammontare di $f(\overline{S}_i)$. Dopo aver ricevuto la somma dal creditore, il mutuatario investirà la somma in un progetto e, se le vuole, può deviare in qualsiasi momento verso un altro progetto (con maggiore o minore rischio) senza alcun costo aggiuntivo. Infine, quando il contratto scade al tempo T, il mutuante e il mutuatario osservano il valore $\overline{S}_i$ del progetto e quest'ultimo pagherà al primo $\min[\overline{S}_i, f(\overline{S}_i)]$.

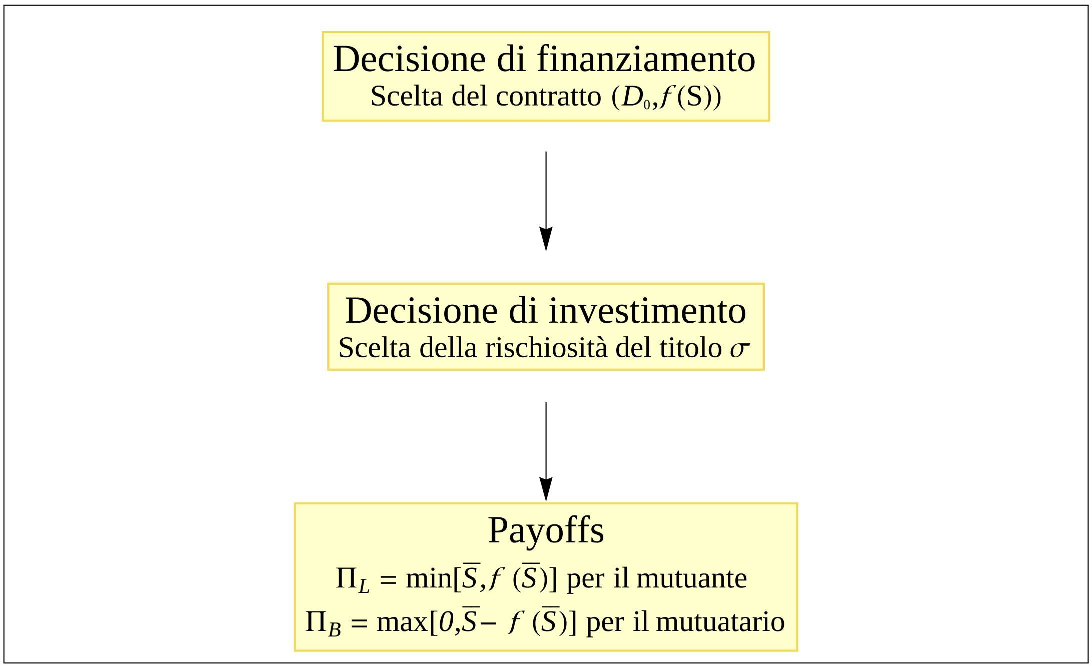

Figura 2.1: Struttura del gioco tra il mutuatario e il mutuante. Dopo aver sottoscritto il contratto finanziario, il mutuatario sceglie un progetto d'investimento. In ogni momento della vita del contratto, egli può orientarsi verso un altro progetto che presenta maggiore o minore rischio. Al tempo T, il profitto del progetto è pubblicamente osservabile e i payoffs vengono liquidati.

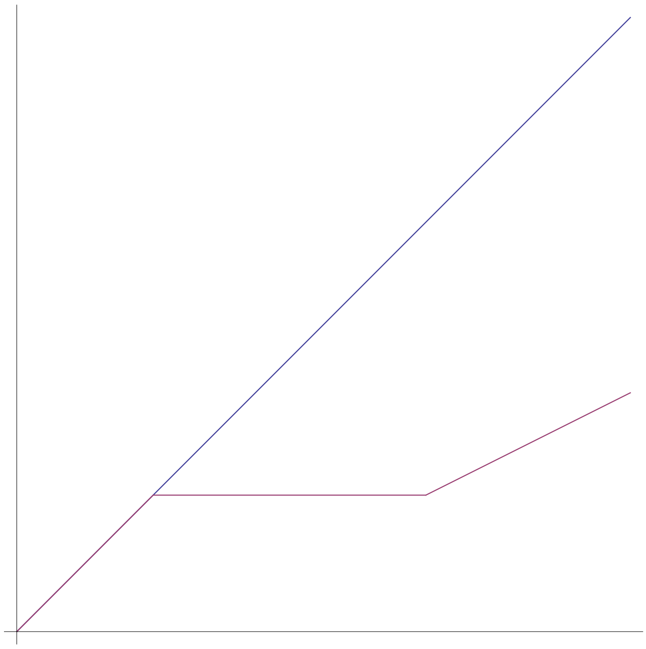

Figura 2.2: Esempio di regola fattibile di partecipazione dei profitti tra mutuante e mutuatario. La regola attribuisce al mutuante tutto fino al ritorno del progetto X_1, più metà di ogni profitto in eccesso di X_2.

2.2.2 Contratti di condivisione degli utili tra il mutuatario e il mutuante

Riassumendo, un contratto è un pagamento del mutuante al mutuatario di una somma D_0 al tempo 0 e un intesa da parte del mutuatario di rendere al mutuante $\Pi_L = \min[\overline{S}_i, f(\overline{S}_i)]$ al tempo T. Il totale dei payoffs di entrambi al tempo T è $\overline{S}_i$. All'interno di questo vincolo di fattibilità, mutuante e mutuatario possono concordare qualsiasi tipo di pagamento o *regola di ripartizione* del profitto. Un esempio di un tale sistema di pagamento è raffigurato in Figura 2.2. La regola di ripartizione in questo caso attribuisce al mutuante tutto il profitto di un progetto X_1, più metà di ogni profitto in eccesso di X_2.

Ogni regola di ripartizione tra il mutuante e il mutuatario può essere caratterizzata da un pagamento fisso D e da un determinato numero di opzioni put e call (anche con differenti prezzi di strike). Questo viene dimostrato in Figura 2.3 dove si vede che il mutuatario paga al mutuante una somma pari al numero di α opzioni put (in posizione corta) con un prezzo di esercizio pari a X_1, β opzioni call con un prezzo di esercizio di X_2, e una somma forfettaria D.

2.2.3 Sviluppo di un contratto di incentivazione

Le proprietà di un contratto della forma descritta nella Figura 2.3 (ovvero un pagamento fissato D, α opzioni put e β opzioni call), che evita strategiche prese di rischio e evasioni del rischio da parte dell'agente, saranno ora determinate. Per fare questo, il primo passo è quello di determinare il valore dei pagamenti al principale e all'agente usando la valutazione delle opzioni. Dalla struttura del contratto, il valore attuale del payoff per il mutuante può essere ottenuto dalla formula

$$\Pi_L = e^{-r\tau} D + \alpha P(X_1) + \beta C(X_2) \ , \tag{2.4}$$

dove r denota il tasso di interesse privo di rischio, τ la vita residua del prestito, e P e C rappresentano il valore di un opzione put e call di Black-Scholes con un prezzo di esercizio X_1 e X_2 rispettivamente:

$$P(X_1) = X_1 e^{-r\tau}(1 - N(d_1 - \sigma\sqrt{\tau})) - S(1 - N(d_1)) \ , \tag{2.5}$$

$$C(X_2) = SN(d_2) - X_2 e^{-r\tau} N(d_2 - \sigma\sqrt{\tau}) \ , \tag{2.6}$$

dove

$$d_i = \frac{\ln(S/X_i) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \ , \quad i \in 1, 2 \ , \tag{2.7}$$

e $N(\cdot)$ denota la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard. Allo stesso modo, il valore attuale del payoff al mutuatario è dato da

$$\Pi_B = S - \Pi_L = S - e^{-r\tau} D - \alpha P(X_1) - \beta C(X_2) \ . \tag{2.8}$$

Al fine di evitare la traslazione del rischio, i parametri α, β, D, X_1 e X_2 devono essere scelti in modo che il mutuatario non sia incentivato a influenzare il rischio del progetto. Si può ottenere questo risultato rendendo il valore privo di arbitraggio del payoff Π_B del mutuatario indipendente dalla rischiosità del titolo (o volatilità) σ. Formalmente deve valere

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial \sigma} = -\alpha \frac{\partial P(X_1)}{\partial \sigma} - \beta \frac{\partial C(X_2)}{\partial \sigma} = 0 \ . \tag{2.9}$$

Dalla teoria delle opzioni sappiamo che

$$\frac{\partial P(X_1)}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} \tag{2.10}$$

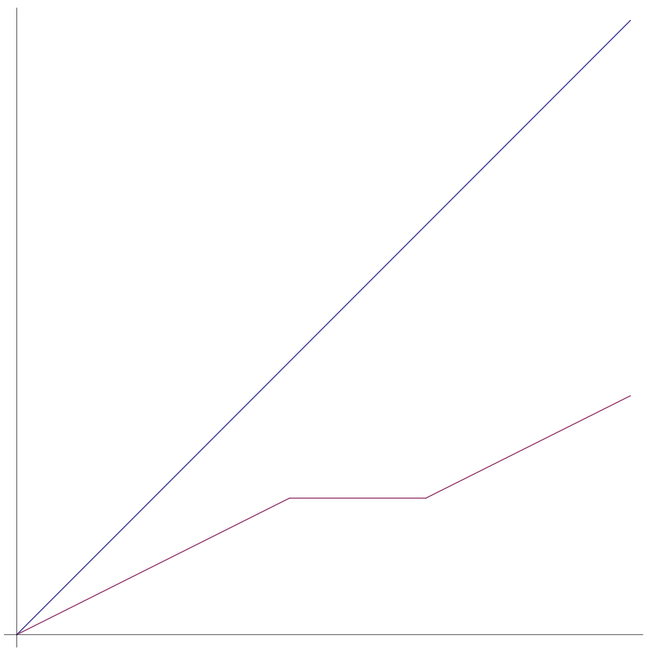

Figura 2.3: Un pagamento del mutuatario al mutante di α opzioni put con un prezzo di esercizio X_1, β opzioni call con un prezzo di esercizio X_2 e una somma forfettaria di D.

e

$$\frac{\partial C(X_2)}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_2^2/2} \ . \tag{2.11}$$

Quindi, la condizione di compatibilita di incentivazione per il mutuatario affinché non sia indotto ad una traslazione del rischio in un altro progetto, (2.9), diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_B}{\partial \sigma} &= -\alpha \frac{\partial P(X_1)}{\partial \sigma} - \beta \frac{\partial C(X_2)}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{S\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} \left(\alpha \exp \left(-\frac{(\ln(S/X_1) + (r + \sigma^2/2)\tau)^2}{2\sigma^2 \tau} \right) \right. \\ &\left. + \, \beta \exp \left(-\frac{(\ln(S/X_1) + (r + \sigma^2/2)\tau)^2}{2\sigma^2 \tau} \right) \right) = 0 \ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

L'esame della (2.12) mostra che, con α, β, X_1 e X_2 parametri liberi, esistono un numero *infinito* di contratti di compatibilità di incentivazione con ripartizione del profitto in ogni momento. Quale di questi il mutuante e il mutuatario dovrebbero scegliere? Per rispondere a questa domanda, introduciamo il concetto di contratto a prova di rinegoziazione.

