

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

# L'INTEGRALE DI STIELTJES E SUOI SVILUPPI

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:  
LAURA ADDAMIANO

Sessione III  
Anno Accademico 2008/09

\*

A K.,

*caro amico,*

*paziente tutore,*

*e grande matematico.*

# Indice

<b>1</b>	<b>L'integrale di Riemann-Stieltjes classico</b>	<b>7</b>
1.1	Insiemi orientati e net . . . . .	7
1.2	Orientamenti per finezza di partizione su un intervallo . . . . .	8
1.3	L'integrale di Riemann-Stieltjes classico . . . . .	9
1.4	Casi di riconducibilità all'integrale di Riemann. . . . .	9
1.5	Alcune proprietà generali . . . . .	10
1.6	Condizioni di esistenza . . . . .	11
1.7	L'integrale di Riemann-Stieltjes rispetto a funzioni a variazione limitata . . . . .	14
1.8	Teoremi di convergenza. Il secondo teorema di Helly . . . . .	17
1.9	Lifting delle funzioni generatrici . . . . .	19
<b>2</b>	<b>L'integrale di Lebesgue-Stieltjes</b>	<b>21</b>
2.1	Prolungamento astratto di Lebesgue . . . . .	21
2.2	Relativa definizione di integrale . . . . .	22
2.3	Misure di Lebesgue-Stieltjes su $\mathbb{R}$ . . . . .	23
2.4	Prolungamento della misura immagine di una funzione misurabile. . . . .	23
2.5	L'integrale di Lebesgue-Stieltjes . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Estensioni e varianti della definizione dell'integrale di Riemann-Stieltjes</b>	<b>26</b>
3.1	L'integrale di Pollard-Moore-Stieltjes . . . . .	26
3.2	Altri integrali di Riemann-Stieltjes modificati. . . . .	28
3.3	L'integrale di Riemann-Stieltjes su tutto $\mathbb{R}$ . . . . .	30
3.4	Espressione dell'integrale di Lebesgue su uno spazio di probabilità come integrale di Stieltjes su tutto $\mathbb{R}$ . . . . .	31
3.5	L'integrale di Riemann-Stieltjes su un rettangolo di $\mathbb{C}$ . . . . .	33
<b>4</b>	<b>L'integrale di Stieltjes come forma bilineare canonica di spazi in dualità</b>	<b>37</b>
4.1	Spazi vettoriali topologici . . . . .	37
4.2	Nozione di dualità tra spazi e topologie deboli naturali . . . . .	38

4.3	Gli spazi $\mathcal{C}$ , $\mathcal{C}_b$ , $\mathcal{C}_0$ , $\mathcal{C}_K$ , e loro topologie . . . . .	40
4.4	Il secondo teorema di rappresentazione di Riesz . . . . .	41
4.5	Duali degli spazi $\mathcal{C}$ , $\mathcal{C}_b$ , $\mathcal{C}_0$ , $\mathcal{C}_K$ . . . . .	43
4.6	Misure di Radon e di Lebesgue-Stieltjes con segno su $\mathbb{R}$ . . . . .	45
4.7	$w^*$ -topologie e generalizzazioni del secondo teorema di Helly. . . . .	46
4.8	Densità delle funzioni finitamente di salto in $BV$ e $BV_{loc}$ . . . . .	50
4.9	Convergenza di variabili aleatorie reali . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Trasformata di Fourier</b> . . . . .	<b>54</b>
5.1	Trasformate di Fourier di funzioni a variazione limitata e di misure . . . . .	54
5.2	Confronti e analogie fra trasformata classica e di misure . . . . .	55
5.3	Convoluzione di funzioni BV sulla retta . . . . .	56
5.4	Trasformata di Fourier-Stieltjes della convoluzione . . . . .	57
5.5	Convoluzione di misure di Radon totalmente finite . . . . .	59
5.6	Funzioni caratteristiche . . . . .	60
5.7	Funzioni caratteristiche e momenti . . . . .	62
<b>6</b>	<b>L'integrale di Riemann-Stieltjes in ambiente vettoriale</b> . . . . .	<b>65</b>
6.1	L'integrale di Riemann-Stieltjes vettoriale su un intervallo reale . . . . .	65
6.2	L'integrale di Riemann-Stieltjes vettoriale su un dominio rettangolare di $\mathbb{C}$ . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Forme differenziali e misure spettrali</b> . . . . .	<b>68</b>
7.1	Forme differenziali in spazi astratti . . . . .	68
7.2	L'integrale curvilineo come integrale di Stieltjes in ambiente vettoriale . . . . .	68
7.3	Forme integrabili . . . . .	69
7.4	Omotopia, forme chiuse e forme irrotazionali . . . . .	70
7.5	Spettro e risolvente di un elemento di un'algebra di Banach . . . . .	71
7.6	La forma differenziale $R_\lambda d\lambda$ . . . . .	72
7.7	Idempotenti fondamentali . . . . .	73
7.8	Misure a valori proiezioni . . . . .	76
7.9	Integrazione di una funzione scalare rispetto ad una misura a valori proiezioni . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Integrazione di Stieltjes rispetto a famiglie spettrali</b> . . . . .	<b>79</b>
8.1	Famiglie spettrali . . . . .	79
8.2	L'integrale di Riemann-Stieltjes di una funzione reale rispetto ad una famiglia spettrale . . . . .	80
8.3	L'integrale debole rispetto ad una famiglia spettrale. . . . .	83
8.4	Famiglie spettrali di operatori autoaggiunti limitati . . . . .	84
8.5	Misura generata da una famiglia spettrale . . . . .	85
8.6	Rappresentazione degli operatori unitari . . . . .	85

8.7	Una decomposizione di operatori normali e loro rappresentazione	86
8.8	Martingale astratte ed integrale di Riemann-Stieltjes H-stocastico	88
<b>9</b>	<b>Integrali stocastici: un approccio spettrale</b>	<b>92</b>
9.1	Geometria dell'attesa condizionata	92
9.2	Processi stocastici e martingale	94
9.3	Processi stocastici a tempo continuo	98
9.4	Famiglie spettrali e martingale in $L^2(\Omega)$	99
9.5	L'integrale spettrale forte di una funzione scalare come generalizzazione dell'integrale stocastico di Paley-Wiener	103
9.6	L'integrale stocastico di Itô	105
9.7	L'H-integrale stocastico spettrale come generalizzazione dell'integrale di Itô	107
	<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>

# Introduzione

Correva l'anno 1894.

Nel fondamentale articolo *Recherches sur les Fractions continues*, Thomas Stieltjes definì l'integrale che ne porta il nome, allo scopo di risolvere il problema dei momenti di un sistema di masse su una semiretta.

Il suo integrale coinvolge funzioni continue come integrande, e a variazione limitata come integratrici. Questo è oggi solo uno dei tanti ambienti possibili, ma resta notevolissimo per le comode stime, per le formule che rendono naturali le manipolazioni, per il facile trasporto ad ambienti astratti.

Tuttavia, nel giro di pochissimi anni, l'integrale di Stieltjes produsse un intenso interesse nei matematici.

Si pose, ad esempio, il problema di risolvere la patologia endemica dell'integrale, che si presenta quando la funzione integranda e l'integratrice sono discontinue in uno stesso punto. In tal caso, infatti, l'integrale non esiste.

In quegli anni, Henri Lebesgue concludeva le sue strabilianti ricerche sulle funzioni a variazione limitata, e su un integrale che consentiva passaggi al limite fino a quel momento insperati. La fusione con l'integrale di Stieltjes portò alla integrazione, detta di Lebesgue-Stieltjes. Questa risolve frequentemente la patologia delle discontinuità, ma non è un'estensione dell'integrale di Stieltjes, perché l'integrale di Lebesgue-Stieltjes è privo di senso se la funzione integratrice non genera sul dominio una misura localmente finita.

In ogni caso, l'integrale inizialmente costruito, presto rinominato integrale di Riemann-Stieltjes, non perse di interesse, e fu trovato il modo di estendere l'integrabilità a un buon numero di casi patologici.

Il Capitolo 1 tratta dell'integrale di Riemann-Stieltjes classico, il Capitolo 2, dopo un breve excursus sulla Teoria della Misura astratta, presenta le misure di Lebesgue-Stieltjes sulla retta e il relativo integrale, il Capitolo 3 descrive alcune estensioni e varianti alla definizione classica, le estensioni al caso di dominio illimitato, al caso di dominio complesso, e l'espressione dell'integrale di Lebesgue su uno spazio di probabilità come integrale di Stieltjes su  $\mathbb{R}$ .

Il Capitolo 4 è dedicato agli aspetti vettoriali-topologici della dualità tra spazi di funzioni continue su  $\mathbb{R}$  e spazi di funzioni  $BV_{loc}$ , la cui forma canonica sia l'integrale di Stieltjes su  $\mathbb{R}$ . Un grande stimolo a questi studi scaturì dalla ristrutturazione della Teoria della Probabilità in termini di integrale di

Stieltjes, dovuta ad Andrej Kolmogorov. Notevoli a questo riguardo, sono le generalizzazioni e varianti del teorema di Helly, in termini di convergenza debole-\* su spazi di funzioni a variazione limitata. Alla radice di questi studi vettoriali-topologici sta il teorema di rappresentazione di Frédéric Riesz, che identificò il duale degli spazi di funzioni continue su un intervallo compatto con le classi di equivalenza, viste nel Capitolo 1, delle funzioni a variazioni limitata.

Nel Capitolo 5, si estende la nozione di trasformata di Fourier a trasformata di Fourier-Stieltjes di funzioni a variazione limitata sulla retta, e se ne evidenzia il parallelismo con la trasformata di misure di Radon totalmente finite sulla retta. Si trasformano i teoremi sulla convoluzione di funzioni, adattandoli all'ambiente delle funzioni a variazione limitata, e delle misure. Si introducono le funzioni caratteristiche in termini di trasformate di Fourier di distribuzioni di probabilità e, parallelamente, le funzioni caratteristiche di variabili aleatorie in termini di trasformate di Fourier-Stieltjes delle loro funzioni di ripartizione. Al riguardo, è esposto il teorema di Lévy sulla corrispondenza tra convergenza debole-\* delle funzioni di ripartizione, e la convergenza puntuale delle funzioni caratteristiche. Sono ricordate le più importanti formule di inversione delle funzioni caratteristiche. Si definiscono i momenti di una distribuzione, e la serie di McLaurin, che mostra la generazione delle funzioni caratteristiche attraverso i momenti. Un cenno al problema dei momenti conclude il capitolo.

Nel Capitolo 6, si effettua un passaggio naturale dell'integrale di Stieltjes dall'ambiente scalare a quello vettoriale. È sufficiente prendere, ispirandosi ad Henri Cartan, funzioni a valori operatori tra due fissati spazi come integrande, e funzioni a valori nel primo spazio, come integratrici. Si espongono alcuni risultati tipici. Si estende al caso vettoriale appena descritto anche l'integrale di funzioni definite su un dominio rettangolare nel campo complesso.

Con il Capitolo 7, si entra in un contesto spettrale.

In primo luogo, vengono presentate le forme differenziali come funzioni a valori operatori tra spazi di Banach, si definiscono gli integrali curvilinei come integrali di Stieltjes, e si adattano nel nuovo ambiente le classiche distinzioni tra le forme, in termini di derivazione e di integrazione curvilinea. Si evidenzia l'impatto dell'omotopia di cammini con gli integrali curvilinei.

Si ricordano poi le nozioni di spettro, di insieme risolvente, e di funzione risolvente di un elemento di un'algebra di Banach con unità. Si interpreta la funzione risolvente come forma differenziale, e si ottengono, per integrazione curvilinea, gli idempotenti fondamentali, associati agli insiemi spettrali.

Considerando l'algebra degli operatori in uno spazio di Hilbert, tali idempotenti costituiscono una misura a valori proiezioni sull'algebra degli insiemi spettrali. Nel caso di operatori normali, questa misura può essere prolungata a tutti i boreliani dello spettro, e successivamente a tutti quelli di  $\mathbb{C}$ .

Gli ultimi due capitoli gravitano attorno al concetto di famiglia spettrale.

È questa una sorprendente generalizzazione alle proiezioni in spazi di Hilbert del concetto di funzione monotona.

Nel Capitolo 8, la famiglia spettrale è presentata dal punto di vista della geometria degli spazi di Hilbert.

Si studia l'integrale di Riemann-Stieltjes di una funzione scalare rispetto ad una famiglia spettrale limitata. Si dimostra che, se la funzione scalare è continua, l'integrale esiste come limite di somme di Riemann-Stieltjes, nonostante la funzione integratrice sia in generale a variazione non limitata, a variazione forte non limitata, e solo a variazione forte quadratica limitata.

Diversamente, si può ricorrere alla variazione ultradebole di  $(E_\lambda)$ , ossia alla variazione di  $\langle E_\lambda x, y \rangle$ , per ottenere una funzione integratrice a variazione limitata, riducendo l'integrale di partenza ad una famiglia di integrali di Riemann-Stieltjes di tipo scalare. Il teorema di rappresentazione di F. Riesz sulle forme sesquilineari, permette di definire l'integrale di partenza.

Gli integrali spettrali del tipo  ${}^{RS}\int_a^b \lambda dE_\lambda$ , forniscono tutti gli operatori autoaggiunti limitati. Quelli del tipo  ${}^{RS}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda$  quelli unitari.

Per mezzo di una famiglia spettrale associata ad un operatore autoaggiunto, si genera una misura spettrale su tutto  $\mathbb{C}$ , che coincide, sugli insiemi spettrali, con le proiezioni fondamentali dell'operatore.

Quanto agli operatori normali limitati, essi possono essere rappresentati mediante integrazione di Stieltjes su un dominio complesso (introdotta nel Capitolo 6) rispetto al prodotto di due famiglie spettrali, oppure, in termini di integrale ordinario rispetto ad una misura spettrale.

Si introduce infine la nozione di martingala astratta e di integrale di Stieltjes di una funzione a valori operatori rispetto ad una siffatta martingala.

Nel Capitolo 9, ci immergiamo nell'ambiente dell'Analisi Stocastica. Si comincia col vedere l'attesa condizionata come una certa proiezione nell' $L^1(\Omega)$ , e si colgono altri aspetti geometrici dei processi stocastici e delle martingale.

È notevole come una filtrazione su uno spazio di probabilità, generi una famiglia spettrale in  $L^2(\Omega)$ . Si danno teoremi di necessità e sufficienza per la convergenza di martingale in  $L^p(\Omega)$ .

Si definisce l'integrale stocastico di Paley-Wiener, in cui si integra una funzione scalare rispetto ad un moto Browniano. Si mostra che questo integrale è l'integrale spettrale forte della funzione scalare rispetto ad un'opportuna famiglia spettrale associata al moto Browniano.

Un'estensione dell'integrale di Paley-Wiener è l'integrale di Itô, in cui le integrande sono processi stocastici in  $L^2(\Omega)$ . In generale, l'H-integrale stocastico estende l'integrale di Itô a funzioni integratrici che sono martingale normali.



# Capitolo 1

## L'integrale di Riemann-Stieltjes classico

### 1.1 Insiemi orientati e net

Un insieme  $X$  è *orientato* se su esso è definita una relazione  $\prec$  transitiva e filtrante a destra <sup>1</sup>.

Per *sezione*  $\mathcal{S}_x$  di un insieme orientato  $X$  si intende l'insieme dei maggioranti di  $x$ . Evidentemente  $\mathcal{S}_x \supset \mathcal{S}_y$  se  $x \prec y$ , e, per ogni  $x, y \in X$ , esiste  $z \in X$ , con  $\mathcal{S}_z \subset \mathcal{S}_x \cap \mathcal{S}_y$ . Sotto inclusione, le sezioni di un insieme orientato sono un insieme parzialmente ordinato .

Una *successione generalizzata*, o brevemente *net*, è una funzione definita su un insieme orientato, che è opportuno supporre privo di punti di massimo. Questo equivale al richiedere che l'intersezione di tutte le sezioni sia vuota.

Se  $f : X \rightarrow Y$  è un net, con  $Y$  spazio topologico, allora  $f(x) \rightarrow y \in Y$  se ogni intorno di  $y$  include l'immagine per  $f$  di qualche  $\mathcal{S}_x$ .

Se  $X$  è orientato, ed esiste una successione  $(x_n) \subset X$  tale che per ogni  $x$  esiste un  $x_n$  tale che  $\mathcal{S}_{x_n} \subset \mathcal{S}_x$ , si dice che  $X$  è a base numerabile.

Una  $(c_n) \subset X$  è una *successione cofinale* se per ogni  $x \in X$  è  $c_n \in \mathcal{S}_x$  definitivamente.

L'insieme orientato  $X$  è a base numerabile se e solo se esistono in esso successioni cofinali.

Se l'insieme orientato  $X$  è a base numerabile, un net su  $X$  converge ad  $y$  se e solo se  $\lim f(c_n) = y$  per ogni successione cofinale  $(c_n)$ .

---

<sup>1</sup> cioè (i)  $a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c$ ; (ii)  $\forall a, b \in X \exists c (a \prec c, b \prec c)$ .

Un net a valori in uno spazio metrico  $(Y, d)$  è *di Cauchy* se, quale che sia  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $x \in X$ , con  $d(x', x'') < \varepsilon$ , per ogni  $x', x'' \succ x$ . Se un net in uno spazio metrico converge, è di Cauchy; se lo spazio è completo, è vero anche il viceversa.

Per un net  $f$  a valori reali, si pone

$$\begin{aligned}\liminf f &= \lim_x (\inf_{y \in \mathcal{S}_x} f(y)), \\ \limsup f &= \lim_x (\sup_{y \in \mathcal{S}_x} f(y)),\end{aligned}$$

valori che possono essere  $+\infty$  o  $-\infty$ .

Un siffatto net a valori reali è di Cauchy se e solo se  $\liminf f = \limsup f$ , e in tal caso questi limiti coincidono con il limite di  $f$ .

## 1.2 Orientamenti per finezza di partizione su un intervallo

Una *partizione* o *decomposizione* di un intervallo  $[a, b]$  è una sequenza finita  $[x] = (x_k; k = 0, \dots, n)$ , con  $a = x_0 < x_1 < \dots, < x_n = b$ . Indichiamo con  $\mathcal{D}$  il loro insieme.

Con *finezza della partizione*  $[x]$ , o *norma*<sup>2</sup> di  $[x]$  (in ingl. *mesh*, nel senso di ampiezza di una maglia) intendo la massima delle differenze  $x_k - x_{k-1}$ ;  $k = 1, \dots, n$ . La indico con  $||[x]||$ .

Definisco su  $\mathcal{D}$  un orientamento.

Siano  $[x]$  e  $[y] \in \mathcal{D}$ . Pongo  $[x] \prec [y]$  ( $[y]$  più fine in norma di  $[x]$ ) se  $||[y]|| \leq ||[x]||$ . Tale relazione è riflessiva, transitiva, filtrante e  $\mathcal{D}$  è a base numerabile. Le relative sezioni formano una catena<sup>3</sup>.

Con *partizione marcata* di un intervallo  $[a, b]$  intendo una coppia  $([x], \xi)$ , dove  $[x] \in \mathcal{D}$ , e  $\xi$  (la marcatura) è una funzione che associa ad ogni  $[x_{k-1}, x_k]$  un suo elemento.

Sia  $\mathcal{P}$  la totalità delle divisioni marcate di  $[a, b]$ .

Orientiamo  $\mathcal{P}$  ponendo  $P_1 = ([x^{(1)}, \xi^{(1)}]) \prec P_2 = ([x^{(2)}, \xi^{(2)}])$  se  $[x^{(1)}] \prec [x^{(2)}]$ .

Anche le sezioni di  $\mathcal{P}$  sono ordinabili in catena, e  $\mathcal{P}$  è a base numerabile.

---

<sup>2</sup>Userò in seguito questo termine, per accordarmi al classico articolo tassonomico di Hildebrandt [18].

<sup>3</sup>  $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}_y$ , oppure  $\mathcal{S}_y \subset \mathcal{S}_x$ .

Un secondo orientamento di  $\mathcal{D}$  di cui faremo uso, è quello per *rifratturazione*, cioè  $[y]$  è più fine di  $[x]$  per rifratturazione,  $[x] \prec [y]$ , se  $[x] \subset [y]$ , nel senso che ogni  $x_j$  elemento di  $[x]$  è elemento di  $[y]$ . Chiaramente  $[x] \prec [y]$  implica  $[x] \prec [y]$ .

Così, per l'insieme  $\mathcal{P}$  delle partizioni marcate, si pone  $([x^{(1)}], \xi^{(1)}) \prec ([x^{(2)}], \xi^{(2)})$  se  $[x^{(1)}] \prec [x^{(2)}]$ .

### 1.3 L'integrale di Riemann-Stieltjes classico

**Definizione 1.3.1** *Siano  $f$  e  $g$  funzioni definite sull'intervallo non nullo  $[a, b]$ , e che per il momento supponiamo reali. Ad ogni  $P = ([x], \xi) \in \mathcal{P}$ , associamo la somma, detta di Riemann-Stieltjes,*

$$RS(P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

dove  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  e  $\xi_k = \xi([x_{k-1}, x_k])$ .

L'applicazione  $P \mapsto RS(P)$  è un net di dominio  $\mathcal{P}$ . Se esso converge ad un limite finito, la  $f$  si dirà integrabile su  $[a, b]$  secondo (Riemann)-Stieltjes rispetto alla  $g$ , e indicheremo detto limite con

$${}^{RS} \int_a^b f(x) dg(x)$$

che si chiamerà integrale di Stieltjes su  $[a, b]$  della  $f$ , funzione integranda, rispetto alla  $g$ , funzione determinante, o generatrice, o integratrice.

### 1.4 Casi di riconducibilità all'integrale di Riemann.

Nel caso particolare in cui  $g(x) = x$ , si riottiene la definizione di integrabilità e di integrale secondo Riemann della  $f$  su  $[a, b]$ .<sup>4</sup>

Più generalmente, vale la seguente:

**Proposizione 1.4.1** *l'integrale di Riemann-Stieltjes si riconduce a quello di Riemann nel caso in cui  $g$  sia derivabile, ed  $f$  e  $g'$  R-integrabili su  $[a, b]$  (e in tal caso lo sarà  $fg'$ ).*

---

<sup>4</sup>Una trattazione di integrale di Riemann come limite di net si trova in Cecconi-Stampacchia [7], pp. 149-160, 327-330

**Dimostrazione**<sup>5</sup> Potremo infatti porre  $g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\eta_k)(x_k - x_{k-1})$ , con  $\eta_k$  opportuno valore tra  $x_{k-1}$  e  $x_k$ . Avremo quindi

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f g' - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| \leq \\ & \leq \left| \int_a^b f g' - \sum_{k=1}^n f(\eta_k)g'(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) \right| + \\ & + \left| \sum_{k=1}^n f(\eta_k)g'(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)g'(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \end{aligned}$$

Il primo addendo, per definizione stessa di integrale di Riemann, è maggiorato da  $\frac{\varepsilon}{2}$  se  $\delta > 0$  è abbastanza piccolo. Il secondo, posto  $L = \sup |g'(x)|$ , è maggiorato successivamente da

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |f(\eta_k) - f(\xi_k)|L(x_k - x_{k-1}) < \\ & < L \sum_{k=1}^n (e_k'' - e_k')(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

se la finezza della partizione  $\delta$  è abbastanza piccola, per la condizione di integrabilità di Riemann relativa ad  $f$ .

Dunque

$${}^{RS} \int f dg = {}^R \int f g'$$

perché la  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$  converge simultaneamente a entrambi gli integrali.  $\square$

## 1.5 Alcune proprietà generali

**Bilinearità.** L'integrale di Riemann-Stieltjes è una funzione bilineare in  $f$  e  $g$ , cioè risulta:

$${}^{RS} \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right) d \left( \sum_{j=1}^m b_j g_j(x) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j {}^{RS} \int_a^b f_i(x) dg_j(x)$$

qualora tutti gli integrali a destra esistano.

---

<sup>5</sup>Seguo quella di G.F. Cimmino [8], p. .

**Proprietà d'intervallo.** Se  ${}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x)$  esiste, e  $a \leq c < d \leq b$ , allora  ${}^{RS}\int_c^d f(x) dg(x)$  esiste;

$${}^{RS}\int_a^c f(x) dg(x) + {}^{RS}\int_c^b f(x) dg(x) = {}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x).$$

Inversamente, se  ${}^{RS}\int_a^c f(x) dg(x)$  e  ${}^{RS}\int_c^b f(x) dg(x)$  esistono e  $c$  è un punto di continuità per  $f$  o per  $g$ , allora  ${}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x)$  esiste, ed ha il valore della loro somma.

**Integrazione per parti.** La formula di integrazione per parti si scrive

$${}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x) + {}^{RS}\int_a^b g(x) df(x) = [f(x)g(x)]_a^b. \quad (1.1)$$

Essa è valida senza condizioni su  $f$  e  $g$ , salvo l'esistenza di uno dei due integrali.

**Dimostrazione.** Prendiamo ad arbitrio  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  e  $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = b$ , con  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . La  $([\xi], x)$  è una partizione marcata di  $[a, b]$ .

Supponiamo che l'integrale  ${}^{RS}\int_a^b g(x) df(x)$  esista. Allora il net

$$\sum_{k=0}^n g(x_k)(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k))$$

converge a tale integrale, anche se si prende sempre  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ .

Con questa scelta,  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sono una marcatura arbitraria di  $[x]$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n g(x_k)(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)) + \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) &= \\ = f(\xi_{n+1})g(x_n) - f(\xi_0)g(x_0) &= f(b)g(b) - f(a)g(a). \end{aligned}$$

Facciamo tendere a 0 la norma di  $[x]$ . Allora tende a 0 la norma della  $[\xi]$ , e quindi la  $\sum_{k=0}^n g(x_k)(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k))$  tende a  ${}^{RS}\int_a^b g(x) df(x)$ . Allora la  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$  ha limite  $f(b)g(b) - f(a)g(a) - {}^{RS}\int_a^b g(x) df(x)$ , e per l'arbitrarietà della marcatura  $\xi$  sulla  $[x]$ , tale limite è  ${}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x)$ . Scambiando  $f$  con  $g$ , si completa la dimostrazione.  $\square$

## 1.6 Condizioni di esistenza

**Condizione di Cauchy.** Dal fatto generale che condizione necessaria e sufficiente perché un net a valori in uno spazio metrico completo abbia limite è che esso sia di Cauchy, segue che l'integrale di Riemann-Stieltjes di  $f$

rispetto a  $g$  esiste se e solo se, dato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $P \in \mathcal{P}$  tale che, quali che siano  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ , con  $P_1, P_2 \succ P$  risulta  $|RS(P_1) - RS(P_2)| < \varepsilon$ .

Evidentemente, la condizione non può verificarsi se  $f$  e  $g$  sono discontinue in uno stesso punto. Pertanto una evidente condizione necessaria per l'esistenza di  $RS \int_a^b f(x) dg(x)$  è che  $f$  e  $g$  non abbiano punti di discontinuità comuni.

Nel caso dell'integrazione secondo Riemann, la  $\sum_k (e_k'' - e_k') \Delta x_k < \varepsilon$  prefissato (col consueto significato dei simboli) per una certa decomposizione dell'intervallo è condizione non solo necessaria, ma sufficiente per l'esistenza dell'integrale.

Per l'integrabilità secondo Riemann-Stieltjes, l'analoga  $\sum_k (e_k'' - e_k') |\Delta g_k| < \varepsilon$  (con  $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$ ) è solo necessaria. Abbiamo precisamente:

**Teorema 1.6.1** *Condizione necessaria, ma non in generale sufficiente, affinché  $f$  sia Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a  $g$  su  $[a, b]$ , è che il net  $\sum_{k=1}^n (e_k'' - e_k') |\Delta g_k|$  tenda a 0 lungo l'insieme orientato  $\mathcal{D}$  delle suddivisioni di  $[a, b]$ .*

**Dimostrazione.** Supponiamo che l'integrale  $RS \int_a^b f(x) dg(x)$  esista, vale a dire che il net  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k$  sia di Cauchy. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , e sia  $\delta > 0$  tale che

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k - \sum_{j=1}^m f(\hat{\xi}_j) \hat{\Delta} g_j \right| < \varepsilon,$$

dove le somme sono relative a decomposizioni marcate più fini in norma di  $\delta$ .

