

ALMA Mater Studiorum
Università degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

DINAMICA DEI DUE E/O POCHI CORPI: SISTEMI
BINARI, SISTEMA SOLARE

Elaborato Finale

Candidato:
Davide Vignoni

Relatore:
Prof. Daniele Dallacasa

Sessione III
Anno Accademico 2013/2014

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | PREMESSA | 2 |
| 2 | IL PROBLEMA DEI DUE CORPI | 3 |
| 2.1 | Moto in un campo centrale | 3 |
| 2.2 | Il problema dei due corpi | 5 |
| 2.3 | Il problema di Keplero | 6 |
| 2.4 | Il problema dei tre corpi (cenni) | 8 |
| 3 | SISTEMI BINARI E DETERMINAZIONE DELLE MASSE | 12 |
| 4 | IL SISTEMA SOLARE | 14 |
| 4.1 | Elementi costitutivi | 14 |
| 4.2 | Stabilità e caoticità delle orbite | 15 |

Capitolo 1

PREMESSA

Scopo del presente lavoro è introdurre i principali strumenti fisico-matematici utilizzati per la descrizione del moto (di un numero limitato) di oggetti astronomici, soggetti esclusivamente alle loro vicendevoli interazioni gravitazionali.

Tali strumenti sono quelli messi a punto nell'ambito della soluzione del *Problema dei Due Corpi* e del *Problema dei Tre Corpi*.

Verranno anche esaminate alcune fondamentali applicazioni pratiche di tali metodologie d'indagine.

È degno di nota il fatto che tale campo di studi, lungi dall'essere pienamente definito o addirittura esaurito, sia tuttora oggetto di indagine alla luce di nuovi approcci fisico-matematici.

Al suo interno si trovano i principali elementi-chiave della fisica: la geometria degli antichi Greci, i principi newtoniani della dinamica, le leggi di conservazione, la meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana, fino alla Relatività Generale ed alle più moderne teorie del Caos.

D'altronde, al termine di questa breve esposizione, vedremo come persino il Sistema Solare, probabilmente il sistema astrofisico più studiato di sempre, necessiti ancora di approfondite verifiche per poterne stabilire compiutamente le dinamiche cui è realmente soggetto ed il destino ultimo che lo attende.

Si vuole sottolineare inoltre il valore storico e culturale delle teorie sviluppate nell'ambito di tali Problemi, in quanto hanno elevato la conoscenza scientifica al rango di branca fondamentale del Sapere, contribuendo in modo determinante all'ingresso dell'Occidente e nel mondo intero nella Storia Moderna.

Capitolo 2

IL PROBLEMA DEI DUE CORPI

2.1 Moto in un campo centrale

Per campo centrale si intende un campo vettoriale i cui vettori hanno la stessa direzione del vettore posizione del punto di riferimento e modulo funzione del solo modulo del vettore posizione stesso; in notazione vettoriale:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = f(r) \vec{e}_r \quad (2.1)$$

dove \vec{e}_r è il versore del vettore posizione.

I campi centrali sono *conservativi*, ossia possono essere espressi a partire da un campo scalare detto *potenziale* (U), tale che:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \quad (2.2)$$

Dal potenziale si definisce anche l'*energia potenziale* V , che ne ha valore opposto: $V = -U$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (2.3)$$

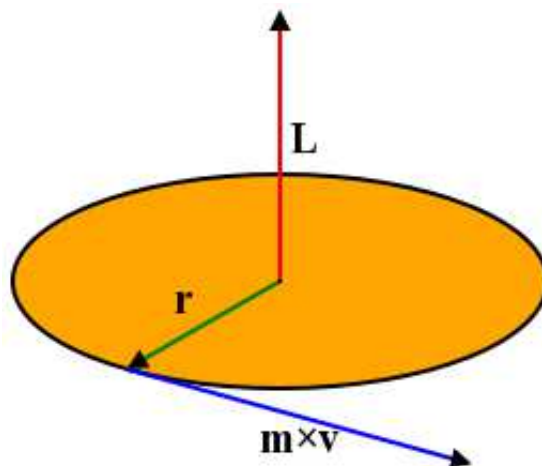
Il moto in un campo centrale, indipendentemente dalla funzione $f(r)$, gode di alcune notevoli proprietà:

conservazione del momento angolare

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r} = 0 \quad (2.4)$$

in quanto $\vec{F} \parallel \vec{r}$;

moto piano la costanza di \vec{L} implica che il moto si svolge nel piano passante per l'origine del sistema di riferimento e perpendicolare ad \vec{L} ; il moto può essere pertanto descritto facendo uso delle coordinate polari r e ϕ ;