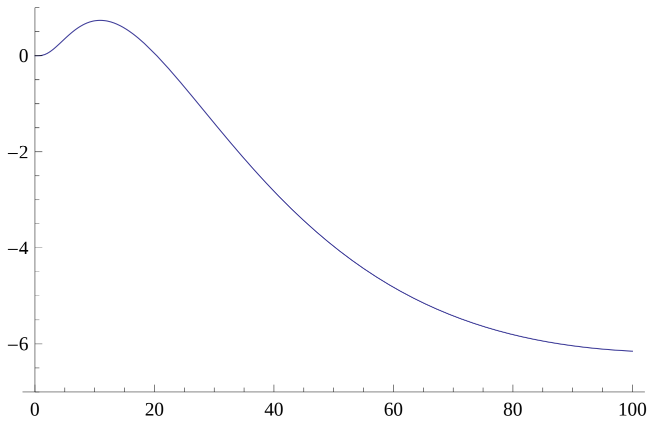

Figura 2.4: Esempio di un contratto che non è a prova di rinegoziazione. Il contratto dà al mutuatario un incentivo alla traslazione del rischio $\partial\Pi_B/\partial\sigma$ che è positivo per valori bassi del progetto e negativo per valori alti del progetto. (Valore dei parametri $\alpha = -0.5, \beta = 0.5, X_1 = 25, X_2 = 50, r = 0.05, \sigma = \tau = 1$.)

2.2.4 Contratti di incentivazione a prova di rinegoziazione

Nella letteratura classica si usa il termine contratto a prova di rinegoziazione per descrivere un contratto che non viene mai modificato. I contratti a prova di rinegoziazione sono intuitivamente attraenti. Nella misura in cui la rinegoziazione comporta costi, entrambi principale ed agente avranno la possibilità di guadagnarci se concorderanno su un contratto che assicura adeguati incentivi lungo la sua intera vita. Ci aspetteremo quindi che nella pratica prevalgano i contratti di incentivazione a prova di rinegoziazione.

In questo capitolo, un contratto sarà a prova di rinegoziazione se non incentiverà l'agente alla traslazione del rischio in qualsiasi momento della vita del contratto e per ogni valore del sottostante S. Questa condizione deriva dal fatto che il principale e l'agente potrebbero guadagnare reciprocamente dalla rinegoziazione del contratto se la compatibilità di incentivazione non fosse soddisfatta mano a mano che il tempo passa o quando il valore del progetto cambia.

La Figura 2.4 mostra un esempio di un contratto che *non* è a prova di rinegoziazione. Il contratto usa i parametri $\alpha = -0.5, \beta = 0.5, X_1 = 25$ e $X_2 = 50$, e quindi è della forma rappresentata nella figura 2.3. Osserviamo che per bassi valori del titolo, l'incentivo alla traslazione del rischio da parte del mutuatario $\partial\Pi_B/\partial\sigma$ è positivo, e cerca quindi di incrementare il rischio del progetto, al fine di aumentare il valore del suo credito (a spese del mutuante). Viceversa, per alti valori del titolo, il mutuatario può aumentare il valore del suo credito riducendo il rischio del progetto poichè $\partial\Pi_B/\partial\sigma < 0$.

Possiamo determinare quali contratti sono a prova di rinegoziazione? Ricordiamo che per un contratto per essere a prova di rinegoziazione, la condizione ottimale (2.12) deve valere per ogni valore τ e S. Quindi dobbiamo avere

$$\begin{aligned}\alpha \exp\left(-\frac{(\ln(S/X_1)+(r+\sigma^2/2)\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)\\ +\beta \exp\left(-\frac{(\ln(S/X_2)+(r+\sigma^2/2)\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right)=0\end{aligned} \tag{2.13}$$

per ogni S e τ. La condizione può essere riscritta come

$$-\frac{\alpha}{\beta}=\exp\left(\frac{(\ln(S/X_1)+(r+\sigma^2/2)\tau)^2-(\ln(S/X_2)+(r+\sigma^2/2)\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\right) \tag{2.14}$$

per ogni S e τ.

Se il contratto non viene rinegoziato, i valori di α e β come specificato dalla condizione precedente (2.14) devono essere indipendenti da S e τ. Quindi, la quantità

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{(\ln(S/X_1)+(r+\sigma^2/2)\tau)^2-(\ln(S/X_2)+(r+\sigma^2/2)\tau)^2}{2\sigma^2\tau}\\ &= \frac{\ln(X_2/X_1)(2\ln(S)-\ln(X_1X_2)+2(r+\sigma^2/2)\tau)}{2\sigma^2\tau}\end{aligned} \tag{2.15}$$

deve essere costante rispetto a S e τ. Prendendo la derivata parziale di questa espressione rispetto ad S e ponendola uguale a zero otteniamo

$$\frac{\partial\Psi}{\partial S}=\frac{\ln(X_2/X_1)}{S\sigma^2\tau}=0\ , \tag{2.16}$$

ovvero

$$X_1=X_2\ . \tag{2.17}$$

Sostituendo questa condizione nella (2.14) si ottiene

$$-\frac{\alpha}{\beta}=e^0=1\ , \tag{2.18}$$

e quindi

$$\alpha+\beta=0\ . \tag{2.19}$$

Così, si scopre che l'unico contratto di incentivazione a prova di rinegoziazione del tipo (2.4) è un contratto in cui deve valere $X_1=X_2$ e $\alpha+\beta=0$.

2.2.5 Il contratto di incentivazione realizzabile a prova di rinegoziazione

Con le condizioni $X_1 = X_2$ e $\alpha+\beta = 0$, la regola di condivisione del profitto concordata precedentemente dal principale e dall'agente per risparmiare sui costi di rinegoziazione è *lineare* nel valore finale del progetto $\overline{S}$. Il valore del pagamento iniziale D e dei parametri α e β possono ora essere determinati usando la condizione di fattibilità (2.2), come segue.

Si noti per primo che siccome l'agente non può pagare più di $\overline{S}$ al principale, α deve essere negativa. Per vedere questo, supponiamo per assurdo che α sia positiva. In questo caso, il contratto richiederà all'agente di effettuare un pagamento positivo al principale nonostante il progetto finisca senza alcun valore, ovvero, quando $\overline{S}$ è zero, il che viola la condizione di fattibilità (2.2). Quindi, α deve essere negativa e β positiva, in modo che la componente variabile del pagamento al principale sia data da $f(\overline{S}) = \beta\overline{S}$, dove β è una costante positiva.

Consideriamo ora il pagamento fisso D. Per essere ragionevole, il contratto dovrebbe richiedere un pagamento fisso D di zero. Per vederlo, assumiamo che D sia scelto positivo. Allora, il mutuatario non sarebbe in grado di soddisfare i suoi obblighi contrattuali ogni volta che $\overline{S} < D + \beta\overline{S}$, ovvero che ogni volta che $\overline{S} < D/(1-\beta)$. Questo renderebbe il suo payoff effettivo una funzione convessa del valore finale del progetto $\overline{S}$ e crerebbe un problema di traslazione del rischio. Allo stesso modo, se D fosse scelto negativo, il payoff del mutuatario diverrebbe una funzione concava, e sorgerebbe allo stesso modo un problema di traslazione del rischio.

Riassumendo, l'unico contratto di incentivazione realizzabile a prova di rinegoziazione sarà lineare nella $\overline{S}$ e non richiederà alcun pagamento fisso da parte del mutuante nei confronti del mutuatario alla maturazione del prestito. Cioè, il contratto è dato da

$$\Pi_L = f(\overline{S}) = \beta\overline{S} \ , \tag{2.20}$$

dove β è una costante positiva.

Questo risultato ha una semplice intuitiva interpretazione: quando il valore finale del progetto è perfettamente osservabile, non c'è alcuna ragione per il mutuante di richiedere un pagamento prefissato, poichè questo sarà solamente di ostacolo ad una partecipazione del rischio e crerebbe problemi di incentivazione del rischio senza fornire alcun beneficio. Quindi, il mutuante converrà nel ricevere una quota *proporzionale* β nel rendimento lordo dell'impresa, cioè acquisterà delle *azioni*. Comunque, è importante notare che a tempi continui, l'affermazione che una struttura finanziaria composta di sole equity elimini gli incentivi alla traslazione del rischio non è valida: come detto sopra, c'è un numero infinito di contratti con questa proprietà in ogni momento. Tuttavia, solo un contratto lineare di condivisione dei profitti è a prova di rinegoziazione.

2.2.6 La decisione di finanziamento

Una volta che il contratto di incentivazione realizzabile a prova di rinegoziazione è noto, è possibile determinare quale somma il mutuante accetta di dare al mutuatario al tempo 0. Se il mutuante concede in prestito una somma D_0 per ricevere una quota β del payoff finale $\overline{S}$, allora egli si impegnerà al massimo a prestare

$$D_0 = \beta S_0 \tag{2.21}$$

dove S_0 denota l'investimento totale iniziale nel progetto. Di conseguenza, il mutuatario, che riceve una quota $1-\beta$ del payout finale, deve fornire una quota $1-\beta$ nel capitale.

2.2.7 L'effetto dei payouts

Una questione interessante che sorge nel contesto della contrattazione finanziaria è quella di come debba essere modificata l'analisi nel caso in cui il mutuatario riceve payouts dal progetto prima della sua maturazione al tempo T. Intuitivamente, ci si aspetterebbe in questo caso che il mutuante chieda più capitale azionario, poichè il suo payoff finale viene ridotto dall'ammontare dei payouts. Per dimostrare che è proprio quello che accade, consideriamo la semplice situazione in cui il mutuatario può prelevare un dividendo proporzionale continuo con tasso δ dal progetto. Il valore del progetto senza questo diritto ai dividendi è dato da

$$S_\delta = Se^{-\delta T} \tag{2.22}$$

dove T è la vita del progetto. L'effetto del tasso di payout δ sul valore ex-dividendo del progetto è rappresentato in figura 2.5.

Usando (2.22) al tempo iniziale, la condizione (2.21) diventa

$$D_0 = \beta S_0 e^{-\delta T} \tag{2.23}$$

Quindi il mutuante, accetterà di finanziare al massimo una quota

$$\beta' = \frac{D_0}{S_0} = \beta e^{-\delta T} \tag{2.24}$$

del progetto per il diritto ad una quota β del payoff finale del progetto.