In particolare,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k - \sum_{k=1}^n f(\hat{\xi}_k) \Delta g_k \right| < \varepsilon,$$

per ogni scelta delle  $\xi_k$  e delle  $\hat{\xi}_k$ , da cui

$$\begin{aligned} \sup_{\xi_k, \hat{\xi}_k} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k - \sum_{k=1}^n f(\hat{\xi}_k) \Delta g_k \right| &\leq \varepsilon, \quad \text{ossia} \\ \sup_{\xi_k} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k - \inf_{\xi_k} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dalla  $e_k' \leq f(\xi_k) \leq e_k''$  abbiamo:

$$e_k' \Delta g_k \leq f(\xi_k) \Delta g_k \leq e_k'' \Delta g_k \quad \text{per } \Delta g_k \geq 0, \quad \text{ossia}$$

$$e'_k |\Delta g_k| \leq f(\xi_k) \Delta g_k \leq e''_k |\Delta g_k| \quad \text{per } \Delta g_k \geq 0;$$

$$\begin{aligned} e''_k \Delta g_k \leq f(\xi_k) \Delta g_k \leq e'_k \Delta g_k & \quad \text{per } \Delta g_k < 0, \text{ ossia} \\ -e''_k |\Delta g_k| \leq f(\xi_k) \Delta g_k \leq -e'_k |\Delta g_k| & \quad \text{per } \Delta g_k < 0. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sup_{\xi_k} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k &= \sum_{\Delta g_k \geq 0} e''_k |\Delta g_k| + \sum_{\Delta g_k < 0} -e'_k |\Delta g_k| \\ \inf_{\xi_k} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k &= \sum_{\Delta g_k \geq 0} e'_k |\Delta g_k| + \sum_{\Delta g_k < 0} -e''_k |\Delta g_k| \end{aligned}$$

Sottraendo l'inf dal sup, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{\Delta g_k \geq 0} (e''_k - e'_k) |\Delta g_k| + \sum_{\Delta g_k < 0} (-e'_k + e''_k) |\Delta g_k| &= \\ &= \sum_{k=1}^n (e''_k - e'_k) |\Delta g_k|, \end{aligned}$$

quantità minore o uguale di  $\varepsilon$ .  $\square$

**Teorema 1.6.2** *Sia  $g$  una funzione a variazione limitata su  $[a, b]$ , e sia  $v(x)$  la sua variazione sull'intervallo  $[a, x]$ .*

*Condizione sufficiente, affinché una data  $f$  sia Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a  $g$  su  $[a, b]$ , è che il net  $\sum_{k=1}^n (e''_k - e'_k) (v(x_k) - v(x_{k-1}))$  tenda a 0 lungo l'insieme orientato  $\mathcal{D}$  delle suddivisioni di  $[a, b]$ .*

**Dimostrazione.** Mostriamo che, con la suddetta ipotesi, le somme di Riemann-Stieltjes

$$RS(P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

con  $P = \{a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n \leq x_n = b\}$  partizione marcata di  $[a, b]$ , formano un net di Cauchy rispetto alla finezza in norma.

Diamo  $\varepsilon > 0$ , e scegliamo un  $\delta > 0$  tale che  $\sum_{k=1}^n (e''_k - e'_k) (v(x_k) - v(x_{k-1})) < \frac{\varepsilon}{2}$  per  $|P| < \delta$ .

Consideriamo la somma di Riemann-Stieltjes

$$RS(P_\alpha) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_{k,0} \quad (\Delta g_{k,0} = g(x_{k,0}) - g(x_{k-1,0})) \quad (1.2)$$

con  $|P_\alpha| < \delta$ , ed una qualunque  $P_\gamma$  ottenuta dalla  $P_\alpha$  per rifratturazione, la cui somma associata potrà dunque scriversi:

$$RS(P_\gamma) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} f(\xi_{k,j}) \Delta g_{k,j} \quad (\Delta g_{k,j} = g(x_{k,j}) - g(x_{k,j-1})).$$

La (1.2) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sum_{j=1}^{m_k} \Delta g_{k,j}.$$

Risulta pertanto:

$$RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} (f(\xi_k) - f(\xi_{k,j})) \Delta g_{k,j}.$$

Per ogni fissato  $k$ , e per ogni  $j$ , gli  $\xi_k$  e gli  $\xi_{k,j}$  si trovano entrambi nel  $k$ -esimo intervallo della suddivisione  $P_\alpha$ , e quindi  $|f(\xi_k) - f(\xi_{k,j})| < e''_k - e'_k$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ , ed ogni  $j = 1, \dots, m_k$ .

Abbiamo:

$$\begin{aligned} |RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma)| &= \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} (f(\xi_k) - f(\xi_{k,j})) \Delta g_{k,j} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} (e''_k - e'_k) |\Delta g_{k,j}| = \sum_{k=1}^n ((e''_k - e'_k) \sum_{j=1}^{m_k} |\Delta g_{k,j}|) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n (e''_k - e'_k) (v(x_k) - v(x_{k-1})) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Sia ora  $P_\beta$  una seconda suddivisione marcata di finezza in norma minore di  $\delta$ . Esiste una  $P_\gamma$  più fine in rifratturazione sia di  $P_\alpha$  che di  $P_\beta$ , pertanto:

$$\begin{aligned} |RS(P_\alpha) - RS(P_\beta)| &\leq |RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma)| + |RS(P_\beta) - RS(P_\gamma)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Nota.** Il teorema 1.6.1 e il teorema 1.6.2 restano validi, assumendo uguale a 0 un eventuale prodotto  $0 \cdot \infty$ , o  $\infty \cdot 0$ , e uguale a  $\infty \cdot c \cdot \infty$ , o  $\infty \cdot c$ , per  $c > 0$ .

## 1.7 L'integrale di Riemann-Stieltjes rispetto a funzioni a variazione limitata

Ad una funzione  $g$  su  $[a, b]$  resta associata la classe delle funzioni Riemann-Stieltjes integrabili rispetto ad essa.



Per esempio, se  $g(x) = x$ , otteniamo la classe delle funzioni Riemann integrabili in  $[a, b]$ .

Se  $g(x) = H_c(x)$ , cioè  $g(x) = 0$  per  $x < c$ , e  $g(x) = 1$  per  $x \geq c$ , con  $c$  interno ad  $[a, b]$ , otteniamo la classe delle funzioni arbitrarie su  $[a, b]$ , con la sola condizione di essere continue in  $c$ .

Più generalmente, se richiediamo che l'integrale di Riemann-Stieltjes esista rispetto ad ogni  $g$  di una certa classe, resta determinata la classe delle funzioni  $f$  integrabili rispetto a ciascuna di esse.

Viceversa, data una classe di funzioni  $f$ , resta associata una classe di funzioni  $g$ , rispetto alle quali le  $f$  sono integrabili.

Per esempio, consideriamo le funzioni continue su  $[a, b]$ . Risulta:

**Lemma 1.7.1** *L'integrale  $RS \int_a^b f(x) dg(x)$  esiste per ogni funzione  $f$  continua su  $[a, b]$  se e solo se la  $g$  è a variazione limitata.*

Infatti, dal teorema 1.6.2 segue che l'integrale  $RS \int_a^b f(x) dg(x)$  esiste per qualunque  $f$  continua se  $g$  è a variazione limitata. Viceversa, se  $g$  non è a variazione limitata, si può costruire una funzione continua rispetto alla quale l'integrale non esiste.

Vale anche un completamento del lemma enunciato:

**Lemma 1.7.2** *Se l'integrale  $RS \int_a^b f(x) dg(x)$  esiste per ogni funzione  $g$  a variazione limitata su  $[a, b]$ , allora la  $f$  è continua.*

Questo segue immediatamente dal fatto che  $f$  e  $g$  non possono avere punti comuni di discontinuità, così l'integrale non esiste se  $f = g$ , con  $f$  discontinua a variazione limitata.

Si può concludere:

**Teorema 1.7.1** *Ogni funzione continua è integrabile rispetto a ogni funzione a variazione limitata. Non esistono funzioni non continue integrabili rispetto ad ogni funzione a variazione limitata, né esistono funzioni a variazione non limitata rispetto alle quali ogni funzione continua sia integrabile.*

Ci chiediamo ora: quali sono le funzioni integrabili rispetto ad una fissata funzione a variazione limitata  $g$ ? Per rispondere, occorre definire la nozione di insieme  $g$ -nullo in senso stretto.

**Definizione 1.7.1** *Data  $g$  a variazione limitata su  $[a, b]$ ,  $A \subset [a, b]$  è  $g$ -nullo in senso stretto se esso è ricopribile con finiti intervalli  $[\alpha_k, \beta_k]$ , dove  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  sono un estremo di  $[a, b]$  o punti di continuità per la  $g$ , e la somma delle variazioni della  $g$  su tali intervalli è minore di un  $\varepsilon > 0$  prefissato.*

Ovviamente, un insieme  $g$ -nullo non contiene punti di discontinuità di  $g$ .

Sussiste l'analogia della nota condizione per l'integrale di Riemann:

**Teorema 1.7.2 (du Bois-Reymond)** *Una  $f$  limitata è integrabile su  $[a, b]$  rispetto a una funzione a variazione limitata  $g$  se e solo se, dato  $\alpha > 0$ , è  $g$ -nullo in s.s. l'insieme dei punti  $x$  in cui l'oscillazione di  $f$  è maggiore di  $\alpha$ .*

**Definizione 1.7.2** *Data  $g$  a variazione limitata su  $[a, b]$ ,  $A \subset [a, b]$  è  $g$ -nullo in senso esteso se esso è ricopribile con una quantità finita o numerabile di intervalli  $[\alpha_k, \beta_k]$ , dove  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  sono un estremo di  $[a, b]$  o punti di continuità per la  $g$ , e la serie delle variazioni della  $g$  su tali intervalli è minore di un  $\varepsilon > 0$  prefissato.*

Come nel caso dell'integrale di Riemann, la condizione di du Bois-Reymond è equivalente alla seguente.

**Teorema 1.7.3 (Lebesgue-Vitali)** *Una  $f$  limitata è integrabile su  $[a, b]$  rispetto a una funzione a variazione limitata  $g$  se e solo se è  $g$ -nullo in senso esteso l'insieme dei punti in cui la  $f$  è discontinua.*

Possiamo concludere, almeno nel caso delle funzioni integratrici a variazione limitata, con una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di una  $f$  limitata, che completa il teorema 1.6.2 in 1.6.

**Teorema 1.7.4** *Sia  $g$  una funzione a variazione limitata su  $[a, b]$ , e sia  $v(x)$  la sua variazione sull'intervallo  $[a, x]$ .*

*Affinché l'integrale  ${}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x)$  esista, occorre e basta che esista l'integrale  ${}^{RS}\int_a^b f(x) dv(x)$ .*

**Dimostrazione.** In effetti, gli insiemi  $g$ -nulli e  $v$ -nulli sono i medesimi, e il risultato segue dalla condizione di Lebesgue-Vitali.  $\square$

Pertanto, per quanto riguarda le condizioni di esistenza dell'integrale con integratrice a variazione limitata, è sufficiente studiare il caso in cui  $g$  sia monotona.

In effetti, molti articoli sull'argomento trattano solo il caso di integratrice monotona, caso che solo apparentemente è restrittivo!

Una stima molto usata è la seguente:

**Teorema 1.7.5** *Se  $f$  è limitata, ed integrabile rispetto a  $g$  a variazione limitata, allora*

$$\left| {}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| V_a^b g. \quad (1.3)$$

**Dimostrazione.** Qualunque sia la suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$ , si verificano le disequaglianze:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| &\leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| V_a^b g, \end{aligned}$$

e le disequaglianze si mantengono con il passaggio al limite.  $\square$

## 1.8 Teoremi di convergenza. Il secondo teorema di Helly

**Teorema 1.8.1** *Sia  $(f_n)$  una successione convergente uniformemente ad  $f$  su  $[a, b]$ , e  $g$  una funzione a variazione limitata. Se  ${}^{RS}\int_a^b f_n(x) dg(x)$  esiste per ogni fissato  $n$ , allora  ${}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x)$  esiste, ed è uguale a  $\lim_n {}^{RS}\int_a^b f_n(x) dg(x)$ .*

**Teorema 1.8.2 (Secondo teorema di Helly)** *Siano  $f$  una funzione continua su  $[a, b]$  e  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni a variazione totale minore di  $C$  e  $\Phi_n$  converga puntualmente a  $\Phi$  su  $[a, b]$ .*

*Risulta allora:*

$$\Phi \in BV([a, b]), \quad V_a^b \Phi \leq C \quad (1.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) d\Phi_n(t) = \int_a^b f(t) d\Phi \quad (1.5)$$

**Dimostrazione** Sia  $a = x_0 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq x_m = b$  una partizione finita dell'intervallo base.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^m \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(x_k) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(x_{k-1}) \right| \\ &= \sum_{k=1}^m \lim_{n \rightarrow +\infty} |\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})| \leq C \end{aligned}$$

e ciò vale per ogni partizione finita dell'intervallo base, quindi la (1.4) è dimostrata.

Osserviamo che una funzione  $f$  costante a tratti su  $[a, b]$ , cioè  $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$ ,  $I_k \perp I_j$  per  $i \neq j$ ,  $\cup I_k = [a, b]$ , che non condivide punti di discontinuità con  $\Phi$  è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto a  $\Phi$ .

Approssimiamo  $f$  con  $f_\varepsilon$  costante a tratti, integrabile rispetto ad ogni  $\Phi_n$  e a  $\Phi$ , e tale che  $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3C}$ . Questo è possibile perché l'insieme

dei salti delle  $\Phi_n$  e di  $\Phi$  sono un insieme contabile. In virtù del teorema di Heine-Cantor, esiste un  $\delta > 0$  tale che  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  per  $|x' - x''| < \delta$ . Suddividiamo  $[a, b]$  con punti  $x_k$  distanti tra loro per meno di  $\delta$ , che non siano di discontinuità per qualche  $\Phi$ . Gli intervalli individuati da questi punti non abbiano punti comuni. Nell'intervallo di partizione  $I_k$  scelgo  $\xi_k$  interno ad  $I_k$ , e pongo  $f_\varepsilon(x) = f(\xi_k)$ . Detto questo, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi_n(x) = \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi(x)$$

Integrando per parti e indicando con  $s_k$  gli  $N_\varepsilon$  salti della  $f_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi_n(x) &= [f_\varepsilon(x)\Phi_n(x)]_a^b - \int_a^b \Phi_n(x) df_\varepsilon(x) = \\ f_\varepsilon(b)\Phi_n(b) - f_\varepsilon(a)\Phi_n(a) - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \Phi_n(s_k)(f_\varepsilon(s_k + 0) - f_\varepsilon(s_k - 0)) \\ &\longrightarrow_n [f_\varepsilon(b)\Phi(b) - f_\varepsilon(a)\Phi(a)] - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \Phi(s_k)(f_\varepsilon(s_k + 0) - \\ & f_\varepsilon(s_k - 0)) = [f_\varepsilon(x)\Phi(x)]_a^b - \int_a^b \Phi(x) df_\varepsilon(x) = \\ & \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi(x). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) d\Phi(x) - \int_a^b f(x) d\Phi_n(x) \right| \leq \left| \int_a^b f(x) d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi(x) \right| + \\ & \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi_n(x) \right| + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi_n(x) - \int_a^b f(x) d\Phi_n(x) \right| \\ & \leq \int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| d\Phi(x) + \left| \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x) d\Phi_n(x) \right| + \\ & \int_a^b |f_\varepsilon(x) - f(x)| d\Phi_n(x) < \frac{\varepsilon}{3C} V_a^b \Phi + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C} V_a^b \Phi_n \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Un'importante miglioramento di questo risultato, ai fini della Teoria della Probabilità, è il seguente teorema, dovuto a H.E. Bray<sup>6</sup>

**Teorema 1.8.3 (Teorema di Helly-Bray)** *Il secondo teorema di Helly vale anche nella condizione più debole che  $(g_n(x))$  converga a  $g(x)$  su un insieme di punti denso in  $[a, b]$ , ed includente i punti  $a$  e  $b$ .*

---

<sup>6</sup>H. E. Bray [5].

## 1.9 Lifting delle funzioni generatrici

Nell'integrale

$${}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x) \quad (1.6)$$

sia  $f$  continua e  $g$  a variazione limitata. Viene naturale di chiedersi, avendo fissato  $g$ , per quali altre funzioni  $g_1$  a variazione limitata risulta  ${}^{RS}\int_a^b f(x) dg_1(x) = {}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x)$ , qualunque sia la funzione continua  $f$ .

Per la linearità dell'integrale nella seconda variabile, la domanda equivale alla seguente:

quali sono le funzioni a variazione limitata  $\phi(x)$  tali che

$${}^{RS}\int_a^b f(x) d\phi(x) \quad (1.7)$$

si annulla per tutte le  $f$  continue?

Eliminiamo subito il problema agli estremi. Sia  $f$  la costante 1, allora l'integrale in (1.7) vale  $\phi(b) - \phi(a)$  e quindi  $\phi$  ha in  $b$  il valore che assume in  $a$ .

Quanto ai punti interni di  $[a, b]$ , sia  $c$  uno di questi, in cui  $\phi$  sia continua. Consideriamo la funzione  $f_n = 1$  in  $[a, c]$ , nulla in  $[c + \frac{1}{n}, b]$ , e lineare tra  $c$  e  $c + \frac{1}{n}$ . L'integrale (1.7) si scinde allora negli integrali sui segmenti  $[a, c]$ ,  $[c, c + \frac{1}{n}]$  e  $[c + \frac{1}{n}, b]$ . Il primo integrale vale  $\phi(c) - \phi(a)$ , il terzo è nullo, il secondo è maggiorato in modulo dalla variazione totale di  $\phi(x)$  sul secondo segmento, variazione che tende a zero con  $\frac{1}{n}$  perché  $\phi$  è continua in  $c$ .

Di conseguenza  $0 = {}^{RS}\int_a^b f_n(x) d\phi(x) \rightarrow \phi(c) - \phi(a)$ , ossia  $\phi(c) = \phi(a)$ .

Riassumendo:

**Lemma 1.9.1** *Se  ${}^{RS}\int_a^b f(x) d\phi(x) = 0$  per ogni  $f$  continua, allora la  $\phi$  è a variazione limitata, costante su  $[a, b]$ , eccetto su un insieme al più numerabile di punti interni ad  $[a, b]$ .*

Tale condizione è anche sufficiente, perché, essendo  $\phi$  a variazione limitata, essa è discontinua in un insieme finito o numerabile di punti, e poiché l'integrale in (1.7) esiste per ipotesi, i punti di decomposizione  $x_k$  che servono a definirlo possono essere scelti tra i punti di continuità, e su essi la  $\phi$  assume lo stesso valore.

In definitiva, possiamo enunciare il seguente

**Teorema 1.9.1**  $L' \int_a^b f(x)dg_1(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$  per ogni  $f$  continua se e solo se  $g_1$  differisce da  $g$  per una funzione  $\phi$  a variazione limitata, che è costante su  $[a, b]$  eccetto su un insieme finito o numerabile di punti interni ad  $[a, b]$ .

Pertanto, l'integrale (1.6) non si altera sostituendo a  $g(x)$ , con  $x \in ]a, b[$ , il valore  $g(x + 0)$  oppure  $g(x - 0)$ , o la media tra i due valori. In generale, sostituendo nei punti interni ad  $[a, b]$  a  $g(x)$  un valore tra  $g(x - 0)$  e  $g(x + 0)$  si rende minima la variazione totale di  $g$  senza alterare l'integrale (1.6). Possiamo quindi considerare, ai fini dell'integrazione di funzioni continue, solo le funzioni  $g$  a variazione limitata tali che  $g(x) = g(x + 0)$ , per ogni  $x \in ]a, b[$ . Tali funzioni formano uno spazio vettoriale, che chiamiamo *a variazione limitata liftato a destra*, e lo indichiamo con  $BV_0[a, b]$ .<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>Volendo, si può considerare lo spazio delle funzioni liftate a sinistra ( $g(x) = g(x - 0)$  per  $x \in ]a, b[$ ).

## Capitolo 2

# L'integrale di Lebesgue-Stieltjes

### 2.1 Prolungamento astratto di Lebesgue

Il prolungamento di una misura definita su un semianello è il fondamento della teoria costruttiva della misura di Lebesgue, ed è opportuno darne un cenno.

Sia  $\mathcal{H}$  un semianello<sup>1</sup> su  $X$ . Diciamo *cellule* i suoi elementi. Sia  $X$  stesso la loro unione. Sia  $m$  una misura su  $\mathcal{H}$ , ossia una funzione reale positiva completamente additiva definita su  $\mathcal{H}$ . Sia  $P$  una *pluricellula*, ossia una unione contabile di cellule. Allora  $P$  può essere ottenuta come unione contabile  $\cup A_j$  di elementi disgiunti di  $\mathcal{H}$ . Si ponga  $\mu P = \sum mA_j$ , che è reale positiva, o eventualmente  $+\infty$ , e univocamente definita, grazie alla  $\sigma$ -additività della misura  $m$ . Sia  $\mathcal{M}$  la classe dei sottoinsiemi di  $X$  tali che, se  $E$  è uno di essi, allora dato  $\varepsilon > 0$  esistono due pluricellule  $P, Q$ , tali che  $\mu Q < \varepsilon$ , e  $P \setminus Q \subset E \subset P$ . Per tali  $E$  si ponga  $\mu E = \inf \{ \mu P, P \text{ pluricellula}, P \supset E \}$ .

La classe  $\mathcal{M}$  è un  $\sigma$ -anello. Di più, se  $\mathcal{M}$  ha unità  $X$  (questo accade se e solo se  $X$  stesso è una pluricellula), allora  $\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra, e  $\mu$  è detta  $\sigma$ -finita. Tale misura è *completa* (ogni insieme neglegibile è misurabile). Gli elementi di  $\mathcal{M}$  si dicono *lebesguiani* di  $\mathcal{H}$ . Il prolungamento della misura  $m$  definita sul semianello  $\mathcal{H}$  deve gran parte della sua importanza all'essere *univalente* e *massimale*, nel senso che segue.

I) Se  $\mathcal{S}$  è una  $\sigma$ -algebra in  $X$  che contiene  $\mathcal{M}$ , e  $\nu$  è una misura  $\sigma$ -additiva

---

<sup>1</sup>Una famiglia non vuota  $\mathcal{H}$  di sottoinsiemi di  $X$  è un semianello su  $X$  se è chiusa rispetto all'intersezione e, per ogni  $A, B \in \mathcal{H}$ ,  $A \setminus B$  è unione di finiti elementi mutuamente disgiunti di  $\mathcal{H}$

di dominio  $\mathcal{S}$  che si riduce ad  $m$  su  $\mathcal{H}$ , allora  $\nu$  ristretta ad  $\mathcal{M}$  è uguale a  $\mu$ .

II) Se  $\mathcal{S} \supset \mathcal{M}$  strettamente, esistono due misure  $\sigma$ -additive su  $\mathcal{S}$ ,  $\nu_1 \neq \nu_2$ , che si riducono a  $\mu$  su  $\mathcal{M}$ .

Se  $\mathcal{A}$  è una famiglia di insiemi, con  $\sigma(\mathcal{A})$  indichiamo la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene  $\mathcal{A}$ . Sia  $\mathcal{M}$  la classe dei lebesguiani ottenuti col procedimento di sopra dal semianello  $\mathcal{H}$ . Poichè  $\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra, essa contiene  $\sigma(\mathcal{H})$ . Così, se  $X$  è topologico, e  $\mathcal{H}$  include una base per la topologia di  $X$ , allora  $\mathcal{M}$  include i boreliani di  $X$ .

**Esempio.** Se  $X = \mathbb{R}^n$ , possiamo considerare il semianello  $\mathcal{H}$  degli intervalli limitati di  $\mathbb{R}^n$  ( i cartesiani n-esimi degli intervalli limitati chiusi, aperti, semiaperti di  $\mathbb{R}$ ). Allora ogni boreliano è un lebesguiano (indipendentemente dalla misura che gli è stata attribuita con il prolungamento).

## 2.2 Relativa definizione di integrale

Se  $\mathcal{F}$  è una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$ , con unità  $X$ , e  $\mu$  è una misura di dominio  $\mathcal{F}$ , la tripla  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  è detta *spazio misurale*<sup>2</sup>.

**Definizione 2.2.1** Una  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  è semplice integrabile su  $X$  se è combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi di misura finita. L'integrale  $\int_X \phi d\mu$  di una funzione semplice integrabile  $\phi = c_1\chi_{E_1} + \dots + c_n\chi_{E_n}$  è per definizione  $c_1\mu(E_1) + \dots + c_n\mu(E_n)$ .

Una proprietà è *vera quasi ovunque (q.o.)* se l'insieme dei punti, su cui è falsa, è *neglegibile*, cioè incluso in un insieme di misura arbitrariamente piccola.

**Definizione 2.2.2** Una  $f$  è integrabile su  $X$  se esiste una successione  $(\phi_n)$  di funzioni semplici integrabili tali che  $\phi_n \xrightarrow{q.o.} f$  e, dato  $\varepsilon > 0$  esiste un  $N$  tale che  $\int_X |\phi_n - \phi_m| d\mu < \varepsilon$  per  $m, n > N$ . In tal caso  $\int_X \phi_n d\mu$  converge in  $n$ : il limite è detto integrale della  $f$ , ed è indicato con  $\int_X f d\mu$ .

---

<sup>2</sup>Il paragrafo 2.1 è una sintesi della trattazione costruttiva di Kolmogorov [20], pp. 260-277, invece la definizione di integrale è in accordo con quella di N. Dunford e J.T. Schwartz [12], p.112.



## 2.3 Misure di Lebesgue-Stieltjes su $\mathbb{R}$

Siano  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ , e  $g$  una funzione monotona non decrescente su  $I$ . Consideriamo il semianello  $\mathcal{H}$  dei sottointervalli limitati di  $I$ , e poniamo

$$\begin{aligned} m([a, b]) &= g(b+0) - g(a-0) \\ m((a, b]) &= g(b+0) - g(a+0) \\ m([a, b)) &= g(b-0) - g(a-0) \\ m((a, b)) &= g(b-0) - g(a+0) \end{aligned}$$

Si può mostrare che la  $m$  così definita è reale, non negativa e  $\sigma$ -additiva su  $\mathcal{H}$ , pertanto esiste il prolungamento di Lebesgue astratto della  $m$ , che viene detto *misura di Lebesgue-Stieltjes* su  $I$  generata da  $g$ . In questo caso, i lebesguiani vengono più precisamente chiamati insiemi misurabili secondo Lebesgue-Stieltjes.

Come detto sopra, i boreliani di  $\mathbb{R}$  sono misurabili in ciascuna di tali misure.

Viceversa, gli insiemi misurabili secondo Lebesgue-Stieltjes potrebbero essere molto più numerosi non solo dei boreliani, ma degli insiemi misurabili nella misura classica di Lebesgue (quella che si ottiene usando come funzione generatrice  $g(x) = x$ ). Basta considerare infatti la funzione di Heaviside (la funzione caratteristica di  $\mathbb{R}^+$ ). Gli insiemi misurabili sono tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ . La misura di Lebesgue-Stieltjes su uno di essi vale 1 se l'insieme contiene lo 0, e 0 altrimenti (misura di Dirac).

## 2.4 Prolungamento della misura immagine di una funzione misurabile.

Sia  $(S, \Sigma, \mu)$  uno spazio misurale, e sia  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione misurabile. Denoto con  $\mathcal{B}$  l'insieme dei boreliani di  $\mathbb{R}$ . Sullo spazio misurabile  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  definisco la seguente misura:

$$\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

In questo contesto, la  $\nu$  è detta *misura immagine di  $\mu$  mediante  $\Phi$* , e denotata comunemente con  $\mu\Phi^{-1}$ , o con  $\mu^\Phi$ .

Il prolungamento di Lebesgue astratto della  $\mu^\Phi$ , che denoteremo con  $\hat{\mu}^\Phi$ , è una misura di Lebesgue-Stieltjes.

Se  $\mu(S) < \infty$ , allora la  $\hat{\mu}^\Phi$  può essere generata dalla funzione  $F_\Phi$ , definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  dalla

$$F_\Phi(x) = \mu^\Phi(]-\infty, x]).$$

La  $F_{\Phi}$  è monotona non decrescente su  $\mathbb{R}$ , continua da destra, tendente a 0 per  $x \rightarrow -\infty$  ed a  $\mu(S)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

**Variabili aleatorie e funzioni di ripartizione.** Una *variabile aleatoria reale* sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è una funzione misurabile  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ad essa è associata la funzione, detta *di distribuzione* o *di ripartizione*, indicata con  $F$ , o con  $F_X$  se si vuole mettere in evidenza la sua costruzione a partire da  $X$ , definita dalla

$$F_X(x) = P^X([-\infty, x]),$$

dove  $P^X$  è la misura immagine di  $P$  mediante  $X$ . La  $F_X$  è monotona non decrescente su  $\mathbb{R}$ , continua da destra, tendente a 0 per  $x \rightarrow -\infty$  e ad 1 per  $x \rightarrow +\infty$ , e la misura di Lebesgue-Stieltjes su  $\mathbb{R}$  generata da essa è il prolungamento di Lebesgue astratto  $\hat{P}^X$  della misura immagine  $P^X$ .

## 2.5 L'integrale di Lebesgue-Stieltjes

**Definizione 2.5.1** Sia  $g$  una funzione monotona non decrescente sull'intervallo  $I$ , limitato o illimitato, di  $\mathbb{R}$ . L'integrale di Lebesgue-Stieltjes di una  $f$  rispetto a  $g$ , e lo indichiamo con  ${}^{LS}\int_I f dg$  o con  ${}^L\int_I f d\mu$ , è l'integrale definito in 2.2, dove  $\mu$  è la misura di Lebesgue-Stieltjes generata da  $g$ .

