Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

IL TEOREMA DEL TRASPORTO

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SANDRO GRAFFI

Presentata da:
MARIA GIULIA BITTI

$\sharp$ 3 Sessione
Anno Accademico 2008/2009

Ai miei Genitori

Introduzione

Il modello fisico matematico del continuo costituisce l'elemento di base per risolvere numerosi problemi di interesse per le scienze applicate, per questo motivo ho ritenuto interessante trattare nella mia tesi tale argomento analizzando in particolar modo il Teorema del Trasporto e alcune delle sue più importanti conseguenze e applicazioni.
La presentazione dell' argomento svolto in questo elaborato è articolata in tre capitoli.
Il primo capitolo riguarda alcuni elementi di meccanica dei continui: definizione di corpo continuo, descrizione euleriana e lagrangiana del moto, il gradiente di deformazione materiale, derivata materiale e spaziale, accelerazione materiale e spaziale e infine il concetto di linea di corrente.
Il secondo capitolo tratta del teorema del trasporto vero e proprio e di alcune sue importanti conseguenze quali: la derivata materiali e sue proprietà, conservazione della massa, equazioni di continuità ed equazione della conservazione della quantità di moto.
Infine nell'ultimo capitolo si discuterà della classe costitutiva che caratterizza i fluidi.
Tramite il teorema del trasporto, alcune sue conseguenze e attraverso le equazioni di bilancio si arriverà a descrivere l' equazione del moto, detta anche Prima Legge di Cauchy, e poi si giungerà all' equazione del moto per un fluido perfetto, detta Equazione di Eulero, che verrà messa in contrapposizione alle Equazioni di Navier-Stokes che si riferiscono ai moti di fluidi viscosi.

Indice

Capitolo 1

Cinematica dei Continui

1.1 MOVIMENTO. DEFORMAZIONE

1.1.1 Descrizione del moto. Vettore spostamento

Per corpo continuo si intende un insieme di particelle in corrispondenza biunivoca con i punti di un dominio dello spazio euclideo tridimensionale E^3. Si consideri un corpo continuo che nell' istante t_0 occupa la regione limitata Ω con frontiera sufficientemente regolare $\partial\Omega$ dello spazio E^3. Il moto di un continuo è caratterizzato dalla evoluzione temporale della posizione di ogni suo punto materiale. Riferiamo il moto del corpo ad un sistema fissato di assi cartesiani ortonormali. La particella che nell' istante t_0 si trovava nel punto $\mathbf{P}_0$, si troverà nell' istante t nel punto $\mathbf{P}$. Si indichi con $\mathbf{X}_i$(i = 1,2,3) le coordinate cartesiane del punto $\mathbf{P}_0$ e con x_i(i=1,2,3) le coordinate cartesiane del punto $\mathbf{P}$. Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$, rispettivamente, i vettori posizione dei punti $\mathbf{P}_0$ e $\mathbf{P}$. La descrizione del moto del corpo è data da: [1]

$$x_i = x_i(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, t) \quad oppure \quad \mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{X}, t) \quad \text{con} \quad \mathbf{X}(\mathbf{X}, t) \in \Omega_0 \times I \tag{1.1}$$

dove I è un dato intervallo di tempo. Ora supponiamo che la funzione (1.1) sia di classe C^2 e invertibile per ogni t $\in$ I questo equivale a dire che

$$\mathbf{J} = det(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}) > 0 \tag{1.2}$$

[1] Le equazioni riportate in questo capitolo provengono dal testo: di M. Ciarletta e D. Iesan, Elementi di meccanica dei continui con applicazioni, Bologna, Pitagora, (1997)

La configurazione del corpo all'istante t è denotata con $\mathbf{\Omega(t)}$ ed è chiamata *configurazione attuale*. Il moto può essere anche espresso nella forma:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times I. \tag{1.3}$$

La trasformazione puntuale dalla configurazione di riferimento Ω_0 alla configurazione $\Omega(t_1), (t_1 \in I, t_1$ fissato), viene detta *deformazione del corpo*. Moto e movimento sono termini usati per descrivere cambiamenti continui nella configurazione di un corpo. Le coordinate x_i sono dette *spaziali o euleriane* mentre le coodinate X_i sono chiamate *materiali o lagrangiane*. Il vettore $\mathbf{X}$ si può esprimere come

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_i \mathbf{e}_i \tag{1.4}$$

dove $\mathbf{e}_i$ sono i versori degli assi coordinati. [2] Analogamente,

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i. \tag{1.5}$$

Il vettore *spostamento* è definito da

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \tag{1.6}$$

e può essere espresso come segue

$$\mathbf{u} = e_i \mathbf{u}_i. \tag{1.7}$$

Dalle (1.6) e (1.7), avremo inoltre

$$u_i = x_i - X_i. \tag{1.8}$$

Ora dopo aver definito il vettore spostamento definiamo *gradiente di spostamento* l'operatore:

$$\vec{\nabla}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}. \tag{1.9}$$

1.1.2 Tensori di deformazione

Il *gradiente di deformazione materiale* $\mathbf{F}$ è il tensore definito da

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \textit{oppure} \quad \mathbf{F} = \vec{\nabla}\mathbf{x}, \tag{1.10}$$

[2] Come convenzione utilizziamo quella di Einstein sugli indici ripetuti che prevede la soppressione del simbolo di sommatoria lasciando sottointeso che questa vada comunque eseguita rispetto agli indici ripetuti. Esempio: $a_i b_i = \sum_i a_i b_i$.

Una deformazione nella quale **F** ha lo steso valore in ogni punto di Ω_0, cioè non dipende da X, si dirà *omogenea.*
Dalla (1.2) deriva che **F** è invertibile. Il tensore

$$\mathbf{F}^{-1}_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad \textit{oppure} \quad \mathbf{F}^{-1} = \vec{\nabla}\mathbf{X}, \tag{1.11}$$

è chiamato *gradiente di deformazione spaziale.*
Supponiamo che t sia costante. Allora

$$(d\mathbf{X}^2) = d\mathbf{X}_i d\mathbf{X}_i = \mathbf{c}_{ij} dx_i dx_j, \quad \textit{dove} \quad \mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial X_r}{\partial x_i}\frac{\partial X_r}{\partial x_j}, \tag{1.12}$$

è il *tensore di deformazione di Cauchy.*

Dimostrazione. (Del Risultato 1.11)
Dimostriamo la seconda uguaglianza. Per la definizione di differenziale di una funzione vale che:

$$(dX)^2 = (dX_1)^2 + (dX_2) + (dX_3) = dX_i dX_j.$$

Sapendo che

$$dX_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_j = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_j.$$

Sostituendo nella prima uguaglianza di (1.11) otteniamo:

$$\Big(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} dx_j\Big)\Big(\frac{\partial x_i}{\partial X_r} dx_r\Big) = c_{ij} dx_i dx_j.$$

□

Nella configurazione deformata, cioè nella configurazione all' istante t, abbiamo

$$(d\mathbf{x}^2) = d\mathbf{x}_i d\mathbf{x}_i = \mathbf{C}_{ij} dX_i dX_j, \tag{1.13}$$

dove il tensore del secondo ordine $\mathbf{C} = (C_{ij})$, dato da

$$\mathbf{C}_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_s}\frac{\partial X_j}{\partial x_j} \quad \textit{oppure} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \tag{1.14}$$

è *tensore di deformazione di Cauchy-Green (o Tensore destro di Cauchy).*

Proposizione 1.1.1.
Possiamo ora notare che vale tale uguaglianza:

$$(dx)^2 - (dX)^2 = 2E_{ij}dX_idX_j = 2e_{ij}dx_idx_j$$

dove: $\mathbf{2E}_{ij} = \mathbf{c}_{ij} - \delta_{ij}, \quad \mathbf{2e}_{ij} = \delta_{ij} - c_{ij}$
con: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}.$

Il δ_{ij} è detto *il delta di Kronecker.* I tensori del secondo ordine $\mathbf{E}_{ij}$ ed $\mathbf{e}_{ij}$ sono rispettivamente noti come *tensore di deformazione di Green e tensore* di $deformazione$ di *Amalsi.*
Dalle (1.8), (1.11) e (1.13) segue che:

$$\mathbf{2E}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_s}{\partial X_i}\frac{\partial u_s}{\partial X_j} \tag{1.15}$$

$$\mathbf{2e}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}$$

In base al *teorema di decomposizione polare*si ha:

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}, \tag{1.16}$$

dove R è una trasformazione lineare ortogonale propria e U e V sono trasformazioni lineari simmetriche definite positive.
Infatti il *il teorema di decomposizione polare* afferma quanto riportato di seguito.