Questo semplice risultato ha un importante implicazione pratica. Poichè il mutuante può al massimo ricevere l'intero payoff finale (ovvero β è ovviamente limitato superiormente da 1), progetti finanziari con alti tassi di payout o una lunga vita potrebbero non

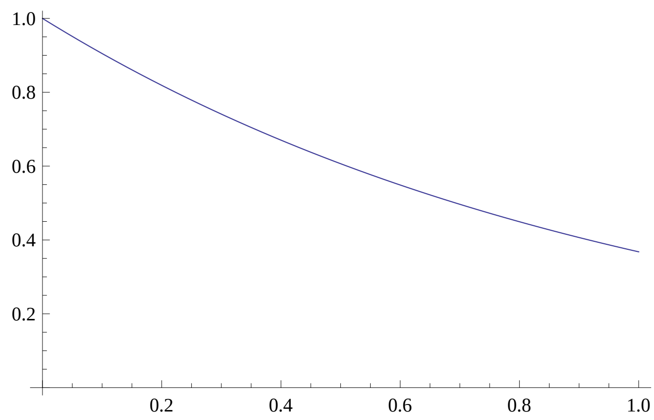

Figura 2.5: Valore attuale (come frazione dell'investimento iniziale) di un progetto annuale senza il diritto ai dividendi come funzione del tasso di dividendo del payout δ. All'aumentare del tasso di dividendo del payout, il credito del progetto senza i diritti ai dividendi è ridotto.

essere plausibili. Per vederlo prendiamo $\beta = 1$ nella quota finanziaria (2.24). Allora

$$\beta' = \frac{D_0}{S_0} = e^{-\delta T} \tag{2.25}$$

e il mutuatario deve fornire almeno una somma pari

$$E_0 = (1 - \beta')S_0 = (1 - e^{-\delta T})S_0 \tag{2.26}$$

nel capitale di rischio. Nella misura in cui egli non abbia una tale somma disponibile (ad esempio a causa di limitati fondi personali), il progetto non può essere realizzato.

2.3 Il problema dell'osservabilità

L'analisi appena fatta presuppone che entrambi mutuante e mutuatario possano osservare il valore finale dell'investimento senza alcun costo. Questa ipotesi in realtà è poco realistica. In molte situazione, ci si può aspettare che il mutuatario sia meglio informato del mutuante sul successo del progetto. La nostra analisi deve prendere in considerazione la possibilità che l'agente menta al principale nel riportare i profitti della realizzazione del progetto nel conto. Secondo il contratto di incentivazione scaturito prima, l'agente ha un forte incentivo a sottostimare il vero successo del progetto, in modo da poter pagare meno al principale come conseguenza di questa informazione errata.

Per vedere ciò, assumiamo che entrambe le parti abbiano concordato nel contratto di cui sopra, che richiede che l'agente paghi una quota β del profitto lordo del progetto al principale. Evidentemente, se il principale non può verificare il reale profitto del progetto, l'agente risparmierà β unità di conto per ogni unità di conto che egli sottovaluterà nel valore finale del progetto. Quindi, l'annuncio di profitto da parte dell'agente non è ottimale all'interno. La strategia migliore per l'agente è quella di annunciare un profitto lordo nullo e quindi non pagare nulla al principale. Tuttavia, in questo caso, ci si può attendere che il principale *anticipi* questo tipo di comportamento nel riportare un profitto errato e quindi non gli conceda il prestito. Questo potrebbe costringere il debitore a rinunciare a opportunità di investimento redditizie, conducendo ad un esito socialmente poco ottimale. Entrambi, mutuatario e mutuante, quindi, hanno interesse nel trovare una soluzione al problema.

2.3.1 Verifica dello stato dei costi

Analizziamo il problema della verifica dei costi in un periodo. Assumiamo che il profitto del progetto ha una funzione densità continua e strettamente positiva $g(\overline{S})$ nell'intervallo $[S_l, S_u]$, con $S_l > 0$ e che mutuante e mutuatario concordino in anticipo su quando la verifica debba essere fatta o meno. Allora il contratto ottimale deve avere le seguenti proprietà:

- Il compenso per il mutuante è uguale ad una somma costante D nel caso in cui non venga effettuata la verifica.

- La regione di verifica è un intervallo più piccolo $[S_l, S_v)$, $S_v \leq S_u$. Perciò, la verifica avviene ogni volta che il payoff annunciato del progetto $\overline{S}$ è più piccolo di S_v.

Questo contratto ha proprietà che sono molto simili a quelle di un contratto di debito standard, in cui viene specificato un pagamento fisso D e la verifica viene fatta quando viene dichiarata bancarotta, cioè, quando $\overline{S} < D$. Perciò, la verifica dello stato dei costi rende la completa condivisione del rischio sotto-ottimale.

Il risultato che il payoff promesso per il principale debba essere *costante* ogni qualvolta la verifica non abbia luogo implica che non esiste un contratto che risolve *entrambi* il problema della traslazione del rischio e dell'osservabilità contemporaneamente. Per capire perchè, ricordiamo che l'unico contratto che evita la traslazione del rischio è un contratto in cui il principale riceve una *quota* costante dei profitti realizzati del progetto. Un tale contratto, tuttavia, può essere compatibile con la soluzione precedente al problema dell'osservabilità solo se avviene *sempre* la verifica. Ma in questo caso vengono massimizzanti i costi di verifica, il che è chiaramente sotto-ottimale.

Perciò, incentivi alla traslazione del rischio di contratti a debito sono caratteristici della struttura convessa del payoff del mutuatario che risulta da un pagamento costante al mutuante quando il profitto finale del progetto è alto. Come vedremo ora, questi incentivi negativi possono essere mitigati attraverso l'uso di garanzie.

2.3.2 Garanzie

Per garanzia si intende un bene di cui il mutuante si può appropriare nel caso in cui il mutuatario non rimborsi il prestito. Nella letteratura è stato enfatizzato il ruolo delle garanzie nel fornire un disincentivo per il mutuatario a rendersi contumace. In generale le garanzie possono essere di due tipi. Nel primo tipo, le garanzie sono beni *esistenti* del mutuatario che vengono impegnati al mutuante nel caso egli si renda contumace. Questo era il caso che abbiamo esaminato nella sezione precedente di questo capitolo: il progetto del mutuatario era la garanzia per il prestito, e il mutuante può impadronirsi del progetto se il mutuatario non dovesse ricoprire il prestito. Nel secondo tipo, le garanzie sono beni *addizionali* che di norma non sono disponibili per il mutuante. In questa sezione consideriamo l'impatto di questo secondo tipo di garanzie nell'*incentivazione a prendere rischi* del mutuatario. In altre parole, cerchiamo di determinare come l'esistenza di questa seconda tipologia di bene incida sull'incentivo del mutuatario ad aumentare il rischio del progetto S.

Supponiamo che il mutuante e il mutuatario arrivino ad un accordo che preveda la fornitura di garanzie da parte del mutuatario nei confronti del mutuante che varrà la somma nota X alla scadenza del prestito. Assumiamo che, il contratto sia un contratto di debito standard, che preveda una somma fissa di pagamento D alla maturazione, che il prestito non sia totalmente coperto dalle garanzie (ovvero $X < D$) e che la vita del prestito T sia fissata (sono escluse estinzioni anticipate).

Al fine di analizzare gli effetti di incentivazione delle garanzie, dobbiamo determinare i payoffs dei giocatori. Consideriamo prima il mutuante. Ogni qual volta il valore totale dei beni disponibili per ripagare il prestito, ovvero la somma del valore finale del bene $\overline{S}$ con il valore della garanzia X, supera la somma promessa D, il mutuante viene rimborsato completamente. Viceversa, ogni volta che $X + \overline{S} < D$, il mutuatario non sarà in grado di ripagare, e il mutuante riceve il valore totale dei beni, $X + \overline{S}$, meno i costi fissi c di verifica di cui si deve far carico in caso di bancarotta. Perciò, il payoff del mutuante alla maturazione del prestito è

$$\Pi_L = \min[X + \overline{S}, D] - c\mathbf{1}_{\{X+\overline{S}<D\}} \ , \tag{2.27}$$

dove $\mathbf{1}_A$ è la funzione indicatrice dell'insieme A. La struttura del payoff è illustrata in Figura 2.6.

Il payoff del mutuatario è uguale al valore totale dei beni incluse le garanzie, $X + \overline{S}$, meno quello che deve pagare al mutuante ($\min[X + \overline{S}, D]$, poichè il mutuante si accollerà i costi di verifica). Quindi il payoff sarà

$$\begin{aligned}\Pi_B &= X + \overline{S} - \min[X + \overline{S}, D] \\ &= \max[0, X + \overline{S} - D] = \max[0, \overline{S} - (D - X)] \ .\end{aligned} \tag{2.28}$$

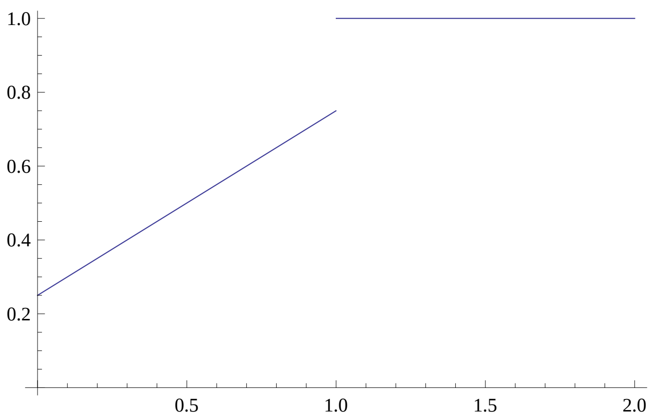

Figura 2.6: Payoff al mutuante di un prestito garantito.

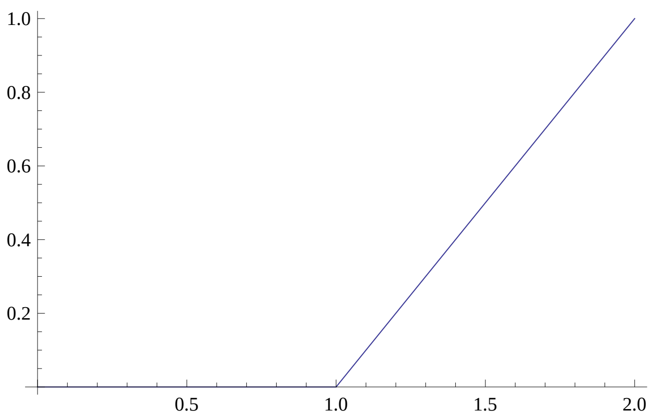

Figura 2.7: Payoff al mutuante di un prestito garantito. Come si nota ha la stessa struttura di un opzione call sul sottostante S con prezzo di esercizio $D - X$.

La struttura di questo payoff è la stessa di quella di un opzione call sul sottostante S con un prezzo di esercizio di $D - X$, come si può vedere in Figura 2.7.

Quindi il valore equo del payoff atteso per il mutuatario è uguale al valore della seguente opzione call,

$$C = SN(d) - (D - X)e^{-r\tau} N(d - \sigma\sqrt{\tau}) \ , \tag{2.29}$$

dove

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S}{D-X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \ , \tag{2.30}$$

e come prima, $N(\cdot)$ indica la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard, τ il tempo rimanente della vita del prestito e r il tasso di interesse privo di rischio.