**Definizione 2.5.2** Una misura con segno su  $(X, \mathcal{F})$  è la differenza tra due misure di dominio  $\mathcal{F}$ , di cui al più una può assumere il valore  $+\infty$ .

**Definizione 2.5.3** L'integrale di Lebesgue-Stieltjes è in generale un integrale rispetto a una misura con segno, data dalla differenza di due misure di Lebesgue-Stieltjes.

Più precisamente, se  $g$  è una funzione localmente a variazione limitata su  $I$ , essa è differenza di due funzioni monotone crescenti, diciamole  $h_1$  e  $h_2$ . Se una di esse è limitata (e questo accade sicuramente nel caso in cui  $I$  è un intervallo compatto), poniamo  ${}^{LS}\int_I f dg = {}^{LS}\int_I f dh_1 - {}^{LS}\int_I f dh_2$ .

Generalmente si pone  $h_1 = v^+$ ,  $h_2 = v^-$ , oppure  $h_1 = v$ ,  $h_2 = 2v^-$ , dove  $v, v^+, v^-$  sono la variazione totale, la variazione positiva e la variazione negativa della  $g$  (a meno di costanti additive)<sup>3</sup>.

**Teorema 2.5.1** Se  $f$  è Riemann-Stieltjes integrabile su  $[a, b]$  rispetto a una funzione a variazione limitata, allora è Lebesgue-Stieltjes integrabile, e gli integrali hanno lo stesso valore.

---

<sup>3</sup>v. Kolmogorov [20], p. 354

Si noti che, se la funzione integratrice non è a variazione limitata, il RS-integrale potrebbe esistere, ma non ha senso parlare di LS-integrale.

## Capitolo 3

# Estensioni e varianti della definizione dell'integrale di Riemann-Stieltjes

### 3.1 L'integrale di Pollard-Moore-Stieltjes

Sappiamo che se  $f$  è Riemann-Stieltjes integrabile su  $[a, b]$  rispetto a  $g$ , allora  $f$  e  $g$  non hanno discontinuità comuni in  $[a, b]$ , e risulta

$${}^{RS}\int_a^b f dg = {}^{RS}\int_a^c f dg + {}^{RS}\int_c^b f dg \quad (3.1)$$

per ogni  $c \in (a, b)$ .

Supponiamo ora che in  $c$  la  $f$  e la  $g$  abbiano una discontinuità comune, ma che  $f$  sia Riemann-Stieltjes integrale in  $[a, c]$  e in  $[c, b]$  rispetto a  $g$ . Se così è,  $f$  e  $g$  sono necessariamente discontinue in  $c$  da bande opposte. Possiamo allora definire  $\int_a^b f dg$  attraverso il secondo membro della 3.1.

Il procedimento è applicabile al caso di finite discontinuità comuni  $c_1, \dots, c_{n-1}$  da bande opposte. Posto  $c_0 = a$ ,  $c_n = b$ , se  ${}^{RS}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f dg$  esiste per ogni  $k = 1, \dots, n$ , definiamo

$${}^{PMS}\int_a^b f dg = \sum_{k=1}^n {}^{RS}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f dg. \quad (3.2)$$

Con *PMS* si abbreviano i nomi di Pollard, Moore e Stieltjes. Questi autori hanno considerato anche il caso in cui le comuni discontinuità possono essere numerabili, eventualmente dense in  $[a, b]$ . In generale, il membro destro della (3.2) non resta definito, ma può succedere che, dato  $\varepsilon > 0$ , esistano  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$  tali che

$$\sum_{k=1}^n {}^{RS''}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f dg - \sum_{k=1}^n {}^{RS'}\int_{c_{k-1}}^{c_k} f dg < \varepsilon. \quad (3.3)$$

Con  $RS' \int_{\alpha}^{\beta} f dg$  e  $RS'' \int_{\alpha}^{\beta} f dg$  intendo integrali inferiore e superiore nel senso di Darboux, ossia

$$\begin{aligned} RS' \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dg(x) &= \liminf_{P \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = \\ &= \lim_{D \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^n \inf_{x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k} (f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))), \\ RS'' \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dg(x) &= \limsup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = \\ &= \lim_{D \in \mathcal{D}} \sum_{k=1}^n \sup_{x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k} (f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))). \end{aligned}$$

In tal caso, esiste una successione  $([c^{(m)}])$  di partizioni di  $[a, b]$ , ciascuna inclusa nella successiva, tale che

$$\lim_m \sum_{k=1}^{n_m} RS'' \int_{c_{k-1}^{(m)}}^{c_k^{(m)}} f dg = \lim_m \sum_{k=1}^{n_m} RS' \int_{c_{k-1}^{(m)}}^{c_k^{(m)}} f dg \quad (3.4)$$

che viene detto *integrale di Pollard-Moore-Stieltjes*, o  $\sigma$ -*integrale* di  $f$  rispetto a  $g$ .

Vi è una definizione diretta dell'integrale di Pollard-Moore-Stieltjes in termini di net. Si basa sul fatto seguente<sup>1</sup>.

Orientiamo l'insieme  $\mathcal{P}$  delle partizioni marcate di  $[a, b]$  per rifratturazioni.

**Teorema 3.1.1** *Siano  $f, g$  funzioni reali su  $[a, b]$ . La  $f$  è Pollard-Moore-Stieltjes integrabile rispetto a  $g$  se e solo se il net*

$$RS(P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_{[x_{k-1}, x_k]})(g(x_k) - g(x_{k-1})), \quad P = ([x], \xi) \in \mathcal{P}$$

converge lungo l'insieme orientato  $(\mathcal{P}, \prec\prec)$ . In tal caso risulta:

$$PMS \int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{([x], \xi) \in (\mathcal{P}, \prec\prec)} f(\xi_{[x_{k-1}, x_k]})(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

In generale, se  $X$  è orientato da due orientamenti  $\prec, <$ , allora  $<$  è più fine di  $\prec$  se  $x < y \Rightarrow x \prec y$ . Segue che se  $<$  è più fine di  $\prec$ , ed  $f(x) \xrightarrow{\prec} y$ ,

<sup>1</sup>Per questo ed altri tipi di integrale, si veda la rassegna di H.T. Hildebrandt [18].

allora  $f(x) \xrightarrow{<} y$ , ma non viceversa in generale.

Essendo l'orientamento per rifratturazioni più fine dell'orientamento in norma, allora se il net  $RS(P)$  converge in norma, converge per rifratturazioni, e i limiti sono uguali.

In altre parole,

**Teorema 3.1.2** *Se l'integrale di Riemann-Stieltjes di  $f$  rispetto a  $g$  esiste, l'integrale di Pollard-Moore-Stieltjes esiste ed è uguale.*

Viceversa:

**Teorema 3.1.3** *Se l'integrale di Pollard-Moore-Stieltjes di  $f$  rispetto a  $g$  esiste ed  $f$  e  $g$  non condividono punti di discontinuità, l'integrale di Riemann-Stieltjes esiste ed è uguale.*

## 3.2 Altri integrali di Riemann-Stieltjes modificati.

**L'integrale di Cauchy-Stieltjes.** Consideriamo l'addendo  $f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$  della somma di Riemann-Stieltjes. Limitando  $\xi_k$  ad essere un punto estremo dell'intervallo  $[x_{k-1}, x_k]$ , si perviene ad una definizione di integrale del tipo di Cauchy, che, nel caso in cui  $g(x) = x$ , anticipò quella di Riemann. Nel caso appunto  $g(x) = x$ , D.C. Gillespie (1915) mostrò che la scelta di soli punti estremi per la  $\xi$  non amplia la classe delle funzioni integrabili secondo Riemann. Questo in generale non è vero per l'integrale di Riemann-Stieltjes, tantoché, più recentemente, la scelta di  $\xi$  «alla Cauchy» ha consentito a K. Itô di definire il suo integrale di Stieltjes rispetto a funzioni a variazione non limitata.

**Integrale di Dushnik.** La necessità per le funzioni  $f$  e  $g$  di non avere comuni di discontinuità dallo stesso lato ai fini dell'integrazione di Pollard-Moore-Stieltjes dipende dalla possibilità di poter piazzare la marcatura  $\xi$  agli estremi degli intervalli. Conseguentemente, B. Dushnik (1931) ha considerato l'insieme  $\mathcal{P}_0$  delle partizioni marcate  $([x], \xi)$ , dove la scelta dei punti  $\xi_k$  è ristretta ai punti interni di ciascun sottointervallo, ottenendo la seguente definizione di integrale modificato.

Se il net

$$RS_{mod}(P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_{[x_{k-1}, x_k]})(g(x_k) - g(x_{k-1})), \quad P = ([x], \xi) \in \mathcal{P}_0$$

converge lungo l'insieme orientato  $(\mathcal{P}_0, \prec\prec)$ , allora il limite è detto integrale di Pollard-Moore-Stieltjes modificato, o  $\sigma$ -integrale modificato, di  $f$  rispetto a  $g$ , e si denota con  ${}^{mod} \sigma \int_a^b f(x) dg(x)$ .

Abbiamo:

**Teorema 3.2.1** *L'integrale  $\int_a^b f(x) dg(x)$  esiste se  $f$  ha sole discontinuità di prima specie, e  $g$  è a variazione limitata.*

*Così  $\int_a^b f dg$  fornisce un valore per ogni funzione a variazione limitata rispetto ad ogni altra funzione a variazione limitata.*

Tuttavia, questo integrale può essere definito irregolare, perché in generale non fornisce valori in accordo all'integrale di Lebesgue-Stieltjes, quando entrambi gli integrali esistono. Ad esempio, se  $f = \chi_{\{0\}}$ , e  $g = H_0$ , allora  $\int_{-1}^1 f dg = 1$ , mentre  $\int_{-1}^1 f dg = 0$ .

In ogni caso, se  $f$  e  $g$  non hanno discontinuità comuni, questo integrale si riduce a quello ordinario.

**L'integrale in media.** Un altro metodo di modifica, in un certo senso opposto al precedente, è quello, proposto da H.L. Smith, di utilizzare solamente i valori di  $f$  agli estremi dell'intervallo, facendone la media, ossia considerare le somme

$$SM(P) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k))(g(x_k) - g(x_{k-1})), \quad P = ([x], \xi) \in \mathcal{P}.$$

Si possono considerare i limiti di questo net in norma e per rifratturazione, e vengono chiamati *integrali in media di Stieltjes* (e si denotano con  $\int_a^b f dg$ ). Se l'integrale ordinario esiste, esiste il corrispondente integrale in media, e fornisce il medesimo valore. Ma non inversamente: basta osservare che  $\int_a^b g(x) dg(x)$  esiste per ogni funzione  $g$ , e vale  $\frac{1}{2}(g^2(b) - g^2(a))$ .

È interessante il fatto che la formula di integrazione per parti (1.1) resta valida.

Inoltre, per quanto concerne l'esistenza,

**Teorema 3.2.2** *Se  $f$  ha sole discontinuità di prima specie, e  $g$  è a variazione limitata, allora  $\int_a^b f dg$  per rifratturazioni esiste.*

Anche l'integrale  $\int_a^b f dg$  per rifratturazioni offre un integrale di Stieltjes dove ogni funzione a variazione limitata è integrabile rispetto ad ogni altra funzione a variazione limitata. In questo caso, il suo valore coincide con l'integrale di Lebesgue-Stieltjes nell'ipotesi, piuttosto naturale, che in ogni punto  $f(x)$  valga  $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$ .

L' SM-integrale è stato applicato a problemi di Matematica Attuariale da molti Autori, tra cui de Finetti. Più recentemente (1960), R. L. Stratonovich ha inventato un integrale stocastico alternativo al calcolo di Itô, formalmente identico all' SM-integrale.

**L'integrale di Young-Stieltjes.** Se ora  $g$  ha sole discontinuità di prima specie, possiamo considerare il net, definito su  $\mathcal{P}_0$  (vedi sopra, integrale di

Dushnik).

$$\begin{aligned}
 YRS(P) &= \\
 &= \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(g(x_{k-1} + 0) - g(x_{k-1})) + f(\xi_k)(g(x_k - 0) - g(x_{k-1} + 0)) + \\
 &\quad + f(x_k)(g(x_k) - g(x_k - 0))\} \quad P = ([x], \xi) \in \mathcal{P}_0
 \end{aligned}$$

e studiarne la convergenza in norma e per rifratturazioni. Se esiste il limite del net nell'uno o nell'altro senso, questi saranno indicati rispettivamente con  ${}^{YS}\int f dg$  e con  ${}^{YS}\sigma\int f dg$ .

La convergenza in norma di  $YRS(P)$  non migliora le condizioni di integrabilità nel senso classico di Riemann-Stieltjes. Infatti, il net  $YRS(P)$  converge in norma lungo l'insieme  $\mathcal{P}_0$  se e solo se il net  $RS(P)$  converge in norma lungo  $\mathcal{P}$ .

D'altra parte, l'integrale per rifratturazioni può esistere quando  $f$  e  $g$  hanno punti comuni di discontinuità, anche se questi sono dalla stessa parte. Invero, può essere mostrato che

**Teorema 3.2.3** *Se la funzione  $g$  è a variazione limitata, ed  $f$  è integrabile rispetto a  $g$ , allora*

$${}^{YS}\sigma\int_a^b f(x) dg(x) = {}^{RS}\int_a^b f(x) dg_c + \sum_{x \in [a, b]} f(x)(g(x+0) - g(x-0))$$

dove  $g(x) = g_c(x) + g_s(x)$ , con  $g_c$  e  $g_s$  componenti continue e di salto di  $g$ .

In particolare, l'integrale  ${}^{YS}\sigma\int_a^b f dg$  è un'estensione propria dell'integrale di Pollard-Moore-Stieltjes, nel senso che, qualora  ${}^{YS}\sigma\int_a^b f dg$  e  ${}^{LS}\int_a^b f dg$  esistano, i loro valori coincidono.

### 3.3 L'integrale di Riemann-Stieltjes su tutto $\mathbb{R}$ .

Vi sono vari modi non equivalenti di estendere la nozione di integrale di Stieltjes a funzioni definite sull'intera retta reale. I più comuni sono i seguenti. L'integrale di Cauchy in valor principale:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} {}^{RS}\int_{-b}^b f(x) dg(x).$$

L'integrale di Stieltjes improprio:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} {}^{RS}\int_a^b f(x) dg(x).$$



Infine, la  $f$  è assolutamente integrabile rispetto a  $g$  su  $\mathbb{R}$ , in simboli

$${}^{ARS} \int_{\mathbb{R}} f(x) dg(x), \quad (3.5)$$

se i net

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\xi_n) (g(x_n) - g(x_{n-1})) \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(\xi_n)| |g(x_n) - g(x_{n-1})|$$

convergono lungo l'insieme delle suddivisioni marcate ad infiniti punti  $([x], \xi)$ , orientato dalla finezza  $|[x]| = \sup_n (x_n - x_{n-1})$ , e dove, per ogni fissato  $[x]$ ,  $x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$  per ogni  $n$ . Ogni suddivisione marcata è qui formata da una successione strettamente crescente, inferiormente e superiormente illimitata, e  $\xi$  è una funzione che associa ad ogni  $[x_{n-1}, x_n]$  un suo punto.

Naturalmente, l'integrale 3.5 è il limite del primo dei due net.

Se  $g$  è localmente a variazione limitata, cioè esiste una  $v$  su  $\mathbb{R}$  tale che  $v(b) - v(a) = V_a^b g$ , allora  ${}^{ARS} \int_{\mathbb{R}} f(x) dg(x)$  esiste, ed è l'integrale di Stieltjes improprio, se e solo se, dato  $\varepsilon > 0$ , per  $a$  e  $b$  opportuni risulta

$${}^{RS} \int_{a'}^{a''} |f(x)| dv(x) < \varepsilon, \quad {}^{RS} \int_{b'}^{b''} |f(x)| dv(x) < \varepsilon,$$

per ogni  $a' < a'' \leq a$ ,  $b'' > b' \geq b$ .

### 3.4 Espressione dell'integrale di Lebesgue su uno spazio di probabilità come integrale di Stieltjes su tutto $\mathbb{R}$ .

Su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si usano due tipi fondamentali di integrali di Lebesgue:

$$\int_{\Omega} X dP, \quad \int_{\Omega} (f \circ X) dP.$$

Chiaramente, il primo assume valore reale quando  $X$  è  $P$ -sommabile, il secondo è reale o complesso se  $f$  è boreliana limitata da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbf{K}$ , ed  $X$   $P$ -misurabile. I due integrali si indicano in Probabilità con  $E[X]$  e con  $E[f(X)]$ , e coincidono (essendo  $P(\Omega) = 1$ ), con il valor medio integrale su  $\Omega$  di  $X$  e di  $f(X)$ .

Le definizioni di integrale di Lebesgue sul tipo di quella data in 2.2 sono dette alla Dunford. Esse hanno il vantaggio di essere facilmente adattabili alle funzioni a valori in uno spazio di Banach, con la semplice sostituzione dei valori assoluti con la norma. Nel caso di funzioni a valori reali, le definizioni equivalenti sono moltissime, e per lo più sono estensioni di definizioni

dell'integrale su domini di misura finita, quale per esempio la seguente.

Sia  $(S, \Sigma, \mu)$  uno spazio misurale, con  $\mu(S) < \infty$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f^{-1}] - \infty, x] \in \Sigma$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (misurabilità di una funzione a valori reali). La  $f$  è sommabile se esiste una successione bilatera  $(x_n)$ , strettamente crescente ed illimitata superiormente ed inferiormente, tale che, posto  $E_n = \{s \in S : f(s) \leq x_n\}$ , le serie bilatere

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_{n-1} \mu(E_n \setminus E_{n-1}) \\ (b) \quad & \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n \mu(E_n \setminus E_{n-1}) \end{aligned}$$

siano assolutamente convergenti.

In tal caso, esiste un  $\delta > 0$  tale che, se  $x_n - x_{n-1} < \delta$  per ogni  $n \in \mathbf{Z}$ , le relative somme (a) e (b) differiscono per meno di un  $\varepsilon > 0$  prefissato. Esiste quindi un reale  $\lambda$  che è limite del net

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n \mu(E_n \setminus E_{n-1}) \quad (3.6)$$

lungo l'insieme delle suddivisioni marcate ad infiniti punti  $([x], \xi)$ , come detto in 3.3.

Il valore di tale  $\lambda$  coincide con il valore dell'integrale di Lebesgue della  $f$  dato in 2.2.

Osserviamo che il limite della (3.6) può essere riguardato come un integrale assoluto di Stieltjes. Basta infatti porre

$$F(x) = \mu(f^{-1}] - \infty, x]),$$

e si ha

$$\mu(E_n \setminus E_{n-1}) = F(x_n) - F(x_{n-1}),$$

così

$$\lambda = \text{ARS} \int_{\mathbb{R}} x dF(x).$$

L'assoluta convergenza di questo integrale di Stieltjes su dominio illimitato è immediata conseguenza del fatto che

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} x_{n-1} (F(x_n) - F(x_{n-1})) \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} \xi_n (F(x_n) - F(x_{n-1})) \leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n (F(x_n) - F(x_{n-1})),$$

dove la prima e la terza serie sono la (a) e la (b)<sup>2</sup>.

Sia ora  $X$  una variabile aleatoria reale sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,

---

<sup>2</sup>Infatti, se  $\sum_k a_k \leq \sum_k b_k \leq \sum_k c_k$ , allora  $\sum_k |b_k| \leq \sum_k |a_k| + \sum_k |c_k|$ .

e sia  $F_X$  la sua funzione di ripartizione.

Per quanto appena visto, se  $X$  è  $P$ -sommabile, abbiamo la seguente trasformazione di integrale di Lebesgue in integrale di Stieltjes:

$$L \int_{\Omega} X(\omega) dP = {}^{ARS} \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x).$$

Passiamo ora all'integrale  $\int_{\Omega} (f \circ X) dP$ . Premetto il seguente lemma.<sup>3</sup>

**Lemma 3.4.1** *Siano  $(A, \Sigma_A, \mu)$  e  $(B, \Sigma_B, \nu)$  due spazi misurali, e  $\Phi$  una funzione da  $A$  a  $B$   $(\Sigma_A - \Sigma_B)$ -misurabile che conserva le misure, vale a dire tale che  $\mu(\Phi^{-1}E) = \nu(E)$  per ogni insieme  $E$  del dominio di  $\nu$ .*

*Allora, qualunque sia una funzione scalare  $f$  sommabile su  $B$ , la  $f \circ \Phi$  è sommabile su  $A$ , e risulta*

$$\int_{\Phi^{-1}(E)} f \circ \Phi d\mu = \int_E f d\nu \quad \text{per ogni } E \in \Sigma_B.$$

Ne consegue che se  $X$  una variabile aleatoria reale su  $\Omega$ ,  $P^X$  la misura immagine mediante  $X$  sui boreliani di  $\mathbb{R}$ , ed  $f$  una funzione a valori in  $\mathbf{K}$   $P^X$ -sommabile su  $\mathbb{R}$ , allora  $f \circ X$  è  $P$ -sommabile su  $\Omega$ , e risulta

$$\int_{\Omega} (f \circ X)(\omega) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x) dP^X.$$

Per quanto visto in 2.4, si ha infine

$$\int_{\Omega} (f \circ X)(\omega) dP = \int_{\mathbb{R}} f(x) dF_X(x).$$

### 3.5 L'integrale di Riemann-Stieltjes su un rettangolo di $\mathbb{C}$

**Definizione 3.5.1** *Sia  $R = R(a < x \leq b, c < y \leq d) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .*

*Una partizione, o suddivisione, in celle di  $R$  è una sequenza finita  $[z] = \{(x_h, y_k) \mid h = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n\}$ , con  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ,  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ .<sup>4</sup>*

Indichiamo con  $\mathcal{D}^2$  l'insieme delle partizioni di  $R$ .

Ogni partizione in celle del rettangolo  $R$  definisce una famiglia  $\{R_{h,k}\}$  di sottorettangoli di  $R$  nel modo seguente:  $R_{h,k} = ]x_{h-1}, x_h] \times ]y_{k-1}, y_k]$ , per ogni  $h = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ .

<sup>3</sup>Si veda N.Dunford-J.Schwartz [12], Lemma 8, pp. 182

<sup>4</sup>J.A. Clarkson [9].

Sia ora  $g : \bar{R} \rightarrow \mathbb{C}$  limitata. Fissata  $[z] \in \mathcal{D}^2$ , è possibile associare a  $g$  una funzione d'insieme<sup>5</sup>  $G$ , definita sulla famiglia  $\{R_{h,k}\}$  di rettangoli determinata da  $[z]$ , nel modo seguente:

$$G(R_{h,k}) = g(x_h, y_k) - g(x_h, y_{k-1}) - g(x_{h-1}, y_k) + g(x_{h-1}, y_{k-1}) \quad (3.7)$$

**Definizione 3.5.2** *Con finezza della partizione  $[z]$  intendo il valore*

$$|[z]| = \max_{h=1, \dots, m; k=1, \dots, n} (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1})$$

Definisco su  $\mathcal{D}^2$  un orientamento.

**Definizione 3.5.3** *Siano  $[z^{(1)}]$  e  $[z^{(2)}]$  in  $\mathcal{D}^2$ . Pongo  $[z^{(1)}] \prec [z^{(2)}]$  ( $[z^{(2)}]$  è più fine in norma di  $[z^{(1)}]$ ) se  $|[z^{(2)}]| \leq |[z^{(1)}]|$ .*

**Definizione 3.5.4** *Sia  $R(a < x \leq b, c < y \leq d) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .*

*Una partizione marcata di  $R$  è la coppia  $([z], (\xi, \eta))$ , con  $[z] \in \mathcal{D}^2$ , e  $(\xi, \eta)$  funzione definita sulla famiglia di sottorettangoli  $\{R_{h,k}\}$  associata a  $[z]$ , che ad  $R_{h,k}$  associa  $(\xi_{h,k}, \eta_{h,k})$ , con  $x_{h-1} < \xi_{h,k} \leq x_h$ , e  $y_{k-1} < \eta_{h,k} \leq y_k$ .*

Indico con  $\mathcal{P}^2$  il loro insieme.

**Definizione 3.5.5** *Sia  $R(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .*

*Una partizione marcata ristretta di  $R$  è la coppia  $([z], (\xi, \eta))$ , con  $[z] \in \mathcal{D}^2$ , e  $(\xi, \eta)$  funzione definita sulla famiglia di sottorettangoli  $\{R_{h,k}\}$  associata a  $[z]$ , che ad  $R_{h,k}$  associa  $(\xi_h, \eta_k)$ , con  $\xi_h$  indipendente da  $k$ ,  $x_{h-1} < \xi_h \leq x_h$ , ed  $\eta_k$  indipendente da  $h$ ,  $y_{k-1} < \eta_k \leq y_k$ .*

Indico con  $\mathcal{P}_1^2$  il loro insieme.

Orientiamo  $\mathcal{P}^2$  ponendo  $([z^{(1)}], (\xi^{(1)}, \eta^{(1)})) \prec ([z^{(2)}], (\xi^{(2)}, \eta^{(2)}))$  se  $[z^{(2)}]$  è più fine in norma di  $[z^{(1)}]$ .

Essendo  $\mathcal{P}_1^2 \subset \mathcal{P}^2$ , su  $\mathcal{P}_1^2$  induciamo l'orientamento  $\prec$  definito su  $\mathcal{P}^2$ .

Introduciamo adesso due separate estensioni dell'integrale di Riemann-Stieltjes classico a funzioni di due variabili.

La prima è dovuta a Fréchet [14], che ha dato la seguente definizione.

**Definizione 3.5.6 (Fréchet)** *Sia  $R = R(a < x \leq b, c < y \leq d) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , e siano  $f$  e  $g$  funzioni limitate definite su  $\bar{R}$ .*

*Diciamo che  $f$  è Riemann-Stieltjes integrabile in senso ristretto rispetto a  $g$  se il net di dominio  $\mathcal{P}_1^2$*

$$\sum_{h=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_h, \eta_k) G(R_{h,k}), \quad \text{con } (\xi_h, \eta_k) = (\xi, \eta)(R_{h,k}),$$

---

<sup>5</sup> Al posto della funzione d'intervallo  $\Phi([t_{j-1}, t_j]) = |\phi(t_j) - \phi_{t_{j-1}}|$ , che generalmente figura nella definizione di variazione totale della funzione di una sola variabile  $\phi(t)$ , si partirà qui dalla definizione di una opportuna funzione d'insieme  $G$ , definita sui rettangoli semiaperti con i lati paralleli agli assi.

(3.8)

converge in norma ad un limite finito.  
In tal caso, indichiamo tale limite con

$${}^{FRS} \iint_R f(x, y) dg(x, y). \quad (3.9)$$

Se ora sostituiamo il net in (3.8) con il net di dominio  $\mathcal{P}^2$

$$\sum_{h=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_{h,k}, \eta_{h,k}) G(R_{h,k}), \quad \text{con } (\xi_{h,k}, \eta_{h,k}) = (\xi, \eta)(R_{h,k}), \quad (3.10)$$

chiamiamo il limite, se esiste, *l'integrale di Riemann-Stieltjes non ristretto* di  $f$  rispetto a  $g$ , e lo indichiamo con il simbolo

$${}^{RS} \iint_R f(x, y) dg(x, y). \quad (3.11)$$

Chiaramente, l'esistenza dell'integrale in (3.11) implica che l'integrale in (3.9) esiste, e il suo valore è uguale a quello dato in (3.11). D'altra parte, l'esistenza dell'integrale in (3.9) non implica l'esistenza di quello in (3.11), come vedremo qui di seguito.

Fréchet ha mostrato che una condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale ristretto (3.9) per ogni funzione integranda continua  $f$ , è che la funzione integratrice  $g$  sia *a variazione limitata nel senso di Vitali*<sup>6</sup> (scriviamo  $g \in \mathcal{V}$ ).

Di speciale interesse è il caso in cui l'integranda  $f(x, y)$  è a variabili separate, nel senso che  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ . Una condizione sufficiente per l'esistenza dell'integrale ristretto (3.9) per ogni integranda  $f$  a variabili separate con fattori continui  $f_1$  ed  $f_2$ , è che la  $g$  sia *a variazione limitata nel senso di Fréchet*<sup>7</sup> (scriviamo  $g \in \mathcal{F}$ ).

La condizione di Fréchet è più debole di quella di Vitali.<sup>8</sup>

È naturale porsi le seguenti domande sull'integrazione delle funzioni a variabili separate con fattori continui:

a) è la condizione di Fréchet anche necessaria per l'esistenza dell'integrale

<sup>6</sup>La funzione  $g(x, y)$  definita su  $R$  è a variazione limitata nel senso di Vitali se esiste  $M > 0$  tale che, per ogni partizione  $[z] \in \mathcal{D}^2$  risulta  $\sum_{h,k} |G(R_{h,k})| < M$

<sup>7</sup>La funzione  $g(x, y)$  definita su  $R$  è a variazione limitata nel senso di Fréchet se esiste  $M > 0$  tale che  $\sum_{h,k} \epsilon_h \delta_k G(R_{h,k}) < M$  per ogni partizione  $[z] \in \mathcal{D}^2$ , e per ogni scelta di  $\epsilon_h = \pm 1$ ,  $\delta_k = \pm 1$ .