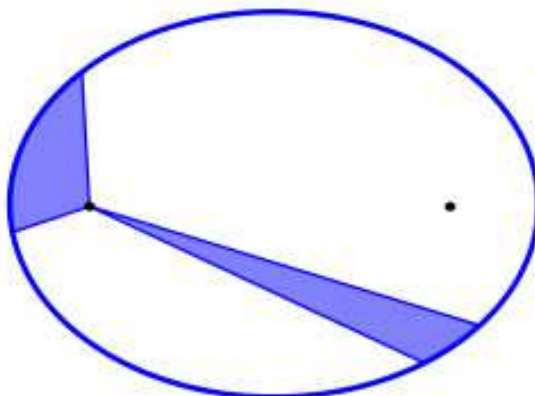
seconda legge di Keplero poichè $\|\vec{L}\| = L_z = mr^2\dot{\phi} = \text{const}$, e:

$$dA = \frac{1}{2}r^2d\phi$$

allora si ha:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = L_z/(2m) = \text{const} \quad (2.5)$$

da cui il famoso enunciato: «*il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali*»;



moto radiale: $r = r(t)$ definito il potenziale efficace:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (2.6)$$

il moto radiale può essere descritto, in analogia ai moti unidimensionali, dall'equazione:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V_{eff}(r)]} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}]} \quad (2.7)$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}]}} \quad (2.8)$$

i punti notevoli, per cui $E = V_{eff}$ e quindi $\dot{r} = 0$, si chiamano pericentro ed apocentro (se $E \geq 0$, l'apocentro è all'infinito);

traiettoria: $\phi = \phi(r)$ dato che $d\phi = dt \frac{L}{mr^2}$, la (2.8) può essere riscritta in:

$$d\phi = \frac{Ldr}{r^2 \sqrt{2m[E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}]}} \quad (2.9)$$

che è l'equazione della traiettoria in coordinate polari.
Infine, si danno le espressioni della:

Lagrangiana in coordinate polari

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r) \quad (2.10)$$

Hamiltoniana in coordinate polari

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r) \quad (2.11)$$

2.2 Il problema dei due corpi

I risultati ottenuti nello studio del moto in un campo centrale non possono essere applicati direttamente al moto degli oggetti astrofisici.

Il campo di forze complessivo (o il potenziale, se si preferisce), è il risultato della sovrapposizione dinamica del contributo di ogni singolo oggetto del sistema.

Non è pertanto possibile definire il campo (ed il suo proprio potenziale) a priori, essendo questi determinati dal moto degli oggetti costituenti il sistema stesso.

Quando si hanno due corpi reciprocamente interagenti mediante un potenziale che

dipende dal vettore distanza reciproca $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, lo studio del moto conseguente prende il nome di **problema dei due corpi**.

Tali corpi sono supposti puntiformi, o comunque a simmetria sferica e di dimensioni trascurabili rispetto alla loro distanza.

Definiamo:

posizione del centro di massa

$$\vec{r}_M \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.12)$$

massa ridotta

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}, \text{ dove: } M = m_1 + m_2 \quad (2.13)$$

Si possono facilmente dimostrare le due affermazioni:

1. in un sistema di riferimento inerziale, in cui il centro di massa trasla di moto rettilineo uniforme:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_M + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_M - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{aligned} \quad (2.14)$$

2. in particolare, se l'origine del riferimento coincide con \vec{r}_M :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\vec{r}}_1\|^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{\vec{r}}_2\|^2 - V(r)$$

e, per le definizioni precedenti (2.12) (2.13),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \|\dot{\vec{r}}\|^2 - V(r) \quad (2.15)$$

Il problema dei due corpi è equivalente al moto $\vec{r} = \vec{r}(t)$ di un corpo di massa μ in un campo centrale la cui energia potenziale è $V(r)$.