Per studiare l'influenza dell'esistenza di garanzie sugli incentivi alla traslazione del rischio dell'agente, calcoliamo la derivata parziale del payoff attesa rispetto a σ,

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{S\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \ . \tag{2.31}$$

Questa espressione è positiva, quindi il problema della traslazione del rischio esiste, ma è comunque mitigato al crescere dell'ammontare delle garanzie. Nel caso estremo in cui $X \to D$, cioè, se il prestito è quasi completamente garantito, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{X \to D} d &= \lim_{X \to D} \frac{\ln\left(\frac{S}{D-X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln(S) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\lim_{X \to D} \ln(D - X)}{\sigma\sqrt{\tau}} = +\infty \end{aligned} \tag{2.32}$$

e quindi

$$\lim_{X \to D} \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \lim_{d \to \infty} \frac{S\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} = 0 \ . \tag{2.33}$$

Solo nel caso limite in cui il prestito è completamente garantito il problema della traslazione del rischio scompare. La ragione di questo risultato sta nel fatto che quando il credito del mutuante è completamente coperto dalle garanzie, diventa del tutto esente da rischi. Poichè il valore del credito del mutuante non dipende più dal rischio del progetto, per il mutuatario è impossibile ridurlo incrementando il rischio del progetto. A questo proposito, le garanzie possono essere intese come un accorgimento contrattuale che influenzi l'incentivo alla traslazione del rischio del mutuatario.

La Figura 2.8 illustra l'impatto delle garanzie negli incentivi alla traslazione del rischio del mutuatario tracciando l'incentivo alla traslazione del rischio (2.31) per differenti somme di garanzia. La Figura 2.8 dimostra che la ammontare delle garanzie a copertura del prestito, X, ha un influenza drammatica nell'incentivo alla traslazione del rischio del mutuatario. Al crescere della somma delle garanzie come frazione del valore nominale del debito D, l'incentivo alla traslazione del rischio aumenta per bassi valori del progetto e diminuisce per alti valori, fino a scomparire, nel caso limite di una completa copertura con le garanzie, ovvero quando $\partial C/\partial \sigma = 0$.

L'analisi di questa sezione dimostra che le garanzie proteggono il mutuante in due diversi modi:

1. Primo, le garanzie concedono un credito su un bene aggiuntivo in caso di bancarotta, permettendogli perciò di rientrare di qualche credito.

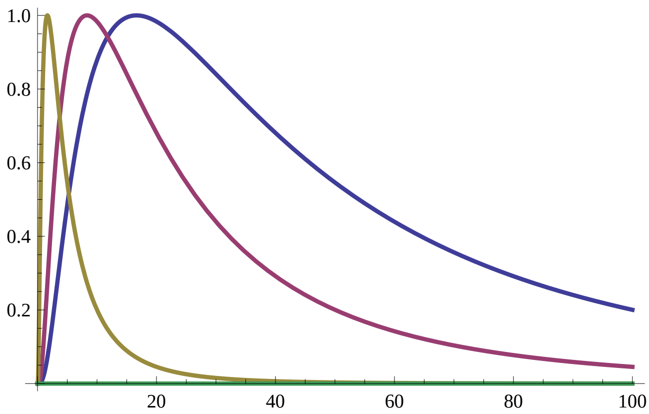

Figura 2.8: Influenza delle garanzie sul incentivo alla traslazione del rischio del mutuatario con i seguenti valori dei parametri: $D = 50, r = 0.05, \sigma = \tau = 1$. Al crescere dell'ammontare delle garanzie, aumenta l'incentivo alla traslazione del rischio per valori bassi dei progetti e diminuisce per valori alti dei progetti. Nel caso limite di una completa copertura con garanzie, l'incentivo alla traslazione del rischio scompare completamente.

2. Secondo, un po meno scontato, le garanzie mitigano l'incentivo a traslare il rischio da parte del mutuatario, riducendo perciò la probabilità di fallimento. Se il prestito è completamente coperto dalle garanzie, l'incentivo a traslare il rischio da parte del mutuatario scompare e i suoi interessi si allineano con quelli del mutuante.

2.4 Conclusione

In questo capitolo abbiamo usato l'analisi di derivati con metodi di teoria dei giochi per risolvere due classici problemi della contrattazione finanziaria, il problema della *traslazione del rischio* e il problema dell'*osservabilità* e abbiamo visto la relazione che li lega.

La *traslazione del rischio* sorge quando il mutuatario è incentivato ad influenzare il rischio del suo progetto per incrementare il valore del suo payoff alle spese del mutuante. L'analisi fatta nella Sezione 2.2 rivela che esistono, in ogni momento, un numero infinito di regole di condivisione dei profitti che evitano la traslazione del rischio. Tuttavia, solo uno di questi contratti è a prova di rinegoziazione: il contratto lineare di condivisione dei profitti, nel quale il mutante riceve una quota proporzionale del profitto lordo del progetto.

Il problema dell'*osservabilità* sorge quando il mutuante è impossibilitato ad osservare il ritorno del progetto senza alcun costo. Se viene pattuito uno schema di condivisione lineare dei profitti al fine di evitare la traslazione del rischio, allora il mutuatario ha un incentivo a sottostimare il profitto del progetto. La ragione è che facendo questo, egli riduce la somma che deve dare al mutuante. Per risolvere il problema dell'osservabilità, può allora essere concordato un pagamento fisso. In questo caso, il contratto tra mutuante e mutuatario prende la forma di un contratto di debito standard.

L'analisi presentata nella Sezione 2.3 dimostra che risolvere il problema dell'osservabilità attraverso un contratto di debito standard crea un problema di traslazione del rischio, e che ogni tentativo di risolvere il problema della traslazione del rischio con un contratto lineare di condivisione dei rischi crea un problema di rivelazione. Quindi tranne nel caso di un debito completamente garantito, che è in effetti privo di rischio, non si riesce a risolvere i due problemi contemporaneamente. La ragione è che gli incentivi a prendere dei rischi in un prestito non completamente coperto dalle garanzie sono caratteristici delle responsabilità limitate e dell'associata struttura convessa dei payoff al mutuatario.

Capitolo 3

Applicazione del metodo: Corsa alle banche

3.1 Introduzione

La corsa alle banche è uno dei fenomeni più impressionanti e inspiegabili nella storia delle banche. Avviene quando un elevato numero di clienti di una banca prelevano contemporaneamente tutti i loro depositi per paura che la banca diventi insolvente (avendo probabilmente ricevuto negative informazioni sui profitti della banca). Tale avvenimento destabilizza la banca stessa, che spesso fallisce.

L'esistenza della corsa alle banche solleva alcune questioni:

- Quali sono gli *effetti di incentivazione* dovuti alla possibilità di corsa alle banche sulla politica di finanziamenti e investimenti della banca?
- Saranno d'accordo gli azionisti nel *ricapitalizzare* la banca se una corsa alle banche sembra essere imminente?
- Come la possibilità di corsa alle banche e le sue conseguenze influiscono sull'*equilibrio del deposit spread* (ovvero la differenza tra il tasso di interesse privo di rischio e il tasso di interesse pagato sui depositi) nell'economia?

Per rispondere a queste questioni, in questo capitolo consideriamo che, in tempi continui, i payoffs dei progetti in cui la banca ha investito possano essere incerti. Viene ricavata la condizione sotto la quale le banche sono vulnerabili alla corsa alle banche, e viene dimostrato che gli azionisti sono disposti di solito a ricapitalizzare la banca in modo da evitare le corse alle banche. La possibilità di corsa alle banche è dimostrato avere un effetto disciplinante sulla politica di investimento delle banche. Quindi, nelle semplici impostazioni presentate qui, le corse alle banche avvengono di rado in condizioni di equilibrio. Inoltre, è dimostrato che l'esistenza delle corse alle banche influenzi la politica di finanziamento delle banche stesse, inducendole a usare più capitale societario. Infine, i determinanti dell'equilibrio del deposit spread sono analizzati.

3.2 Il modello

Consideriamo una banca con due risparmiatori A e B, ciascuno dei quali avente un deposito di X_0 unità di valuta al tempo iniziale 0. Supponiamo che per ogni unità di valuta versata in banca al tempo iniziale, gli azionisti aggiungano $x \geq 0$ unità di valuta del capitale. La banca investe queste somme di denaro in un attività rischiosa con prezzo iniziale $S_0 = X_0$ e il cui valore S segue un moto Browniano geometrico

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t \ . \tag{3.1}$$

Perciò, il valore totale del bene della banca al tempo t è $2(1+x)S_t$.

Assumiamo che un tasso di interesse continuo di r^* venga pagato sui depositi e che il tasso di interesse privo di rischio sia r, dove $r^* < r$. Quindi, il valore di ogni deposito al tempo t è dato da

$$X(t) = X_0 e^{r^* t} \ . \tag{3.2}$$

Inoltre, assumiamo che i risparmiatori possono in qualsiasi momento, senza alcun preavviso, ritirare la somma totale del loro deposito. Se la banca deve liquidare il progetto in cui ha investito, deve, comunque, incorre in un costo proporzionale di α. Notiamo che in queste impostazioni, l'intermediazione finanziaria sarà redditizia se i soldi rimarranno depositati abbastanza a lungo in modo che il differenziale di interesse (o *deposit spread*) $r - r^*$ ricavato dalla banca compone il costo atteso di liquidazione α.

L'analisi in questo capitolo non tiene conto dei possibili conflitti di interesse tra l'amministrazione della banca e gli azionisti. Per tutta la durata, si presume che la gestione della banca prenda decisioni che massimizzino il valore del patrimonio netto della banca.

La struttura del gioco tra la banca e i depositanti è raffigurata in Figura 3.1. Per primo cosa, i possessori del capitale della banca decidono quanto capitale x fornire alla banca per unità di depositi. In una seconda fase, i depositanti decidono se versare i propri risparmi in banca o meno. In una terza fase, la banca sceglie le sue strategie di investimento. Se una corsa alle banche sembra imminente, i possessori del capitale della banca devono decidere se ricapitalizzare la banca o no. Se lo fanno, essi immetteranno w unità di capitale addizionale per unità di valore dei beni della banca. Infine, i depositanti decidono se correre alla banca o meno confrontando il valore nominale dei depositi e i valori totali dei beni (posto che siano osservabili). Se essi decidono di correre alla banca, i beni della banca vengono liquidati e vengono realizzati i payoffs.