Teorema 1.1.2 (Teorema di decomposizione polare)**.**
Ogni tensore invertibile (descrivente una deformazione) è decomponibile univocamente in ciascuno dei seguenti prodotti di tensori

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}, \tag{1.17}$$

dove R è un tensore di rotazione per cui $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$(cioè la matrice inversa di una matrice di rotazione è pari alla sua trasposta) mentre $\mathbf{U}$e$\mathbf{V}$ sono tensori simmetrici definiti positivi.

Ora dimostriamo tale Teorema.

Dimostrazione.
Si costruisce il tensore $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ che è simmetrico, infatti $(F^TF)^T$=F^TF^{TT}, e definito positivo per la seguente relazione

$$\mathbf{w}^T F^T F\mathbf{w} = (F\mathbf{w})^T(F\mathbf{w}) = ||F\mathbf{w}|| \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{w}. \tag{1.18}$$

La norma è infatti sempre positiva per $\mathbf{w} \neq 0$ e nulla solo per $\mathbf{w} = 0$ (si ricordi che F è invertibile). Se F^TF è simmetrico e definito positivo, allora è diagonalizzabile nel campo dei reali; per cui si può scrivere $F^TF = Q^{-1}\Delta Q$ con Q invertibile e Δ diagonale.
Si definisce:

$$\mathbf{U} = \sqrt{F^TF} \tag{1.19}$$

La radice indicata si definisce e calcola come segue:

$$\mathbf{U} = \sqrt{F^TF} = \sqrt{Q^{-1}}\Delta Q = Q^{-1}\sqrt{\Delta}Q \tag{1.20}$$

Infatti:

$$(Q^{-1}\sqrt{\Delta}Q)^2 = Q^{-1}\sqrt{\Delta}QQ^{-1}\sqrt{\Delta}Q = Q^{-1}\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta}Q = Q^{-1}\Delta Q \tag{1.21}$$

avendo posto $\sqrt{\Delta} = diag(\lambda_i)$ se $\Delta = diag(\lambda)_i$ (il simbolo diag indica esplicitamente gli elementi diagonali di una matrice diagonale). Si pone infine $R = FU^{-1}$ e se ne verifica l'ortogonalità

$$RR^T = (U^{-1})^T F^T F U^{-1} = (U^{-1})^T U^2 U^{-1} = U^{-1}UUU^{-1} = I. \tag{1.22}$$

Questo conclude la prima decomposizione polare. Resta da provare l' unicità della decomposizione destra $F = RU$. Supponiamo che esistano due diverse decomposizioni $F = RU = R^*U^*$. Di conseguenza: $F^TF = U^2 = U^{*2}$ da cui $U = U^2$ e, quindi, $R = R^2$.

Ciò prova l'unicità della decomposizione destra. Analogamente si pone $V = \sqrt{FF^T}$, si dimostra che è simmetrico definito positivo e si definisce $R' = V^{-1}F$ verificandone l' ortogonalità. Per concludere la dimostrazione dobbiamo provare che $R' = R$. Siccome $R'(R')^T = I$ possiamo scrivere $F = VR' = R'(R')^T VR'$. L'unicità della decomposizione destra ($F = RU$) implica che $R' = R$ e che $U = R^T VR$ il che afferma anche che U e V sono rappresentati da matrici equivalenti).Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Ora abbiamo che

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^T.$$

R è chiamato *il tensore di rotazione*, **U** è chiamato *il tensore destro* di *deformazione* e **V** è conosciuto come *il tensore sinistro di deformazione.*

1.1.3 La teoria lineare di deformazione

Nella teoria lineare il campo vettoriale degli spostamenti ha la forma $\mathbf{u} = \epsilon\mathbf{u}'$ dove ϵ è una costante sufficientemente piccola tanto da poterne trascurare le potenze $\epsilon^n (n \geq 2)$ e $\mathbf{u}'$ è indipendente da ϵ. I tensori di deformazione $\mathbf{E}_{ij}$ e $\mathbf{e}_{ij}$ si riducono al *tensore di deformazione infinitesima*

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\Big) \tag{1.23}$$

cioè alla parte simmetrica del Grad $\mathbf{u}(\mathbf{X}$,t).
Il tensore Grad $\mathbf{u}$ possiamo scriverlo nella forma

$$u_{ij} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}, \tag{1.24}$$

$$\textit{dove} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\big). \tag{1.25}$$

Quindi l' equazione (1.23) è equivalente alla segunte uguaglianza:

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\Big) \tag{1.26}$$

Il tensore ω_{ij}, parte antisimmetrica del Grad $\mathbf{u}$, è chiamato *tensore lineare* di *rotazione*. Il vettore lineare di rotazione $\vec{\omega}$ è definito da

$$\omega_i = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{ijk}\omega_{jk}. \tag{1.27}$$

Dalla (1.26), tenendo conto della (1.24), si ha

$$\omega_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{k,j} \quad oppure \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2}curl\mathbf{u} \tag{1.28}$$

con **curl** indichiamo la **rotazione**.
La parte antisimmetrica non è altro che il **rotazionale** del campo vettoriale di spostamento.
Considerando un campo vettoriale $\vec{u}$ si definisce **rotazionale**: $\vec{\bigtriangledown} \wedge \ \vec{u}$. Il rotazionale così definito si determina calcolando il determinante della matrice ad esso corrispondente.
Quindi

$$\vec{\bigtriangledown} \wedge \ \vec{u} = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

In conclusione è possibile decomporre ogni spostamento nella sua parte simmetrica e antisimmetrica, dove la parte simmetrica è la dilatazione e la parte antisimmetrica è la rotazione.

1.1.4 Interpretazione geometrica dei tensori di deformazione. Invarianti di deformazione

La meccanica del continuo tratta quantità fisiche, di solidi e fluidi, che non dipendono dal sistema di coordinate in cui vengono osservate. Queste quantità sono pertanto rappresentate attraverso **tensori**, oggetti matematici indipendenti dal sistema di coordinate.
Ai fini computazionali, questi tensori possono essere espressi in particolari sistemi di coordinate. In matematica, la nozione di tensore generalizza tutte le strutture definite usualmente in algebra lineare a partire da un singolo spazio vettoriale V. Sono particolari tensori i vettori, gli endomorfismi, i funzionali lineari ed i prodotti scalari.