2.3 Il problema di Keplero

Applicando i risultati ottenuti precedentemente al caso di un *potenziale newtoniano*, con espressione dell'energia potenziale del tipo: $V(r) = -\alpha/r$, si entra nel campo del c.d. **problema di Keplero**.

Nel caso del potenziale gravitazionale, evidentemente è: $\alpha = GM\mu$.

Integrando l'equazione della traiettoria (2.9), definendo $\ell \equiv L^2/\mu\alpha$, $e \equiv \sqrt{1 + (2EL^2/\mu\alpha^2)}$, si ottiene:

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos f$$

L'equazione della traiettoria è chiaramente quella di una sezione conica, in un sistema di riferimento avente il centro nel fuoco più vicino al pericentro, in cui ℓ è il semi latus rectus ed e è l'eccentricità.

$f \equiv \phi - \phi_0$ è l'*anomalia vera*, ossia l'angolo misurato rispetto alla posizione del pericentro stesso.

A seconda del segno dell'energia totale E , si hanno i seguenti casi:

- $E < 0$ ($e < 1$): orbita ellittica;
- $E = 0$ ($e = 1$): orbita parabolica;
- $E > 0$ ($e > 1$): orbita iperbolica.

Prendendo in considerazione le orbite ellittiche, ossia i moti finiti, si hanno le seguenti relazioni:

semiassi

$$a = \ell/(1 - e^2) = \alpha/2|E| \quad (2.16)$$

$$b = \ell/\sqrt{1 - e^2} = L/\sqrt{2\mu|E|} \quad (2.17)$$

pericentro ed apocentro con riferimento alle (2.16), (2.17):

$$r_{apo} = a(1 + e)$$

$$r_{per} = a(1 - e)$$

prima legge di Keplero nei casi in cui $m_2 \ll m_1$, è: $\mu \approx m_2$, $M \approx m_1$, $r_1 \approx 0$, $r_2 \approx r$; si ha allora la prima legge di Keplero: “**L'orbita di ciascun pianeta è una ellisse con il sole in uno dei suoi fuochi.**”

terza legge di Keplero utilizzando la seconda legge di Keplero (2.5) e le relazioni (2.16), (2.17), si ha:

$$Ldt = 2mdA \implies LT = 2m\pi ab \implies T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/\alpha} \implies T \propto a^{3/2}$$

Nel caso del problema dei due corpi gravitazionale, $m = \mu$, $\alpha = GM\mu$, e si ha:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (2.18)$$

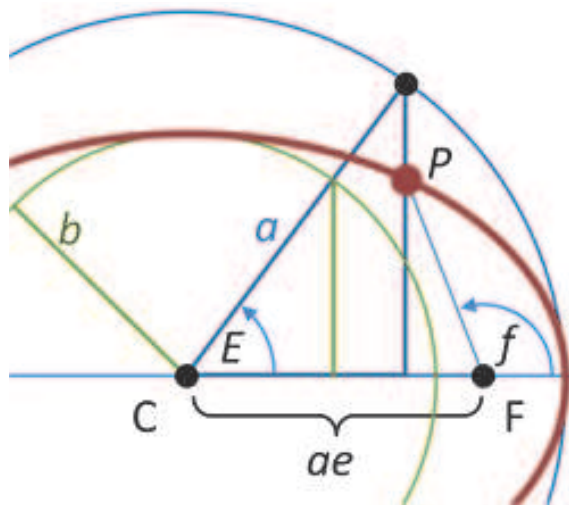
equazione oraria o equazione di Keplero Integrando l'equazione (2.7), alla luce delle (2.16) e (2.17), e definendo l'*anomalia eccentrica* ξ come:

$$r = a(1 - e \cos \xi) \quad (2.19)$$

si ottiene:

$$t - \tau = \sqrt{\mu a^3 / \alpha} (\xi - e \sin \xi) \quad (2.20)$$

dove τ è il valore di t al passaggio del pericentro.



2.4 Il problema dei tre corpi (cenni)

Come abbiamo appena visto, il problema dei due corpi fornisce soluzioni analitiche esatte ed eleganti al problema della descrizione del moto di due corpi mutualmente interagenti, in particolare per via gravitazionale.