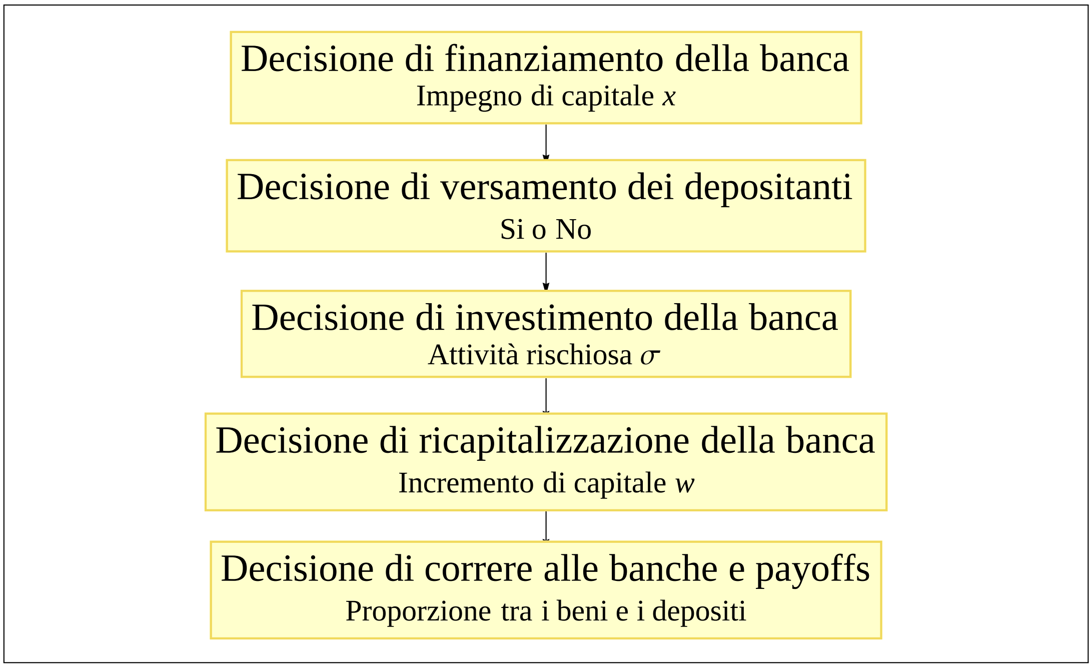

Figura 3.1: Struttura del gioco. Per primo, la banca viene finanziata. Dopo aver osservato l'impegno di capitale x da parte degli azionisti della banca, i depositanti decidono se versare denaro o meno. La banca allora sceglie una strategia di investimento, selezionando un rischio σ per i suoi beni, iniettando w unità di capitale addizionale per unità di valore dei beni bancari. Infine, i depositanti possono decidere di correre alle banche. Se lo fanno, i beni bancari vengono liquidati e si realizzano i payoffs.

Il resto del capitolo è organizzato come segue. Nella Sezione 3.3 si analizza la decisione dei depositanti di correre alle banche o meno e brevemente si descrive la funzione delle banche come fornitori di capitale. Nella Sezione 3.4 vengono stimati il valore dei beni della banca come un opzione call di tipo knock-out, una volta determinato il comportamento dei depositanti. Nella Sezione 3.5 si esplora la decisione da parte dei titolari del capitale della banca di ricapitalizzare, e viene mostrato che ci si può aspettare che la ricapitalizzazione avvenga quando il valore del capitale scende sotto un certo livello. Nella Sezione 3.6 si determina la politica di investimento ottimale per la banca e si dimostra che la possibilità di una corsa alle banche disciplina il comportamento della banca stessa, inducendo la banca a ridurre il rischio dei suoi investimenti. Nella Sezione 3.7 si discutono le conseguenze di una corsa alle banche per la politica di finanziamento della banca. Nella Sezione 3.8 si considerano i determinanti di un equilibrio del deposit spread, che si vede essere collegato alla rischiosità dei beni della banca e alla dimensione dei costi di liquidazione. La Sezione 3.9 conclude il capitolo.

3.3 La decisione di corsa alle banche dei depositanti

La prima questione a cui rispondere nel risolvere il gioco raffigurato nella Figura 3.1 è quella di capire se è probabile che una corsa alle banche si verifichi, e se si quando. Per rispondere a questa domanda, rappresentiamo la decisione di ritiro dei depositanti come un gioco formato da due persone. Invece di scrivere la matrice dei payoff del gioco e cercare gli equilibri di Nash per esso, consideriamo semplicemente i payoff dei giocatori.

Poichè il valore totale del capitale dopo i costi di liquidazione è $2(1-\alpha)(1+x)S_t$, il payoff per il depositante è dato da

$$\min[2(1-\alpha)(1+x)S_t, X(t)] \tag{3.3}$$

se ritira per primo, e

$$\max[0, 2(1-\alpha)(1+x)S_t - X(t)] \tag{3.4}$$

se ritira per secondo.

Quando potrebbe avvenire una corsa alle banche? Chiaramente la banca è vulnerabile non appena si verifica la situazione che entrambi (i giocatori) vogliono ritirare i loro risparmi per primi, ovvero appena

$$\min[2(1-\alpha)(1+x)S_t, X(t)] > \max[0, 2(1-\alpha)(1+x)S_t - X(t)] \ . \tag{3.5}$$

Dalla Figura 3.2, che mostra i payoffs nel caso si ritiri per primo o per secondo come

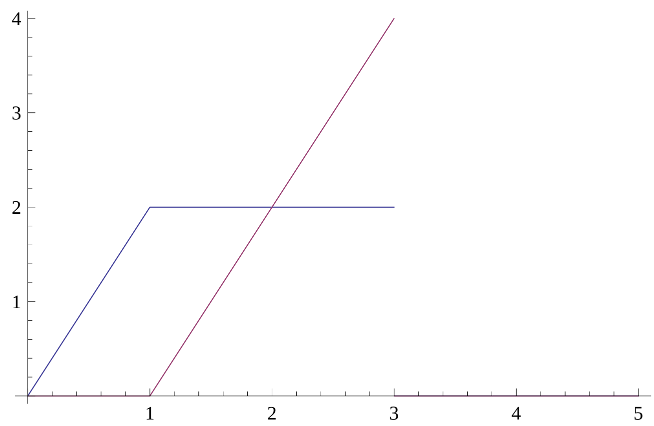

Figura 3.2: Payoff dei giocatori nel caso ritirino per primo o per secondi come funzione del sottostante S. Se il valore attuale di S è minore di $X(t)/((1-\alpha)(1+x))$, i depositanti sono incentivati a ritirare per primi, il che innesca una corsa alle banche.

funzione del sottostante S, è immediato capire che c'è un vantaggio nel ritirarsi prima se e solo se

$$S_t = \frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)} \tag{3.6}$$

Questa condizione significa che una corsa alle banche è possibile appena il valore del patrimonio netto della banca dei costi di liquidazione è più basso del valore nominale dei depositi, ovvero $(1-\alpha)(1+x)S_t < X(t)$.

Vale la pena notare che l'incentivo alla corsa alle banche appena $S_t < X(t)/((1-\alpha)(1+x))$, ha un importante influenza sui depositanti se versare o meno i soldi nella banca come prima scelta e quindi influisci anche sulla politica di finanziamenti della banca. Infatti, se da parte degli azionisti il capitale bancario x è impostato sufficientemente alto per ogni unità di valuta depositata in banca, la condizioni che si verifichi una corsa alle banche potrebbe essere soddisfatta al tempo iniziale, che significa che i risparmiatori *non* depositeranno i loro soldi in quella banca.

Per determinare una somma di capitale iniziale x in modo che i risparmiatori accettino di versare i loro soldi, osserviamo che questa somma debba essere tale che la condizione per la corsa alle banche *non* si verifichi

$$S_t > \frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)} \equiv \overline{S}_t \ , \tag{3.7}$$

sia soddisfatta al tempo iniziale. Sostituendo $S_0 = X_0$ nella condizione precedente si ha

$$(1-\alpha)(1+x) > 1 \ , \tag{3.8}$$

o

$$x > \frac{\alpha}{1-\alpha} \ . \tag{3.9}$$

Quindi, i risparmiatori accetteranno di depositare i loro soldi se la banca, o più precisamente, gli azionisti accetteranno di compensare ai costi di liquidazione attesi fornendo almeno $\alpha/(1-\alpha)$ unità di valuta del *capitale* per ogni unità di valuta depositata. Quindi la banca ha un importante funzione nel fornire capitale. Lo scopo di questo capitale, comunque, non è tanto quello di finanziarie investimenti su beni reali, ma quello di coprire i costi di liquidazione attesi nell'ipotesi di una corsa alle banche al fine di indurre i risparmiatori a rendere disponibili alla banca i propri fondi per investimenti.

3.4 Valutazione del capitale della banca

Data la decisione di corsa alla banca dei depositanti e assumendo che gli azionisti abbiano fornito la banca con sufficiente capitale al tempo iniziale, possiamo valutare il patrimonio netto della banca usando la teoria delle opzioni. Scopo di questa sezione è fornire una formula di valutazione analitica di questo capitale, che ci permetterà poi di analizzare la ricapitalizzazione, degli investimenti e dei finanziamenti iniziali affrontati dagli azionisti. In questa valutazione, la decisione dei depositanti di correre alle banche, quota di iniezione di capitale iniziale dei titolari x, il rischio delle attività della banca σ e le quote di ricapitalizzazione w vengono assunte come date. Più precisamente, faremo le seguenti ipotesi addizionali:

Ipotesi 1: A causa della natura imprevista delle corse alle banche, i titolari del capitale bancario non possono fornire la banca con nuovo capitale quando una corsa alle banche avviene o è imminente. Ovvero la quota di ricapitalizzazione è $w = 0$. (Questa ipotesi è fatta per semplificare e sarà tolta nella Sezione 3.5 nell'analisi della decisione di ricapitalizzazione degli azionisti.)

Ipotesi 2: Non appena sia possibile che la condizione di corsa alle banche, $S_t \leq \overline{S}_t \equiv X(t)/((1-\alpha)(1+x))$, sia soddisfatta, una corsa alle banche si verifica e la banca deve essere liquidata e i titolari del capitale bancario ricevono un payoff nullo.

Ipotesi 3: Se non avviene una corsa alle banche e la banca vuole liquidare i suoi progetti, può farlo ad un costo proporzionale variabile β, con $\beta < \alpha$ rispecchia il fatto che i titoli possono essere liquidati ad un prezzo più alto quando la liquidazione avviene lentamente e volontariamente rispetto a quando avviene una corsa alle banche, che innesca delle svendite.