Il primo utilizzo del concetto e del termine tensore avviene nell'ambito della meccanica dei continui, in connessione con l'esigenza di descrivere le sollecitazioni e le deformazioni subite dai corpi estesi, da cui la formalizzazione della meccanica razionale.
I tensori sono ampiamente utilizzati in relatività generale, per descrivere rigorosamente lo spaziotempo come varietà 4-dimensionale curva.
I tensori sono utilizzati in molti altri ambiti della fisica, fra cui in particolare l'elettromagnetismo, la meccanica dei fluidi e la meccanica dei solidi. In particolare il tensore degli sforzi e il tensore delle deformazioni sono usati nella scienza delle costruzioni per definire lo stato tensiodeformativo in ogni punto di una determinata struttura.
I tensori sono altresì usati in geometria differenziale per definire su una varietà differenziabile le nozioni geometriche di distanza, angolo e volume. Questo viene fatto tramite la scelta di un tensore metrico, cioè di un prodotto scalare definito sullo spazio tangente di ogni punto. Tramite questa nozione, vengono quindi definiti e studiati gli aspetti inerenti la curvatura della varietà. Altri tensori, quali il tensore di Riemann ed il tensore di Ricci, sono strumenti importanti per questo studio.
Quanto appena detto è utile per fissare in termini generali il concetto di **tensori**, che nei paragrafi precedenti viene esplicato in forma più analitica.
Introduciamo ora le nozioni di **allungamento unitario** e **stiramento** nella direzione di $\mathbf{N}$. Sia

$$\mathbf{N}_i = \frac{1}{dS} dX_i \quad , \quad \mathbf{n}_i = \frac{1}{ds} dx_i \quad , \quad \mathbf{\Lambda}_{(N)} = \frac{ds}{dS}$$

dove $d\mathbf{S} = |d\mathbf{X}| = \sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2}$ e $d\mathbf{s} = |d\mathbf{x}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$.
Dalle equazioni:

$$\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial X_r}{\partial x_i} \frac{\partial X_r}{\partial x_j} \quad , \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\Big)$$

abbiamo:

$$\mathbf{\Lambda}_N = (C_{ij} N_i N_j)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.30}$$

L'allungamento unitario nella direzione di $\mathbf{N}$ è definito da:

$$\mathbf{E}_N = \Lambda_N - 1 = \frac{ds - dS}{dS}. \tag{1.31}$$

Il rapporto $\mathbf{\Lambda}_{(N)}$ viene detto *stiramento* nella direzione di $\mathbf{N}$. Quando $\mathbf{N} = \mathbf{e}_1$ si ottiene:

$$\mathbf{\Lambda}^2_{(e_1)} = C_{11} = 1 + 2E_{11}, \mathbf{E}_{(e_1)} = (1 + 2E_{11})^{\frac{1}{2}} - 1 \tag{1.32}$$

Nella teoria lineare abbiamo:

$$\mathbf{E}_{(e_1)} = \epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}. \tag{1.33}$$

Risultati simili sono validi per $E_{(e_1)}$ e $E_{(e_2)}$.
Consideriamo i vettori $d\mathbf{X}_1\mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}_2\mathbf{e}_2$ a cui corrispondono, nella configurazione attuale, i vettori $d\mathbf{r}_1$ e $d\mathbf{r}_2$, cioè

$$d\mathbf{r}_1 = \frac{\partial x_i}{\partial X_1}\mathbf{e}_i dX_1, \quad d\mathbf{r}_2 = \frac{\partial x_i}{\partial X_2}\mathbf{e}_i dX_2.$$

L' angolo θ_{12} tra $d\mathbf{r}_1$ e $d\mathbf{r}_2$ è dato da

$$cos(\theta_{12}) = \frac{C_{12}}{(C_{12}C_{22})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2E_{12}}{[(1+2E_{11})(1+2E_{22})]^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.34}$$

Questo fornisce un evidente significato geometrico per C_{12} E_{12}. Nella teoria lineare, abbiamo

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right).$$

Le quadriche

$$c_{ij}y_iy_j = \mathbf{K}^2 \quad e \quad C_{ij}Y_iY_j = \mathbf{k}^2 \quad , \tag{1.35}$$

dove K e k sono costanti e sono note rispettivamente, come *l' ellissoide* di *deformazione materiale* e *l'ellissoide di deformazione spaziale.*
I tensori di deformazione c_{ij} e C_{ij} sono tensori cartesiani simmetrici del secondo ordine e conseguentemente la determinazione delle loro direzioni principali e dei loro autovalori si ottiena attraverso l'equazione caratteristica corrispondente. Consideriamo l'equazione caratteristica di C_{ij}

$$|C_{ij} - \lambda\delta ij| = 0. \tag{1.36}$$

Sviluppando il determinante della (1.35) si ottiene l'equazione

$$-\lambda^3 + I_1(C)\lambda^2 - I_2(C)\lambda + I_3(C) = 0, \tag{1.37}$$

dove

$$\mathbf{I_1}(\mathbf{C}) = \mathbf{C_{ii}} = \mathbf{trC}, \quad \mathbf{I_2}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C_{ii}C_{jj}} - \mathbf{C_{ij}C_{ij}}) \quad e \quad \mathbf{I_3} = |\mathbf{C_{ij}}| = \mathbf{detC} \tag{1.38}$$

sono gli *invarianti principali del tensore di deformazione* $\mathbf{C}$. Le radici $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ dell' equazione caratteristica $-\lambda^3+I_1(C)\lambda^2-I_2(C)\lambda+I_3(C)=0$ sono gli autovalori di$\mathbf{C}$. Gli autovettori di $\mathbf{C}$ definiscono poi gli assi principali di $\mathbf{C}$. Dall' equazione caratteristica: $-\lambda^3+I_1(C)\lambda^2-I_2(C)\lambda+I_3(C)=0$ risulta

$$\mathbf{I_1(C)=C_1+C_2+C_3}, \quad \mathbf{I_2(C)=C_1C_2+C_2C_3+C_1C_3}, \tag{1.39}$$

$$\mathbf{I_3(C)=C_1C_2C_3}$$

Nello stesso modo possiamo introdurre gli invarianti dei tensori $\mathbf{c}_{ij},\mathbf{E}_{ij},\mathbf{e}_{ij}$ e ϵ_{ij}.
Dalle seguenti equazioni ricavate precedentemente:

$$\mathbf{2E}_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}+\frac{\partial u_s}{\partial X_i}\frac{\partial u_s}{\partial X_j}$$

e

$$\mathbf{I_1(C)=C_1+C_2+C_3}, \quad \mathbf{I_2(C)=C_1C_2+C_2C_3+C_1C_3},$$

$$\mathbf{I_3(C)=C_1C_2C_3}$$

si ha che:

$$\mathbf{I_1(C)}=3+2\mathbf{I_1(E)}, \quad \mathbf{I_2(C)}=3+4\mathbf{I_1(E)}+\mathbf{I_2(E)}, \tag{1.40}$$
$$\mathbf{I_3(C)}=1+2\mathbf{I_1}(E)+4\mathbf{I_2(E)}+8\mathbf{I_3(E)}$$

Denotiamo con $\lambda_\mathbf{i}$ gli stiramenti lungo gli assi principali di $\mathbf{C}$. Le grandezze λ_i sono chiamate *gli stiramenti principali* di $\mathbf{C}$. Si può vedere chiaramente che C_i=${\lambda^2}_i(i=1,2,3)$. Dalle relazioni precedenti segue che:

$$\mathbf{I_3(C)}=\mathbf{J}_2. \tag{1.41}$$

Dalle equazioni (1.39) e (1.40) si ooserva che si ottiene:

$$\frac{dv}{dV}=J=[I_3(C)]^{\frac{1}{2}}=[1+2I_1(E)+4I_2(E)+8I_3(E)]^{\frac{1}{2}} \tag{1.42}$$

Nella teoria lineare otteniamo

$$\frac{dv-dV}{dV}=I_1(\epsilon)=\epsilon_{ii}. \tag{1.43}$$

$\mathbf{I_1}(\epsilon)$ viene chiamata *dilatazione cubica.* Una deformazione nella quale non avviene nessun cambiamento di volume viene detta*isocora.* Poichè vale $dv = JdV$(noto come cambiamento del volume) allora possiamo osservare che *la condizione necessaria e sufficiente* affinchè il moto sia isocoro é:

$$J = 1. \tag{1.44}$$

Definizione 1.1.
Le curve, le superfici e le regioni che sono occupate dalle stesse particelle materiali in ogni istante di I vengono dette *curve*,*suprfici* e *regioni materiali.*