Quando il sistema viene complicato dall'aggiunta di un terzo corpo materiale, il panorama matematico cambia radicalmente: si perde la possibilità generalizzata di ottenere soluzioni analitiche per la descrizione della dinamica del sistema.

Le possibilità di indagine del *problema dei tre corpi* passa allora per due opzioni di fondo:

- uso di **algoritmi per il calcolo numerico**, quali, ad es., l'algoritmo di Bulirsch-Stoer;
- l'introduzione di ipotesi semplificative, che permettano di ottenere soluzioni analitiche, o comunque di studiare in modo semi-quantitativo il problema sulla base di insiemi di equazioni differenziali semplificate.

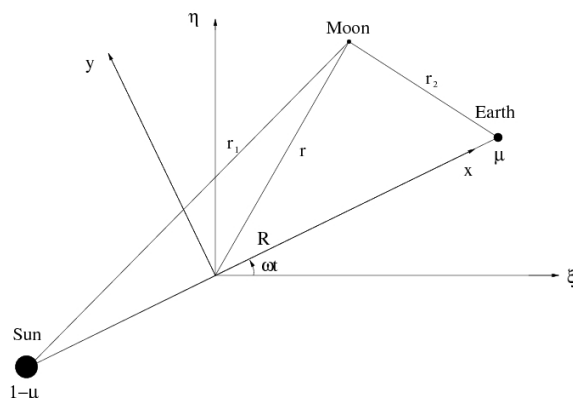
Il problema dei tre corpi ristretto circolare si colloca in quest'ultima prospettiva: si basa sulle seguenti ipotesi semplificative:

1. dei tre corpi, due ("primario" e "secondario") hanno masse significative, mentre il terzo (particella-test) ha massa trascurabile;
2. primario e secondario orbitano su traiettorie circolari attorno al comune centro di massa;
3. valgono poi le ipotesi del problema di Keplero: corpi puntiformi ed interazione unicamente gravitazionale.

. In estrema sintesi, gli elementi principali che emergono dal problema dei tre corpi ristretto circolare, sono quelli accennati di seguito.

La trattazione è riferita ad un sistema di riferimento (sinodico) avente l'origine nel baricentro comune a primario e secondario, asse x costantemente diretto secondo la loro congiungente, piano x-y coincidente con il piano orbitale di primario e secondario.

La massa del secondario, riferita alla massa totale M , è $\mu^* = m_2/M$ - da non confondere con la massa ridotta del problema dei due corpi. La terna di riferimento (x,y,z) è relativa alla posizione della particella-test in tale sistema di riferimento.



Integrale primo di Jacobi

Definito il *potenziale gravitazionale efficace*

$$U_{eff} = \dot{\phi}^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - U = \dot{\phi}^2 \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{Gm_1}{R_1} + \frac{Gm_2}{R_2} \quad (2.21)$$

si ha:

$$C_J = 2U_{eff} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (2.22)$$

C_J è un'integrale del moto, detto *integrale primo di Jacobi* ed è definito dalle condizioni iniziali del moto \vec{r}_0 e \vec{v}_0 .

Regioni di Hill e superfici di zero velocità

Essendo $v^2 = 2U_{eff} - C_J$, il moto potrà avvenire solo nelle regioni in cui $v^2 \geq 0$; tali regioni si chiamano **regioni di Hill**, e sono delimitate da superfici in cui v è nulla (rispetto al sistema di riferimento sinodico scelto!), dette **superfici di zero-velocità**.

La figura indica una sezione di tali superfici per diversi valori di C_J , decrescenti dal riquadro in alto a sinistra (2.5) a quello in basso a destra (1.42).

Le regioni di Hill sono le aree bianche del grafico.