<sup>8</sup>La dimostrazione è in Littlewood [21]. Successivamente, J.A. Clarkson and C.R. Adams [1] hanno dato un esempio di funzione a variazione limitata nel senso di Fréchet, ma non di Vitali.

ristretto?

b) è la condizione di Fréchet sufficiente per l'esistenza dell'integrale non ristretto?

Se una funzione non è necessariamente a variabili separate, ma continua, c) è la condizione di Fréchet sufficiente per l'esistenza dell'integrale ristretto, o di quello non ristretto?

La risposta a queste domande è data dai teoremi che seguono.

**Teorema 3.5.1** *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'integrale di Riemann-Stieltjes ristretto  ${}^{FRS}\int\int_R f(x, y) dg(x, y)$  esista per ogni funzione  $f(x, y)$  continua su  $R$  è che la  $g(x, y)$  sia a variazione limitata nel senso di Vitali.*

**Teorema 3.5.2** *Affinché l'integrale di Riemann-Stieltjes non ristretto*

$${}^{RS}\int\int_R f(x, y) dg(x, y)$$

*esista per ogni funzione  $f(x, y)$  continua su  $R$ , occorre e basta che la  $g(x, y)$  sia a variazione limitata nel senso di Vitali.*

**Teorema 3.5.3** *Affinché l'integrale di Riemann-Stieltjes ristretto*

$${}^{FRS}\int\int_R f_1(x) f_2(y) dg(x, y)$$

*esista per ogni coppia di funzioni continue  $f_1$  ed  $f_2$ , occorre e basta che la  $g$  sia a variazione limitata nel senso di Fréchet.*

**Teorema 3.5.4** *Affinché l'integrale di Riemann-Stieltjes non ristretto*

$${}^{RS}\int\int_R f_1(x) f_2(y) dg(x, y)$$

*esista per ogni coppia di funzioni continue  $f_1$  ed  $f_2$ , occorre e basta che la  $g$  sia a variazione limitata nel senso di Vitali.*

## Capitolo 4

# L'integrale di Stieltjes come forma bilineare canonica di spazi in dualità

### 4.1 Spazi vettoriali topologici

**Definizione 4.1.1** *Siano dati uno spazio vettoriale (o lineare)  $L$  sul campo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) e una topologia  $\mathcal{T}$  su  $L$ .*

*La coppia  $L = (L, \mathcal{T})$  è uno **spazio vettoriale topologico**, brevemente **TVS**, su  $\mathbb{K}$  se l'addizione e la moltiplicazione scalare*

$$\begin{aligned}(x, y) \in (L \times L) &\mapsto x + y \in L \\ (\lambda, x) \in (\mathbf{K} \times L) &\mapsto \lambda x \in L.\end{aligned}$$

*sono funzioni continue.*

Se  $L$  è un TVS, la sua topologia è invariante per traslazione, pertanto essa è pienamente determinata da una base di intorni dello 0.

**Definizione 4.1.2** *Un TVS  $L$  si dice **localmente convesso**, brevemente un **LCS**, se la sua topologia è Hausdorff, ed esiste una base (numerabile o non) di intorni convessi<sup>1</sup> dello 0.*

Su ogni spazio lineare può essere definita una topologia mediante un sistema di seminorme.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Un sottoinsieme  $A$  di uno spazio vettoriale  $L$  (reale o complesso) è *convesso* se  $x \in A$ ,  $y \in A$  implica  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ , per tutti i reali  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$

<sup>2</sup>Una funzione  $p$  su uno spazio vettoriale  $L$  reale o complesso è una seminorma se è a valori reali e

(a)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  ( $x, y \in L$ )  
(b)  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  ( $x \in L, \lambda \in \mathbf{K}$ ).

Sia  $L$  uno spazio lineare, ed  $\mathcal{S}$  un sistema di seminorme su  $L$ . Consideriamo, per ogni  $\varepsilon > 0$ , ed ogni sistema finito  $p_1, \dots, p_m$  in  $\mathcal{S}$ , l'insieme

$$U_{\varepsilon, p_1, \dots, p_m} = \{x \in L; p_1(x), \dots, p_m(x) < \varepsilon\}.$$

La totalità di tali insiemi forma una base di intorni convessi dello 0, che rende  $L$  un TVS.

Se, di più, la loro intersezione è  $\{0\}$ , allora  $L$  è anche Hausdorff, quindi su  $L$  è stata imposta una topologia che lo rende un LCS.

Viceversa, per ogni LCS esiste un sistema  $\mathcal{S}$  di seminorme che definisce la sua topologia.

## 4.2 Nozione di dualità tra spazi e topologie deboli naturali

**Definizione 4.2.1** *Siano  $F$  e  $G$  due spazi vettoriali su  $\mathbf{K}$ , ed  $f$  una forma bilineare su  $F \times G$  tale che*

$$\begin{aligned} f(x_o, y) = 0 \text{ per ogni } y \in G \text{ implica } x_o = 0 \\ f(x, y_o) = 0 \text{ per ogni } x \in F \text{ implica } y_o = 0 \end{aligned}$$

*Si dice allora che  $f$  pone  $F$  e  $G$  in dualità, e che la coppia  $\langle F, G \rangle$  è un sistema duale.*

Sugli spazi lineari  $F$  e  $G$  posti in dualità da  $f(x, y)$ , sorgono due topologie naturali.

La  $\sigma(F, G)$  topologia su  $F$ , che è la meno fine che rende continui i funzionali lineari su  $F$ , del tipo  $f(x, y_o)$ , per ogni fissato  $y_o$  di  $G$ , e la  $\sigma(G, F)$  topologia su  $G$ , che è la meno fine che rende continui i funzionali lineari su  $G$ , del tipo  $f(x_o, y)$ , per ogni fissato  $x_o$  di  $F$ .

La  $\sigma(F, G)$  e la  $\sigma(G, F)$  sono dette *topologie deboli indotte dalla dualità* tra  $F$  e  $G$ .

Tali topologie rendono  $F$  e  $G$  spazi localmente convessi.

Una base di intorni dello 0 per  $(F, \sigma(F, G))$  può essere definita dal sistema di seminorme  $\mathcal{S} = \{|f(\bullet, y_o)|, y_o \in G\}$ .

Analogamente per  $(G, \sigma(G, F))$ ,  $\mathcal{S} = \{|f(x_o, \bullet)|, x_o \in F\}$ .

**Definizione 4.2.2** *Sia  $L$  uno spazio vettoriale su  $\mathbf{K}$ . L'insieme  $L^\#$  dei funzionali lineari su  $L$  si dice *duale algebrico di  $L$* , ed è uno spazio vettoriale sul medesimo campo  $\mathbf{K}$ . Se  $L$  è un TVS, il sottospazio  $L'$  formato dagli elementi di  $L^\#$  che sono funzioni continue su  $L$ , si dice *duale (topologico) di  $L$* .*



Il duale di  $L$  può essere veramente povero: ad esempio può ridursi al solo funzionale nullo. Naturalmente, allora  $L$  ed  $L'$  non sono posti in dualità da nessuna forma bilineare.

Lo sono invece certamente se  $L$  è localmente convesso.

Allo scopo, mostriamo che

**Proposizione 4.2.1** *Sia  $L$  un LCS, ed  $L'$  il suo duale. La mappa*

$$(x, f) \in L \times L' \mapsto f(x) \in \mathbf{K}$$

*è una forma canonica che mette in dualità  $L$  ed  $L'$ .*

**Dimostrazione.** La  $f(x) = 0 \forall x \Rightarrow f = 0$ , è triviale.

Quanto alla  $f(x) = 0 \forall f \Rightarrow x = 0$ , supponiamo  $x \neq 0$ . Poiché  $L$  è separato, esiste un intorno  $U$  dello 0 che non include  $x$ . Ma la locale convessità di  $L$  implica l'esistenza di un intorno dello 0 aperto convesso  $V$  incluso in  $U$ . Per il teorema di Hahn-Banach, esiste allora un funzionale continuo  $f$ , ed un  $c > 0$ , con  $f(x) = c$ .  $\square$

Le due topologie deboli naturali, indotte dalla dualità tra  $L$  ed  $L'$ , assumono qualche aspetto particolare.

La *topologia debole su  $L$* , ossia  $\sigma(L, L')$ , che spesso è indicata con  $w$ , è la meno fine che «*lascia*» continue tutte le funzioni che formano  $L'$ .

La *topologia debole sul duale*, ossia  $\sigma(L', L)$ , spesso indicata con  $w^*$ , è la topologia della convergenza semplice, sul loro comune dominio  $L$ , delle funzioni che costituiscono  $L'$ .

Sia  $\hat{L}$  uno spazio lineare posto in dualità con  $L$  da una  $\phi$ , e si abbia che  $f \in L'$  se e solo se esiste una  $\hat{f} \in \hat{L}$  tale che  $f(x) = \phi(x, \hat{f})$  per ogni  $x \in L$ . Si dice allora che  $\hat{L}$  «*rappresenta*»  $L'$ , o, con abuso di linguaggio, che  $\hat{L}$  è il duale di  $L$ .

**Esempio (il primo teorema di rappresentazione di Riesz).** Sia  $H$  uno spazio di Hilbert complesso. Fissato  $y \in H$ , la  $f_y(x) = \langle x, y \rangle$  è un funzionale lineare continuo su  $H$ . Il primo teorema di rappresentazione di Riesz afferma che ogni elemento di  $H'$  è esprimibile in questo modo, e quindi  $H$  stesso rappresenta il duale di  $H$ .

La  $y \in H \mapsto f_y \in H'$  è iniettiva, surgettiva, additiva, ma non lineare, perché  $f_{\alpha y} = \bar{\alpha} f_y$ . Quindi  $H$  rappresenta  $H'$ , ma attraverso un anti-isomorfismo.

### 4.3 Gli spazi $\mathcal{C}$ , $\mathcal{C}_b$ , $\mathcal{C}_0$ , $\mathcal{C}_K$ , e loro topologie

Molti spazi di funzioni reali continue sulla retta reale possono essere messi in dualità dall'integrale di Stieltjes con spazi di funzioni a variazione limitata o localmente limitata.

Indichiamo con  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_b$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_K$  gli spazi delle funzioni su  $\mathbb{R}$ , rispettivamente continue, continue e limitate, continue e convergenti a 0 all'infinito, continue a supporto compatto.

Rendiamo ciascuno spazio localmente convesso mediante un sistema  $\mathcal{S}$  di seminorme, e richiediamo alla sua topologia di soddisfare alle seguenti ulteriori condizioni.

i) Ogni seminorma del tipo  $p_N(f) = \sup_{|x| \leq N} |f(x)|$  con  $N \in \mathbf{N}$ , sia continua. In altre parole, la topologia sia più fine di quella della convergenza compatta.

ii) Lo spazio sia *semicompleto*, ossia una successione  $(f_n)$  converga ad una  $f$  dello spazio qualora, fissati  $\varepsilon > 0$  e  $p \in \mathcal{S}$ , risulti  $p(f_n - f_m) < \varepsilon$  per tutti gli  $m, n$  abbastanza grandi.

$$\text{iii) } \mathcal{C}_0 = (\mathcal{C}_0 - cl)\mathcal{C}_K, \quad \mathcal{C}_b = (\mathcal{C}_b - cl)\mathcal{C}_0, \quad \mathcal{C} = (\mathcal{C} - cl)\mathcal{C}_b.$$

Per realizzare quanto detto, muniamo gli spazi in questione delle seguenti topologie

1.  $\mathcal{C}$  abbia la topologia della convergenza compatta.
2. Per  $\mathcal{C}_b$ , il punto cruciale è garantire la semicompletezza. Allo scopo, si può considerare su  $\mathcal{C}_b$  l'insieme  $\mathcal{S}$  di seminorme:

$$p_{N,s}(f) = \sup_{|t| \leq N} |f(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |f(s_k)|,$$

dove  $N$  è un naturale ed  $s = (s_k)$  è un'arbitraria successione di numeri reali.

- Ne risulta che  $f_n \xrightarrow{\mathcal{C}_b} f$  se e solo se
- i) esiste un reale  $M \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)|$  per ogni  $n$ , e
  - ii) per ogni naturale  $n$ , risulta  $\sup_{|t| \leq N} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$ .

3. Su  $\mathcal{C}_0$  poniamo la sup-norma.

4. Infine, per topologizzare  $\mathcal{C}_K$ , ad ogni funzione continua  $\gamma$ , a valori strettamente positivi su  $\mathbb{R}$ , associamo la seminorma

$$p_\gamma(f) = \max_{t \in \mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{\gamma(t)}.$$

Chiaramente,  $f_n \xrightarrow{\mathcal{C}_K} f$  se e solo se

- i) l'unione dei supporti delle  $f_n$  è un insieme limitato, e
- ii)  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0$ .

In sostanza, ci troviamo in un caso meno restrittivo della convergenza in  $\mathcal{C}_K^\infty$ .<sup>3</sup>

## 4.4 Il secondo teorema di rappresentazione di Riesz

Sia  $\mathcal{C}([a, b])$  lo spazio delle funzioni reali continue su  $[a, b]$ , dotato della sup-norma.

Sia  $g \in BV([a, b])$ . Allora

$$f \mapsto \int_a^b f(x) dg(x) \tag{4.1}$$

è un funzionale lineare continuo su  $\mathcal{C}([a, b])$ .

Si deve a F. Riesz (1909) il seguente teorema fondamentale di dualità.

**Teorema 4.4.1 (F. Riesz)** *Ogni funzionale lineare continuo su  $\mathcal{C}([a, b])$  è esprimibile nella forma (4.1) per una opportuna funzione  $g \in BV([a, b])$ .*

Abbiamo visto che l'integrale non si altera per nessuna  $f$ , se  $g$  varia in una opportuna classe. Pertanto, se consideriamo solo un rappresentate per ciascuna classe, possiamo parlare di unicità della funzione generatrice. Solitamente si sceglie come rappresentante l'elemento di  $BV$  liftato che abbiamo definito in 1.9. In tal caso  $BV$  liftato rappresenta il duale di  $\mathcal{C}([a, b])$  o, con il consueto abuso di linguaggio, ammesso in 4.2, è il duale di  $\mathcal{C}([a, b])$ .

Il teorema resta valido per gli spazi  $\mathcal{C}$  e  $BV$  a valori complessi.

Poiché  $\mathcal{C}([a, b])$ , con la sup-norma, è uno spazio di Banach, lo è anche il duale, e si ha

$$\|[g]\| = \sup\left\{ \int_a^b f dg : \|f\|_\infty \leq 1 \right\} = V_a^b g,$$

---

<sup>3</sup>v. Kolmogorov [20], pag. 202

dove  $g$  è un rappresentante liftato della sua classe. Questo teorema si trova formulato in altri modi, che sono sostanzialmente equivalenti. Premettiamo il seguente lemma:

**Lemma 4.4.1** *Sia  $E$  un TVS, somma diretta topologica dei sottospazi chiusi  $L, M$ . Con ciò si intende che esiste una proiezione continua  $P$  da  $E$  ad  $L$  (con kernel  $M$ ).*

*Sia  $\phi \in L'$ . Allora  $F = \phi \circ P$  è un funzionale lineare continuo su  $E$ , che si riduce a  $\phi$  se  $x \in L$ .*

*Viceversa, se  $F \in E'$ , allora è lineare e continuo su  $L$ .*

Sia  $E$  lo spazio  $\mathcal{C}([a, b])$ . Il sottospazio  $M$  delle funzioni lineari affini

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

è bidimensionale, quindi chiuso, ed è chiuso il suo complementare:

$$\mathcal{C}_0([a, b]) = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) : f(a) = f(b) = 0\}.$$

In virtù del lemma 4.4.1, un funzionale continuo su  $\mathcal{C}_0$ , che gioca il ruolo di  $L$ , è la restrizione a  $\mathcal{C}_0$  di un funzionale continuo su  $\mathcal{C}$ , ossia

$$\phi(f) = \text{RS} \int_a^b f dg; \quad f \in \mathcal{C}_0,$$

dove  $g \in BV([a, b])$ .

Sia ora  $g = g_c + g_s$ , dove  $g_c(x) = g(x)$  per  $a < x < b$ ,  $g_c(a) = g(a + 0)$ ,  $g_c(b) = g(b - 0)$ . Segue che  $g_s$  è costante, esclusi al più gli estremi. Abbiamo, per  $f \in \mathcal{C}_0([a, b])$ ,

$$\text{RS} \int_a^b f dg = \text{RS} \int_a^b f d(g_c + g_s) = \text{RS} \int_a^b f dg_c + \text{RS} \int_a^b f dg_s = \text{RS} \int_a^b f dg_c.$$

Concludendo:

**Teorema 4.4.2** *Il duale di  $\mathcal{C}_0([a, b])$ , spazio delle funzioni continue, nulle in  $a$  e  $b$ , è lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni a variazione limitata continue agli estremi.*

Di qui, con cambio di variabile, si ottiene il teorema equivalente.

**Teorema 4.4.3** *Il duale di  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ , lo spazio delle funzioni continue, convergenti a 0 all'infinito, con la sup-norma, è lo spazio delle funzioni a variazione limitata su  $\mathbb{R}$ .*

**Nota (il duale di  $\mathcal{C}^{(n)}([a, b])$ ).** Il teorema di Riesz può servire anche per calcolare il duale di  $\mathcal{C}^{(n)}([a, b])$ .

Fissato  $x_0 \in [a, b]$ , ogni  $\phi \in (\mathcal{C}^{(n)}([a, b]))'$  ha la forma

$$\phi(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^{(k)}(x_0) + {}^{RS} \int_a^b f^{(n)} dg$$

**Dimostrazione.** Sia  $x_0 \in [a, b]$ , e assumiamo, tra le varie norme equivalenti su  $\mathcal{C}^{(n)}([a, b])$ , la

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{(n)}} = \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(x_0)| + \|f^{(n)}\|_{\infty}.$$

Sia  $P$  la proiezione in  $\mathcal{C}^{(n)}([a, b])$  su  $M = \text{span}\{(x - x_0)^k; k = 0, \dots, n - 1\}$ , data dalla

$$Pf = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k.$$

La varietà  $M$  è chiusa, e complementare della varietà chiusa

$$L = \{f \in \mathcal{C}^{(n)}([a, b]) \mid f(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\}.$$

Abbiamo  $\|f|_L\|_{\mathcal{C}^{(n)}} = \|f^{(n)}\|_{\infty}$ .

Pertanto, l'operatore  $D^n$  è un isomorfismo (isometrico) tra  $L$  e  $\mathcal{C}([a, b])$ .

Allora :

$$L' = \{f \in L \mapsto {}^{RS} \int_a^b D^n f dg; g \in BV([a, b])\} \quad \text{ed}$$

$$M' = \{f \in M \mapsto \alpha_0 f^{(0)}(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{(n-1)}(x_0); \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Il risultato segue dall'applicazione del lemma 4.4.1.  $\square$

## 4.5 Duali degli spazi $\mathcal{C}$ , $\mathcal{C}_b$ , $\mathcal{C}_0$ , $\mathcal{C}_K$ .

L'integrale assoluto di Stieltjes è la comune forma canonica che mette in dualità  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_b$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_K$  con i loro duali, ossia risulta:

**Teorema 4.5.1** *Sia  $F$  uno degli spazi  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_b$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_K$ .*

*I funzionali lineari continui sullo spazio  $F$  sono tutte e sole le funzioni del tipo*

$$\Phi(f) = {}^{ARS} \int_{\mathbb{R}} f(x) dg(x),$$

*con  $g$  opportuna funzione a variazione localmente limitata.*

**Teorema 4.5.2** *I duali degli spazi di funzioni continue sopra considerati sono:*

1)  $(\mathcal{C})' = BV_K$ , spazio delle funzioni a variazione limitata su  $\mathbb{R}$  con intervallo di variazione compatto, vale a dire che tali funzioni sono costanti su ogni semiretta esterna ad un certo intervallo compatto.

2)  $(\mathcal{C}_b)' = BV$ .

3)  $(\mathcal{C}_0)' = BV$ .

4)  $(\mathcal{C}_K)' = BV_{loc}$ , spazio delle funzioni a variazione limitata sugli intervalli compatti di  $\mathbb{R}$ .

*Bene inteso, qui e nel seguito, tali spazi devono essere considerati quozientati rispetto alla relazione di equivalenza data dall'eguaglianza degli integrali.*

**Lemma 4.5.1** *Siano  $F, G$  due TVS, con  $F$   $G$ -denso in  $G$ , e con iniezione da  $F$  a  $G$  continua. Allora  $G'$  inietta in  $F'$ .*

**Dimostrazione** Se infatti  $\phi \in G'$ , allora  $\phi|_F \in F'$ . Resta da vedere che se  $\phi \neq 0$ , allora  $\phi|_F$  non è nullo. Allo scopo, sia  $y \in G$ , con  $\phi(y) \neq 0$ , e  $x_\alpha \in F \rightarrow y$ . Allora  $\phi(x_\alpha) \rightarrow \phi(y)$ , quindi  $\phi(x_\alpha)$  è definitivamente diversa da 0.  $\square$

Abbiamo dimostrato (teorema 4.4.3), che il duale di  $\mathcal{C}_0$  è  $BV$ .

Poiché  $\mathcal{C}_0$  è denso e inietta continuamente in  $\mathcal{C}$ , segue dal lemma 4.5.1 che  $(\mathcal{C})'$  inietta in  $(\mathcal{C}_0)' = BV$ . In particolare, ogni elemento del duale di  $\mathcal{C}$  è rappresentato da una funzione a variazione limitata. Se una di queste, diciamola  $g$ , non fosse a intervallo di variazione compatto, esisterebbe una  $f$  continua su  $\mathbb{R}$ , non Stieltjes integrabile rispetto a  $g$ . Viceversa, ogni  $f$  continua è Stieltjes integrabile rispetto ad ogni funzione  $g \in BV_K$ . Si conclude che  $(\mathcal{C})' = BV_K$ .

Poiché  $\mathcal{C}_0$  è denso e inietta continuamente in  $\mathcal{C}_b$ , segue dal lemma 4.5.1 che  $(\mathcal{C}_b)'$  inietta in  $(\mathcal{C}_0)' = BV$ .

Quindi ogni elemento del duale di  $\mathcal{C}_b$  è rappresentato da una funzione a variazione limitata. Non solo! Ma ogni funzione a variazione limitata è in  $(\mathcal{C}_b)'$ , perché ogni funzione continua e limitata è assolutamente integrabile rispetto a una funzione a variazione limitata.

**Le misure di probabilità sulla retta.** Le  $g$  in  $BV$  liftato, duale di  $\mathcal{C}_b$ , generano tutte le misure con segno di Lebesgue-Stieltjes  $\mu$  totalmente finite sulla retta.

Se la  $g \in BV$  è monotona non decrescente, con  $g(-\infty) = 0$ ,  $g(+\infty) = 1$ , la  $\mu$  che le resta associata è una misura di probabilità su  $\mathbb{R}$ , ed il generatore  $g$  è una distribuzione cumulativa di probabilità.

## 4.6 Misure di Radon e di Lebesgue-Stieltjes con segno su $\mathbb{R}$

**Le misure di Radon sulla retta.** Data  $g \in BV_{loc}$  liftato <sup>4</sup>, se poniamo  $\mu[a, b] = g(b) - g(a - 0)$ , la  $\mu$  è una misura con segno  $\sigma$ -additiva sul semianello degli intervalli limitati di  $\mathbb{R}$ . Su ogni intervallo limitato  $I$ , la  $\mu$  può essere poi estesa in modo unico, col prolungamento di Lebesgue, ad una misura completa su una  $\sigma$ -algebra di unità  $I$ , che include i boreliani di  $I$ . In questa maniera, resta definita una misura sull'unione di queste  $\sigma$ -algebre (unione che non è un'algebra!). Misure così generate sono chiamate in Bourbaki *misure di Radon sulla retta*, e sono in corrispondenza biunivoca con  $BV_{loc}$  liftato, e quindi col duale di  $\mathcal{C}_K$ .

**Le misure con segno di Lebesgue-Stieltjes.** Più comunemente, si chiama misura di Radon sulla retta ogni misura con segno, completa su  $\mathbb{R}$ , definita su una  $\sigma$ -algebra che contiene tutti i boreliani, e che inoltre sia *localmente finita* (per ogni punto  $t$ , esiste un intorno di  $t$  di misura finita), ed *internamente regolare rispetto ai compatti* (ogni boreliano  $B$  di misura finita contiene un compatto  $K$ , tale che  $B \setminus K$  sia incluso in un boreliano di misura minore di  $\varepsilon > 0$  prefissato). Noi chiamiamo queste ultime, seguendo N. Dunford e J.T. Schwartz, *misure con segno di Lebesgue-Stieltjes*. Esse possono generarsi con prolungamento di Lebesgue, come sopra definito, di una  $\mu$ , differenza delle misure positive associate alle componenti monotone crescenti di una  $g \in BV_{loc}$ , dove almeno una delle componenti è limitata.

**Le misure di Lebesgue-Stieltjes come misure di Radon positive.** Se la  $g$  è monotona non decrescente, è generata la misura di Stieltjes Lebesgue, come abbiamo visto in 2.3.

Ad esempio,  $g(x) = x$  genera la misura di Lebesgue (senz'altro attributo). La  $g(x) = -1$  per  $x < 0$ ,  $g(x) = 0$  per  $x \geq 0$  genera la misura di Dirac ( $\mu E = 1$  se  $0 \in E$ ,  $\mu E = 0$  altrimenti).

In generale, le misure di Radon positive sono somma di misure diffuse e di misure discrete. Le prime sono generate da  $g$  continue (equivalentemente,  $\mu$  è nulla sui punti), le seconde sono generate da funzioni di salto (non sono nulle in contabili punti  $x_i$ , e un insieme ha per misura la somma dei valori della  $\mu$  nei punti  $x_i$  contenuti in esso).

Le misure diffuse sono somma di misure assolutamente continue (generate da un L-integrale indefinito), e di misure singolari (generate da una funzione continua a derivata nulla quasi ovunque).

---

<sup>4</sup>Si può effettuare un lifting su ogni  $g \in BV_{loc}$ , ad esempio alterandone una quantità al più numerabile di valori, in modo da ottenere una funzione su  $\mathbb{R}$  continua da destra, e nulla in 0. Allo scopo, basta sostituire a  $g(t)$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , il valore  $g(t + 0) - g(0 + 0)$ .

La classificazione è chiaramente improntata sul celebre Teorema di Lebesgue di decomposizione di una funzione monotona (1904).