Sotto queste ipotesi addizionali, la banca con due depositanti in effetti detiene due opzioni call perpetue di tipo down and out (ovvero un opzione call con l'aggiunta che l'opzione viene annullata se il prezzo del bene sottostante raggiunge o scende al di sotto di un valore prestabilito detta barriera o prezzo di knock-out) sul valore netto dei titolo dei costi di liquidazione, $(1-\beta)(1+x)S_t$ con un prezzo di esercizio dipendente dal tempo di $X(t)$ e un prezzo di knock-out, guidato dalla decisione dei depositanti di correre alle banche, di

$$K(t) = \frac{1-\beta}{1-\alpha} X(t) \ . \tag{3.10}$$

Denotiamo con $C_\infty((1-\beta)(1+x)S_t, K(t))$ il valore dell'opzione call di tipo down and out. Facendo il cambio di variabili

$$V = \frac{(1-\beta)(1+x)S_t}{X(t)} \tag{3.11}$$

e definendo

$$F(V) = \frac{C_\infty}{X(t)} \ , \tag{3.12}$$

F soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F'' + (r - r^*)VF' - (r - r^*)F = 0 \ , \tag{3.13}$$

soggetta alla condizione al bordo

$$F\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right) = 0 \ . \tag{3.14}$$

La soluzione di questa equazione è

$$F(V) = V - \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1+\gamma^*} V^{-\gamma^*} \ , \ \gamma^* \equiv 2\frac{r - r^*}{\sigma^2} \ . \tag{3.15}$$

Ora sostituendo le variabili originali nella soluzione otteniamo un valore di

$$\begin{aligned}
C_\infty &= F(V)X(t) \\
&= VX(t) - \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1+\gamma^*} X(t)V^{-\gamma^*} \\
&= (1-\beta)(1+x)S_t - \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{1+\gamma^*} X(t) \left(\frac{(1-\beta)(1+x)S_t}{X(t)}\right)^{-\gamma^*} \\
&= (1-\beta)(1+x)\left(S_t - \left(\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)}\right)^{1+\gamma^*} S_t^{-\gamma^*}\right) \ .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

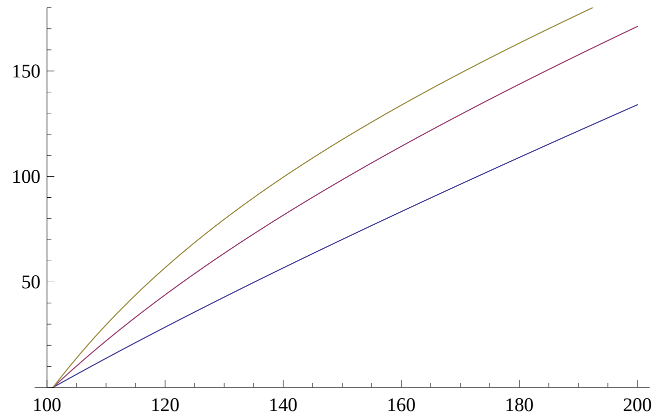

Figura 3.3: Valore del patrimonio C_∞ come funzione del valore del sottostante S per valori differenti del deposit spread $r - r^*$ e per i seguenti valori dei parametri: $\alpha = 0.1, \beta = 0.05, x = 0.1, X = 100 \mathrm{e} \sigma = 0.2$. Al crescere del valore del sottostante S, anche il profitto cresce. Inoltre, il profitto è tanto più grande quanto più aumenta il deposit spread $r - r^*$.

Questa equazione è il valore del patrimonio netto della banca quando i depositanti potrebbero scegliere di correre alle banche, ed è uguale al valore netto dei titoli dei costi di liquidazione, $(1-\beta)(1+x)S_t$, meno le perdite attese dovute alla corsa alle banche, che sono uguali allo sconto risultante dalla funzione knock-out dell'opzione. Questo sconto può essere interpretato più intuitivamente riscrivendo il valore del patrimonio usando la definizione di $\overline{S}_t$ come

$$C_\infty = (1-\beta)(1+x)\left(S_t - \overline{S}_t \left(\frac{S_t}{\overline{S}_t}\right)^{-\gamma^*}\right) . \tag{3.17}$$

Perciò, lo sconto è semplicemente il valore del patrimonio perso se avviene una corsa alle banche, $(1-\beta)(1+x)\overline{S_t}$ volte il termine $(S_t/\overline{S}_t)^{-\gamma^*}$, che è la probabilità neutrale al rischio che una corsa alle banche avvenga, scontato dal valore temporale dei soldi.

Nelle Figure 3.3 e 3.4 vediamo la dipendenza del valore del patrimonio della banca C_∞ sul sottostante S. Dalla Figura 3.3 osserviamo che se aumenta il deposit spread $r-r^*$ aumenta il patrimonio della banca (abbastanza intuitivo): più si allarga il deposit spread, più la banca è redditizia, e quindi più aumenta il valore del suo profitto. La Figura 3.4, d'altra parte, ci suggerisce che il valore del patrimonio diminuisce con l'aumentare del rischio d'impresa σ. Il motivo di quest'ultimo sarà discusso nella Sezione 3.6.

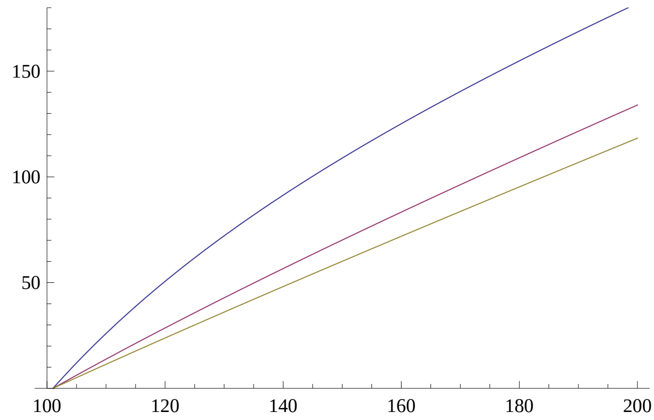

Figura 3.4: Valore del patrimonio C_∞ come funzione del valore del sottostante S per valori differenti del rischio d'impresa σ e per i seguenti valori dei parametri: $\alpha = 0.1, \beta = 0.05, x = 0.1, X = 100er - r^* = 0.01$. Al crescere del valore del sottostante S, anche il profitto cresce. Tuttavia, una crescita del rischio d'impresa σ ha un'influenza negativa sul valore del profitto della banca.

3.5 La decisione di ricapitalizzare da parte degli azionisti

Il risultato appena ottenuto del valore del patrimonio della banca presume che gli azionisti non ricapitalizzeranno se il valore del sottostante precipiterà e una corsa alle banche diventa imminente. Questa ipotesi aggiuntiva era stata giustificata con l'argomentazione che le corse alle banche avvengono rapidamente, e una ricapitalizzazione è quindi impossibile. É comunque istruttivo analizzare la questione di se gli azionisti *fossero disposti* a ricapitalizzare la banca.

Per rispondere, interpretiamo la decisione di ricapitalizzare come un impulso su S che risulta in un aumento nel valore del sottostante da $(1+x)S_t$ a $(1+w)(1+x)S_t$, dove $w > 0$ denota la percentuale di incremento del valore del sottostante attraverso la ricapitalizzazione. Il valore del patrimonio dopo la ricapitalizzazione è data da

$$\begin{aligned} C_\infty &= (1-\beta)(1+x) \\ &\times \left((1+w)S_t - \left(\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)} \right)^{1+\gamma^*} ((1+w)S_t)^{-\gamma^*} \right) . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Quindi, l'incremento nel profitto ottenuto attraverso la ricapitalizzazione è

$$\begin{aligned} \Delta C_\infty &= (1-\beta)(1+x) \\ &\times \left(wS_t - \left(\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)} \right)^{1+\gamma^*} \left((1+w)^{-\gamma^*} - 1 \right) S_t^{-\gamma^*} \right) . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Un infusione di nuovo capitale è redditizio per gli azionisti se l'incremento nel profitto eccede l'investimento aggiuntivo fatto, $w(1+x)S_t$. Formalmente gli azionisti ricapitalizzeranno la banca se

$$\Delta C_\infty > w(1+x)S_t \ . \tag{3.20}$$

Questa condizione può essere scritta come

$$\begin{aligned}&(1-\beta)(1+x)\left(wS_t - \left(\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)}\right)^{1+\gamma^*}\left((1+w)^{-\gamma^*}-1\right)S_t^{-\gamma^*}\right)\\&> w(1+x)S_t \ ,\end{aligned} \tag{3.21}$$

o anche

$$\begin{aligned}&(1-\beta)(1+x)\left(\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)}\right)^{1+\gamma^*}\left(1-(1+w)^{-\gamma^*}\right)S_t^{-\gamma^*}\\&> \beta w(1+x)S_t \ .\end{aligned} \tag{3.22}$$

Questa condizione ci dice che l'aumento in profitto ottenuto riducendo la probabilità di una corsa alle banche deve eccedere il valore dell'investimento addizionale perso a causa dei futuri costi di liquidazione, $\beta w(1+x)S_t$. Equivalentemente l'ultima condizione può essere scritta come

$$\left(\frac{S_t}{\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)}}\right)^{1+\gamma^*} < \frac{1-\beta}{\beta}\frac{1-(1+w)^{-\gamma^*}}{w} \ . \tag{3.23}$$

Questa condizione mostra che gli azionisti sceglieranno di ricapitalizzare appena il valore del sottostante S diventa sufficientemente basso. Questo si può vedere nella Figura 3.5. Il grafico in alto raffigura una situazione in cui il sottostante è relativamente basso, $S = 110$. Con una corsa alle banche che ha luogo quando il sottostante raggiunge il valore $S = 100$, è interesse degli azionisti di ricapitalizzare la banca. D'altra parte, il grafico in basso raffigura una situazione in cui il sottostante è elevato fino a $S = 500$. In questo caso, una corsa alle banche è estremamente improbabile è non ha senso ricapitalizzare la banca dalle prospettive degli azionisti a causa del costo di liquidazione proporzionale β che dovranno essere sostenute quando verranno liquidati questi investimenti addizionali.

3.6 Gli incentivi agli investimenti della banca quando sono probabili le corse alle banche

Una volta valutata il profitto della banca tenuto conto della decisione dei depositanti di correre alle banche, può essere analizzato l'incentivo all'investimento delle banche. La

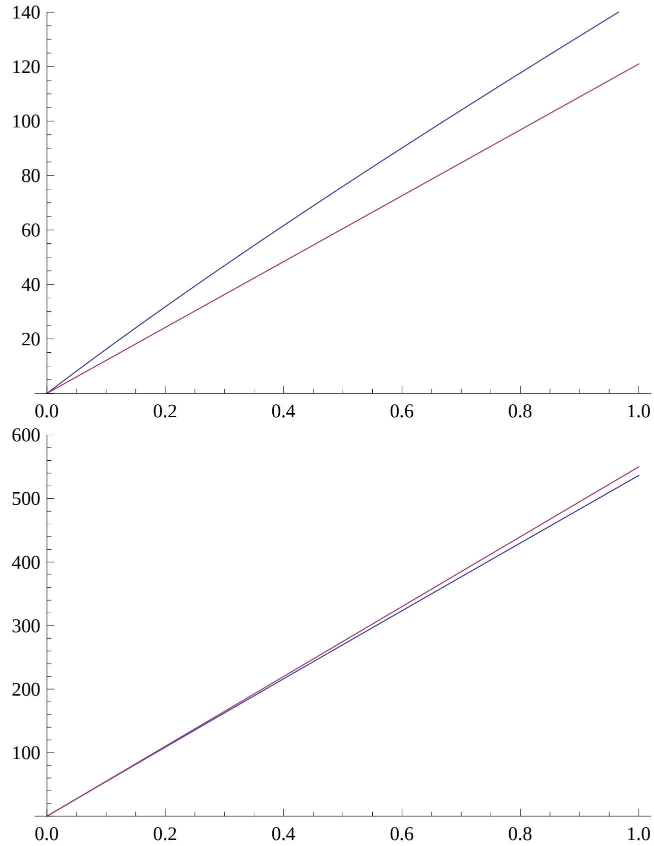

Figura 3.5: Incremento nel valore del patrimonio come funzione del valore della quota di ricapitalizzazione w per valori differenti del sottostante S e per i seguenti valori dei parametri: $\alpha = 0.1, \beta = 0.05, x = 0.1, X = 100, r - r^* = 0.01 \mathrm{e} \sigma = 0.2$. Se il valore del sottostante S è relativamente basso a 110 (grafico in alto), gli azionisti scelgono di ricapitalizzare la banca. Se il valore del sottostante S è alto a 500 (grafico in basso), comunque, la ricapitalizzazione non è redditizia.