1.1.5 Velocità. Accelerazione

Nell' ambito della Cinematica dei Continui la velocità e di conseguenza l'accelerazione possono essere studiate sia da un punto di vista Euleriano che Lagrangiano. Non è corretto affermare, in senso assoluto, che una delle due descrizioni del moto è migliore dell'altra; è invece giusto osservare che ciascuna può essere più efficace in un particolare contesto. La descrizione Euleriana è senz'altro più utile per descrivere il campo di moto nel suo insieme, ma il riferimento Lagrangiano può essere d'aiuto per scrivere equazioni di bilancio di forze su una singola particella (per bilancio si intende una relazione che intercorre tra i flussi entranti ed uscenti di una certa grandezza fisica in esame, la quantità che viene ad essere generata o distrutta e la quantità accumulata, riferendosi ad un intervallo di tempo e ad un dato volume che contiene il sistema fisico in esame).
Questo primo tipo di specificazione del moto del fluido sfrutta il concetto matematico di campo, nel senso che le proprietà del flusso (velocità, densità, pressione) sono definite come funzioni dello spazio, ossia del vettore posizione $\mathbf{x}$, e del tempo t. La velocità del fluido verrà ad esempio espressa come $\mathbf{u}$=$\mathbf{u}$($\mathbf{x}$,t). L'osservatore è solidale ad un riferimento fisso o inerziale e fotografa l'intero campo di velocità (o densità, o pressione...) a ciascun istante temporale, senza però avere alcuna informazione relativa al moto della singola particella fluida.
La specificazione Lagrangiana del moto focalizza l'attenzione non più su di un determinato volume di controllo, ma sulla singola particella fluida. Le proprietà del flusso saranno quindi funzioni della scelta del particolare elemento fluido, oltre che del tempo t. Scegliendo di identificare la particella fluida mediante il vettore posizione $\mathbf{x}_0$ del suo

centro di massa al tempo iniziale t_0, avremo che la sua velocità al tempo generico t sarà esprimibile come $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$.
Quindi possiamo affermare che la derivata materiale del campo scalare G con $G : R^3$ x R è definita da:

$$\dot{G} = \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_X , \tag{1.45}$$

dove la X indica che le coordinate del punto X sono mantenute costanti nella differenziazione. Se G è una funzione delle coordinate materiali, allora

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Se F è una funzione delle coordinate spaziali e del tempo si ha invece:

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial t}. \tag{1.46}$$

La derivata materiale può essere ugualmente applicata ai campi di vettori e di tensori.
Il vettore velocità è definito da:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{x}. \tag{1.47}$$

Se si scrive $v = v_i e_i$ allora si ha:

$$v_i = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, \mathbf{t})}{\partial t}. \tag{1.48}$$

Dall' uguaglianza precedente e dalla seguente uguaglianza: $u_i = x_i - X_i$ si ha che:

$$v_i = \dot{u}_i. \tag{1.49}$$

Se il vettore spostamento è espresso in forma lagrangiana, cioè $u_i = u_i(\mathbf{X}, \mathbf{t})$, allora si ha:

$$v_i = \frac{\partial u_i(\mathbf{X}, \mathbf{t})}{\partial t}. \tag{1.50}$$

D' altra parte se il vettore spostamento è espresso in forma euleriana, cioè $u_i = u_i(x_j, t)$, allora:

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j \tag{1.51}$$

Il vettore accelerazione **a** è definito da

$$\mathbf{a} = \dot{v}. \tag{1.52}$$

Quindi necessariamente segue che:

$$\mathbf{a} = \ddot{u}. \tag{1.53}$$

Ora si osservi che se $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ e se il campo del vettore spostamento è espresso nella forma lagrangiana,allora si ha:

$$a_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{1.54}$$

Se il campo del vettore è espresso in forma euleriana, allora otteniamo:

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j. \tag{1.55}$$

Concludiamo il seguente paragrafo e l'intero capitolo con un concetto importante nella meccanica dei continui:il concetto di *linee di flusso.* Una linea di flusso rappresenta quella linea che è sempre tangente al vettore velocità di una particella elementare di fluido. Si immagini di prendere una porzione di spazio nel quale scorre un fluido e di poter fotografare in un determinato istante il vettore velocità della particella di fluido; ripetiamo l'operazione negli istanti successivi (avremo così per ogni istante la direzione del vettore velocità). La linea di flusso non è altro che la curva che risulta sempre tangente a tali vettori. Nel caso in cui il moto risulti stazionario allora le linee di flusso coincidono con le linee di corrente (cioè con le traiettorie delle particelle di fluido), un moto è detto *stazionario* quando la velocità non dipende direttamente dal tempo. Dall'osservazione delle linee di flusso possiamo dedurre solo l'orientamento del vettore velocità e la presenza di eventuali gradienti all'interno del campo di moto (dove si infittiscono le linee di flusso aumenta il modulo del vettore velocità). Allora le linee di corrente sono le curve del seguente sistema:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} \quad , \quad \text{t fissato.} \tag{1.56}$$

Dimostrazione. (1.55)
Si ha che:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1, \frac{dx_2}{dt} = v_2, \frac{dx_3}{dt} = v_3$$

e che

$$\frac{dx_1}{v_1} = dt, \frac{dx_2}{v_2} = dt, \frac{dx_3}{v_3} = dt$$

e quindi otteniamo l'uguaglianza (1.55). □

L' uguaglianza (1.55) è equivalente al sistema di tre equazioni differenziali del primo ordine: $\dot{\vec{x}}=\vec{v}$.

Definizione 1.2.
L' integrale

$$C = \oint_{\Gamma} v \cdot dx \tag{1.57}$$

lungo la curva chiusa semplice Γ è chiamato *circolazione* su Γ. Si dice che un moto *conserva* la *circolazione* se la circolazione su ogni curva Γ ha lo stesso valore. Il *flusso* della *velocità* attraverso la superficie S è definito da

$$\Phi = \int_S v \cdot n \quad da,$$

dove n è il versore normale ad S. Si assuma che $n \cdot v \geq 0$.

Capitolo 2

Teorema del Trasporto e Applicazioni

In questo capitolo, sarà presentata una deduzione delle equazioni di bilancio locale (leggi generali a cui ogni corpo deve obbedire). Il procedimento deduttivo permette di ottenere le equazioni partendo da un teorema, il teorema del trasporto, che fornisce un' espressione della variazione temporale di una qualunque proprietà estensiva attribuita ad un elemento del fluido. Un elemento di fluido è per definizione un sistema termodinamico chiuso in moto, cosicchè lo schema deduttivo presentato in questa sezione si basa sul punto di vista Lagrangiano.

2.1 IMPORTANTI PREMESSE

E' noto che lo studio del moto di qualunque corpo è in linea di principio governato dalla seconda legge della dinamica ovvero dalla legge di Newton:

$$\vec{F} = M\vec{a}.$$

Nei problemi di fluidodinamica e di meccanica dei fluidi l'applicazione diretta della legge di Newton presenta delle difficoltà oggettive perchè si è sempre in presenza di sistemi aperti ovvero di sistemi a massa variabile caratterizzati da flussi di massa legati alla presenza di un campo di velocità V(x,y,z,t). Quindi è per questo che per esprimere

le leggi generali della meccanica dei fluidi bisogna introdurre il teorema del trasporto. Infatti è qui usato per studiare le variazioni nel tempo di una grandezza fisica associata ad un dominio. Prima di entrare nel vivo della questione bisogna effettuare delle importanti premesse.
Si consideri una regione Ω in R^3 con frontiera $\partial\Omega$ regolare. Si immagini un flusso che si muove in Ω; ogni particella di flusso segue una certa traiettoria. Perciò per ogni $\vec{x} \in \Omega$ $\exists$ una traiettoria $\sigma(t) \in \Omega$ che rappresenta la traiettoria di $\vec{x}$. Per segnare le diverse traiettorie scriviamo $\phi(t,x)$ per la traiettoria seguita da $\vec{x}$ con le condizioni iniziali $\vec{\phi}(0,\vec{x}) = \vec{x}$. Per un t fissato, scriviamo $\vec{\phi}_t(\vec{x}) = \vec{\phi}(t,\vec{x})$: l'applicazione manda x al punto in cui x è giunto dopo un tempo t, e con ϕ_0 indichiamo l' identità. Si denoti con $\vec{v}$ la velocità del flusso. Perciò $y = \vec{\phi}(t,\vec{x})$ e $\vec{v}$ è il vettore velocità della curva $\sigma\vec{(t)} = \vec{\phi}_t(\vec{x})$ cioè $\vec{v} = \vec{\sigma}'(t)$. In altre parole: $v(t,\phi(t,x)) = \frac{d}{dt}\phi(t,x)$. Quindi otteniamo su Ω un campo di velocità dipendente dal tempo t e le traiettorie $\vec{\sigma}(t)$ sono dette *traiettorie delle particelle.*