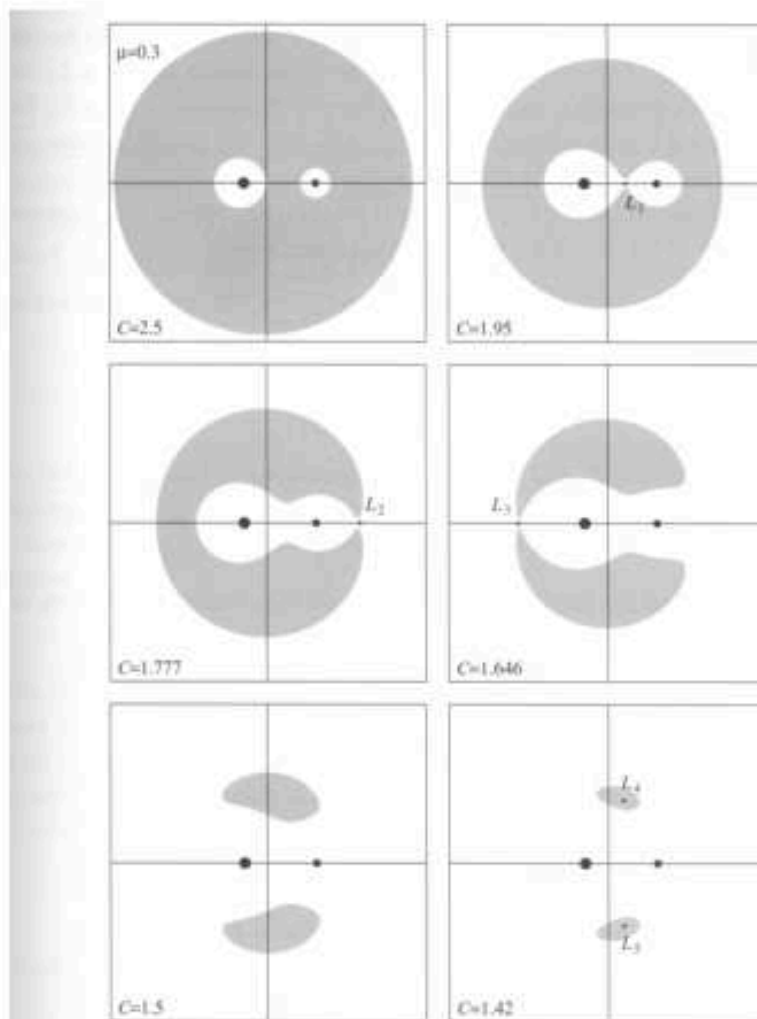
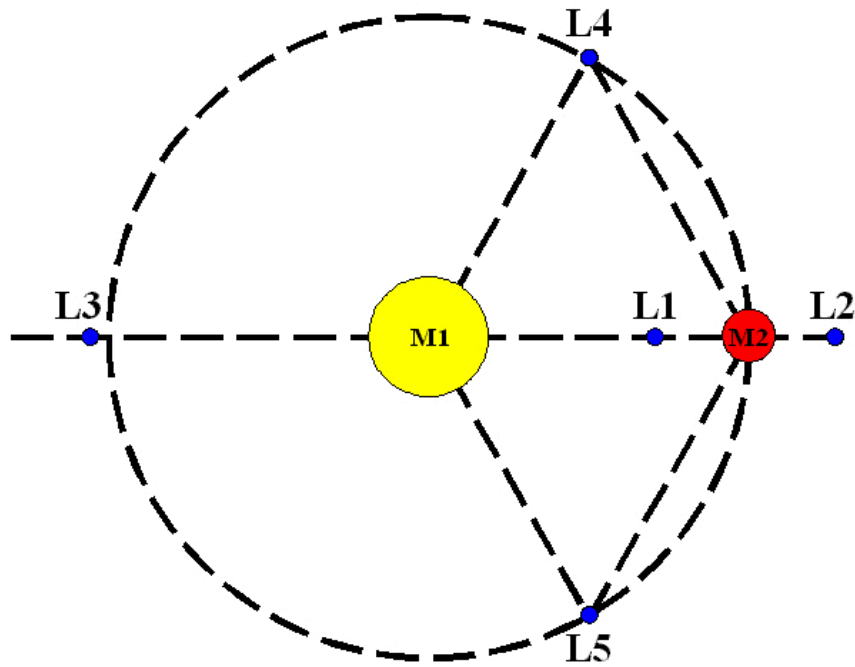


Figure 5.2 Forbidden regions (shaded areas) for different values of the Jacobian integral C in the case $\mu = 0.3$.

Punti di librazione

I punti $L_1 \div L_5$ nella figura sono punti di equilibrio ($\vec{v} = 0$ e $\dot{\vec{v}} = 0$), detti ***punti di librazione lagrangiani***. I punti $L_1 \div L_3$ (punti *collineari*) sono intrinsecamente instabili, mentre L_4 ed L_5 (punti *triangolari*), per $\mu^* < 0.03852$ sono stabili, ed ammettono orbite attorno ad essi.