## 4.7 $w^*$ -topologie e generalizzazioni del secondo teorema di Helly.

Sia  $F$  uno degli spazi  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_b$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_K$ , ed  $F'$  il corrispondente duale. Dalla definizione generale di  $w^*$ -convergenza, la  $w^*$ -convergenza su  $F'$  è definita dall'insieme delle seminorme del tipo:

$$p_f([g]) = \left| \text{ARS} \int_{\mathbb{R}} f(x) dg(x) \right| \quad \text{con } f \in F \text{ fissato.}$$

**Proposizione 4.7.1** *Una successione  $([g_n])$  in  $(\mathcal{C})' = BV_K$   $w^*$ -converge a  $[g]$  se*

- i) l'insieme delle variazioni totali delle  $g_n$  è limitato;*
- ii)  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  in ogni punto  $x$  di continuità per  $g$ ;*
- iii) l'unione degli intervalli di variazione delle  $g_n$  è un insieme limitato.*

**Dimostrazione.** Sia infatti tale unione inclusa nell'intervallo di continuità  $[a, b]$  della  $g$ . Allora le  $g_n$  e la  $g$  hanno variazione nulla sulle semirette  $] -\infty, a]$ ,  $[b, +\infty[$ , per cui

$$\begin{aligned} \text{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg_n &= \text{RS} \int_a^b f dg_n \\ \text{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg &= \text{RS} \int_a^b f dg, \end{aligned}$$

e  $\text{RS} \int_a^b f dg_n \rightarrow \text{RS} \int_a^b f dg$  per il teorema di Helly.  $\square$

**Proposizione 4.7.2** *Una successione  $([g_n])$  in  $(\mathcal{C}_b)' = BV$   $w^*$ -converge a  $[g]$  se*

- i) l'insieme delle variazioni totali delle  $g_n$  è limitato;*
- ii)  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  in ogni  $x$  di continuità per  $g$ ;*
- iii) dato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $a, b \in \mathbb{R}$ , ed un  $n_0$  tali che  $V_{-\infty}^a g_n, V_b^{+\infty} g_n < \varepsilon$ , per ogni  $n > n_0$ .*

**Dimostrazione.** Sia  $|f(x)| \leq M$  per ogni  $x$ , ed  $\varepsilon > 0$ .

Abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \text{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg_n - \text{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg \right| &\leq \left| \text{ARS} \int_{-\infty}^a f dg_n - \text{ARS} \int_{-\infty}^a f dg \right| + \\ &+ \left| \text{RS} \int_a^b f dg_n - \text{RS} \int_a^b f dg \right| + \left| \text{ARS} \int_b^{+\infty} f dg_n - \text{ARS} \int_b^{+\infty} f dg \right|. \end{aligned}$$



Poniamo  $v_n(x) = V_{-\infty}^x g_n$ ,  $v(x) = V_{-\infty}^x g$ . Le  $v_n(x)$  e  $v(x)$  convergono per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Prendi  $b$  di continuità per  $g$ , tale che  $v(+\infty) - v(b) < \frac{\varepsilon}{6M}$ ,  $v_n(+\infty) - v_n(b) < \frac{\varepsilon}{6M}$  per  $n > n_1$ . Allora

$$\begin{aligned} & \left| {}^{ARS} \int_b^{+\infty} f dg_n - {}^{ARS} \int_b^{+\infty} f dg \right| \leq \\ & \leq {}^{ARS} \int_b^{+\infty} |f(x)| dv_n(x) + {}^{ARS} \int_b^{+\infty} |f(x)| dv(x) < M \frac{\varepsilon}{6M} + M \frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Analogamente, sia  $a$  di continuità per  $g$ ,  $a < b$ , tale che  $v(a) - v(-\infty) < \frac{\varepsilon}{6M}$ ,  $v_n(a) - v_n(-\infty) < \frac{\varepsilon}{6M}$  per  $n > n_2$ . Allora

$$\left| {}^{ARS} \int_{-\infty}^a f dg_n - {}^{ARS} \int_{-\infty}^a f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{per } n > n_2.$$

Infine,

$$\left| {}^{RS} \int_a^b f dg_n - {}^{RS} \int_a^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{per } n > n_3,$$

grazie al teorema di Helly-Bray, donde il risultato.  $\square$

Se ne può dedurre il secondo teorema di Helly generalizzato<sup>5</sup>

**Teorema 4.7.1** *Siano  $g, g_1, g_2, \dots$  non decrescenti su  $\mathbb{R}$*

*i) le  $g_n$  siano equilimitate;*

*ii)  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  in ogni  $x$  di continuità per  $g$ ;*

*iii)  $g_n(+\infty) \rightarrow g(+\infty)$  e  $g_n(-\infty) \rightarrow g(-\infty)$ .*

*Allora, per ogni  $f$  continua e limitata su  $\mathbb{R}$ ,*

$${}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg_n \rightarrow_n {}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg$$

**Dimostrazione.** È subito visto che anche  $g$  è a variazione limitata. Resta da vedere che è soddisfatta anche la *iii)* ipotesi della proposizione 4.7.2.

Dato  $\varepsilon > 0$ , prendi  $b$  di continuità per  $g$  tale che

$$v(+\infty) - v(b) = g(+\infty) - g(b) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dalla *ii)* e la *iii)* di questo enunciato, per tutti gli  $n$  abbastanza grandi (le  $g_n$  e  $g$  sono monotone non decrescenti!), abbiamo

$$|v(b) - v_n(b)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |v(+\infty) - v_n(+\infty)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

da cui, per gli  $n$  grandi,

$$v_n(+\infty) - v_n(b) \leq |v_n(+\infty) - v(+\infty)| + (v(+\infty) - v(b)) + |v(b) - v_n(b)| < \varepsilon.$$

Analogamente, per  $v_n(a) - v_n(-\infty)$ .  $\square$

<sup>5</sup>Il seguente teorema è così chiamato da B.Gnedenko [17], p. 235. Osserviamo inoltre che diversi Autori invertono la denominazione di primo e secondo teorema di Helly.

**Proposizione 4.7.3** Una successione  $([g_n])$  in  $(\mathcal{C}_0)' = BV$   $w^*$ -converge a  $[g]$  se

- i) l'insieme delle variazioni totali delle  $g_n$  è limitato;
- ii)  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  in ogni  $x$  di continuità per  $g$ ;

**Dimostrazione.** Sia  $C \geq V_{-\infty}^{+\infty} g$ ,  $C \geq \sup_n V_{-\infty}^{+\infty} g_n$ .

Sia  $f \in \mathcal{C}_0$ . Prendiamo  $\varepsilon > 0$ , e siano  $a, b$  di continuità per  $g$ , tali che

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{6C} \quad \text{per } x \leq a \text{ e per } x \geq b.$$

Si ha:

$$\left| {}^{ARS} \int_{-\infty}^a f dg_n - {}^{ARS} \int_{-\infty}^a f dg \right| \leq \frac{\varepsilon}{6C} C + \frac{\varepsilon}{6C} C = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Analogamente

$$\left| {}^{ARS} \int_b^{+\infty} f dg_n - {}^{ARS} \int_b^{+\infty} f dg \right| \leq \frac{\varepsilon}{6C} C + \frac{\varepsilon}{6C} C = \frac{\varepsilon}{3}.$$

In virtù del teorema di Helly, per tutti gli  $n$  abbastanza grandi, avremo

$$\left| {}^{RS} \int_a^b f dg_n - {}^{RS} \int_a^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

donde

$$\left| {}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg_n - {}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f dg \right| < \varepsilon.$$

□

**Nota.** Lo spazio  $\mathcal{C}_0$  è strettamente contenuto in  $\mathcal{C}_b$ . Pertanto, avendo tali spazi il medesimo duale, la  $w^*$ -topologia generata su esso da  $\mathcal{C}_0$  è strettamente più grossa della  $w^*$ -topologia generata da  $\mathcal{C}_b$ . Ad esempio, la successione  $(H_n)$  converge alla costante nulla semplicemente, ed in  $\sigma(BV, \mathcal{C}_0)$ . Infatti, se  $f \in \mathcal{C}_0$ ,  ${}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dH_n(x) = f(n) \rightarrow 0 = {}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d0$ . Tale successione non converge invece nella  $\sigma(BV, \mathcal{C}_b)$  topologia. Infatti, per  $f(x) \equiv 1$  abbiamo  ${}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dH_n(x) = 1 \rightarrow 1 \neq 0 = {}^{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 d0$ .

**Definizione 4.7.1** Siano  $g, g_1, g_2, \dots$  a variazione localmente limitata su  $\mathbb{R}$ . Diciamo che  $(g_n)$  converge vagamente a  $g$ , se per ogni intervallo di continuità  $[a, b]$  di  $g$  risulta

$$i_A) \quad {}^{RS} \int_a^b f dg_n \rightarrow {}^{RS} \int_a^b f dg,$$

per ogni  $f$  continua su  $\mathbb{R}$ .

**Nota.** La condizione per ogni  $a < b$  sarebbe troppo limitativa. Ad esempio, sia  $g_n = H_{\frac{1}{n}}$ ,  $g = H_0$ .

Se né  $a$  né  $b$  sono lo 0, si hanno i casi:  $ab > 0$ , e allora

$${}^{RS}\int_a^b f dg_n \quad \text{definitivamente nullo, e} \quad {}^{RS}\int_a^b f dg \quad \text{nullo,}$$

se invece  $ab < 0$ ,

$${}^{RS}\int_a^b f dg_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow f(0) \quad {}^{RS}\int_a^b f dg = f(0).$$

Se infine un estremo è lo 0, unico punto di non continuità per  $g$ , presa  $f$  non nulla in 0, abbiamo

$$\begin{aligned} {}^{RS}\int_a^0 f dg_n &= 0 \rightarrow 0 \neq f(0) = {}^{RS}\int_a^0 f dg \\ {}^{RS}\int_0^b f dg_n &= f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow f(0) \neq 0 = {}^{RS}\int_0^b f dg. \end{aligned}$$

In ogni caso, la  $i_A$ ) può essere sostituita dalla

$i_B$ ) esistono valori di  $a$  comunque grandi da aversi

$${}^{RS}\int_{-a}^a f dg_n \rightarrow {}^{RS}\int_{-a}^a f dg, \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}).$$

**Proposizione 4.7.4** *La successione  $([g_n])$  nel duale di  $\mathcal{C}_K$   $w^*$ -converge a  $[g]$  se e solo se  $(g_n)$  converge a  $g$  vagamente.*

**Dimostrazione.** Sia  $g_n \rightarrow g$  vagamente, e prendiamo  $f \in \mathcal{C}_K$ .

Sia  $\text{supp} f \subset [a, b]$ , con  $a, b$  di continuità per  $g$ . Abbiamo

$${}^{ARS}\int_{\mathbb{R}} f dg_n = {}^{RS}\int_a^b f dg_n \rightarrow_n {}^{RS}\int_a^b f dg = {}^{ARS}\int_{\mathbb{R}} f dg,$$

quindi  $g_n \xrightarrow{w^*} g$ .

Sia viceversa  $g_n \xrightarrow{w^*} g$ , e prendiamo  $f \in \mathcal{C}$ .

Siano  $a < b$  di continuità per  $g$ . Si può mostrare che, preso  $f_0 \in \mathcal{C}_K$ , con  $f_0|_{[a,b]} = f|_{[a,b]}$ ,

$${}^{RS}\int_a^b f dg_n = {}^{RS}\int_a^b f_0 dg_n \quad \text{converge a} \quad {}^{RS}\int_a^b f_0 dg = {}^{RS}\int_a^b f dg,$$

quindi  $g_n$  tende a  $g$  vagamente.  $\square$

## 4.8 Densità delle funzioni finitamente di salto in $BV$ e $BV_{loc}$

Sia  $F$  uno degli spazi  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}_b$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_K$ .

Una funzione su  $\mathbb{R}$  finitamente di salto (liftata) è del tipo

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k H_{x_k}, \quad \text{dove } H_{x_k} = \chi_{[x_k, +\infty[}.$$

Il loro insieme  $G_o$  è sostegno di uno spazio vettoriale, sottospazio di  $F'$ .

Vogliamo mostrare il seguente

**Teorema 4.8.1** *Lo spazio  $G_o$  qui sopra definito è  $\sigma(F', F)$ -denso in  $F'$ .*

Allo scopo, ci avvarremo del seguente lemma <sup>6</sup>.

**Lemma 4.8.1** *Siano  $L$  e  $M$  spazi lineari posti in dualità dalla forma bilineare canonica  $\Phi$ , ed  $M_o$  un sottospazio di  $M$ .*

*Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- a)  $L$  e  $M_o$  sono posti in dualità da  $\Phi$
- b)  $M_o$  è  $\sigma(M, L)$ -denso in  $M$

**Dimostrazione del teorema 4.8.1.** È sufficiente vedere che l'integrale di Riemann-Stieltjes pone  $F$  e  $G_o$  in dualità, cioè

$$(I) \phi \in G_o \text{ e } \int f d\phi = 0 \forall f \in F \Rightarrow \phi = 0$$

$$(II) f \in F \text{ e } \int f d\phi = 0 \forall \phi \in G_o \Rightarrow f = 0$$

Quanto a (I), se  $\phi \neq 0$ , c'è una  $f \in F$  che non annulla l'integrale.

Sia infatti  $\phi \in G_o$ ,  $\phi \neq 0$ . Sia  $x_o$  un suo punto di salto, che è isolato, e sia  $h_o$  il suo salto. Sia  $U$  intorno di  $x_o$ , contenente questo come unico punto di salto, ed  $f$  una funzione continua, con supporto incluso in  $U$ , e che assuma in  $x_o$  il valore 1. Abbiamo:  $\int f dg = h_o \neq 0$ .

Quanto a (II), sia  $f \in F$ ,  $f \neq 0$ , ed  $x_o$  tale che  $f(x_o) \neq 0$ . Prendiamo  $g = H_{x_o}$ . Allora  $\int f dg = f(x_o)$ .

È così mostrato che  $F$  è in dualità con  $G_o$ , e quindi, per il lemma 4.8.1,  $G_o$  è  $\sigma(F', F)$ -denso in  $F'$ .  $\square$

---

<sup>6</sup>H. H. Schaefer [27], p. 125

### Esempio

Come esempio concreto di successione in  $G_o$   $w^*$ -convergente ad una data  $g$  in  $F'$ , cioè

$${}^{RS}\int f d\phi_n \rightarrow {}^{RS}\int f dg \text{ per ogni } f \in F, \quad (4.2)$$

si può utilizzare

$$\phi_n(x) = \sum_{k=-n^2}^{n^2} H_{\frac{k}{n}}(x) \left( g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

per cui

$${}^{RS}\int f d\phi_n = \sum_{k=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) \left( g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right).$$

Per  $N$  naturale abbastanza grande,  ${}^{RS}\int_{|x| \geq n} f d\phi_n$  e  ${}^{RS}\int_{|x| \geq n} f dg$  sono nulli o arbitrariamente piccoli, mentre

$${}^{RS}\int_{-N}^N f d\phi_n = \sum_{k=-Nn}^{Nn} f\left(\frac{k}{n}\right) \left( g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)$$

che converge in  $n$ , per definizione di integrale di Stieltjes, a  ${}^{RS}\int_{-N}^N f dg$ .

## 4.9 Convergenza di variabili aleatorie reali

Nella Teoria della Probabilità si distinguono più tipi di convergenza per una data successione di variabili aleatorie reali. I principali sono la convergenza in distribuzione, che sorge spesso dall'applicazione del *teorema del limite centrale*, quella in probabilità, tipo di convergenza su cui si fonda *la legge debole dei grandi numeri*, e la convergenza quasi sicura (q.s.), nozione usata nella *legge forte dei grandi numeri*.

**Definizione 4.9.1 (Convergenza in distribuzione)** *Sia  $(X_n)$  una successione di variabili aleatorie reali sul comune spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Se le variabili aleatorie  $X, X_1, \dots, X_n, \dots$  hanno come funzioni di ripartizione associate  $F, F_1, \dots, F_n, \dots$ , diciamo che  $X_n$  converge in distribuzione ad  $X$  ( $X_n \xrightarrow{D} X$ ) se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

per ogni punto  $x$  di continuità per la  $F$ .

**Esempio (Il teorema del limite centrale).** Sia  $(X_n)$  una successione di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.), aventi ciascuna valore atteso finito  $\mu$  e varianza  $\sigma^2 > 0$ . La successione di somme normalizzate

$$\tilde{S}_n = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge in distribuzione ad una variabile aleatoria  $X$  con distribuzione normale standard  $\mathcal{N}_{0,1}$ .

In generale, se le  $X_n$  sono variabili aleatorie, con funzioni di ripartizione  $F_n$  assolutamente continue, la convergenza in distribuzione delle  $X_n$  non implica quella delle corrispondenti funzioni di densità. Come esempio, si può considerare una successione  $(X_n)$  di variabili aleatorie con densità  $(f_n)$ ,  $f_n(x) = (1 - \cos(2\pi nx))\chi_{[0,1]}$ . Le funzioni di ripartizione sono

$$F_n(x) = 0 \quad \text{per } x \leq 0, \quad F_n(x) = x - \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi nx) \quad \text{per } 0 < x < 1$$

$$F_n(x) = 1 \quad \text{per } x \geq 1$$

e convergono puntualmente a  $F$  data da

$$F(x) = 0 \quad \text{per } x \leq 0, \quad F(x) = x \quad \text{per } 0 < x < 1, \quad F(x) = 1 \quad \text{per } x \geq 1$$

Allora le  $X_n$  convergono in distribuzione, ma le densità  $f_n$  non convergono.

**Teorema 4.9.1** *Per una successione di variabili aleatorie  $(X_n)$  su  $\Omega$ , con funzioni di ripartizione  $F_n$ , e una  $X$  con funzione di ripartizione  $F$ , le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (a)  $X_n$  converge ad  $X$  in distribuzione ;
- (b)  $\mathbf{E}[f(X_n)] \rightarrow_n \mathbf{E}[f(X)]$  per ogni  $f \in \mathcal{C}_b$  ;
- (c)  $F_n$ , come successione nel duale di  $\mathcal{C}_b$ ,  $w^*$ -converge ad  $F$  ;
- (d)  $F_n(b) - F_n(a) \rightarrow_n F(b) - F(a)$  , per ogni  $a < b$ , entrambi di continuità per  $F$ .

**Teorema 4.9.2 (Teorema della mappa continua)** *Data una funzione continua  $g$  su  $\mathbb{R}$ , se la successione di variabili aleatorie  $(X_n)$  converge in distribuzione ad  $X$ , allora la successione  $(g(X_n))$  converge in distribuzione a  $g(X)$ .*

**Definizione 4.9.2 (Convergenza in probabilità)** *Sia  $(X_n)$  una successione di variabili aleatorie reali sul comune spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

Diciamo che la  $(X_n)$  converge in probabilità ad  $X$  ( $X_n \xrightarrow{P} X$ ) se, per ogni  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

**Esempio.** Sia  $(Y_n)$  una successione di variabili aleatorie non correlate, con stesso valore atteso  $\mu$  e stessa varianza  $\sigma$ . La successione delle medie

$$X_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$$

converge in probabilità alla funzione costante  $X(\omega) = \mu$ . Questo risultato è conosciuto come la legge debole dei grandi numeri.

**Teorema 4.9.3** *Sia  $(X_n)$  una successione di variabili aleatorie su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Se  $(X_n)$  converge in probabilità alla variabile aleatoria  $X$ , allora converge ad  $X$  anche in distribuzione.*

*Viceversa, se la variabile aleatoria  $X$  è una costante, ed  $(X_n)$  converge ad  $X$  in distribuzione, la  $(X_n)$  converge ad  $X$  in probabilità.*

**Teorema 4.9.4 (Teorema della mappa continua)** *Per ogni funzione continua  $g$  su  $\mathbb{R}$ , se la successione di variabili aleatorie  $(X_n)$  converge in probabilità ad  $X$ , la successione  $(g(X_n))$  converge in probabilità a  $g(X)$ .*

**Definizione 4.9.3 (Convergenza quasi sicura)** *Sia  $(X_n)$  una successione di variabili aleatorie reali sul comune spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

*Diciamo che la successione  $(X_n)$  tende ad  $X$  quasi sicuramente, o quasi ovunque ( $X_n \xrightarrow{q.s.} X$ , o  $X_n \xrightarrow{q.o.} X$ ) se*

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

La convergenza quasi sicura implica la convergenza in probabilità, e quindi anche quella in distribuzione.

**Esempio.** Sia  $(X_n)$  una successione di variabili aleatorie in  $L^1(\Omega)$  indipendenti, identicamente distribuite. La successione

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbf{E}[X_k])$$

converge quasi sicuramente alla costante nulla. Questo risultato è conosciuto come la legge forte dei grandi numeri.

## Capitolo 5

# Trasformata di Fourier

### 5.1 Trasformate di Fourier di funzioni a variazione limitata e di misure

La forma classica della trasformata di Fourier di una  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbf{K})$  ( $\mathbf{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ ) è

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x) dx \quad (5.1)$$

che può essere sempre riscritta come integrale di Riemann-Stieltjes su  $\mathbb{R}$

$$g(\lambda) = \text{ARS} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} dF(x) \quad (5.2)$$

dove

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

In effetti l'integrale in (5.2) esiste perchè, per ogni fissato  $\lambda$ ,  $e^{-i\lambda x}$  è in  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbf{K})$ , e perchè  $V_a^x F = \int_{-\infty}^x |f(t)| dt$ , quindi limitata.

Ma perchè l'espressione (5.2) abbia senso, non occorre che  $F$  sia un integrale indefinito di funzione sommabile, ma basta che sia a variazione limitata su  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 5.1.1** *La  $g$  definita da (5.2) è detta trasformata di Fourier-Stieltjes della funzione generatrice  $F$ , a variazione limitata.*

La  $g$  può essere intesa come integrale di Lebesgue-Stieltjes, cioè:

$$g(\lambda) = \text{LS} \int e^{-i\lambda x} dF(x), \quad (5.3)$$



interpretazione che risulterà indispensabile in certi casi, che vedremo in 5.3.

In termini di misura, la (5.3) equivale all'integrale di Lebesgue-Stieltjes di  $e^{-i\lambda x}$  rispetto alla misura con segno generata da  $F$ .

Detta  $\mu$  tale misura, la (5.3) diventa

$$g(\lambda) = L \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} d\mu(x) \stackrel{def}{=} \hat{\mu}(\lambda). \quad (5.4)$$

In generale, non occorre passare attraverso una funzione generatrice. Presa infatti  $\mu$  misura con segno di Radon totalmente finita, possiamo porre:

$$\hat{\mu}(\lambda) = L \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} d\mu(x). \quad (5.5)$$

**Definizione 5.1.2** *La  $\hat{\mu}$  in (5.5), con  $\mu$  misura di Radon con segno, si dice trasformata di Fourier della  $\mu$ .*

## 5.2 Confronti e analogie fra trasformata classica e di misure

Come nel caso classico della  $g$  data dalla (5.1), anche la  $g$  data dalla (5.3) è uniformemente continua.

Inoltre  $g(0) = F(+\infty) - F(-\infty)$ ,  $|g(\lambda)| \leq V_{-\infty}^{+\infty} F$  per ogni  $\lambda$ .

Invece, in generale, il teorema di Riemann-Lebesgue, ossia: « la trasformata di Fourier  $g(\lambda)$  di una funzione sommabile su  $\mathbb{R}$  converge a 0 per  $\lambda$  tendente a  $\pm\infty$  » relativo alla trasformata classica di Fourier non sussiste.

Come semplice esempio, consideriamo la misura di Dirac concentrata in  $\alpha$ , cioè la misura  $\mu$  generata da  $H_\alpha(t) = 0$  per  $t < \alpha$ ,  $H_\alpha(t) = 1$  per  $t \geq \alpha$ . Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} dH_\alpha(x) = e^{-i\lambda\alpha} \quad (5.6)$$

Segue che  $\hat{\mu}(\lambda)$  è la costante 1 se  $\alpha = 0$ , altrimenti ruota a distanza 1 dallo zero: in ogni caso  $\hat{\mu}$  non converge a 0 per  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Altro esempio: sia  $F = \frac{1}{2}(H_{-1} + H_1)$  (lancio della moneta). Dalla (5.6) abbiamo

$$\hat{\mu}(\lambda) = \frac{1}{2}(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) = \cos \lambda$$

In generale, sia  $F$  la funzione di salto  $\sum_{x_j \leq x} h_j$  con  $\sum |h_j| < \infty$ , e  $\mu$  la misura di Lebesgue-Stieltjes associata ad  $F$ . La sua trasformata di Fourier

è  $\hat{\mu}(\lambda) = \sum h_j e^{-ix_j \lambda}$ . Poichè  $(h_j)$  è anche in  $l_2$ , allora  $\hat{\mu}(\lambda)$  è *pressochè periodica*.

Chiaramente,  $\hat{\mu}$  è periodica se gli  $x_j$  hanno ascissa intera.

Vi è un caso in cui si ritrova la (5.1).

**Proposizione 5.2.1** *Sia  $\nu$  una misura di Radon totalmente finita su  $\mathbb{R}$ , assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue  $\mu$  su  $\mathbb{R}$ .*

*Allora  $\hat{\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} d\nu(x)$  è uguale alla trasformata di Fourier (classica) della  $f$ , derivata di Radon-Nikodým di  $\nu$  rispetto a  $\mu$ .*

### 5.3 Convoluzione di funzioni BV sulla retta

Si sa che, se  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ , allora<sup>1</sup>

$$f(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - \xi) f_2(\xi) d\xi \quad (5.7)$$

è in  $L^1$ . Possiamo pertanto porre

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f, \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1, \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^x f_2$$

che sono tre funzioni a variazione limitata sulla retta.

Integriamo la (5.7) da  $-\infty$  a  $x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi.$$

Poichè la (5.7) mostra che  $f_1(t - \xi) f_2(\xi)$  è sommabile su  $\mathbb{R}^2$ , è applicabile il teorema di Fubini, che porge

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \xi) f_2(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left[ \int_{-\infty}^x f_1(t - \xi) dt \right] f_2(\xi) = \\ &= {}^{LS} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x - \xi) dF_2(\xi). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Quest'ultimo integrale esiste non soltanto per le funzioni assolutamente continue e limitate, ma anche per due funzioni qualsiasi a variazione limitata su tutta la retta.

---

<sup>1</sup>Sulla traccia di Kolmogorov e Fomin [20], pagg. 443-445

**Definizione 5.3.1** *L'espressione*

$$F(x) = {}^{LS} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x - \xi) dF_2(\xi)$$

dove  $F_1$  ed  $F_2$  sono a variazione limitata sulla retta, si dice loro convoluzione, e si denota con  $F_1 * F_2$ .

Facendo entrare in gioco le peculiarità dell'integrale di Lebesgue-Stieltjes, mostriamo che l'espressione (5.8) rappresenta una funzione definita per tutti gli  $x$ , e a variazione limitata sulla retta.

Infatti  $F_1$  è una funzione a variazione limitata, quindi è limitata e misurabile secondo Borel perché differenza di due funzioni monotone (che certamente lo sono). La misura generata da  $F_2$  è una misura di Radon con segno totalmente finita sulla retta. Inoltre, per una sequenza  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$  abbiamo

$$\begin{aligned} |F(x_{k-1}) - F(x_k)| &= |{}^{LS} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_1(x_{k-1} - \xi) - F_1(x_k - \xi)) dF_2(\xi)| \leq \\ &\leq {}^{LS} \int_{-\infty}^{+\infty} |(F_1(x_{k-1} - \xi) - F_1(x_k - \xi))| dV_{-\infty}^{\xi} F_2 \end{aligned}$$

da cui

$$V_{-\infty}^{+\infty} F \leq V_{-\infty}^{+\infty} F_1 V_{-\infty}^{+\infty} F_2$$

ossia anche  $F = F_1 * F_2$  è a variazione limitata.

L'operazione di convoluzione di funzioni a variazione limitata è commutativa e associativa.

Osserviamo che  $\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x - \xi) dF_2(\xi)$  in generale non è definito per ogni  $x$  se l'integrale è inteso nel senso di Riemann-Stieltjes. Infatti, se  $F_1$  ha un salto in  $\alpha$ , ed  $F_2$  ha un salto in  $\beta$ , nel punto  $x = \alpha + \beta$  è  $F_1(x - \beta) = F_1(\alpha)$ , e quindi  $F_1(x - \xi)$  ed  $F_2(\xi)$  hanno un salto in comune in  $\xi = \beta$ .

## 5.4 Trasformata di Fourier-Stieltjes della convoluzione

Di qui in avanti, utilizziamo la formula di trasformata di Fourier che si usa in probabilità, ossia

$$\phi(\lambda) = {}^{RS} \int e^{i\lambda x} dF(x) \quad (5.9)$$

Con questa scelta, la  $\phi$  è legata alla classica  $g$  fornita dalla (5.2) dalla semplice relazione

$$\phi(\lambda) = {}^{RS}\int e^{-i(-\lambda)x} dF(x) = g(-\lambda)$$

**Teorema 5.4.1** *Se  $F$  è la convoluzione di due funzioni  $F_1$  ed  $F_2$  a variazione limitata, e se  $g, g_1, g_2$  sono le loro trasformate di Fourier-Stieltjes, allora  $g(\lambda) = g_1(\lambda) g_2(\lambda)$ .*

**Dimostrazione** Sia  $F = F_1 * F_2$ ,  $[a, b]$  un intervallo, e sia  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$ . Allora, fissato  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= {}^{RS}\int_a^b e^{i\lambda x} dF(x) = \\ &= \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n e^{i\lambda x_k} [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \\ &= \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n e^{i\lambda x_k} {}^{LS}\int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(x_k - \xi) - F_1(x_{k-1} - \xi)] dF_2(\xi) = \\ &= {}^{LS}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n e^{i\lambda x_k} e^{-i\lambda \xi} [F_1(x_k - \xi) - F_1(x_{k-1} - \xi)] e^{i\lambda \xi} dF_2(\xi) = \\ &= {}^{LS}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n e^{i\lambda x_k - \lambda \xi} [F_1(x_k - \xi) - F_1(x_{k-1} - \xi)] e^{i\lambda \xi} dF_2(\xi) = \\ &= {}^{LS}\int_{-\infty}^{+\infty} {}^{RS}\int_a^b [e^{i\lambda(x-\xi)} dF_1(x - \xi)] e^{i\lambda \xi} dF_2(\xi) = \\ &= {}^{LS}\int_{-\infty}^{+\infty} {}^{RS}\int_{a-\xi}^{b-\xi} [e^{i\lambda(y)} dF_1(y)] e^{i\lambda \xi} dF_2(\xi) \end{aligned}$$

ossia

$${}^{RS}\int_a^b e^{i\lambda x} dF(x) = {}^{LS}\int_{-\infty}^{+\infty} {}^{RS}\int_{a-\xi}^{b-\xi} [e^{i\lambda(y)} dF_1(y)] e^{i\lambda \xi} dF_2(\xi).$$

Passando al limite per  $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$ , otteniamo

$${}^{RS}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dF(x) = {}^{RS}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dF_1(x) {}^{RS}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda \xi} dF_2(\xi)$$

ossia

$$g(\lambda) = g_1(\lambda) g_2(\lambda).$$

□

**Osservazione.** È noto dalla Teoria della probabilità che, se  $X$  ed  $Y$  sono due variabili aleatorie indipendenti, ed  $F_1, F_2$  le loro funzioni di ripartizione, allora alla variabile  $X+Y$  corrisponde la funzione di ripartizione  $F_1 * F_2$ . Il passaggio dalle funzioni di ripartizione alle loro trasformate di Fourier-Stieltjes permette di sostituire l'operazione di convoluzione con la più semplice e comoda moltiplicazione.