2.2 TEOREMA DEL TRASPORTO

L' enunciato del teorema del trasporto afferma che:[1]

Teorema 2.2.1 (Teorema del trasporto).
Sia $\vec{v}(t,\vec{x})$ un campo vettoriale di classe C_2 su Ω, parallelo alla frontiera $\partial\Omega$, con flusso $\vec{\Phi}$, e sia $f(t,\vec{x})$ una funzione definita su Ω. Si assuma che $\vec{\Phi}$ sia invertibile come funzione di $\vec{x}$ in un intervallo di tempo t.
Allora in questo intervallo di tempo t vale la relazione:

$$\frac{d}{dt}\int_{\vec{\Phi}_t(W)} f(t,\vec{x})\; dx = \int_{\vec{\Phi}_t(W)} \Big(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\Big)dx$$

dove

- $W \subset \Omega$ con frontiera regolare.
- $\vec{\Phi}_t(W)$ è l'immagine di W attraverso $\vec{\Phi}_t$ che è la curva integrale.

[1] Tale enunciato e la relativa dimostrazione sono tratte dal testo di T.J.R. Hughes e J.E Marsden, A short course in fluid mechanics, Berkley, Publish or Perish, (1976)

- $\vec{\nabla} f$:= gradiente di f.
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ è per definizione $\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{v_k}}{\partial \mathbf{x_k}}$ che è detta *divergenza.*

L' importanza del teorema del trasporto deriva dal fatto che ci permette di spostare l'operatore di derivazione dentro il segno di integrale, utile poi per le leggi di bilancio. Per la dimostrazione del teorema del trasporto occorre introdurre un lemma riguardante il determinante Jacobiano di un flusso.

Lemma 2.2.2.
Sia $J(t, \vec{x})$ il determinante Jacobiano di $\vec{\phi}(t, \vec{x})$, cioè:

$$J(t,\vec{x}) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Si può considerare $J(t, \vec{x}) > 0$. Allora vale:

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t,\vec{x}) = J(t,\vec{x})(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(t,\vec{x}).$$

Dimostrazione. (Lemma)
Poichè $\vec{\phi}(0, \vec{x}) = id$ su Ω e ϕ è regolare, per piccoli intervalli t, la continuità del determinante assicura che $J(t, \vec{x})$ sia > 0. Poichè il determinante di una matrice è multilineare nelle colonne (o nelle righe) allora si può fare la sua derivata. Perciò abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t,\vec{x}) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} +$$

$$+det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} +$$

$$+det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Poichè $\vec{\phi}$ è il flusso di $\vec{v}$ allora è di classe C^2. Perciò si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k}(t,\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial t}\phi_i(t,\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k}v_i(t,\vec{\phi}(t,\vec{x})) = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k},$$

dove si è utilizzata la regola della catena.
Quindi ora vale che:

$$\frac{\partial}{\partial t}J(t,\vec{x}) = det\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \\ \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \\ \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_3}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} +$$

$$+det\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} & \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_3}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} +$$

$$+det\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} & \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_3}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} =$$

$= \det \mathrm{J}(\mathrm{t},\, \vec{x}) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = \mathrm{J}(\mathrm{t},\, \vec{x})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})(\mathrm{t},\, \vec{x})$
e quindi abbiamo ottenuto la tesi voluta. □

Ed ora possiamo dimostrare il teorema del trasporto.

Dimostrazione. (teorema del trasporto)
Applicando la regola del cambiamento di variabile:

$$\int_{\vec{\phi}_t(W)} f(t,\vec{y})\ dy = \int_W f(t,\vec{\phi}(t,\vec{x}))J(t,\vec{x})dx$$

e il lemma precedente otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_W f(t,\vec{\phi}(t,\vec{x}))J(t,\vec{x})\ dx = \int_W \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)J\ dx.$$

Facendo il cambiamento di variabili all'indietro otteniamo il risultato voluto. □

2.2.1 Applicazioni del teorema del trasporto

Noto ora il teorema del trasporto possiamo intrudurre altre importanti definizioni e teoremi.[2] Come già accennato nel paragrafo precedente possiamo ora ridefinire la derivata materiale come stretta conseguenza di tale teorema.

Definizione 2.1.
Una funzione f su Ω è detta essere in coordinate materiali quando viene scritta come $f(t, \vec{\Phi}(t, \vec{x}))$. La *derivata materiale* $\frac{D}{Dt}$ di f è data dalla seguente formula:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}.$$

Osservazione 1.
Osserviamo che $\frac{Df}{Dt}$ è esattamente la derivata di $f(t, \vec{\Phi}(t, \vec{x}))$ rispetto a t.

Definizione 2.2.
Un flusso $\vec{\Phi}_t$ si dice *incomprimibile* se

$$\frac{d}{dt} \int_{\vec{\Phi}_t(W)} dx = 0$$

(cioè se il volume è conservato).

Proposizione 2.2.3.
Un flusso $\vec{\Phi}$ è incomprimibile se e solo se $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$=0.

Dimostrazione.
La dimostrazione è molto semplice basta dare ad f il valore uno nella formula del teorema del trasporto, quindi poichè il flusso è incompribile, per la definizione precedente avremo che il primo membro dell'equazione del teorema del trasporto sarà nullo e quindi di conseguenza *div*$\vec{v}$ nulla. □

Ora presenteremo la legge di *conservazione della massa.* La massa del corpo o di una sua parte è conosciuta per mezzo della funzione densità ρ a valori strettamente positivi:

$$m = \int_{\Omega} \rho dV.$$

[2]Dal testo di T.J.R. Hughes e J.E. Marsden, A Short Course in Fluid Mechanics, Berkley, Publish or Perish, (1976)

La prima legge di conservazione della meccanica dei continui richiede che ogni parte di corpo abbia la stessa massa durante l'evoluzione del continuo. Si asserisce come assioma fisico che dato un volume fissato di fluido W il cui moto è sempre $\vec{\Phi}_t(W)$ allora la sua massa rimane costante. Tale assioma motiva la seguente definizione.

Definizione 2.3.
Sia la densità $\rho\ (t, \vec{x})$, con $\vec{x} \in \Omega$, una funzione positiva di classe C^1 e sia $\vec{v}$ un campo vettoriale con flusso $\vec{\Phi}(t, \vec{x})$. Si dice che ρ e $\vec{v}$ soddisfano il principio di conservazione della massa se:

$$\frac{d}{dt} \int_{\vec{\Phi}_t(W)} \rho(t, \vec{x})\ dx = 0$$

per ogni regione regolare W di Ω.

Teorema 2.2.4.
Il principio di conservazione della massa è soddisfatto da ρ e $\vec{v}$ se e solo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:
(i) $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
(ii) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$
(iii) $\frac{d}{dt} \int_W \rho\ dx = - \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\ dx$
per ogni sottoregione regolare W di Ω e $S = \partial W$.
Le equazioni (i) e (ii) sono dette equazioni di continuità.

Per dimostrare la condizione (iii) è necessario introdurre il teorema di Gauss[3]

Teorema 2.2.5 (Teorema di Gauss)**.**
Sia Ω un volume contenuto in R^3, sia $\partial\Omega$ una superficie regolare senza bordo e compatta. Allora vale:

$$\rho \int_\Omega \vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{v}\ d\vec{x} = Fl_{\partial\Omega}(\vec{v}) = \rho \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n}\ d\omega$$

con $d\omega$ elemento di superficie.
Il teorema di Gauss è una delle possibili generalizzazioni del teorema fondamentale del calcolo integrale.