Sono stati individuati numerosi oggetti orbitanti attorno a punti lagrangiani: i più famosi sono gli asteroidi Troiani del campo greco e del campo troiano, che orbitano attorno ai punti triangolari (rispettivamente L_4 ed L_5) del sistema Sole-Giove.

Capitolo 3

SISTEMI BINARI E DETERMINAZIONE DELLE MASSE

La terza legge di Keplero (2.18) permette di determinare la massa totale M di sistemi binari per i quali sia possibile determinare il periodo di rotazione T ed il semiasse maggiore (il raggio, nel caso di orbite circolari).

Ove si possa stimare anche il rapporto tra le masse, queste possono essere determinate singolarmente.

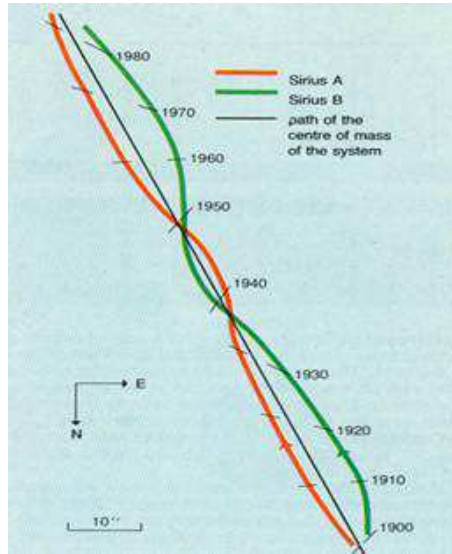
Nel caso di stelle *binarie visuali (fisiche)*, il semiasse a si determina misurando la distanza d e la separazione angolare massima $\tilde{\alpha}$ e stimando l'inclinazione i tra la normale al piano di rotazione e la linea di vista:

$$a = \tilde{\alpha}d / \cos i$$

L'andamento temporale di $\tilde{\alpha}$ permette di misurare il periodo T , ottenendo infine:

$$M = m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 \tilde{\alpha}^3 d^3}{GT^2 \cos^3 i}$$

Se poi, dalle osservazioni, si riesce ad individuare il centro di massa ed a scomporre la separazione $\tilde{\alpha}$ nei semiasci delle due orbite, dalle (2.14) si ricavano le masse delle due componenti del sistema (in base alla relazione $m_2/m_1 = \tilde{\alpha}_1/\tilde{\alpha}_2$).



Anche per le *binarie spettroscopiche a riga doppia* è possibile, avendo una buona stima dell'inclinazione i , ottenere M e le singole masse m_1 ed m_2 . Tali binarie non possono essere risolte otticamente; tuttavia, se la linea di vista è contenuta nel piano di rotazione, o comunque l'inclinazione i tra linea di vista e normale al piano di rotazione è ampia, l'andamento della separazione delle righe spettroscopiche rispetto alla posizione baricentrica, dovuta solo alla velocità radiale del centro di massa permette di stimare le velocità di rotazione delle singole componenti del sistema (utilizzando el relazioni dell'effetto Doppler).

Nell'ipotesi di orbite circolari, tali velocità sono direttamente proporzionali al raggio dell'orbita, per cui è possibile determinare la massa totale del sistema ed il rapporto tra le masse delle due componenti, come nel caso precedente.

$$v_1 = 2\pi a_1/T \text{ e } v_2 = 2\pi a_2/T$$

$$v_1 = v_{1r}/\sin i \text{ e } v_2 = v_{2r}/\sin i$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{2r}/\sin i}{v_{1r}/\sin i} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}}$$

$$M = \frac{T}{2\pi G} \frac{(v_{1r} + v_{2r})^3}{\sin^3 i}$$

Nell'ipotesi meno favorevole in cui solo la riga di una singola componente sia individuabile (a causa di eccessive differenze di luminosità tra le due stelle), non è possibile ottenere i valori di M ed il rapporto tra le masse, ma solo la c.d. *funzione di massa*, che permette comunque di effettuare dei confronti con sistemi le cui masse sono state risolte.