Per illustrare la procedura, considero le funzioni di ripartizione  $H_\alpha$  ed  $H_\beta$ . Le loro trasformate sono  $e^{i\alpha\lambda}$  ed  $e^{i\beta\lambda}$ , e il prodotto di queste è  $e^{i(\alpha+\beta)\lambda}$ , che è la trasformata di  $H_{\alpha+\beta}$ . Dunque  $H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta}$ .

## 5.5 Convoluzione di misure di Radon totalmente finite

Siano  $\nu_1, \nu_2$  due misure di Radon sulla retta reale totalmente finite. Indico con  $\nu_1 \otimes \nu_2$  la loro misura prodotto su  $\mathbb{R}^2$ .

Sia  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s(x, y) = x + y$ . Tale  $s$  è continua, e quindi anche misurabile.

La *convoluzione di  $\nu_1$  e  $\nu_2$* , denotata con  $\nu_1 * \nu_2$ , è definita<sup>2</sup> come la misura immagine mediante  $s$  della misura prodotto  $\nu_1 \otimes \nu_2$ .

Ovvero, per ogni boreliano  $H$  di  $\mathbb{R}$ ,

$$(\nu_1 * \nu_2)(H) = (\nu_1 \otimes \nu_2)(s^{-1}(H)).$$

La misura  $\nu_1 * \nu_2$  sopra definita è una misura totalmente finita di Radon sulla retta. Ovviamente, se  $\nu_1$  e  $\nu_2$  sono misure di probabilità, lo è anche  $\nu_1 * \nu_2$ .

In analogia col teorema 5.4.1, si ha:

**Teorema 5.5.1** *Se  $\nu$  è la convoluzione di due misure totalmente finite di Radon sulla retta  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , per le loro trasformate di Fourier vale la*

$$\hat{\nu}(\lambda) = \hat{\nu}_1(\lambda) \hat{\nu}_2(\lambda).$$

**Osservazione.** Data una funzione non decrescente e a variazione limitata su  $\mathbb{R}$ , la misura di Lebesgue-Stieltjes da essa generata è una misura di Radon totalmente finita.

Data quindi  $F$  non decrescente limitata, per la corrispondente misura di Lebesgue-Stieltjes  $\nu$ , per ogni  $H$  boreliano di  $\mathbb{R}$  vale:

$$\nu(H) = \int_{\mathbb{R}} \chi_H(x) dF(x).$$

---

<sup>2</sup>v. D.H.Fremlin [16], par. 257A.

In particolare, sia  $\nu = \nu_1 * \nu_2$ , ed  $H = ] - \infty, x]$ , con  $x \in \mathbb{R}$ . Abbiamo

$$\nu(H) = L \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_H(\xi) d\nu(\xi) = L \int_{-\infty}^x d(\nu_1 * \nu_2) = F(x)$$

dove  $F$  è la funzione generatrice di  $\nu_1 * \nu_2$ .

D'altra parte, per la definizione di convoluzione, risulta:

$$\begin{aligned} \nu(H) &= (\nu_1 * \nu_2)(] - \infty, x]) = (\nu_1 \otimes \nu_2)(\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \xi + \eta \in ] - \infty, x]\}) = \\ &= (\nu_1 \otimes \nu_2)(\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \xi \in ] - \infty, x - \eta]\}) = L \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{] - \infty, x - \eta]}(\xi) d(\nu_1 \otimes \nu_2(\xi, \eta)) = \\ &= L \int_{\mathbb{R}} \left( L \int_{\mathbb{R}} \chi_{] - \infty, x - \eta]}(\xi) d\nu_1(\xi) \right) d\nu_2(\eta) = L \int_{\mathbb{R}} \left( L \int_{-\infty}^{x - \eta} d\nu_1(\xi) \right) d\nu_2(\eta) = \\ &= L \int_{\mathbb{R}} F_1(x - \eta) d\nu_2(\eta) = {}^{LS} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x - \eta) dF_2(\eta) = (F_1 * F_2)(x). \end{aligned}$$

È così mostrato che la funzione generatrice  $F$  della misura  $\nu_1 * \nu_2$  è la convoluzione delle funzioni  $F_1, F_2$ , generatrici di  $\nu_1$  e  $\nu_2$ .  $\square$

## 5.6 Funzioni caratteristiche

**Definizione 5.6.1** Sia  $\nu$  una misura di probabilità di Radon su  $\mathbb{R}$ .

La funzione caratteristica di  $\nu$  è la funzione  $\phi_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definita dalla:

$$\phi_\nu(\lambda) = L \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\nu(x), \quad (5.10)$$

ovvero, in termini di trasformate di misure,  $\phi_\nu(\lambda) = \hat{\nu}(-\lambda)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Proposizione 5.6.1** Sia data una misura di probabilità di Radon  $\nu$  su  $\mathbb{R}$ , e sia  $\phi_\nu$  la sua funzione caratteristica. Allora:

- (a)  $\phi_\nu(0) = 1$  ;
- (b)  $|\phi(\lambda)| \leq 1$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (c)  $\phi(-\lambda) = \overline{\phi(\lambda)}$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 5.6.2** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità, ed  $X$  una variabile aleatoria reale su  $\Omega$ .

Chiamiamo funzione caratteristica di  $X$ , e la indichiamo con  $\phi_X$ , la funzione caratteristica della misura immagine  $\nu^X$  generata da  $X$ , cioè  $L \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\nu^X(x)$ , o, equivalentemente,  $\phi_X = {}^{LS} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dF_X(x)$ , con  $F_X$  funzione di ripartizione di  $X$ .

Fissata  $\lambda$ , l'attesa condizionata di  $e^{i\lambda X}$  è  $LS \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dF_X(x)$ . Pertanto:

$$\phi_X(\lambda) = \mathbf{E}(e^{i\lambda X}) = LS \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} dF_X(x).$$

**Continuità.** Tra le funzioni di ripartizione e le loro funzioni caratteristiche sussiste una corrispondenza biunivoca. Tale bijezione è « continua » nel senso che, se una successione di funzioni di ripartizione  $(F_n(x))$   $w^*$ -converge<sup>3</sup> ad una  $F(x)$ , allora la corrispondente successione di funzioni caratteristiche  $(\phi_n(\lambda))$  converge ad una  $\phi(\lambda)$ , e tale limite è la funzione caratteristica di  $F$ . Più precisamente, vale il seguente risultato.

**Teorema 5.6.1 (Teorema di continuità di Lévy)** *Una successione  $(X_n)$  di variabili aleatorie reali converge in distribuzione ad una variabile aleatoria  $X$  se e solo se la successione  $(\phi_{X_j})$  delle funzioni caratteristiche converge puntualmente ad una funzione  $\phi$  continua in 0. Tale  $\phi$  è la funzione caratteristica di  $X$ .*

**Formule di inversione.** Essendovi una corrispondenza biunivoca tra le funzioni di ripartizione e le funzioni caratteristiche, nota una di queste, è sempre possibile ricavare l'altra. La formula data dalla definizione di funzione caratteristica ci permette di determinare  $\phi$  data la funzione di ripartizione  $F$  (o la densità  $f$ ).

Per ricavare la  $F$  data  $\phi$ , può essere usato uno dei seguenti teoremi di inversione.

**Teorema 5.6.2** *Se la funzione caratteristica  $\phi_X$  è sommabile, allora  $F_X$  è assolutamente continua, e quindi  $X$  ha funzione di densità  $f_X$  data dalla*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} L \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt$$

**Teorema 5.6.3 (Lévy)** *Sia  $\phi_X$  la funzione caratteristica della funzione di ripartizione  $F_X$ , e siano  $a, b$ , con  $a < b$ , due punti di continuità per  $F_X$ . Allora*

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} C \int \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_X(t) dt \quad (5.11)$$

dove  $C \int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f$  (ossia integrale di Cauchy in valor principale).

Il teorema 5.6.3 ha la seguente forma equivalente<sup>4</sup>:

---

<sup>3</sup>v. Teorema 4.7.1.

<sup>4</sup>Vedi p.es. L. Daboni [10].

**Teorema 5.6.4 (Lévy)** Sia  $\nu$  una distribuzione di probabilità reale, ed  $F$  la sua funzione di ripartizione. Dati  $a, h \in \mathbb{R}$  tali che  $F(x)$  sia continua nei due punti  $a - h$  e  $a + h$ , si ha:

$$F(a + h) - F(a - h) = \frac{1}{\pi} C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(h\lambda)}{\lambda} e^{-ia\lambda} \phi(\lambda) d\lambda \quad (5.12)$$

**Teorema 5.6.5** Se  $a$  è un punto di discontinuità di  $F_X$ , allora

$$F_X(a) - F_X(a - 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} L \int_{-T}^{+T} e^{-ita} \phi_X(t) dt$$

**Teorema 5.6.6 (Gil-Pelaez)** Sia data  $X$  variabile aleatoria reale, e sia  $x$  un punto di continuità di  $F_X$ . Allora

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} L \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[e^{-itx} \phi_X(t)]}{t} dt.$$

Grazie al teorema 5.6.3 di Lévy, la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria  $X$  è univocamente determinata nei suoi punti di continuità dalla funzione caratteristica di  $X$ , e il valore di essa nei suoi punti di discontinuità, che sono al più una infinità numerabile, non interviene nei valori della distribuzione.

Inoltre, la formula (5.11) resta valida per l'inversione delle trasformate di Fourier-Stieltjes di ogni funzione  $F$  a variazione limitata sulla retta.

## 5.7 Funzioni caratteristiche e momenti

Sia  $X$  variabile aleatoria,  $F$  la sua funzione di ripartizione, e  $g$   $LS$ -integrabile su  $\mathbb{R}$ . L'  $L \int_{\Omega} g \circ X dP = L^S \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$  è il valor medio della  $g$  rispetto alla distribuzione generata dalla  $F$ , e si indica con  $\mathbf{E}[g(X)]$ .

Se  $X$  è la variabile discreta  $X(\omega) = \sum_k x_k \chi_{E_k}(\omega)$ , allora  $F(x) = \sum_{x_k \leq x} m_k$ , dove  $m_k = P(E_k)$ . Sia  $\sum_k |g(x_k)| < \infty$ . Abbiamo allora

$$L \int_{\Omega} g(X) dP = L^S \int_{\mathbb{R}} g(x) d\left(\sum_{x_k \leq x} m_k\right) = \sum_k g(x_k) m_k$$

Se  $X$  è assolutamente continua, nel senso che lo è la sua funzione di ripartizione  $F$ , ed  $f \stackrel{q.o.}{=} F'$  (densità), risulta

$$\mathbf{E}[g(X)] = L \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx.$$



**Definizione 5.7.1** Se  $x^n$  è  $LS$ -integrabile rispetto ad  $F(x)$ , si definisce il momento di ordine  $n$  della distribuzione di  $X$

$$c_n := \mathbf{E}[X^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n dF(x).$$

**Teorema 5.7.1** Sia  $\hat{F}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$  la funzione caratteristica della distribuzione  $\mu$  generata da  $F$  (def. 5.6.1).

Se esiste il momento di ordine  $n$  della  $\mu$  allora, per ogni intero non negativo  $k \leq n$ , risulta

$$\hat{F}^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} dF(x).$$

In effetti, la formula di derivazione rispetto a  $t$  sotto il segno di integrale per una  $f(x, t)$  vale per ogni misura di Lebesgue-Stieltjes presente su  $\mathbb{R}$ .<sup>5</sup> Risulta:

$$\hat{F}^{(k)}(0) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k dF(x) = i^k c_k.$$

Pertanto, se esistono tutti i momenti  $c_k$  della  $F$ , si può scrivere la serie di McLaurin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k c_k t^k}{k!}. \quad (5.13)$$

Una condizione sufficiente perché questa serie converga a  $\hat{F}(t)$  per ogni  $t$ , è che, per una costante  $M$ , risulti  $|\hat{F}^{(n)}(t)| \leq M^n$  per ogni  $n \in \mathbf{N}$ , e  $t \in \mathbb{R}$ . E per questo basta che il momento assoluto  $n$ -esimo  $\int_{\mathbb{R}} |x^n| dF(x) \leq M^n$ .

Il seguente esempio mostra che la funzione caratteristica di una variabile aleatoria (Definizione 5.6.2) limitata, con funzione di ripartizione assolutamente continua, è una serie intera.

Sia in effetti  $a$  tale che  $-a \leq \inf X$ ,  $a \geq \sup X$ , così  $F(x) = 0$  per  $x \leq -a$ ,  $F(x) = 1$  per  $x \geq a$ . Sia  $F'(x) \stackrel{a.o.}{=} f(x) \geq 0$ . Allora il momento assoluto  $n$ -esimo è  $\int_{-a}^a |x^n| f(x) dx \leq a^n \int_{-a}^a f(x) dx = a^n (F(a) - F(-a)) = a^n$ , e

---

<sup>5</sup> **Lemma** (D.Fremlin [15], 123D) Sia  $(X, \Sigma, \mu)$  uno spazio misurale, ed  $]a, b[$  un intervallo aperto non vuoto in  $\mathbb{R}$ . Sia  $f : X \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- (i) l'integrale  $F(t) = \int_X f(x, t) \mu(dx)$  è definito per ogni  $t \in ]a, b[$  ;
- (ii) la derivata parziale  $\frac{\partial f}{\partial t}$  di  $f$  è definita ovunque in  $X \times ]a, b[$  ;
- (iii) esiste una funzione  $\mu$ -sommabile  $g : X \rightarrow [0, +\infty[$  tale che  $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$  per ogni  $(x, t)$  in  $X \times ]a, b[$  ;

allora la derivata  $F'(t)$  e l'integrale  $\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mu(dx)$  esistono per ogni  $t \in ]a, b[$ , e sono uguali.

questo mostra che la serie (5.13) converge alla  $\hat{F}$ .

Si hanno utili risultati in condizioni meno restrittive. Per esempio, consideriamo una variabile aleatoria  $X$  con funzione di ripartizione  $F(x) = (1 - e^{-x})\chi_{[0, +\infty[}$ .

$$c_n = LS \int_{\mathbb{R}} x^n d((1 - e^{-x})\chi_{[0, +\infty[}) = L \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!,$$

quindi

$$\hat{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n c_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n,$$

che converge a

$$\frac{1}{1 - it} = \frac{1}{1 + t^2} + i \frac{t}{1 + t^2} \quad \text{per } |t| < 1.$$

Tuttavia tale funzione è effettivamente la funzione caratteristica di  $X$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Nota: il problema dei momenti.** Tale problema consiste nel trovare, se esiste, una distribuzione cumulativa di probabilità tale che i suoi momenti siano una successione assegnata.

Si hanno i sottoproblemi di Hamburger, di Stieltjes, e di Hausdorff, secondo che la variabile  $X$  possa assumere valori arbitrari in  $\mathbb{R}$ , o q.o. solo in  $[0, +\infty[$ , o in  $[0, 1]$ .

## Capitolo 6

# L'integrale di Riemann-Stieltjes in ambiente vettoriale

### 6.1 L'integrale di Riemann-Stieltjes vettoriale su un intervallo reale

L'integrale di Riemann-Stieltjes è stato ambientato già nei primi anni del '900 in spazi più generali (Hilbert). L'aspetto formale  ${}^{RS}\int f(t)dg(t)$  è il medesimo di quello in ambiente scalare, ma qui  $f(t) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $g(t) \in X$ , dove  $X$  e  $Y$  sono spazi di Banach.

In questo caso, l'integrale esiste se le somme di Riemann-Stieltjes

$$RS(P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(t_k) - g(t_{k-1})), \quad P = ([t], \xi),$$

tendono ad un  $y \in Y$  al tendere a 0 della finezza della partizione marcata  $P$ . Il limite è inteso nella norma  $\|\cdot\|_Y$ , ossia deve essere

$$\left\| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(t_k) - g(t_{k-1})) - y \right\|_Y < \varepsilon \quad \forall P = ([t], \xi) \in \mathcal{P}, \text{ con } |[t]| < \delta.$$

Questa estensione trova applicazione nello studio delle forme differenziali in generale, e nella teoria spettrale in particolare.

Valgono ancora i due risultati di uso comune nel campo scalare. Precisamente:

**Teorema 6.1.1** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  continua<sup>1</sup>, e  $g$  sia a variazione totale limitata su  $[a, b]$ . Allora*

---

<sup>1</sup>cioè per ogni  $t_0 \in [a, b]$ ,  $f(t)$  tenda nella norma uniforme  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$  degli operatori ad  $f(t_0)$  per  $t \rightarrow t_0$

1)  $f$  è integrabile rispetto a  $g$  su  $[a, b]$ .

2)  $\| \int_a^b f(t) dg(t) \|_Y \leq M V_a^b g$ , dove  $M = \max_{t \in [a, b]} \|f(t)\|_{\mathcal{L}}$ .

**Proposizione 6.1.1** Sia  $X$  è uno spazio di Banach tale che ogni funzione assolutamente continua da un intervallo  $[a, b]$  ad  $X$  è derivabile quasi dappertutto<sup>2</sup>.

Allora risulta  $g(t) = g(a) + \int_a^t g'(u) du$ , per ogni  $t \in [a, b]$ , e  $V_a^b g = \int_a^b \|g'(u)\| du$ .<sup>3</sup>

In tal caso, se su  $[a, b]$  la  $f$  è continua e la  $g$  è assolutamente continua, risulta

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t) dt \quad (6.1)$$

**Dimostrazione** Sia infatti dato  $\varepsilon > 0$ . Sia  $\|f(t') - f(t'')\|_{\mathcal{L}} < \varepsilon/V_a^b g$  per  $|t' - t''| < \delta$ . Sia  $[t]$  una partizione marcata di  $[a, b]$ , di finezza della partizione minore di  $\delta$ .

Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_a^b f(t) g'(t) dt - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(t_k) - g(t_{k-1})) \right\| = \\ & = \left\| \int_a^b f(t) g'(t) dt - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t) dt \right\| = \\ & = \left\| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) g'(t) dt - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t) dt \right\| = \\ & = \left\| \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(t) - f(\xi_k)) g'(t) dt \right\| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|f(t) - f(\xi_k)\|_{\mathcal{L}} \|g'(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{V_a^b g} V_a^b g = \varepsilon \end{aligned}$$

□

<sup>2</sup>Un tale spazio è detto spazio con la RNP. Godono di questa proprietà  $\mathbb{R}$  (Lebesgue, 1904),  $\mathbb{C}$ , gli spazi di dimensione finita, tutti gli spazi di Hilbert, gli  $l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Non ne godono  $\mathcal{C}([a, b])$ ,  $L^1([a, b])$ ,  $BV_0([a, b])$ ,  $\mathcal{L}(l_2)$ . Vedi J. Diestel, J.J. Uhl Jr., Vector Measures, 1977, pagg. 217-219.

<sup>3</sup> $\int^B$  indica l'integrale di Bochner-Lebesgue. Può essere definito esattamente come in 2.2, scegliendo come  $c_1, \dots, c_n$  elementi di uno spazio di Banach  $X$ , e sostituendo il valore assoluto della definizione 2.2.2 con la norma su  $X$ .

## 6.2 L'integrale di Riemann-Stieltjes vettoriale su un dominio rettangolare di $\mathbb{C}$

Siano  $X, Y$  spazi di Banach, ed  $R = R(a < x \leq b, c < y \leq d) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .

È possibile estendere le definizioni date nella sezione 3.5 nel modo seguente.

Siano  $f$  e  $g$  funzioni limitate su  $\bar{R}$ , con  $f(t, u) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $g(t, u) \in X$ . Sia, come nella (3.7),

$$G(R_{h,k}) = g(t_h, u_k) - g(t_h, u_{k-1}) - g(t_{h-1}, u_k) + g(t_{h-1}, u_{k-1}).$$

**Definizione 6.2.1** Diciamo che  $f$  è Riemann-Stieltjes integrabile nel senso di Fréchet (o in senso ristretto) rispetto a  $g$  se il net di dominio  $\mathcal{P}_1^2$

$$\sum_{h=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_h, \eta_k) G(R_{h,k}), \quad \text{con } (\xi_h, \eta_k) = (\xi, \eta)(R_{h,k}), \quad (6.2)$$

converge ad un limite finito  $y \in Y$ .

In tal caso, indichiamo tale  $y$  con

$${}^{FRS} \int \int_R f(t, u) dg(t, u). \quad (6.3)$$

**Definizione 6.2.2** Diciamo che  $f$  è Riemann-Stieltjes integrabile o in senso non ristretto rispetto a  $g$  se il net di dominio  $\mathcal{P}^2$

$$\sum_{h=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_{h,k}, \eta_{h,k}) G(R_{h,k}), \quad \text{con } (\xi_{h,k}, \eta_{h,k}) = (\xi, \eta)(R_{h,k}), \quad (6.4)$$

converge ad un  $y \in Y$ , e tale limite, se esiste, è detto l'integrale di Riemann-Stieltjes non ristretto di  $f$  rispetto a  $g$ , ed indicato con il simbolo

$${}^{RS} \int \int_R f(t, u) dg(t, u). \quad (6.5)$$

**Nota.** In entrambi i casi, il limite è inteso nella norma  $\|\cdot\|_Y$ , ovvero

$$\left\| \sum_{h,k} f((\xi, \eta)(R_{h,k})) G(R_{h,k}) - y \right\|_Y < \varepsilon \quad \forall P = ([z], (\xi, \eta)), \|[z]\| < \delta$$

con  $P \in \mathcal{P}_1^2$  e  $(\xi, \eta)(R_{h,k}) = (\xi_h, \eta_k)$  (integrale ristretto), ovvero  $P \in \mathcal{P}^2$  e  $(\xi, \eta)(R_{h,k}) = (\xi_{h,k}, \eta_{h,k})$  (integrale non ristretto).

Queste estensioni troveranno applicazione in seguito, nella teoria spettrale degli operatori lineari normali in uno spazio di Hilbert.

## Capitolo 7

# Forme differenziali e misure spettrali

### 7.1 Forme differenziali in spazi astratti

**Definizione 7.1.1** <sup>1</sup> Siano  $X, Y$  spazi di Banach, ed  $\Omega$  un aperto in  $X$ . Una forma differenziale da  $\Omega$  ad  $Y$  è una funzione continua  $\omega$  da  $\Omega$  ad  $\mathcal{L}(X, Y)$ . Si indica quasi sempre con  $\omega(x)dx$ .

Rispetto alla derivazione, vi sono due tipi fondamentali di forme differenziali.

**Definizione 7.1.2** Una forma differenziale  $\omega$  da  $\Omega$  ad  $Y$  è detta esatta se esiste una funzione  $F : \Omega \rightarrow Y$  derivabile nel senso di Fréchet, con derivata  $F'(x) = \omega(x)$  per ogni  $x \in \Omega$ . Ogni tale  $F$  è detta primitiva di  $\omega$ .

**Definizione 7.1.3** Una forma differenziale  $\omega$  da  $\Omega$  ad  $Y$  è detta localmente esatta se per ogni  $x \in \Omega$  esistono un intorno  $U$  di  $x$  ed una funzione  $F : U \rightarrow Y$ , derivabile, con derivata  $F'(x) = \omega(x)$  per ogni  $x \in U$ .

### 7.2 L'integrale curvilineo come integrale di Stieltjes in ambiente vettoriale

Sia  $\omega$  una forma differenziale dall'aperto  $\Omega$  in  $X$  ad  $Y$ , e sia  $\gamma$  un cammino rettificabile di intervallo base  $[a, b]$  a valori in  $\Omega$ .

**Definizione 7.2.1** Con integrale curvilineo di  $\omega$  lungo  $\gamma$  si intende l'integrale di Riemann-Stieltjes su  $[a, b]$  della  $\omega \circ \gamma$  rispetto a  $\gamma$ . Lo si denota con  $\int_{\gamma} \omega$ , o con  $\int_{\gamma} \omega(x)dx$ , intendendo appunto  ${}^{RS}\int_a^b \omega(\gamma(t))d\gamma(t)$ .

---

<sup>1</sup>Seguendo H.Cartan [6].

Poiché un cammino è sottointeso continuo,  $\omega \circ \gamma$  è continua, ed essendo  $\gamma$  rettificabile (cioè a variazione limitata), per il teorema 6.1.1, l'integrale curvilineo  $\int_{\gamma} \omega$  esiste, ed è maggiorato in norma da  $KL_{\gamma}$ , dove  $K = \max_{t \in [a,b]} \|\omega(\gamma(t))\|_{\mathcal{L}}$  e  $L_{\gamma}$  (lunghezza del cammino  $\gamma$ ) è la variazione totale di  $\gamma$  su  $[a, b]$ .

**Definizione 7.2.2** *Dico che i cammini  $\gamma$  su  $[a, b]$  e  $\hat{\gamma}$  su  $[\hat{a}, \hat{b}]$  sono equivalenti se, per ogni decomposizione  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$  esiste una decomposizione  $\hat{a} = \hat{s}_0 \leq \hat{s}_1 \leq \dots \leq \hat{s}_n = \hat{b}$  tale che  $\hat{\gamma}(\hat{s}_k) = \gamma(s_k)$ , per ogni  $k = 0, 1, \dots, n$  e, viceversa, per ogni  $\hat{a} = \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \dots < \hat{t}_m = \hat{b}$  esiste una  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = b$  siffatta da aversi  $\gamma(t_j) = \hat{\gamma}(\hat{t}_j)$  per ogni  $j = 0, 1, \dots, m$ .*

Se  $\gamma$  e  $\hat{\gamma}$  sono equivalenti, descrivono lo stesso arco. Si ha  $L_{\gamma} = L_{\hat{\gamma}}$ , e  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\hat{\gamma}} \omega$  per ogni forma differenziale  $\omega$  il cui dominio include l'arco.

**Proposizione 7.2.1** *Se  $X$  ha la RNP, e  $\gamma$  è un cammino rettificabile, allora esiste un cammino  $\alpha$  assolutamente continuo equivalente a  $\gamma$ .*

Segue dalla proposizione 6.1.1 il seguente

**Corollario 7.2.1** *L'integrale curvilineo di una forma differenziale lungo un cammino rettificabile in uno spazio con la RNP si può sempre trasformare in un integrale di Bochner-Lebesgue del tipo  $\int^B \omega(\alpha(t))\alpha'(t)dt$ .*

## 7.3 Forme integrabili

**Definizione 7.3.1** *Sia ora  $\Omega \subset X$  un aperto connesso. Una forma differenziale  $\omega$  da  $\Omega$  ad  $Y$  si dice integrabile se il suo integrale lungo un arbitrario laccio in  $\Omega$  è lo 0 di  $Y$ .*

Poiché connessione e connessione per archi di un aperto in uno spazio di Banach si equivalgono, tale condizione equivale alla seguente:

*siano  $x_1$  e  $x_2$  arbitrari punti in  $\Omega$ . L'integrale curvilineo della  $\omega$  lungo due cammini non varia se essi hanno in comune il punto iniziale  $x_1$  e il punto terminale  $x_2$ .*

In questo modo, fissando un punto  $x_0$  in  $\Omega$ , resta ben definita la funzione a valori in  $Y$  che associa ad ogni  $x \in \Omega$  l'integrale curvilineo di  $\omega$  lungo un cammino arbitrario di estremi  $x_0$  ed  $x$ . Tale funzione dicesi *potenziale di  $\omega$  rispetto al punto  $x_0$* .

**Teorema 7.3.1** *Una forma differenziale  $\omega$  sull'aperto connesso  $\Omega$  è integrabile (equivalentemente ammette potenziale) se e solo se è esatta. In tal caso ogni potenziale di  $\omega$  è una sua primitiva.*

## 7.4 Omotopia, forme chiuse e forme irrotazionali

**Definizione 7.4.1** Sia  $A$  un sottoinsieme dello spazio di Banach  $X$ . Due cammini  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  di comune intervallo base  $[a, b]$  si dicono omotopi in  $A$  se esiste una funzione continua  $\Gamma = \Gamma(t, \alpha)$ , definita sul rettangolo  $[a, b] \times [0, 1]$  di  $\mathbb{R}^2$  e a valori in  $A$ , tale che

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &= \Gamma(t, 0) \\ \gamma_1(t) &= \Gamma(t, 1)\end{aligned}$$

per ogni  $t \in [a, b]$ .

La funzione  $\Gamma$  dicesi omotopia di estremi  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

Al variare di  $\alpha$  tra 0 e 1, i cammini  $\gamma_\alpha(t) = \Gamma(t, \alpha)$  su  $[a, b]$  rappresentano una deformazione continua di  $\gamma_0$  in  $\gamma_1$ , che non esce da  $A$ .