[3]Formulazione tratta dal testo di T.J.R Hughes e J.E. Marsden, A short course in fluid mechanics, Berkley, Publish, (1976)

Dimostrazione. (delle tre condizioni equivalenti)
Dal teorema del trasporto sostituendo f con ρ e applicando il principio di conservazione della massa ottengo le due condizioni equivalenti (i) e (ii)(*equazioni di continuità*).
Ora vediamo che: (i)$\Rightarrow$(ii)
Sappiamo che:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v}$$

e inoltre

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v}.$$

Allora

$$\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) - \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v}.$$

Sostituendo otteniamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) - \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v} = 0.$$

Così si è ottenuta la (ii).
Ora proviamo che: (ii)$\Rightarrow$(i)
Per la (ii) vale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

Ora sappiamo che:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{D\rho}{Dt} - \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v} \text{ e inoltre che: } \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{v} + \rho\vec{\nabla}\vec{v}.$$

Allora sostituendo in (ii) otteniamo la condizione (i) come voluto.
Infine possiamo provare che: (iii)$\Leftrightarrow$(ii) Si osservi che nel primo membro della condizione (iii) abbiamo il simbolo di derivata sotto il segno di integrale con W fissato e ρ di classe C^1. Applicando il Teorema di Gauss al secondo membro di (iii) si vede immediatamente che la (iii) è equivalente alla (ii). $\square$

Presento infine un teorema la cui dimostrazione è legata strettamente al teorema del trasporto.

Teorema 2.2.6.
Si consideri ρ *e* f *:*$R \times \Omega \to R$ *e sia* $\vec{v}$ *un campo vettoriale con flusso* $\vec{\Phi}(t, \vec{x})$. *Se* ρ *e* $\vec{v}$ *soddisfano il principio di conservazione della massa, allora vale:*

$$\frac{d}{dt}\int_{\vec{\Phi}_t(W)} \rho f \; dx = \int_{\vec{\Phi}_t(W)} \rho \; \frac{Df}{Dt} \; dx$$

per ogni sottoregione regolare $W \subset \Omega$.

Dimostrazione.
Si sostituisca f con ρf e si usi l'equazione della continuità;

$$\frac{D(\rho f)}{Dt} = \rho\frac{Df}{Dt} + \left(\frac{D\rho}{Dt}\right)f = \rho\frac{Df}{Dt} - \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v} f.$$

□

Definizione 2.4.
Un fluido è detto *omogeneo* se ρ è costante in $\vec{x}$.

2.3 FORZE SU UN CONTINUO

In genere si possono avere forze di diverso tipo su un continuo:[4]

1. **Forze esterne di volume (o di massa)**

In ogni punto P$\in \Omega$ si consideri un elementino dV di volume attorno a P e sia dm la sua massa. Le forze che sono proporzionali all'elemento di volume e che si rappresentano come

$$\mathbf{F} dV$$

si chiamano *forze di volume.*
Essendo poi

$$\rho = \frac{dm}{dV},$$

segue che:

$$\mathbf{F} dV = \mathbf{b} dm$$

[4] Definizioni tratte dal testo di T. Ruggeri, Introduzione alla termomeccanica dei continui, Bologna, Monduzzi, (2008)

con

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{b}$$

dove **b** ha le dimensioni di un' accelerazione. Le forze del tipo **b**dm prendono il nome di *forze di massa.*

2. **Forze esterne superficiali**

Esse agiscono sui punti P $\in \Sigma$ della frontiera e le rappresenteremo come:

$$\mathbf{f}d\Sigma$$

dove **f** ha quindi le dimensioni di una forza per unità di superficie.

3. **Forze interne di contatto**

Si consideri un punto P$\in \Omega$ ed un piano π passante per P con normale **n**. Preso un elementino $d\sigma$ di superficie nell' intorno di P appartenente a π, chiamiamo pagina positiva di dσ quella appartenente alla faccia di π rivolta nel verso di **n**. L' altra faccia la chiamiamo negativa. Le forze di contatto che le molecole appartenenti a dσ^- eserciteranno su quelle di dσ^- avranno una risultante che rappresenteremo come:

$$\mathbf{t}_n d\sigma.$$

L' indice n sta a significare che $\mathbf{t}_n d\sigma$ dipende non solo dal punto P ma, in generale, anche dalla scelta di **n**. Le dimensioni di $\mathbf{t}_n$ sono quelle di una forza per unità di superficie e $\mathbf{t}_n$ si chiama *sforzo specifico* nella direzione **n**. Per il principio di azione reazione segue:

$$\mathbf{t}_{-n} = -\mathbf{t}_n.$$

2.3.1 Principio degli sforzi di Cauchy

Abbiamo parlato delle forze che agiscono sui continui; per quanto riguarda le forze interne non sempre il principio di azione-reazione riesce a compensare le forze prodotte dalla deformazione di un corpo. Per sopperire a tale problema introduciamo un importante principio:*il principio degli sforzi di Cauchy.*

Principio degli sforzi di Cauchy

Sia S una superficie immaginaria dentro il corpo o una superficie che racchiude il corpo stesso, su ogni superficie regolare chiusa e orientabile esiste un campo di trazione integrabile detto $\vec{t_\sigma}$ equipotente(stesso vettore risultante e stesso momento risultante) all' azione esercitata dalla materia esterna ad S e ad S contigua su quella interna ad S.
In questo principio si afferma che tutta la forza interna può essere racchiusa in un campo di forze. Dal pricipio appena annunciato si giunge alla seguente definizione. [5]

Definizione 2.5. (Principio della conservazione della quantità di moto)
Sia $\vec{t}(t, \vec{x}, \vec{n})$ un campo vettoriale dato che dipende dal tempo, dalla posizione e da un vettore unitario $\vec{n}$. Siano $\vec{v}$ e ρ rispettivamente un campo vettoriale e una funzione positiva e sia $\vec{f}$ un campo vettoriale dato.
Allora si dice che $(\vec{v}, \rho, \vec{f}, \vec{t})$ soddisfano il *principio della conservazione della quantità di moto* se vale:

$$\frac{d}{dt}\int_{\vec{\Phi}_t(W)} \rho\vec{v}\, dx = \int_{\vec{\Phi}_t(W)} \rho\vec{f}\, dx + \int_{S_t} \vec{t}\, da$$

dove:

- $\vec{\Phi}_t$ è l' evoluzione del flusso $\vec{\Phi}$.
- S_t è l'evoluzione della frontiera S.
- $\vec{v}$ è il campo velocità di un flusso.
- ρ è la densità della massa.
- $\vec{f}$ è la forza esterna.
- $\vec{t}$ è la forza interna che agisce sulla superficie con elemento di area da orientato secondo la normale $\vec{n}$.[6]

[5] Dal testo di T.J.R Hughes e J.E. Marsden, A short course in fluid mechanics, Berkley, Publish or Perish, (1976)

[6] Se il corpo fosse stato rigido avremmo avuto solo forze esterne.

2.3.2 Teorema di Cauchy

Dal principio della conservazione della quantità di moto otteniamo un ulteriore importante teorema:*il Teorema di Cauchy.* [7] Per un dato punto P $\in \Omega$ vi sono quindi ∞^2 sforzi specifici in corrispondenza delle infinite scelte di $\vec{n}$.
Tuttavia esiste un teorema dovuto a Cauchy che permette di ottenere $\mathbf{t}_n$, quale che sia n, purchè conosciamo solo gli sforzi specifici nelle tre direzioni normali corrispondenti ai versori della base scelta e_1, e_2 e e_3. Infatti si ha:

Teorema 2.3.1. *(Teorema di Cauchy)*
Per ogni versore $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3)$ *esiste l'identità:*

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 \tag{2.1}$$

dove $\mathbf{t}_n$ *è lo* lo sforzo specifico *nella direzione* $\mathbf{n}$ *e* $\mathbf{t}_i$ *(i=1,2,3) indicano gli* sforzi specifici nelle direzioni $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_i$.