Capitolo 4

IL SISTEMA SOLARE

Lo studio della dinamica del sistema solare costituisce, dall'albore dello sviluppo scientifico ai giorni nostri, un banco di prova privilegiato per alcune tra le più fondamentali teorie fisiche: dalla meccanica newtoniana ed analitica alla relatività generale ai più recenti studi sui sistemi caotici.

4.1 Elementi costitutivi

Il sole è una stella medio-piccola, di classe spettrale G2 V; la massa (M_{\odot}) è pari a circa $1.99 \cdot 10^{30}$ kg, raggio 695,000 km.

Gli altri corpi costituenti il sistema solare sono i pianeti ed i loro satelliti, i pianeti nani (che, a differenza dei pianeti veri e propri, non hanno massa adeguata a “ripulire” le vicinanze della propria orbita da altri corpi, potenzialmente collidenti), corpi minori (asterodi, comete).

La distribuzione radiale di tali costituenti vede:

- tra 0.38 e 1.52 AU, i pianeti interni;
- tra 1.52 e 5.2 AU, la fascia degli asteroidi; notevoli sono inoltre gli asteroidi c.d. *troiani*, che orbitano attorno ad un punto di librazione triangolare del sistema Sole-Giove;
- tra 5.2 e 30 AU, ci sono i pianeti esterni, o giganti;
- tra 30 e 50 AU, la fascia di Kuiper, comprendente pianeti nani come Plutone e Plutino
- tra 50 e 1000 AU, oggetti del disco diffuso;

- oltre 1000 AU, la nube di Oort, una shell pressoché sferica di comete di lungo periodo (fino ad un anno-luce ed oltre, cioè circa 1/4 della distanza da Proxima Centauri).

Il moto degli oggetti appartenenti al Ssistema Solare obbedisce alle leggi ricavate nel capitolo precedente.

In particolare, il moto dei pianeti, descritto dalle tre Leggi di Keplero, è spiegato dai risultati del Problema dei Due Corpi gravitazionale.

In tabella sono riportati gli elementi orbitali principali degli 8 pianeti.

| PIANETA | a(AU) | e | i(°) | T(S.Y.) | $M(10^{24}kg)$ | $M(M_{\odot})$ |
|----------|--------|--------|------|-----------|----------------|----------------------|
| MERCURIO | 0.3871 | 0.2056 | 7 | 0.24084 | 0.33022 | $1.59 \cdot 10^{-7}$ |
| VENERE | 0.7233 | 0.0068 | 3.39 | 0.61518 | 4.8690 | $2.45 \cdot 10^{-6}$ |
| TERRA | 1 | 0.0167 | 0 | 0.99998 | 5.9742 | $3.00 \cdot 10^{-6}$ |
| MARTE | 1.52 | 0.093 | 1.85 | 1.88071 | 0.64191 | $3.23 \cdot 10^{-7}$ |
| GIOVE | 5.203 | 0.048 | 1.3 | 11.85652 | 1898.8 | $9.54 \cdot 10^{-4}$ |
| SATURNO | 9.54 | 0.054 | 2.49 | 29.42352 | 568.5 | $2.86 \cdot 10^{-4}$ |
| URANO | 19.19 | 0.047 | 0.77 | 83.74741 | 86.625 | $4.35 \cdot 10^{-5}$ |
| NETTUNO | 30.07 | 0.008 | 1.77 | 163.72321 | 102.78 | $5.16 \cdot 10^{-5}$ |

1 AU (Astronomi Unit) = distanza media Terra-Sole = 149.6 milioni di km; 1 l.y. (anno-luce) \approx 63,241 AU.

1 S.Y. = 1 anno siderale = 365 d 5 h 48 min.

4.2 Stabilità e caoticità delle orbite

Rimane da verificare se le attuali orbite siano stabili o meno, in considerazione degli effetti delle interazioni gravitazionali reciproche tra i pianeti, nel lungo periodo.

Va premesso che anche nell'ambito del problema dei tre corpi circolare ristretto possono emergere orbite caotiche, tali cioè da non essere periodiche e da tendere a riempire vaste zone dello Spazio delle Fasi.

Tuttavia, il comportamento caotico non implica necessariamente il riempimento pressoché completo dello SdF o la divergenza all'infinito dalla regione inizialmente occupata nello SdF, in quanto la dinamica potrebbe limitarsi a riempire densamente un'intorno della regione iniziale stessa.