Se  $\Gamma(t, \alpha)$  è un'omotopia in cui  $\Gamma(a, \alpha)$  e  $\Gamma(b, \alpha)$  sono costanti in  $\alpha$ , tutti i cammini  $\gamma_\alpha$  individuati dall'omotopia hanno i medesimi estremi, e l'omotopia si dice *a estremi fissati*.

Se  $\Gamma(t, \alpha)$  è un'omotopia in cui  $\Gamma(a, \alpha) = \Gamma(b, \alpha)$  per ogni  $\alpha$  in  $[0, 1]$ , tutti i cammini  $\gamma_\alpha$  sono lacci, e si parla di *omotopia di lacci*.

Se  $\Gamma$  è un'omotopia di lacci di estremi  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ , con  $\gamma_1$  costante (cioè la sua immagine si riduce ad un punto), allora si dice che  $\gamma_0$  è *omotopo ad un punto*, o *contrattibile*.

**Definizione 7.4.2** Sia  $\omega$  una forma differenziale sull'aperto  $\Omega$ . Se l'integrale curvilineo di  $\omega$  si annulla lungo ogni laccio contrattibile in  $\Omega$ , allora  $\omega$  è detta chiusa<sup>2</sup>.

Sussiste il seguente teorema:

**Teorema 7.4.1** una forma differenziale è chiusa se e solo se è localmente esatta.

Altre equivalenze fondamentali sono date dalla seguente proposizione.

**Proposizione 7.4.1** Sia  $\omega$  una forma differenziale sull'aperto  $\Omega$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a)  $\omega$  è chiusa;
- (b)  $\int_\gamma \omega$  è invariante per omotopie ad estremi fissati;
- (c)  $\int_\gamma \omega$  è invariante per omotopie di lacci.

---

<sup>2</sup> H. Cartan, Op. cit.



**Nota (Forme irrotazionali).** Sia  $\omega$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , cioè, per ogni  $x \in \Omega$ , esista un operatore lineare limitato  $\omega'(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$  definito dalla  $\omega(x+h) = \omega(x) + \omega'(x)h + o(h)$ , ed  $\omega'(x)$  sia una funzione continua in  $x$  da  $\Omega$  a  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ .

Ad  $\omega'(x)$  resta associata la funzione bilineare <sup>3</sup>  $(\omega'(x)u)v$ , con  $u, v \in X$ .

Se tale funzione è simmetrica, nel senso che

$$(\omega'(x)u)v = (\omega'(x)v)u \quad \text{per ogni } x \in \Omega, \text{ ed } u, v \in X, \quad (7.1)$$

allora la  $\omega$  si dice *irrotazionale*.

Sussiste l'equivalenza:

se  $\omega$  è di classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\omega$  è chiusa se e solo se è irrotazionale .

Nel caso in cui  $X$  abbia dimensione finita, cioè  $\omega(x) = (A_1(x), \dots, A_n(x))$ , con le  $A_j : \Omega \rightarrow Y$ , la (7.1) equivale alle  $\partial A_j / \partial x_k = \partial A_k / \partial x_j$  per ogni  $j, k$  (condizioni di compatibilità della forma).

## 7.5 Spettro e risolvente di un elemento di un'algebra di Banach

**Definizione 7.5.1** Un'algebra  $(X; +, \cdot)$  è un'algebra di Banach <sup>4</sup> se

- i) su  $X$  è definita una norma tale che  $(X; +)$  sia uno spazio di Banach ;
- ii)  $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$  per ogni  $x, y \in X$ ;
- iii) se  $X$  possiede unità  $e$ ,  $\|e\| = 1$  .

Esempio per eccellenza di algebra di Banach con unità è l'algebra (in generale non commutativa)  $\mathcal{L}(B)$  degli operatori lineari continui definiti sull'intero spazio di Banach  $B$ .

In tutto il seguito, supporremo che  $X$  sia un'algebra di Banach su  $\mathbb{C}$ , non triviale e con unità  $e$ .

**Definizione 7.5.2** Sia  $x \in X$ . L'insieme dei  $\lambda \in \mathbb{C}$  per cui  $\lambda e - x$  ha inverso, cioè dei  $\lambda$  per cui esiste  $R_\lambda \in X$ , con  $R_\lambda(\lambda e - x) = (\lambda e - x)R_\lambda = e$ , è detto l'insieme risolvente di  $x$ , e lo indichiamo con  $\varrho(x)$ .

La funzione che a  $\lambda \in \varrho(x)$  associa  $R_\lambda = (\lambda e - x)^{-1}$ , è detta la risolvente di  $x$ .

<sup>3</sup> si veda Kolmogorov e Fomin [20], Op. cit, pp. 481-482.

<sup>4</sup>Per una rapida trattazione si veda V.M. Tychomirov in appendice al Kolmogorov e Fomin [20] (op. cit.)

**Definizione 7.5.3** Sia  $x \in X$ . L'insieme  $\mathbb{C} \setminus \varrho(x)$  è detto spettro di  $x$ , e lo indichiamo con  $\sigma(x)$ .

Osserviamo che, se  $\lambda, \mu$  sono in  $\varrho(x)$ ,  $R_\lambda$  ed  $R_\mu$  commutano, e commutano con  $x$ .

**Teorema 7.5.1** Lo spettro  $\sigma(x)$  è compatto.

**Dimostrazione** In effetti, se  $\|x\| < 1$ , allora  $e + x + x^2 + \dots$  è una serie convergente e  $(e - x)(e + x + x^2 + \dots) = (e + x + x^2 + \dots)(e - x) = e$ . Questo mostra che  $(e - x)$  è regolare se  $\|x\| < 1$ .

Fissato  $x \in X$ , sia  $|\lambda| > \|x\|$ . Allora  $\frac{\|x\|}{\lambda} < 1$ , e quindi

$$\frac{1}{\lambda} \left( e + \frac{x}{\lambda} + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 + \dots \right) = \frac{1}{\lambda} \left( e - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = (\lambda e - x)^{-1} = R_\lambda \quad (7.2)$$

quindi  $\sigma(x) \subset B_0^-(\|x\|)$

Abbiamo così mostrato che  $\sigma(x)$  è limitato. Resta da vedere che è chiuso. Allo scopo sia  $\lambda \in \varrho(x)$ , e  $\mu \in B_\lambda^\circ(\frac{1}{\|R_\lambda\|})$ . Abbiamo

$$R_\mu = R_\lambda(e + (\lambda - \mu)R_\lambda + (\lambda - \mu)^2 R_\lambda^2 + \dots) \quad (7.3)$$

che si può verificare con semplici passaggi algebrici, dopo aver notato che la serie in (7.3) converge a  $(e - (\lambda - \mu)R_\lambda)^{-1}$ .

Dunque ogni punto del risolvente è centro di una palla aperta, tutta contenuta in esso.

È quindi mostrato che lo spettro di  $x$  è chiuso e limitato in  $\mathbb{C}$ , e quindi compatto.  $\square$

Vedremo più avanti che non è mai vuoto.

## 7.6 La forma differenziale $R_\lambda d\lambda$

Sia  $X$  uno spazio di Banach complesso. Ogni fissato  $x \in X$  può essere considerato come un operatore lineare continuo su  $\mathbb{C}$  a valori in  $X$ , la cui azione è definita da  $x(\alpha) = \alpha x$  (moltiplicazione scalare di  $x$  per  $\alpha$ ).

In questo senso, una funzione continua  $\omega$  da un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{C}$  a valori in  $X$  può essere sempre vista come forma differenziale da  $\Omega$  ad  $X$  nel senso di H. Cartan [6].

Pertanto, se  $X$  è inoltre un'algebra di Banach complessa, e  $T$  un suo elemento fissato, la risolvente  $\lambda \in \varrho(T) \mapsto R_\lambda$  diventa la forma differenziale  $R_\lambda d\lambda$ , dal risolvente di  $T$  ad  $X$ . La continuità di  $R_\lambda$  si ottiene dalla 7.3.

Si ha il seguente risultato:

**Teorema 7.6.1** *la forma differenziale  $R_\lambda d\lambda$  dal risolvente di  $T$  ad  $X$  è chiusa.*

**Dimostrazione** Fissato  $\lambda_0 \in \varrho(T)$ , la (7.3), in un intorno di  $\lambda_0$ , diventa:

$$R_\lambda = R_{\lambda_0}(e - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0)^2 R_{\lambda_0}^2 - (\lambda - \lambda_0)^3 R_{\lambda_0}^3 + \dots).$$

In analogia con le serie di potenze a valori scalari, deduciamo, per la forma  $R_\lambda d\lambda$ , la primitiva locale

$$R_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0) - \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 R_{\lambda_0} + \frac{1}{3}(\lambda - \lambda_0)^3 R_{\lambda_0}^2 - \frac{1}{4}(\lambda - \lambda_0)^4 R_{\lambda_0}^3 + \dots).$$

□

Come elegante applicazione di questo teorema, dimostriamo che vale il

**Teorema 7.6.2** *lo spettro di  $x \in X$  è non vuoto.*

**Dimostrazione.** Sia  $x \in X$ . Supponiamo che lo spettro di  $x$  sia vuoto. Esiste allora un'omotopia  $\Gamma(t, \alpha)$  di cammini circolari contenuta nel risolvente, con  $\Gamma(t, 0)$  coincidente con l'origine, e  $\Gamma(t, 1)$  un cammino che parametrizza il cerchio di raggio  $r$ , con  $r > \|x\|$ .

La serie (7.2) converge uniformemente sul cerchio di raggio  $r$ , perché  $r > \|x\|$ . L'integrazione termine a termine porge  $2\pi i e$  per il primo termine  $\frac{e}{z}$ , e 0 per i successivi  $\frac{x^k}{z^{k+1}}$ .

Essendo la forma chiusa, e il laccio terminale  $\Gamma(t, 1)$  omotopo al laccio nullo, avremo  $2\pi i e = 0$ , così  $e = 0$ , contro l'ipotesi che l'algebra non sia triviale. □

## 7.7 Idempotenti fondamentali

**Definizione 7.7.1** *Sia  $x \in X$ , e  $\sigma(x)$  il suo spettro. Si chiama insieme spettrale (o parte isolata dello spettro) di  $x$  un sottoinsieme chiuso di  $\sigma(x)$ , tale che il suo complementare rispetto a  $\sigma(x)$  è ancora chiuso. In particolare, il vuoto è un insieme spettrale.*

**Nota.** Il termine *insieme spettrale* è così definito da N. Dunford e J.T. Schwartz, e da H.H. Schaefer, ma non da F. Riesz, che lo chiama *parte isolata dello spettro*.

Ogni insieme spettrale può essere racchiuso in un laccio semplice rettificabile che non contiene nessun altro punto dello spettro.

**Teorema 7.7.1** *Sia  $x \in X$  ed  $R$  la relativa risolvente. Sia  $A$  un insieme spettrale in  $\sigma(x)$ , ed  $\alpha$  un laccio semplice rettificabile che cinge  $A$ , e che non è restrittivo supporre assolutamente continuo. Poniamo:*

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha R_z dz. \quad (7.4)$$

Tale  $p$  è un idempotente dell'algebra  $X$ .

**Dimostrazione** Sia  $\beta$  un laccio assolutamente continuo omotopo ad  $\alpha$  in  $\varrho(x)$  interno al circuito descritto da  $\alpha$ . Per l'omotopia abbiamo

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} R_z dz.$$

Sia  $\alpha(u)$  un punto fissato sul primo arco. Dalla formula integrale di Cauchy segue che

$$\int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} \frac{\beta'(t)}{\beta(t) - \alpha(u)} dt = 0,$$

e, analogamente,

$$\int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} \frac{\alpha'(u)}{\alpha(u) - \beta(t)} du = 2\pi i.$$

Abbiamo pertanto, per il teorema di Fubini <sup>5</sup>

$$\begin{aligned} (2\pi i)^2 p^2 &= \int_{\alpha} R_z dz \int_{\beta} R_z dz = L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} R_{\alpha(u)} \alpha'(u) du \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} R_{\beta(t)} \beta'(t) dt = \\ &= L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} R_{\alpha(u)} R_{\beta(t)} \alpha'(u) \beta'(t) dudt. \end{aligned}$$

Applicando ora l'identità di Hilbert, e nuovamente Fubini, questo integrale diventa:

$$\begin{aligned} &L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} \frac{R_{\alpha(u)} - R_{\beta(t)}}{\beta(t) - \alpha(u)} \alpha'(u) \beta'(t) dudt = \\ &= L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} \frac{R_{\alpha(u)}}{\beta(t) - \alpha(u)} \alpha'(u) \beta'(t) dudt - L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} \frac{R_{\beta(t)}}{\beta(t) - \alpha(u)} \alpha'(u) \beta'(t) dudt = \\ &= L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} R_{\alpha(u)} \left( L \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} \frac{\beta'(t)}{\beta(t) - \alpha(u)} dt \right) \alpha'(u) du + L \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} R_{\beta(t)} \left( L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} \frac{\alpha'(u)}{\alpha(u) - \beta(t)} du \right) \beta'(t) dt = \\ &= L \int_{a_{\alpha}}^{b_{\alpha}} R_{\alpha(u)} 0 \alpha'(u) du + L \int_{a_{\beta}}^{b_{\beta}} R_{\beta(t)} 2\pi i \beta'(t) dt = \\ &= 2\pi i (2\pi i p) = (2\pi i)^2 p \end{aligned}$$

da cui  $p^2 = p$ .  $\square$

**Definizione 7.7.2** L'elemento  $p = p(A)$ , definito dalla (7.4) è detto idempotente fondamentale associato ad  $A$ .

<sup>5</sup>N. Dunford e J.T. Schwartz [12] p. 193

In analogia, si prova il seguente

**Teorema 7.7.2** *Siano  $C$  e  $C'$  curve semplici rettificabili giacenti nel risolvante  $\varrho(x)$  di  $x$ , e  $p(A)$  e  $p(A')$  gli idempotenti fondamentali associati agli insiemi spettrali  $A$  ed  $A'$  cinti da  $C$  e  $C'$ . Allora*

- (i)  $p(A)p(A') = 0$  qualora  $C$  e  $C'$  siano una esterna all'altra,
- (ii)  $p(A)p(A') = p(A')$  se  $C'$  è interna alla regione delimitata da  $C$ .

Fissato  $x$  in  $X$ , la famiglia  $\mathcal{S}$  degli insiemi spettrali di  $x$  costituisce un'algebra di insiemi, a ciascuno dei quali è associato, mediante la (7.4), il suo idempotente fondamentale.

Dal teorema (7.7.2) segue che l'idempotente associato all'unione di due insiemi spettrali disgiunti è la somma degli idempotenti associati alle parti, ovvero  $p(A \cup A') = p(A) + p(A')$  quando  $A$  è disgiunto da  $A'$ .

Si riconosce altresì facilmente che vale il seguente

**Teorema 7.7.3** *Siano  $x \in X$ ,  $A \in \mathcal{S}$ , e  $p(A)$  l'idempotente associato ad  $A$ . Allora*

$$p(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$p(A) = e \Leftrightarrow A = \sigma(x)$$

Così, dato  $x$  nell'algebra  $X$ , resta definita una funzione d'insieme  $p(A)$  avente per dominio  $\mathcal{S}$ , a valori nell'insieme degli idempotenti di  $X$ . Tale  $p$  ha le seguenti proprietà:

- (i)  $p(\emptyset) = 0$ ,  $p(\sigma(x)) = e$ ;
- (ii)  $p(A \cup A') = p(A) + p(A')$  per ogni  $A, A' \in \mathcal{S}$ ,  $A \cap A' = \emptyset$ ;
- (iii)  $p(A \cap A') = p(A)p(A')$  per ogni  $A, A' \in \mathcal{S}$ .

Questi idempotenti, essendo degli integrali, sono limiti di combinazioni lineari di valori della risolvante di  $x$ , e quindi commutano con  $x$ , cioè  $px = xp$ .

Se  $X$  è  $\mathcal{L}(B)$ , lo spazio degli endomorfismi continui sullo spazio di Banach  $B$ , allora gli idempotenti fondamentali di  $T$  sono proiezioni che riducono  $T$ , nel senso seguente.

**Definizione 7.7.3** *Si dice che la coppia  $(M, N)$  di sottospazi complementari dello spazio  $B$  riduce  $T \in \mathcal{L}(B)$  se  $M$  ed  $N$  sono sottospazi invarianti per  $T$ , cioè  $TM \subset M$  ed  $TN \subset N$ .*

*Si dice che una proiezione  $P$  in  $\mathcal{L}(B)$  riduce  $T \in \mathcal{L}(B)$  se la coppia di sottospazi chiusi  $(\text{rng}P, \text{ker}P)$  riduce  $T$ .*

Una proiezione  $P$  in  $\mathcal{L}(B)$  riduce  $T$  se e solo se  $PT = TP$ . Pertanto, gli idempotenti fondamentali per  $T$  riducono  $T$ . La loro conoscenza è importante perché, se  $P$  è uno di essi, lo spettro di  $T$  è unione disgiunta di  $\sigma(TP)$  e  $\sigma(T(I - P))$ .

## 7.8 Misure a valori proiezioni

**Definizione 7.8.1** Una misura a valori proiezioni su un'algebra  $\Sigma$  di unit   $S$    una  $\mu : \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(B)$ , con  $B$  spazio di Banach, avente le seguenti propriet :

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$  e  $\mu(S) = I$ ;
- ii) per ogni sequenza  $(\alpha_k)$  in  $\Sigma$  di elementi mutuamente disgiunti, con  $\cup_{k=1}^{\infty} \alpha_k \in \Sigma$ , la  $\sum_{k=1}^n \mu(\alpha_k)$  converge fortemente<sup>6</sup> a  $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} \alpha_k)$ ,
- iii)  $\mu(\alpha \cap \beta) = \mu(\alpha) \mu(\beta)$ .

Ponendo  $\alpha = \beta$ , la (iii) porge  $\mu(\alpha) = \mu(\alpha) \mu(\alpha)$ , cio   $\mu(\alpha)$    una proiezione per ogni  $\alpha \in \Sigma$ .

Se  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ , allora  $\mu(\alpha) \mu(\beta) = 0$ , cio   $\mu(\alpha)$  e  $\mu(\beta)$  proiettano ciascuna nel nucleo dell'altra (sono operatori tra loro ortogonali).

Se una misura   a valori proiezioni in  $H$ , spazio di Hilbert, ad esse si richiede spesso di essere autoaggiunte<sup>7</sup>, ossia

$$iv) \quad \mu(\alpha) = \mu(\alpha)^* \quad \text{per ogni } \alpha \in \Sigma.$$

**Esempio (Idempotenti fondamentali).** Se  $T$    un operatore lineare limitato, gli idempotenti fondamentali ad esso associati

$$P(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (zI - T)^{-1} dz$$

costituiscono una misura a valori proiezioni sull'algebra  $\mathcal{S}$  degli insiemi spettrali di  $\sigma(T)$ , che in generale non   una  $\sigma$ -algebra. Risulta inoltre  $\sigma(T|_{P(\alpha)X}) \subset \bar{\alpha}$ .

**Esempio (Serie di Fourier).** Come esempio di misura a valori proiezioni autoaggiunte in  $\mathcal{L}(H)$ ,  $H$  separabile, pu  essere portato il seguente. Sia  $(e^n)$  una successione ortonormale completa in  $H$ . Poniamo

$$P_n = \langle \bullet, e^n \rangle e^n$$

Sia  $\alpha$  un sottoinsieme di  $\mathbf{N}$ . Poniamo  $\mu(\alpha) = \sum_{n \in \alpha} P_n$  (somma in senso forte se  $\alpha$    infinito).

La  $\mu$    una misura a valori proiezioni autoaggiunte sull'algebra  $\Sigma$  di tutti i sottoinsiemi di  $\mathbf{N}$ .

1) Per definizione di  $(e^n)$ ,  $\sum_{k=1}^n P_k h = \sum_{k=1}^n \langle h, e^k \rangle e^k \rightarrow_n h = Ih$  per ogni  $h \in H$ , quindi  $\mu(\mathbf{N}) = I$ .

<sup>6</sup>Una successione di operatori  $(T_n) \subset \mathcal{L}(B)$  converge a  $T$  fortemente se  $T_n(x) \rightarrow_n T(x)$  per ogni  $x \in B$ .

<sup>7</sup>Perch  una proiezione in  $\mathcal{L}(H)$  sia autoaggiunta occorre e basta che  $(rng P)^\perp = ker P$  (E.R. Lorch [22], pag. 72.)

2) L'additività numerabile è immediata: se gli  $\alpha_k$  sono mutuamente disgiunti,  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in \alpha_k} P_j = \sum_{j \in \bigcup \alpha_k} P_j = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha_k)$ .

3) Le  $P_n$  sono proiezioni autoaggiunte. Infatti, per ogni  $h \in H$ ,

$$P_n P_n(h) = P_n(\langle h, e^n \rangle e^n) = \langle h, e^n \rangle P_n e^n = \langle h, e^n \rangle (\langle e^n, e^n \rangle e^n) = P_n h.$$

Poi, per ogni  $x, y \in H$ ,

$$\begin{aligned} \langle P_n x, y \rangle &= \langle x, e^n \rangle \langle e^n, y \rangle; \\ \langle x, P_n y \rangle &= \langle x, \langle y, e^n \rangle e^n \rangle = \overline{\langle y, e^n \rangle} \langle x, e^n \rangle = \langle e^n, y \rangle \langle x, e^n \rangle \end{aligned}$$

Osservando che  $P_n P_m = 0$  per  $n \neq m$ , con pochi passaggi si ottiene la (iii).

Il seguente risultato fornisce una definizione equivalente di misura a valori proiezioni in  $\mathcal{L}(H)$ .

**Teorema 7.8.1** *Siano  $H$  spazio di Hilbert,  $\Sigma$  un'algebra di unità  $S$ , e  $P : \Sigma \rightarrow \mathcal{L}(H)$  una funzione a valori proiezioni.*

*La  $P$  è una misura a valori proiezioni su  $S$  se e solo se*

- a)  $P(S) = I$ ;
- b)  $\forall x, y \in H$  la  $\mu_{x,y} : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mu_{x,y}(\alpha) = \langle P(\alpha)x, y \rangle$  è una misura complessa su  $S$ .

**Definizione 7.8.2 (Misura spettrale)** *Una misura spettrale, nel senso classico del termine, è una misura a valori proiezioni definita sui boreliani di  $\mathbb{C}$ .<sup>8</sup>*

**Esempio (Operatori normali).** Se  $T \in \mathcal{L}(H)$  è un operatore normale ( $TT^* = T^*T$ ), la misura a valori proiezioni sulla famiglia  $\mathcal{S}$  degli insiemi spettrali di  $T$  può essere estesa, con un certo calcolo di operatori,<sup>9</sup> ad una misura a valori proiezioni sulla  $\sigma$ -algebra di unità  $\sigma(T)$  formata da tutti i boreliani dello spettro. Infine, se  $\alpha$  è un boreliano in  $\mathbb{C}$ , la  $\mu(\alpha) = \mu(\alpha \cap \sigma(T))$  è l'unico prolungamento di  $\mu$  ad una misura spettrale.

## 7.9 Integrazione di una funzione scalare rispetto ad una misura a valori proiezioni

**Definizione 7.9.1** *Sia  $(S, \Sigma)$  uno spazio misurabile. Una misura vettoriale su  $S$  è una funzione  $\sigma$ -additiva  $\mu : \Sigma \rightarrow X$ , dove  $X$  è uno spazio di Banach.*

<sup>8</sup> H. H. Schaefer [26].

<sup>9</sup> N. Dunford e J.T. Schwartz [13], pagg. 889 -898

Un esempio di misura vettoriale è il seguente.

Siano  $S = [0, 1]$ ,  $\Sigma$  la famiglia degli insiemi Lebesgue-misurabili su  $S$ , e  $\mu : \Sigma \rightarrow L^1([0, 1])$  definita dalla:  $\mu(A) = \chi_A$ . La  $\mu$  è una misura vettoriale su  $S$ .

**Definizione 7.9.2** Sia  $(S, \Sigma, \mu)$  uno spazio misurale, con  $\mu$  a valori nello spazio di Banach  $X$ .

Diciamo che  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  è  $\mu$ -integrabile su  $S$  se esiste un  $y \in X$  tale che, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione di  $S$  in insiemi misurabili  $E_1, \dots, E_n$  con

$$\|y - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \mu(E_k)\| < \varepsilon \quad \text{per ogni } \xi_k \in E_k. \quad (7.5)$$

In tal caso  $y$  è detto  $\mu$ -integrale di  $f$  su  $S$ , ed è denotato con  $\int_S f(\xi) \mu(d\xi)$ .

**Teorema 7.9.1** Condizione sufficiente affinché  $f$  sia  $\mu$ -integrabile su  $S$  è che, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione di  $S$  in insiemi  $\mu$ -misurabili  $E_1, \dots, E_n$  con

$$\sum_{k=1}^n \text{diam} f(E_k) \|\mu(E_k)\| < \varepsilon.$$

**Integrazione rispetto ad una misura in  $\mathcal{L}(H)$ .** Dati uno spazio di Hilbert  $H$ , ed  $(S, \Sigma, \mu)$ , spazio misurale, con  $\mu$  misura a valori proiezioni in  $\mathcal{L}(H)$ , la definizione 7.9.2 si traduce nella

**Definizione 7.9.3** Siano  $H$  uno spazio di Hilbert, ed  $(S, \Sigma, \mu)$  uno spazio misurale, con  $\mu$  misura a valori proiezioni in  $\mathcal{L}(H)$ . Una  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  è detta  $\mu$ -integrabile su  $S$  se esiste un operatore  $T \in \mathcal{L}(H)$  tale che, dato  $\varepsilon > 0$ , esiste una partizione di  $S$  in insiemi  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  in  $\Sigma$  con

$$\|T - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \mu(\alpha_k)\| < \varepsilon \quad \text{per ogni } \xi_k \in \alpha_k. \quad (7.6)$$

Essendo  $\|\mu(\alpha)\| = 1$  per ogni  $\alpha \in \Sigma$ ,  $\alpha \neq \emptyset$ , la condizione di integrabilità data dal teorema 7.9.1 diventa

**Teorema 7.9.2** Condizione sufficiente affinché  $f$  sia  $\mu$ -integrabile su  $S$  è che, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione di  $S$  in insiemi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  in  $\Sigma$  con

$$\sum_{k=1}^n \text{diam} f(E_k) < \varepsilon.$$



## Capitolo 8

# Integrazione di Stieltjes rispetto a famiglie spettrali

### 8.1 Famiglie spettrali

**Definizione 8.1.1** Una famiglia spettrale è una funzione  $\lambda \mapsto E_\lambda$  da  $\mathbb{R}$  a  $\mathcal{L}(H)$ , a valori proiezioni autoaggiunte, tale che

- i)  $\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \text{rng}E_{\lambda_1} \subset \text{rng}E_{\lambda_2}$
- ii - a)  $\lambda \rightarrow -\infty \Rightarrow E_\lambda \rightarrow 0$  fortemente
- ii - b)  $\lambda \rightarrow +\infty \Rightarrow E_\lambda \rightarrow I$  fortemente.

**Nota.** In questo ambiente non vi è concordanza tra gli Autori sull'uso dei termini. *Famiglia spettrale* nel senso detto è il termine usato da F. Riesz.<sup>1</sup>

**Proposizione 8.1.1** La (i) è equivalente a

$$i') \quad \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \ker E_{\lambda_2} \subset \ker E_{\lambda_1}$$

ed alla

$$ii') \quad \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} = E_{\lambda_1} E_{\lambda_2} = E_{\lambda_2} E_{\lambda_1}.$$

**Proposizione 8.1.2** Sia  $(E_\lambda)$  una famiglia spettrale. Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , con  $\lambda_1 < \lambda_2$ , allora  $E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$  è una proiezione.

**Dimostrazione.** Risulta:

$$\begin{aligned} (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}) &= E_{\lambda_2}^2 - E_{\lambda_2}E_{\lambda_1} - E_{\lambda_1}E_{\lambda_2} + E_{\lambda_1}^2 = \\ &= E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} - E_{\lambda_1} + E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}. \end{aligned}$$

□

---

<sup>1</sup>F. Riesz e B. Sz. Nagy [25], pagg. 273 e 315.