questione principale al quale rispondere in questa sezione è come la possibilità di una corsa alle banche influenzi gli incentivi a prendere rischi da parte della banca. Assumiamo di nuovo che gli azionisti non possano ricapitalizzare la banca se il sottostante crolla. Allora il valore del profitto è dato dalla (3.16). Presa la derivata parziale di questa espressione rispetto a γ^* si ottiene

$$\frac{\partial C_\infty}{\partial \gamma^*} = -(1-\beta)(1+x)\left(\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)}\right)^{1+\gamma^*} S_t^{-\gamma^*} \ln\left(\frac{\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)}}{S_t}\right) \ , \tag{3.24}$$

che è positiva poichè, dall'*Ipotesi 2*, la banca esiste solamente fintantoché $S_t > X(t)/((1-\alpha)(1+x))$, e quindi

$$\ln\left(\frac{\frac{X(t)}{(1-\alpha)(1+x)}}{S_t}\right) < 0 \ . \tag{3.25}$$

Cosa possiamo intuire dalla (3.24)?Ricordando che

$$\frac{\mathrm{d}\gamma^*}{\mathrm{d}\sigma^2} = -\frac{\gamma^*}{\sigma^2} < 0 \ , \tag{3.26}$$

abbiamo

$$\frac{\partial C_\infty}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial C_\infty}{\partial \gamma^*}\frac{\mathrm{d}\gamma^*}{\mathrm{d}\sigma^2} < 0 \ . \tag{3.27}$$

Quest'ultima espressione implica che, fintantoché i titoli hanno un prezzo equo, gli azionisti si arricchiscono riducendo il rischio d'impresa il più possibile, cioè, ponendo $\sigma = 0$ al limite. In altre parole, *la possibilità di corse alle banche induce la banca a ridurre i suoi rischi.*

Il risultato appena ottenuto nell'ultima equazione, che la banca riduce il suo rischio, ha un'altra interpretazione intuitiva. Permettendo ai depositanti di ritirare i loro soldi in qualsiasi momento, i debiti esigibili rendono la richiesta dei depositanti priva di rischio. Quindi, il contratto di deposito permette una *separazione* dei profitti per il valore temporale dei soldi e per la rischiosità del sottostante. Mentre i depositanti ottengono un profitto per il primo, cioè per aver accettato di rinviare il loro consumo, i titolari della banca ottengono il ritorno per aver accettato di accollarsi i rischi. Infatti, i rischi sono interamente a carico dei possessori delle attività.

A causa del risultato sulla riduzione del rischio, nell'ultima equazione, la banca deciderà di investire i propri fondi in attività o beni con un basso rischio, e se ci fosse investirebbero tutto in un'attività priva di rischio. Per completezza, calcoliamo il valore del patrimonio in questo particolare caso. Assumiamo che l'attività priva di rischio può essere liquidata senza alcun costo, sia B_0 il suo prezzo iniziale e $B(t)$ il suo prezzo al tempo t.Allora

$$B(t) = B_0 e^{rt} \ . \tag{3.28}$$

Con un capitale x, il patrimonio netto totale della banca al tempo t è

$$(1+x)B(t) = (1+x)B_0 e^{rt} \ . \tag{3.29}$$

In queste impostazioni di una attività priva di rischio, i depositanti non correranno mai alle banche, il valore del patrimonio della banca dipenderà dalla strategia di liquidazione dei titolari. Il payoff ai titolari, se essi scelgono di liquidare la banca al tempo t, è data da

$$L(t) = (1+x)B(t) - X(t) = (1+x)B_0 e^{rt} - X_0 e^{r^* t} \ . \tag{3.30}$$

Per ipotesi, $B_0 = X_0$ quindi possiamo riscrivere il payoff come

$$L(t) = X_0 \Big((1+x)e^{rt} - e^{r^* t} \Big) \ . \tag{3.31}$$

Il valore attuale di questa espressione è

$$L_0(t) = X_0 \Big((1+x) - e^{(r^* - r)t} \Big) \ . \tag{3.32}$$

Per determinare la strategia di liquidazione ottimale t per i titolari, notiamo che

$$\frac{\partial L_0(t)}{\partial t} = -(r^* - r) X_0 e^{(r^* - r)t} = (r - r^*) X_0 e^{(r^* - r)t} > 0 \ . \tag{3.33}$$

Questa equazione implica che i titolari sceglieranno di non liquidare mai la banca. L'intuizione di questo risultato è ovvia. La banca guadagna un tasso di interesse di r sulle attività prive di rischio, ma paga solo un tasso di interesse $r^* < r$ ai suoi depositanti. Più cresce il differenziale di tasso di interesse, più grande sarà il valore attuale dei profitti accumulati. Come risultato gli azionisti non liquideranno la banca. Quindi, il valore del profitto è dato da

$$L = \lim_{t \to \infty} L_0(t) = \lim_{t \to \infty} X_0 \Big((1+x) - e^{(r^* - r)t} \Big) = X_0 (1+x) \ . \tag{3.34}$$

Questa equazione ci dà il valore del patrimonio quando la banca investe tutto nell'attività priva di rischio. Si può semplicemente vedere che, al tempo iniziale, quando viene fatta la decisione di investimento,

$$\begin{aligned} L &= X_0(1+x) \\ &> C_\infty = (1-\beta)(1+x)X_0 \left(1 - \left(\frac{1}{(1-\alpha)(1+x)} \right)^{1+\gamma^*} \right) \ . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Questa condizione implica che gli azionisti, nel tentativo di massimizzare il valore del profitto della banca, decideranno di investire tutto nelle attività prive di rischio. Come risultato, in condizioni di equilibrio, le corse alle banche non avverranno.

3.7 La decisione di finanziamento delle banche

Una volta che la scelta ottimale di investimento delle banche è stata determinata, si può esaminare il gioco a ritroso e analizzare la decisione di finanziamento dei titolari, ovvero determinare la somma di capitale x che essi sceglieranno di fornire alla banca al tempo iniziale in modo da massimizzare il loro profitto atteso. La Sezione 3.7.1 discute la redditività dell'intermediazione finanziaria in generale. Nelle Sezioni 3.7.2 e 3.7.3 analizziamo la politica di finanziamento ottimale per i titolari con rischio d'impresa positivo e nullo, rispettivamente.

3.7.1 Sulla fattibilità di una redditizia intermediazione finanziaria

Affinché i titolari accettino di fornire capitale nel momento in cui la banca viene fondata, il valore del patrimonio della banca al tempo iniziale deve superare il costo di capitale xX_0. In altre parole, il profitto atteso dall'attività di intermediazione finanziaria, $G = C_\infty - xX_0$, deve essere positivo. Discutendo il caso generale con rischio d'impresa positivo per primo, e usando il fatto che $S_0 = X_0$, il profitto atteso dall'intermediazione è dato da

$$\begin{aligned} G &= C_\infty - xX_0 \\ &= (1-\beta)(1+x)\left(X_0 - \left(\frac{X_0}{((1-\alpha)(1+x))}\right)^{1+\gamma^*} X_0^{-\gamma^*}\right) - xX_0 \\ &= X_0\left(1-\beta(1+x) - \frac{(1-\beta)(1+x)}{((1-\alpha)(1+x))^{1+\gamma^*}}\right) . \end{aligned} \tag{3.36}$$

Affinché il profitto atteso G sia positivo, si deve avere

$$1-\beta(1+x) - \frac{(1-\beta)(1+x)}{((1-\alpha)(1+x))^{1+\gamma^*}} > 0 , \tag{3.37}$$

cioè,

$$\frac{(1-\beta)(1+x)}{1-\beta(1+x)} < ((1-\alpha)(1+x))^{1+\gamma^*} . \tag{3.38}$$

Questa condizione può essere scritta come

$$1 + \gamma^* > \frac{\ln((1-\beta)(1+x)) - \ln(1-\beta(1+x))}{\ln((1-\alpha)(1+x))} \ . \tag{3.39}$$

Questa condizione significa che, affinché il profitto atteso per finanziare una banca sia positivo, il deposit spread deve eccedere un certo valore, che per un dato capitale x, è proporzionale alla varianza istantanea del valore delle attività della banca. Infatti, usando la definizione di γ^*, otteniamo

$$1 + 2\frac{r - r^*}{\sigma^2} > \frac{\ln((1-\beta)(1+x)) - \ln(1-\beta(1+x))}{\ln((1-\alpha)(1+x))} \ , \tag{3.40}$$

che implica un deposit spread minimo proporzionale a σ^2, ossia

$$r - r^* > \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\ln((1-\beta)(1+x)) - \ln(1-\beta(1+x))}{\ln((1-\alpha)(1+x))} - 1\right) \ . \tag{3.41}$$

Per capire perchè il deposit spread minimo è proporzionale a σ^2, ricordiamo che lo sconto sul valore dei titoli che si presenta dal patrimonio perso nell'evento di una corsa alle banche è dato da $(1-\beta)(1+x)\overline{S}_t(S_t/\overline{S}_t)^{-\gamma^*}$. Al cambiare del rischio dei titoli, il valore di questa espressione, e quindi la redditività dell'intermediazione finanziaria, rimarrà immutata a condizione che $\gamma^* \equiv 2(r - r^*)/\sigma^2$ rimanga immutata, che è il caso in cui il deposit spread $r - r^*$ è mantenuto proporzionale alla varianza istantanea σ^2. L'intuizione è che, se il rischio d'impresa σ cresce, la probabilità di una corsa alle banche per un dato deposit spread $r - r^*$ aumenta, riducendo perciò il valore dei titoli. Questo effetto negativo può essere compensato con un maggiore deposit spread.

Notiamo anche che dall'ultima equazione, è chiaro che gli azionisti concorderanno nel fornire capitale iniziale se il deposit spread è sufficientemente grande. Questo risultato, che è abbastanza intuitivo, è illustrato in Figura 3.6: per bassi valori del deposit spread $r - r^*$ finanziare la banca non è redditizio per gli azionisti. Come il deposit spread cresce, cresce anche il valore dei titoli della banca. Se lo spread supera un certo valore, finanziare la banca diventa redditizio per gli azionisti.