La formula di Cauchy (2.1) è importante in quanto basterà conoscere solo le tre componenti di ciascuno degli sforzi specifici per conoscere $\mathbf{t}_n$. Indichiamo le componenti degli sforzi specifici con:

$$\mathbf{t}_1 \equiv (t_{11}, t_{12}, t_{13}),\ \mathbf{t}_2 \equiv (t_{21}, t_{22}, t_{23}),\ \mathbf{t}_3 \equiv (t_{31}, t_{32}, t_{33})$$

e denotiamo con $\mathbf{t}$ la matrice così definita (le colonne sono le componenti degli sforzi specifici):

$$\mathbf{t} \equiv \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

La (2.1) si scrive come

$$t_{ni} = t_{ij} n_j \tag{2.2}$$

ovvero

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}\ \mathbf{n}. \tag{2.3}$$

La matrice associata all' operatore $\mathbf{t}$ viene chiamata *matrice (o tensore) degli sforzi di Cauchy.*

[7] Dal testo di T. Ruggeri, Introduzione alla termomeccanica dei continui, Bologna, Monduzzi, (2008)

Capitolo 3

Fluidi

In questo capitolo discuteremo la classe costitutiva che caratterizza i fluidi, corpi per i quali lo stress in equilibrio ha carattere di tipo *pressione*. Saranno poi presentate sia le equazioni di Eulero per un fluido ideale sia le equazioni di Navier-Stokes nel caso di fluidi viscosi.

3.1 FLUIDI IDEALI

Definizione 3.1.
Un fluido si dice perfetto se lo sforzo specifico è in ogni punto normale alla sezione ed ha carattere di pressione (cioè $T \cdot \vec{n}$ è parallelo ad $\vec{n}$ per ogni vettore unitario $\vec{n}$).

Proposizione 3.1.1.
Per un fluido perfetto vale che:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}$$

dove p è uno scalare.

Tale proposizione è giustificata dal seguente lemma algebrico.

Lemma 3.1.2.
Sia A una matrice $n \times n$ tale che, per ogni vettore unitario $\vec{n}$, $\vec{A} \cdot \vec{n}$ sia parallelo ad $\vec{n}$. Allora $\vec{A} = p\vec{I}$ dove p è un numero reale.

Dalla prosizione (3.1.1) segue che:

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = -p\vec{n}$$

è la forza sull'area unitaria su una superficie con normale $\vec{n}$.

Definizione 3.2.
Un fluido ideale è un fluido perfetto incomprimibile.

3.2 FLUIDI VISCOSI

Definizione 3.3.
La viscosità è una proprietà dei fluidi che indica la resistenza allo scorrimento. Dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura e viene solitamente indicata con la lettera greca μ. La viscosità è una forza che si oppone al moto ed è quindi proporzionale alla velocità ma con segno opposto ad essa.

Nei fluidi viscosi, a differenza dei fluidi ideali, l'equazione $\vec{T} \cdot \vec{n} = -p\vec{n}$ vale solo in condizioni di equilibrio. In non equilibrio in un fluido viscoso lo sforzo specifico non ha la direzione normale e ora possiamo scrivere l' equazione costitutiva per un fluido viscoso.

Definizione 3.4.
L' equazione costitutiva per un fluido viscoso é:

$$\vec{T}(t, \vec{x}) = -p(t, \vec{x})\vec{I} + \vec{\vec{T}}(\vec{D}(t, \vec{x})).$$

dove:

1. $\vec{\vec{T}}$ è una funzione regolare di $\vec{D}$.

2. $\vec{\vec{T}}$ è isotropa cioè per ogni matrice ortogonale $\vec{U}$ vale $\vec{\vec{T}}(\vec{U}, \vec{D}\vec{U}^{-1}) = \vec{U}\vec{\vec{T}}(\vec{D})\vec{U}^{-1}$.

3. $\vec{\vec{T}}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Introduciamo un teorema riguardante l'equazione costitutiva di un fluido viscoso. Accenniamo solo l'enunciato senza esplicarne la dimostrazione.

Teorema 3.2.1. *Si assuma che siano verificati 1. , 2. e 3. allora vale:*

$$\vec{\vec{T}} = \alpha\vec{I} + \beta\vec{D} + \gamma\vec{D}^2, \tag{3.1}$$

dove α, β e γ sono funzioni scalari degli invarianti di $\vec{D}$.

Si può assumere che $\vec{\vec{T}}$ sia lineare in $\vec{D}$, e che sia $\alpha = \lambda(traccia\vec{D})$ con λ costante allora abbiamo che λ è l'unica funzione scalare degli invarianti di $\vec{D}$.
Perciò definendo $\beta = 2\mu$ otteniamo:

$$\vec{\vec{T}} = \lambda(div\vec{v})\vec{I} + 2\mu\vec{D} \tag{3.2}$$

dove: λ e μ sono costanti e si ricordi che $div\vec{v} = traccia\ di\ \vec{D}$ e μ è detta *viscosità cinematica.*

3.3 EQUAZIONI DEL MOTO

Tutte le nozioni introdotte nei due capitoli precedenti ci saranno ora utili per ottenere *l' equazione del moto di un fluido*[1]. Deduciamo ora la forma locale dell' equazione della conservazione della quantità di moto applicando il teorema di Cauchy (2.3.1) nell' ultimo integrale dell' equazione della conservazione della quantità di moto:

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho v_i\, dx = \int_{W_t} \rho f_i\, dx + \int_{S_t} T_{ij} n_j\, da. \tag{3.3}$$

Si è considerato il caso particolare in cui W è una sfera ed S è la frontiera della sfera. Ora applichiamo il teorema di Gauss (2.2.5) nell'ultimo integrale dell' equazione (3.1) e abbiamo la seguente uguaglianza:

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho v_i\, dx = \int_{W_t} \rho f_i\, dx + \int_{W_t} divT_i\, dx. \tag{3.4}$$

[1]Le equazioni utilizzate qui di seguito sono tratte dal libro di T.J.R. Hughes e J.E. Marsden, A short course in fluid mechanics, Berkley, Publish or Perish, (1976)

Si prosegue, poi, considerando il primo membro dell' uguaglianza precedente e ivi si applica il teorema del trasporto:

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho v_i \, dx = \int_{W_t} \Big(\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i + div(\rho v_i)\cdot \vec{v} + \rho v_i div\vec{v}\Big)\, dx. \tag{3.5}$$

Considerando le equazioni (3.2) e (3.3) si ha:

$$\int_{W_t} \frac{\partial}{\partial t}\rho v_i + div(\rho v_i)\vec{v} + \rho v_i \nabla\vec{v}\, dx = \int_{W_t} \rho f_i \, dx + \int_{W_t} divT_i \, dx. \tag{3.6}$$

Sappiamo che vale:

$$\frac{D(\rho v_i)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\rho v_i + div(\rho v_i)\vec{v}. \tag{3.7}$$

Allora sostituendo la (3.5) nella equazione (3.4) otteniamo:

$$\int_{W_t} \Big(\frac{D(\rho v_i)}{Dt} + \rho v_i \nabla\vec{v} - \rho f_i - divT_i\Big)\, dx = 0. \tag{3.8}$$

Tale equazione è equivalente a:

$$\Big(\frac{D(\rho v_i)}{Dt} + \rho v_i \nabla\vec{v} - \rho f_i - divT_i\Big) = 0. \tag{3.9}$$

Se $\vec{\nabla}\vec{v} = 0$, cioè se il moto è incomprimibile e quindi ρ è costante, allora l'equazione (3.7) è equivalente a :

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + divT_i. \tag{3.10}$$

L' equazione (3.8) è detta *l' equazione del moto* o *prima legge di Cauchy* o *forma locale della conserv*
Queste equazioni insieme alle equazioni di continuità mi dicono come il flusso si muove nel tempo cioè come$\vec{v}$ e ρ si comportano in funzione del tempo.
Per arrivare ad avere un' equazione del moto equivalente alla seconda equazione della dinamica bisogna completare tale descrizione del moto avendo un' equazione per il tensore degli sforzi T e condizioni specifiche sul bordo.