La stabilità del sistema solare può essere indagata nell'ambito dei metodi perturbativi, per via analitica oppure numerica.

Il metodo analitico si rifà alle Equazioni Planetarie di Lagrange, in cui la funzione perturbante \mathcal{R} ($U = U_0 + \mathcal{R}$ ovvero $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{H}}_1$, con $\tilde{\mathcal{H}}_1 = -\mathcal{R}$) è calcolata come

somma di soli termini *secolari*, ossia efficaci solo su tempi lunghi.

Tirando le somme di questo metodo, il sistema solare sarebbe stabile ed i parametri orbitali subirebbero solo piccole variazioni anche in tempi lunghi.

Le verifiche numeriche sono state effettuate:

1. integrando le equazioni delle orbite, con step temporali di circa 40 giorni per i pianeti esterni e di circa 8 per quelli interni (Sussman e Wisdom, MIT 1991);
2. integrando le equazioni planetarie complete dei termini risonanti e a breve termine, con calcoli molto più impegnativi e passi temporali più lunghi - circa 500 anni (Laskar, BdL Parigi 1991).

Complessivamente, i risultati indicano:

- i pianeti si muovono su orbite caotiche, con forte dipendenza dalle condizioni iniziali e variazione dei parametri orbitali anche repentine;
- i pianeti esterni, tuttavia, non mostrano indizi di instabilità significativa per proiezioni fino a 10 Gyr (tempo di vita del Sole) (bounded chaos);
- i pianeti interni mostrano dinamiche più catastrofiche, in particolare per Mercurio (per il quale non si può escludere la collisione con Venere o con il Sole) e per Marte (che potrebbe essere espulso in un tempo scala ≤ 1 Gyr).

L'implicazione più immediata dei risultati di tali simulazioni numeriche è l'impossibilità di effettuare previsioni su tempi lunghi circa la posizione dei pianeti.

Ad es., nella simulazione di Laskar, il massimo valore ottenuto per l'esponente di Lyapunov¹ è $\lambda = 10^{-6.7}$, ossia un tempo di Lyapunov $\lambda^{-1} = 5Myr$. Ciò implica che un errore di 1 cm nella posizione attuale della Terra ne rende imprevedibile la posizione tra 200 Myr.

Peraltro, nel caso di Mercurio, le correzioni relativistiche potrebbero essere significative nel risultato finale.

Risultati ugualmente meritevoli di approfondimento riguardano il destino dei corpi minori interplanetari, che sembrerebbero essere destinati - ad eccezione di quelli della fascia di Kuiper - ad essere espulsi in un orizzonte temporale pari all'età del Sistema Solare attuale.

¹I sistemi caotici sono caratterizzati da una forte dipendenza dalle condizioni iniziali. L'esponente di Lyapunov compare nella formula $d = d_0 \exp \lambda(t - t_0)$, relativa alla variazione di distanza d tra due traiettorie nello SdF, inizialmente distanti d_0 . λ^{-1} è il tempo di Lyapunov, ovvero il tempo-scala oltre il quale si manifesta la caoticità del sistema.

Bibliografia

- [1] A. Fasano, S. Marmi, *MECCANICA ANALITICA*, Bollati Boringhieri, Torino
- [2] V.I. Arnold, *METODI MATEMATICI DELLA MECCANICA CLASSICA*, Editori Riuniti, Roma
- [3] C. Nipoti, *CELESTIAL MECHANICS - Dispense del corso di Meccanica Celeste*, Alma Mater Digital Library, Università di Bologna
- [4] P. Giannonne, *ELEMENTI DI ASTRONOMIA*, Pitagora Editrice, Bologna
- [5] A. Giorgilli, *LA STABILITÀ DEL SISTEMA SOLARE: TRE SECOLI DI MATEMATICA*, in corso di stampa su *Matematica, cultura e società*, Edizioni della Normale, Pisa
- [6] A. Celletti, *STABILITÀ E CAOS NEL SISTEMA SOLARE: COSA PREDICONO LE TEORIE MATEMATICHE?*
http://www.mat.uniroma2.it/celletti/Celletti_stabilitaSistemaSolare2link.pdf