3.7.2 Il capitale ottimale della banca quando il rischio d'impresa è positivo

Ora che la fattibilità dell'intermediazione finanziaria redditizia è stata dimostrata, la politica ottimale di finanziamento dei titolari può essere analizzata piu a fondo. Per completezza, vedremo entrambi i casi in cui il rischio d'impresa è positivo (ma piccolo)

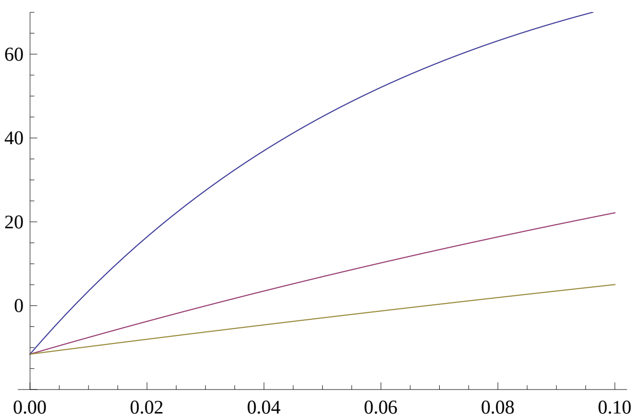

Figura 3.6: Profitto atteso G, nel finanziare una banca, come funzione del deposit spread $r - r^*$ per diversi valori del rischio d'impresa σ e per i seguenti valori dei parametri: $\alpha = 0.1, \beta = 0.05, x = 0.2$. Più il profitto atteso è alto, più è grande il deposit spread $r - r^*$ e più basso è il rischio d'impresa σ.

e nullo. Esploriamo prima il caso in cui il rischio d'impresa è positivo. Presa la derivata parziale del profitto atteso (3.24) rispetto alla quota di finanziamento x si ha

$$\frac{\partial G}{\partial x} = X_0 \left(-\beta + \gamma^* \frac{1-\beta}{((1-\alpha)(1+x))^{1+\gamma^*}} \right) . \tag{3.42}$$

Ponendo questa espressione uguale a zero e risolvendo in x si ottiene

$$x = \frac{\left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1+\gamma^*)}}{1-\alpha} - 1 . \tag{3.43}$$

che sarà un massimo per il profitto atteso G, poichè la derivata parziale seconda è negativa.[1]

Denotiamo con $\overline{x}$ questo valore appena trovato ovvero la porzione di investimento iniziale ottimale in banca per gli azionisti. Come questo investimento iniziale dipende dalla grandezza dei costi di liquidazione, α e β, dal deposit spread, $r - r^*$, e dalla rischiosità dei titoli della banca, σ?

Poichè

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial \alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta} \right)^{1/(1+\gamma^*)} > 0 , \tag{3.44}$$

si scopre che un incremento in α, il costo di liquidazione proporzionale nell'eventualità

[1] $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -X_0 \gamma * (1+\gamma^*) \frac{1-\beta}{(1-\alpha)^{1+\gamma^*}(1+x)^{2+\gamma^*}} < 0.$

di una corsa alle banche, induce i titolari a fornire alla banca *più* capitale. Questo è intuitivo: come menzionato nella Sezione 3.3, il ruolo principale del capitale fornito inizialmente dai titolari è quello di coprire un costo di liquidazione atteso nel caso di una corsa alle banche. Più è alto questo costo, più capitale deve essere fornito.

É interessante notare che, un incremento in β il costo proporzionale di liquidazione, nel caso in cui non si verifichino corse alle banche, ha l'effetto opposto. Infatti

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial \beta} = -\frac{1}{1-\alpha}\left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta}\right)^{-\gamma^*/(1+\gamma^*)} \frac{\gamma^*}{1+\gamma^*}\frac{1}{\beta^2} < 0 \ , \tag{3.45}$$

implica che l'impegno di capitale degli azionisti sarà minore, più alti saranno i costi di liquidazione. L'intuizione per il differente impatto di α e di β sulla decisione di finanziamento degli azionisti è la seguente: entrambi gli incrementi in α e in β hanno un impatto negativo sulla redditività dell'intermediazione finanziaria. Nel caso di α, gli azionisti sono in grado di alleviare questo impatto negativo riducendo la possibilità di corsa alle banche attraverso un capitale maggiore $\overline{x}$. Nel caso di β, tuttavia, questo non è possibile, e gli azionisti reagiscono alla minore redditività di intermediazione finanziaria riducendo i loro investimenti $\overline{x}$.

L'impatto dei cambiamenti nel deposit spread e nella rischiosità delle attività della banca sul capitale ottimale si può esaminare dalla seguente equazione

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial \gamma^*} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1+\gamma^*)} \frac{1}{1+\gamma^*}\left(\frac{1}{\gamma^*} - \frac{\ln\left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta}\right)}{(1+\gamma^*)}\right) \ , \tag{3.46}$$

notando che $\mathrm{d}\gamma^*/\mathrm{d}(r-r^*) > 0$ e $\mathrm{d}\gamma^*/\mathrm{d}\sigma^2 < 0$. Tuttavia il segno di quest'ultima equazione è ambiguo. Non è quindi, in generale, possibile dire come un cambiamento nel deposit spread o nel rischio d'impresa influenzerà il capitale ottimale $\overline{x}$. La ragione di questa ambiguità è che un aumento nel deposit spread o una riduzione nel rischio d'impresa hanno effetti opposti. Da una parte rendono l'intermediazione più redditizia, che spingerà ad un impegno maggiore di capitale. Dall'altra, rendono meno probabili le corse alle banche, riducendo quindi il capitale richiesto al tempo iniziale. La questione di quale di questi due effetti domina può essere risolta solo esaminando caso per caso.

Sostituendo il capitale ottimale (3.43) nel profitto atteso (3.24) e semplificando otteniamo

$$\begin{aligned} G &= X_0\left(1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1+\gamma^*)} - \frac{1-\beta}{1-\alpha}\left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1+\gamma^*)-1}\right) \\ &= X_0\left(1 - \frac{\beta}{1-\alpha}\frac{1+\gamma^*}{\gamma^*}\left(\gamma^* \frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1+\gamma^*)}\right) \ . \end{aligned} \tag{3.47}$$

Se le operazioni bancarie saranno redditizie o meno dipende sul fatto se questa espressione sarà positiva o meno. Osserviamo che la redditività della banca dipende da tre fattori: γ^*, che è una misura del rapporto tra il deposit spread e la varianza istantanea sul valore delle attività della banca, i costi di liquidazione nell'eventualità che si verifichi una corsa alle banche, α, e i costi nell'eventualità che una corsa alle banche non si verifichi, β. Più è grande γ^* e più sono piccoli α e β, maggiori sono i profitti.

Come mostrato prima, la banca cercherà di fissare γ^* con il valore più alto possibile cercando di ridurre il rischio d'impresa σ. Quindi, la quota di finanziamento ottimale $\overline{x}$ può essere determinata prendendo il limite per $\gamma^* \to \infty$ dell'espressione (3.43), ottenendo

$$\begin{aligned}(1-\alpha)(1+x) &= \lim_{\gamma^*\to\infty}\left(\gamma^*\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1+\gamma^*)}\\ &= \exp\left(\lim_{\gamma^*\to\infty}\frac{\ln\left(\gamma^*\frac{1-\beta}{\beta}\right)}{(1+\gamma^*)}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{\gamma^*\to\infty}\frac{1/\gamma^*}{1}\right) = e^0 = 1\ . \qquad (3.48)\end{aligned}$$

Questa espressione implica che il valore di x, che massimizza il profitto degli azionisti, è fissato in modo che i depositanti siano solo d'accordo nel versare i loro soldi e tutto viene investito in un impresa quasi priva di rischio. In questo caso, il risultato nella Sezione 3.7.1, che finanziare una banca può essere redditizio per i titolari, può essere confermata facilmente, e tradotta in una semplice espressione. Per vederlo consideriamo il profitto atteso dall'attività di intermediazione, (3.47), quando il rischio d'impresa diventa molto piccolo,

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma^2\to\infty} G &= X_0\left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\frac{1+\gamma^*}{\gamma^*}\left(\gamma^*\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/(1+\gamma^*)}\right)\\ &= X_0\left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\lim_{\gamma^*\to\infty}\frac{1+\gamma^*}{\gamma^*}\exp\left(\lim_{\gamma^*\to\infty}\frac{\ln\left(\gamma^*\frac{1-\beta}{\beta}\right)}{(1+\gamma^*)}\right)\right)\\ &= X_0\left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\ . \qquad (3.49)\end{aligned}$$

Questa espressione sarà positiva nel caso in cui $\alpha+\beta<1$, cioè, i costi di liquidazione non possono essere troppo alti. É interessante notare che, *entrambi* i costi di liquidazione sia nel caso che ci possa essere una corsa alle banche o meno sono rilevanti per la redditività dell'intermediazione finanziaria.

3.7.3 Il capitale ottimale della banca quando non c'è rischio d'impresa

Passando al caso dove il rischio d'impresa σ è zero, il valore del profitto atteso della banca, $G = L - xX_0$ può essere calcolata usando la (3.34) per ottenere

$$G = L - xX_0 = (1 + x)X_0 - xX_0 = X_0 \ . \tag{3.50}$$

Chiaramente

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \ , \tag{3.51}$$

in modo che i titolari siano indifferenti a quale somma di capitale investire nella banca. Questo non è sorprendente: poiché tutto è stato investito nel titolo privo di rischio, che ottiene un rendimento superiore al tasso di interesse r^* e può essere liquidato senza costi aggiuntivi, non si verificheranno corse alle banche. Quindi, il capitale della banca, che era stato introdotto come uno strumento per coprire i costi di liquidazione attesi e indurre potenziali depositanti a versare i loro risparmi, non è più necessario. Come risultato, la decisione degli azionisti è irrilevante.

3.8 Determinazione dell'equilibrio di deposit spread

L'analisi fatta finora prende il deposit spread come dato. Quanto grande ci si aspetta che sia? Se l'ingresso nel settore bancario è senza alcun costo, allora ci si aspetta che il profitto atteso dal finanziare la banca sia zero. Se il rischio d'impresa è positivo, questo si traduce con il fatto che la condizione (3.47) sia uguale a zero. Dati i costi di liquidazione α e β, questa condizione può essere risolta numericamente per γ^*. Una volta ottenuta γ^*, si può allora usare il livello noto del rischio d'impresa σ per dedurre il deposit spread $r - r^*$. In generale, più alti sono i costi di liquidazione α e β, minore è la redditizia intermediazione finanziaria, e più grande è l'equilibrio di deposit spread $r - r^*$. Nel caso speciale in cui il rischio d'impresa sia nullo, il deposit spread sarà nullo anch'esso

3.9 Conclusioni

L'analisi in questo capitolo che una banca sarà vulnerabile ad una corsa alle banche non appena il valore del suo patrimonio netto dei costi di liquidazione crollerà sotto il valore nominale dei depositi. Quando devono essere sostenuti dei costi nell'evento di una liquidazione dei titoli bancari, gli azionisti della banca devono fornire capitale per coprire questi costi attesi in modo da indurre i depositanti a versare i loro soldi. In questo senso, le banche hanno un ruolo di fornitori di *capitale*.

Data la scelta ottimale dei depositanti di quando correre alle banche, i titoli bancari possono essere valutati come opzioni call perpetue di tipo knock-out. Abbiamo visto che, quando il valore dei titoli crolla sotto un certo livello, gli azionisti di solito sarebbero disposti a ricapitalizzare la banca.

Indice

Bibliografia

[1] Alexandre Ziegler, A Game Theory Analysis of Options.

[2] Andrea Pascucci, Calcolo stocastico per la finanza.

[3] Robert Merton, Continuous-time finance.