Definizione 3.5.
Le equazioni del moto per un fluido perfetto sono:

$$\frac{D(\rho v_i)}{Dt} + \rho v_i(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = \rho f_i - \vec{\nabla}p. \tag{3.11}$$

3.3.1 Equazioni di Eulero

Definizione 3.6.
Le equazioni del campo per un fluido ideale sono:

$$\begin{cases} \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p \\ \frac{D\rho}{Dt} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

La prima equazione del sistema è equivalente alla seguente equazione:[2]

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p. \tag{3.13}$$

Le equazioni (3.10) sono dette *Equazioni di Eulero*, poichè l'acqua è un fluido perfetto che soddisfa tali equazioni allora quest' ultime sono dette anche *Equazioni dell' idrodinamica.*

Questo sistema di equazioni è deterministico cioè è un sistema chiuso di cinque equazioni con cinque incognite.
Le condizioni sul bordo per un fluido ideale sono:

$$\vec{v}(t,\vec{x})|_{t=0} = \vec{v}_0 \ e \ \vec{v}\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega}.$$

Definizione 3.7.
La soluzione dell' equazioni di Eulero è il campo delle velocità $\vec{v}(\vec{x},t)$.
Il campo delle velocità è detto *stazionario* se $\vec{v} = \vec{v}(x)$ cioè dipende solo da x.

Dopo aver calcolato $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x},t)$ si può trovare $\vec{\Phi}$ in quanto $\dot{\vec{\Phi}} = \vec{v}(\vec{\Phi}(t,\vec{x}),t)$.
Infine se $\vec{v} = 0$ si parla di *idrostatica* cioè di *equilibrio* di fluidi ideali.

3.3.2 Equazioni di Navier-Stokes

Nel paragrafo precedente si è parlato delle equazioni del moto per un fluido ideale ora affronteremo il caso in cui si abbia un fluido viscoso.
Sostituendo l'equazione costitutiva di un fluido viscoso all' equazione del moto otteniamo le equazioni di Navier-Stokes.[3]

[2]Dal libro di T.J.R. Hughes e J.E. Marsden, A short course in fluid mechanics, Berkley, Publish or Perish, (1976)

[3]Dal libro di T.J.R. Hughes e J.E. Marsden, A short course in fluid mechanics, Berkley, Publish or Perish, (1976)

Definizione 3.8.
L' equazione di Navier-Stokes nel caso di un fluido comprimibile è la seguente:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \mu\Delta\vec{v}. \tag{3.14}$$

L' equazione di Navier-Stokes nel caso di un fluido incomprimibile è:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v}. \tag{3.15}$$

Considerando il caso incomprimibile ottengo un sistema di tre equazioni così composto:

$$\begin{cases} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{v} \\ \nu = \frac{\mu}{\rho} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Concludendo possiamo osservare che il caso del fluido ideale di Eulero può considerarsi un caso limite di Navier-Stokes ponendo nulli i coefficienti di viscosità.

Conclusioni

Nella mia tesi ho voluto trattare degli argomenti riguardanti la meccanica dei continui, partendo dalla descrizione Lagrangiana e Euleriana del moto di un corpo continuo; ma soprattutto ho voluto approfondire alcuni aspetti inerenti al teorema del trasporto.
Nel mio elaborato ho voluto sottolineare l'importanza di tale teorema nell'ambito della meccanica dei continui evidenziandone la sua centralità.
Infatti è di fondamentale importanza nella meccanica dei fluidi, in quanto riporta il calcolo delle derivate temporali di grandezze integrali relative a corpi fluidi e definite su volumi materiali, al calcolo di grandezze integrali su volumi di controlllo, coincidenti istantaneamente coi volumi materiali.
Ho evidenziato inoltre alcune conseguenze e applicazioni del teorema del trasporto (definizione derivata materiale, principio di conservazione della massa, equazioni di continuità e principio di conservazione della quantità di moto) atte ad ottenere l' equazione del moto per un fluido.
Inoltre, per riuscire ad avere una visione più globale della trattazione di tale argomento, mi sono occupata dei fluidi ideali e viscosi e delle loro equazioni costitutive: dove per equazioni costitutive si intende delle relazioni matematiche che caratterizzano il comportamento macroscopico dei materiali costituenti un corpo continuo, e che completano insieme alla descrizione cinematica e alle equazioni di bilancio il quadro delle relazioni meccaniche di un modello di corpo.
Infine ho concluso il mio lavoro enunciando le equzioni di Eulero e di Navier-Stokes relative rispettivamente al moto di fluidi ideali e di fluidi viscosi.

Bibliografia

[1] T. Ruggeri, *Introduzione alla termomeccanica dei continui*, Bologna, Monduzzi, (2008).

[2] T.J.R. Hughes e J.E. Marsden, *A short course in fluid mechanics*, Berkeley, Publish or Perish, (1976)

[3] M. Ciarletta e D. Iesan, *Elementi di meccanica dei continui con applicazioni*, Bologna, Pitagora, (1997)

Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare il professor Sandro Graffi che mi ha dato la possibilità di effettuare questo elaborato e mi ha seguito con molta scrupolosità durante la redazione del lavoro di tesi.
Ringrazio i miei genitori, a cui dedico questa tesi: senza il loro aiuto non avrei mai raggiunto questa meta. Sono davvero grata per tutto il sostegno economico, ma più di ogni altra cosa per quell' aiuto tacito o esplicito che è venuto dal loro cuore: a tutte le volte che mi sono stati vicini e mi hanno incoraggiata vedendomi preoccupata o in difficoltà.
Non posso non ringraziare tutti gli amici conosciuti a Bologna sia quelli con cui ho affrontato i primi anni, le prime lezioni, i primi esami sia quelli che ho incontrato più tardi nel mio percorso di studi, i quali mi hanno veramente aiutato nell' affrontare gli ultimi esami e che mi hanno sopportata e supportata nella stesura della tesi.
Fra questi ringrazio Yesica con la quale sono riuscita a farmi "grasse" risate nel preparare l' ultimo esame di Geometria e Nirka che mi ha condotto nel magico mondo del Latex e della programmazione C, senza di loro sarebbe stato tutto più faticoso.
Ringrazio tutte le coinquiline di Via Carracci che hanno partecipato alle mie pazzie e mi hanno regalato belle serate ricche di chiacchierate e momenti spensierati.
Un grazie veramente particolare lo devo al mio ragazzo Davide che è stato la mia coscienza, la mia guida, il mio psicologo, il mio tutor. Con i suoi modi e le sue attenzioni mi è stato sempre affianco, mi ha fatto capire che tutti siamo vulnerabili e non c'è niente di male nell' esserlo, ma sopratutto mi ha presa in braccio nei momenti più bui.
Infine ringrazio tutti i miei amici di Chiaravalle che ognuno a suo modo ha contribuito a rendere speciale il mio percorso universitario. Fra questi un grazie di cuore va a Laura e Elisa.

A Laura, per avermi aiutata a vedere sempre il lato positivo di ogni situazione e che ha cercato di farmi razionalizzare nei momenti più complicati.
A Elisa, per le telefonate post esame in cui era sempre pronta o a gioire con me o a confortami senza mai tirarsi indietro, e per tutte le chiacchierate fatte insieme.
Un grazie ad entrambe per le "serate donne" in cui ci si diverte, ci si confronta e ci si aiuta e che sono un ottimo dolcificante per la mia vita specialmente nei momenti più stressanti, (ovviamente non posso tralasciare la new entry: Giorgia che con i suoi sorrisi accennati emana gioia infinita).