**Proposizione 8.1.3** *Sia  $(E_\lambda)$  una famiglia spettrale. Se  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ , allora  $(E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})(E_{\lambda_4} - E_{\lambda_3}) = 0$ .*

**Dimostrazione.**

$$\begin{aligned} (E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1})(E_{\lambda_4} - E_{\lambda_3}) &= E_{\lambda_2}E_{\lambda_4} - E_{\lambda_2}E_{\lambda_3} - E_{\lambda_1}E_{\lambda_4} + E_{\lambda_1}E_{\lambda_3} = \\ &= E_{\lambda_2} - E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1} + E_{\lambda_1} = 0. \end{aligned}$$

□

**Definizione 8.1.2** *Una famiglia spettrale è sinistra (destra) se  $E_\lambda$  è fortemente continua da sinistra (destra).*

**Definizione 8.1.3** *Una famiglia spettrale è limitata se esistono  $\lambda_1 < \lambda_2$  reali, tali che  $E_{\lambda_1} = 0$ ,  $E_{\lambda_2} = I$ . In tal caso,  $a = \sup \lambda_1$  e  $b = \inf \lambda_2$  sono detti gli estremi della famiglia.*

Se  $(E_\lambda)$  è una famiglia spettrale, per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  si definisca  $E'_\lambda$  come la proiezione ortogonale sulla più piccola varietà lineare chiusa che include tutti i  $\text{rng}E_{\lambda_1}$ , con  $\lambda_1 < \lambda$ . Allora  $(E'_\lambda)$  è una famiglia spettrale sinistra. Procedura, questa, che ricorda quella usata per rimpiazzare una funzione monotona con una continua da sinistra.

Similmente, si ottiene una famiglia spettrale destra, sostituendo ogni  $E_\lambda$  con  $E''_\lambda$ , la proiezione ortogonale sull'intersezione dei  $\text{rng}E_{\lambda_2}$ , con  $\lambda_2 > \lambda$ .

Possiamo pertanto supporre che ogni famiglia spettrale sia continua da sinistra o da destra.

## 8.2 L'integrale di Riemann-Stieltjes di una funzione reale rispetto ad una famiglia spettrale

**Teorema 8.2.1** *Se la famiglia spettrale  $(E_\lambda)$  assume infiniti valori distinti, non è a variazione limitata (rispetto alla norma uniforme degli operatori).*

**Dimostrazione.** Siano infatti associati a  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$  valori distinti di  $E_\lambda$ . Abbiamo  $VE_\lambda \geq \sum_{j=1}^n \|E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}\|$ . Le differenze sono proiezioni autoaggiunte non nulle (proposizione 8.1.2), quindi hanno norma 1. Se pertanto  $E_\lambda$  non assume un numero finito di valori distinti,  $VE_\lambda$  supera ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi è infinita. □

Osserviamo che se  $E_\lambda$  assume esattamente  $n$  valori distinti non nulli, la sua variazione totale è  $n$ .

Invece:

**Teorema 8.2.2** *La famiglia  $(E_\lambda)$  è fortemente a variazione quadratica limitata.*

**Dimostrazione.** Siano  $-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = +\infty$ . Poniamo  $P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}$ , e osserviamo che tutti i  $P_j$  sono a due a due ortogonali. Abbiamo:  $I = \sum_{j=1}^n P_j$ . Essendo, per ogni  $x \in H$

$$\langle P_j x, P_k x \rangle = \langle P_k^* P_j x, x \rangle = \langle P_k P_j x, x \rangle = \langle 0x, x \rangle = 0 \quad \text{per } k \neq j$$

risulta

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n P_j x, \sum_{k=1}^n P_k x \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle P_j x, P_j x \rangle = \sum_{j=1}^n \|P_j x\|^2. \quad (8.1)$$

Quindi  $(V^{(2)})_{-\infty}^\infty E_\lambda x \leq \|x\|^2$ .  $\square$

**Nota.** Se la  $(E_\lambda)$  assume infiniti valori distinti, essa non è nemmeno fortemente a variazione limitata.

Sia infatti  $(\mu_k)$  una successione di reali distinti cui corrispondano distinti valori di  $E_\mu$ . Con valori estratti dalla  $(\mu_n)$ , formiamo una successione  $(\lambda_n)$  strettamente monotona, che può essere crescente o decrescente. La supponiamo crescente. Allora le  $P_k = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sono proiezioni non nulle mutuamente ortogonali.

Prendiamo  $u^1, u^2, \dots$  di norma 1, con  $P_k u^k = u^k$  per ogni  $k$ , e sia  $x = u^1/1 + u^2/2 + \dots$ . Risulta

$$\sum_{k=1}^n \|P_k x\| = \sum_{k=1}^n \|u^k/k\| = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} > M \quad \text{prefissato, se } n \text{ a.g.}$$

Quindi  $VE_\lambda x = +\infty$ .

Se la  $(\lambda_n)$  è strettamente decrescente, basta porre  $P_k = E_{\lambda_{k-1}} - E_{\lambda_k}$ .

Nonostante questi foschi presagi, si può mostrare che:

**Teorema 8.2.3** *Sia  $f$  una funzione continua di variabile reale, a valori scalari. Allora  $f$  è Riemann-Stieltjes integrabile rispetto ad ogni famiglia spettrale limitata. Tale integrale è limite uniforme delle relative somme di Riemann-Stieltjes.*

**Nota.**  ${}^{RS} \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda$  rientra nella definizione data nella sezione 6.1, considerando  $X = Y = \mathcal{L}(H)$ , e lo scalare  $f(\lambda)$  come l'operatore di moltiplicazione  $f(\lambda) \cdot$  in  $\mathcal{L}(H)$ , definito da  $f(\lambda) \cdot T = f(\lambda)T$ , che è un endomorfismo di  $\mathcal{L}(H)$ , in cui  $|f(\lambda)| = \|f(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))}$ .

**Convenzione.** Sia  $(E_\lambda)$  una famiglia spettrale limitata di estremi  $a$  e  $b$ . Se  $(E_\lambda)$  è discontinua in  $a$  o in  $b$ , la notazione  $RS \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda$  diventa ambigua. Per evitare ogni equivoco, è opportuno rimpiazzare  $E_a$  con  $E_{a-0}$ , ed  $E_b$  con  $E_{b+0}$  (limiti forti). Tale operazione è talora evidenziata da alcuni Autori, scrivendo  $a-0$  in luogo di  $a$ , o  $b+0$  in luogo di  $b$  come estremi di integrazione.

**Dimostrazione del teorema 8.2.3.** Mostriamo che, se  $a, b$  sono gli estremi della famiglia spettrale  $(E_\lambda)$ , ed  $f$  continua su  $[a, b]$ , le somme di Riemann-Stieltjes

$$RS(P) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}),$$

con  $P = \{a = \lambda_0 \leq \xi_1 \leq \lambda_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n \leq \lambda_n = b\}$  partizione marcata di  $[a, b]$ , formano un net di Cauchy rispetto alla finezza in norma. Diamo  $\varepsilon > 0$ , e scegliamo un  $\delta > 0$  tale che  $|f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{3}$  per  $|\xi - \eta| < \delta$ . Consideriamo la somma di Riemann-Stieltjes

$$RS(P_\alpha) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta E_{k,0} \quad (\Delta E_{k,0} = E_{\lambda_{k,0}} - E_{\lambda_{k-1,0}}) \quad (8.2)$$

con  $|P_\alpha| < \delta$ , ed una qualunque  $P_\gamma$  ottenuta dalla  $P_\alpha$  per rifratturazione, la cui somma associata potrà dunque scriversi:

$$RS(P_\gamma) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} f(\xi_{k,j}) \Delta E_{k,j} \quad (\Delta E_{k,j} = E_{\lambda_{k,j}} - E_{\lambda_{k,j-1}}).$$

La (8.2) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sum_{j=1}^{m_k} \Delta E_{k,j}.$$

Risulta pertanto:

$$RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} (f(\xi_k) - f(\xi_{k,j})) \Delta E_{k,j}.$$

Per ogni fissato  $k$ , e per ogni  $j$ , gli  $\xi_k$  e gli  $\xi_{k,j}$  si trovano entrambi nel  $k$ -esimo intervallo della suddivisione  $P_\alpha$ , e quindi distano tra loro per meno di  $\delta$ . Allora  $|f(\xi_k) - f(\xi_{k,j})| < \frac{\varepsilon}{3}$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ , ed ogni  $j = 1, \dots, m_k$ . Sia ora  $x \in H$ . Ricordando la (8.1), abbiamo

$$\|(RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma))x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} (f(\xi_k) - f(\xi_{k,j})) \Delta E_{k,j} x \right\|^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \|(f(\xi_k) - f(\xi_{k,j})\Delta E_{k,j}x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} |(f(\xi_k) - f(\xi_{k,j}))\Delta E_{k,j}x|^2 < \\
&< \frac{\varepsilon^2}{9} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \|\Delta E_{k,j}x\|^2 = \frac{\varepsilon^2}{9} \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Quindi,  $\|(RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma))x\| < \frac{\varepsilon}{3} \|x\|$ , che, per l'arbitrarietà di  $x$ , implica  $\|RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sia ora  $P_\beta$  una seconda suddivisione marcata di finezza in norma minore di  $\delta$ . Esiste una  $P_\gamma$  più fine in rifratturazione sia di  $P_\alpha$  che di  $P_\beta$ , pertanto:

$$\begin{aligned}
\|RS(P_\alpha) - RS(P_\beta)\|_{\mathcal{L}(H)} &\leq \|RS(P_\alpha) - RS(P_\gamma)\|_{\mathcal{L}(H)} + \|RS(P_\beta) - RS(P_\gamma)\|_{\mathcal{L}(H)} < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

### 8.3 L'integrale debole rispetto ad una famiglia spettrale.

Abbiamo osservato che una famiglia spettrale limitata non è in generale a variazione limitata, nemmeno fortemente. Risulta invece una condizione di limitatezza debole, ed è data dalla seguente:

**Proposizione 8.3.1** *Sia  $(E_\lambda)$  una famiglia spettrale limitata di estremi  $a < b$ . Fissati ad arbitrio  $x, y \in H$ , l'applicazione*

$$g_{x,y}(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle \quad \lambda \in [a, b] \quad (8.3)$$

*è a variazione limitata su  $[a, b]$ .*

**Dimostrazione.** Consideriamo la seguente identità, detta identità di polarizzazione, che si può verificare con un semplice calcolo:

$$\langle E_\lambda x, y \rangle = \|E_\lambda \frac{x+y}{2}\|^2 - \|E_\lambda \frac{x-y}{2}\|^2 + i\|E_\lambda \frac{x+iy}{2}\|^2 - i\|E_\lambda \frac{x-iy}{2}\|^2.$$

Il termine  $\langle E_\lambda x, y \rangle$  è dunque combinazione lineare di termini del tipo  $\langle E_\lambda z, z \rangle$ , con  $z = x \pm y$ , oppure  $z = x \pm iy$ . Di conseguenza, la funzione  $g_{x,y}(\lambda)$  è a variazione limitata, in quanto combinazione lineare di funzioni monotone crescenti su  $[a, b]$ . □

In particolare, se  $(E_\lambda)$  è una famiglia spettrale limitata di estremi  $a$  e  $b$ , ed  $f$  una funzione scalare continua su  $[a, b]$ , esiste l'integrale di Riemann-Stieltjes classico

$$RS \int_a^b f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle \quad x, y \in H. \quad (8.4)$$

L'integrale (8.4) è detto *integrale di Riemann-Stieltjes debole della f rispetto alla famiglia spettrale*  $(E_\lambda)$ .

Notiamo che la funzione da  $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto \int_a^b f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle$  è una forma sesquilineare limitata. Per il teorema di rappresentazione di Riesz sulle forme sesquilineari<sup>2</sup> possiamo enunciare il seguente

**Teorema 8.3.1** *Siano  $(E_\lambda)$  una famiglia spettrale limitata di estremi  $a$  e  $b$ , ed  $f$  una funzione scalare continua su  $[a, b]$ . Allora esiste un unico operatore lineare  $T_f \in \mathcal{L}(H)$  tale che*

$$\langle T_f x, y \rangle = \int_a^b f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle \quad \forall x, y \in H. \quad (8.5)$$

Tale  $T_f$  è l'integrale di Riemann-Stieltjes della  $f$  rispetto a  $(E_\lambda)$ .

**Nota.** Alcuni Autori partono dalla definizione dell' integrale debole (8.4) in ambiente scalare, per poi definire l'integrale  $\int_a^b f(\lambda) dE_\lambda$  come l'unico operatore  $T_f$  descritto nel teorema 8.3.1.

## 8.4 Famiglie spettrali di operatori autoaggiunti limitati

Date  $f$ , funzione continua reale di variabile reale, ed  $(E_\lambda)$ , famiglia spettrale limitata, allora  $T = \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda$  esiste, per il teorema 8.2.3, ed è un operatore lineare limitato e autoaggiunto.

Per vedere questo, osserviamo che  $*$  è un'involuzione continua in  $\mathcal{L}(H)$ . Pertanto, la funzione  $T \mapsto T - T^*$  è continua, quindi la controimmagine dello 0 è un chiuso. Ma  $T - T^* = 0$  equivale a  $T = T^*$ , cioè  $T$  autoaggiunto.

Sempre dal teorema 8.2.3, abbiamo visto che  $T$  è limite uniforme di combinazioni lineari di operatori limitati autoaggiunti, combinazioni che sono autoaggiunte se i coefficienti sono reali. Quindi, appartenendo esse al suddetto chiuso, il limite appartiene al chiuso stesso, cioè  $T = T^*$ .

Viceversa:

**Teorema 8.4.1 (D. Hilbert - 1906)** *Ad ogni operatore lineare autoaggiunto limitato  $A$  dello spazio di Hilbert  $H$  corrisponde un'unica famiglia spettrale limitata (continua da sinistra)  $(E_\lambda)$ , in modo che*

$$A = \int_a^b \lambda dE_\lambda.$$

*Inoltre, per ogni  $\lambda$ ,  $E_\lambda$  commuta con  $A$ , e con tutti gli operatori limitati che commutano con  $A$ .*

---

<sup>2</sup> Dati  $H_1$  ed  $H_2$  spazi di Hilbert, per ogni forma sesquilineare limitata  $[\cdot, \cdot] : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , esiste un unico operatore lineare limitato  $T : H_1 \rightarrow H_2$  tale che  $[x, y] = \langle Tx, y \rangle_{H_2}$ .

La famiglia spettrale  $(E_\lambda)$  associata all'operatore autoaggiunto  $A \in \mathcal{L}(H)$  determina completamente le proprietà spettrali di  $A$ . Precisamente:

- a)  $E_\lambda = 0$  per  $-\infty < \lambda < -\|A\|$  e  $E_\lambda = I$  per  $\|A\| < \lambda < +\infty$ ;
- b)  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cap \varrho(A)$  se e solo se  $E_\lambda$  è localmente costante in  $\lambda_0$ ;
- c)  $\lambda_0$  è autovalore per  $A$  se e solo se  $E_\lambda$  ha un salto in  $\lambda_0$ , ovvero  $E_{\lambda_0+0} - E_{\lambda_0}$  è un operatore positivo;
- d)  $(E_\mu - E_\lambda)H$  è un sottospazio invariante per  $A$ .

## 8.5 Misura generata da una famiglia spettrale

Sia  $(E_\lambda)$  una famiglia spettrale. Poniamo, per ogni  $c, d$ , con  $c \leq d$ ,

$$\begin{aligned} P(]c, d[) &= E_d - E_{c+0} \\ P([c, d[) &= E_d - E_c \\ P(]c, d]) &= E_{d+0} - E_{c+0} \\ P([c, d]) &= E_{d+0} - E_c \end{aligned}$$

La  $P$  è una funzione d'insieme, prolungabile ad una misura  $\mu$  a valori proiezioni sull'algebra delle unioni finite dei sottointervalli di  $\mathbb{R}$ . La  $\mu$  è a sua volta prolungabile all'algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  dei boreliani di  $\mathbb{R}$ , ed all'algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$  dei boreliani di  $\mathbb{C}$ , ponendo  $\mu(\alpha) = \mu(\alpha \cap \mathbb{R})$  per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ . Si genera così una misura spettrale su tutto  $\mathbb{C}$ .

Abbiamo innanzi osservato che, dato  $T \in \mathcal{L}(H)$ , l'applicazione  $p$  definita sull'algebra  $S$  degli insiemi spettrali di  $T$  è una misura a valori proiezioni, e, se  $T$  è inoltre un operatore normale, la  $p$  è prolungabile ad una misura spettrale  $\nu$  su  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ .

Se l'operatore in questione è autoaggiunto, il nesso tra  $\mu$  e  $\nu$  è messo in luce dal seguente

**Teorema 8.5.1** *Sia  $A \in \mathcal{L}(H)$  autoaggiunto, e sia  $\mu$  la misura generata dalla famiglia spettrale  $(E_\lambda)$  ad esso associata. Allora, per ogni insieme spettrale  $\alpha \subset \sigma(A)$ ,  $\mu(\alpha)$  è l'idempotente fondamentale associato ad  $\alpha$ .*

## 8.6 Rappresentazione degli operatori unitari

La  $f(\lambda) = e^{i\lambda}$  è una funzione continua complessa di variabile reale, quindi  $T = \int_a^b f(\lambda) dE_\lambda$ , con  $(E_\lambda)$  famiglia spettrale limitata, esiste, per il teorema 8.2.3, ed è un operatore lineare unitario.

Per vedere questo, osserviamo che le funzioni  $T \mapsto TT^* - I$  e  $T \mapsto T^*T - I$  sono continue, quindi l'intersezione delle relative controimmagini dello 0 è un chiuso in  $\mathcal{L}(H)$ . Ora, il simultaneo verificarsi delle  $TT^* - I = 0$  e  $T^*T - I = 0$  equivale a  $T$  unitario.

Sempre dal teorema 8.2.3, segue che  $T$  è limite uniforme di operatori del tipo  $\sum_{k=1}^n e^{i\lambda_k} P_k$ , che sono unitari. Quindi, appartenendo esse al suddetto chiuso, il limite appartiene al chiuso stesso, cioè  $TT^* = T^*T = I$ .

Viceversa:

**Teorema 8.6.1 (von Neumann - 1929)** *Ad ogni operatore lineare unitario  $U$  dello spazio di Hilbert  $H$  corrisponde una famiglia spettrale limitata  $(E_\lambda)$ , di estremi 0 e  $2\pi$ , essenzialmente unica, in modo che*

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda$$

## 8.7 Una decomposizione di operatori normali e loro rappresentazione

Ogni operatore normale  $N \in \mathcal{L}(H)$  può essere scritto nella forma

$$N = X + iY, \tag{8.6}$$

dove  $X$  ed  $Y$  sono operatori autoaggiunti commutanti. Basta porre:

$$X = \frac{1}{2}(N + N^*), \quad Y = \frac{1}{2i}(N - N^*).$$

Risulta ovviamente che  $\|X\|_{\mathcal{L}(H)}, \|Y\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|N\|_{\mathcal{L}(H)}$ .

Un'altra decomposizione, meno immediata,<sup>3</sup> è la seguente:

$$N = RU = UR, \tag{8.7}$$

dove  $R$  è un operatore autoaggiunto positivo, ed  $U$  un operatore unitario. Così come la decomposizione (8.6) è l'analoga di quella di un numero complesso  $z$  nelle sue parti reale ed immaginaria ( $z = x + iy$ ), la decomposizione (8.7) è l'analoga di quella di  $z$  nel prodotto del suo modulo con un fattore di modulo unitario ( $z = re^{i\phi}$ ).

Sia quindi  $N$  un operatore lineare normale limitato, e siano  $X$  ed  $Y$  gli operatori autoaggiunti in (8.6) che lo decompongono. Le famiglie spettrali  $(E_x^X)$  ed  $(E_y^Y)$  associate rispettivamente ad  $X$  ed  $Y$  hanno entrambe intervallo di variazione incluso nell'intervallo di raggio  $\|N\|$ . Fissati  $x$  e  $y$  in  $\mathbb{R}$ ,  $E_x^X$  ed  $E_y^Y$  sono limiti di polinomi in  $X$  ed  $Y$  rispettivamente, e quindi limiti

<sup>3</sup>v. F.Riesz- Sz.Nagy [25] p. 282



di polinomi in  $N$  ed  $N^*$ . Così, la commutatività di  $N$  con  $N^*$  implica quella di  $E_x^X$  con  $E_y^Y$ . Si ha dunque:

$$\begin{aligned} N &= X + iY = {}^{RS}\int_{\mathbb{R}} x dE_x^X + i {}^{RS}\int_{\mathbb{R}} y dE_y^Y = \\ &= {}^{RS}\int_{\mathbb{R}} x dE_x^X {}^{RS}\int_{\mathbb{R}} dE_y^Y + i {}^{RS}\int_{\mathbb{R}} dE_x^X {}^{RS}\int_{\mathbb{R}} y dE_y^Y. \end{aligned}$$

Consideriamo ora il net

$$\sum_{h,k} (\xi_{h,k} + i\eta_{h,k})(E_{x_h}^X - E_{x_{h-1}}^X)(E_{y_k}^Y - E_{y_{k-1}}^Y) \quad (8.8)$$

lungo l'insieme delle partizioni marcate  $\mathcal{P}^2$ , orientato in norma come in 6.2. La (8.8) è la somma di Riemann-Stieltjes in due variabili di  $f(x, y) = x + iy$  rispetto a  $g(x, y) = E_x^X \cdot E_y^Y$  relativa alla partizione marcata  $P = ([z] = [x] + i[y], (\xi, \eta)) \in \mathcal{P}^2$ , dove  $[x] = \{x_0 < x_1 < \dots < x_h < \dots < x_m\}$ ,  $[y] = \{y_0 < y_1 < \dots < y_k < \dots < y_n\}$ , e  $(\xi, \eta)(R_{h,k}) = \xi_{h,k} + i\eta_{h,k}$  è una marcatura non ristretta. In effetti, svolgendo semplici calcoli algebrici, e ricordando le proprietà fondamentali delle famiglie spettrali, risulta:

$$G(R_{h,k}) = (E_{x_h}^X - E_{x_{h-1}}^X)(E_{y_k}^Y - E_{y_{k-1}}^Y)$$

dove la  $G$  è la funzione associata alla funzione integratrice  $g$  definita in 6.2. Poiché  $E_x^X$  commuta con  $E_y^Y$ , le  $G(R_{h,k})$  sono delle proiezioni, e queste sono due a due ortogonali.

Enuncio infine il seguente teorema di rappresentazione<sup>4</sup>

**Teorema 8.7.1** *Ad ogni operatore normale limitato  $N$  in uno spazio di Hilbert complesso corrisponde una famiglia limitata  $(E_{x,y})$  di proiezioni tale che*

$$\begin{aligned} N &= {}^{RS}\int_{\mathbb{C}} (x + iy) dE_{x,y}, \\ N^* &= {}^{RS}\int_{\mathbb{C}} (x - iy) dE_{x,y}. \end{aligned}$$

**Nota.** L'integrale  ${}^{RS}\int_{\mathbb{C}} (x \pm iy) d(E_{x,y})$  rientra nella definizione di integrale di Riemann-Stieltjes non ristretto data nella sezione 6.2, considerando  $X = Y = \mathcal{L}(H)$ , e lo scalare  $z = x \pm iy$  come operatore di moltiplicazione in  $\mathcal{L}(H)$ .

In termini di misura spettrale, il teorema 8.7.1 assume la forma seguente<sup>5</sup>:

<sup>4</sup>Per la dimostrazione completa, vedi F.Riesz- Sz. Nagy [25] pp. 284-286

<sup>5</sup>v. N.Dunford-J.T.Schwartz [13] pp. 887-898.

**Teorema 8.7.2** *Per ogni operatore normale limitato  $N$  in uno spazio di Hilbert complesso  $H$  esiste una misura spettrale  $E(\alpha)$  sull'algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$  dei boreliani del campo complesso, con supporto incluso in  $\sigma(N)$ , e tale che*

$$N = \int_{\mathbb{C}} zE(dz) .$$

*Inoltre, per ogni  $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ ,  $NE(\alpha) = E(\alpha)N$  e  $\sigma(N|_{E(\alpha)H}) \subset \bar{\alpha}$ .*

## 8.8 Martingale astratte ed integrale di Riemann-Stieltjes $H$ -stocastico

**Definizione 8.8.1** *Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso, e  $T$  un numero reale positivo fissato. Una martingala astratta in  $\mathcal{H}$  è un'applicazione*

$$t \in [0, T] \mapsto M_t = E_t X$$

*dove  $(E_t)$  è una famiglia spettrale in  $\mathcal{H}$  limitata, con intervallo di variazione  $[0, T]$ , ed  $X \in \mathcal{H}$ .*

V. Tesko [28] ha costruito e studiato l'integrale di Riemann-Stieltjes in  $\mathcal{H}$

$$RS \int_0^T A(t) dM_t, \tag{8.9}$$

dove  $A(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , e la funzione integratrice  $M_t$  è una martingala astratta. Chiamiamo  *$H$ -integrale stocastico* tale integrale forte di Riemann-Stieltjes. L'integrale in (8.9) rientra nella definizione data nella sezione 6.1, considerando  $X = Y = \mathcal{H}$ .

**Nota.** Yu.M. Berezanski e N.W.Zhernakov [2] hanno costruito, usando una teoria spettrale di operatori normali commutanti, un integrale di funzioni a valori operatori rispetto ad una misura a valori proiezioni. Questo integrale spettrale di funzioni a valori operatori si presenta nella forma

$$B(t) = \int_0^t A(\lambda) dE_\lambda, \quad t \geq 0,$$

dove  $(A(\lambda))_{\lambda \geq 0}$  è una famiglia di operatori normali in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , ed  $(E_\lambda)$  è una famiglia spettrale in  $\mathcal{H}$  parzialmente commutante con  $(A(\lambda))$ , nel seguente senso: per ogni  $t \geq 0$ , preso  $\alpha$  boreliano in  $]t, +\infty[$ ,  $A(t)$  commuta con  $E(\alpha)$ , dove  $E(\cdot)$  è la misura spettrale (definita in 8.5) associata alla famiglia  $(E_\lambda)$ . Fissato  $M \in \text{dom}(B) \subset \mathcal{H}$ , la formula

$$\left( \int_0^T A(\lambda) dE_\lambda \right) \cdot X = RS \int_0^T A(t) d(E_\lambda X). \tag{8.10}$$

può essere vista come una definizione dell'H-integrale (8.9).

**Una costruzione dell'H-integrale stocastico.** Sia data una famiglia spettrale continua da destra e limitata  $(E_t)$  in  $\mathcal{H}$ , con intervallo di variazione  $[0, T]$ . Fissato  $X \neq 0$  in  $\mathcal{H}$ , per definire l'H-integrale stocastico (8.9) rispetto alla martingala astratta  $(M_t)_{t \in [0, T]}$ , con  $M_t = E_t X$ , si può partire dalla classe delle funzioni semplici a valori in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Per ogni  $t \in [0, T]$  poniamo:

$$\mathcal{H}_X(t) := \text{span}\{(E_{t_2} - E_{t_1})X \mid ]t_1, t_2] \subset ]t, T]\} \subset \mathcal{H}, \quad (8.11)$$

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_X(t) \rightarrow \mathcal{H}), \quad (8.12)$$

dove (8.12) è l'insieme degli operatori lineari in  $\mathcal{H}$ , sia limitati che illimitati, che sono limitati su  $\mathcal{H}_X(t)$ .

La famiglia  $\mathcal{L}_X(t)$  è crescente in  $t$ , poiché  $\mathcal{H}_X(s) \subset \mathcal{H}_X(t)$  quando  $t \leq s$ . Poniamo la seguente norma su  $\mathcal{L}_X(t)$ :

$$\|A\|_{\mathcal{L}_X(t)} := \sup_{Y \in \mathcal{H}_X(t), Y \neq 0} \frac{\|AY\|_{\mathcal{H}}}{\|Y\|_{\mathcal{H}}}$$

**Definizione 8.8.2** Diciamo che  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  è parzialmente commutante con la famiglia spettrale  $(E_t)$  su  $[0, T]$  se

$$AE_t Y = E_t A Y, Y \in \mathcal{H}_X(t).$$

**Definizione 8.8.3** Fissato  $t \in [0, T[$ , un operatore lineare  $A$  in  $\mathcal{H}$  è detto  $\mathcal{L}_X(t)$ -misurabile se

- (i)  $A \in \mathcal{L}_X(t)$ , e, per ogni  $s \in [t, T[$ ,  $\|A\|_{\mathcal{L}_X(t)} = \|A\|_{\mathcal{L}_X(s)}$  ;
- (ii)  $A$  è parzialmente commutante con  $(E_t)$ .

In quanto segue, è conveniente chiamare  $\mathcal{L}_X(T)$ -misurabili tutti gli operatori lineari in  $\mathcal{H}$ .

Risulta

**Proposizione 8.8.1** Se un operatore lineare  $A$  in  $\mathcal{H}$  è  $\mathcal{L}_X(t)$ -misurabile per un  $t \in [0, T]$ , allora è  $\mathcal{L}_X(s)$ -misurabile per ogni  $s \in [t, T]$ .

**Definizione 8.8.4** Una famiglia  $(A(t))_{t \in [0, T]}$  di operatori lineari in  $\mathcal{H}$  è detta H-processo semplice  $\mathcal{L}_X$ -adattato se, per ogni  $t \in [0, T]$ , l'operatore lineare  $A(t)$  è  $\mathcal{L}_X(t)$ -misurabile, ed esiste una suddivisione finita  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  di  $[0, T]$  tale che

$$A(t) = \sum_{k=1}^n A_{k-1} \chi_{]t_{k-1}, t_k]}, \quad t \in [0, T]. \quad (8.13)$$

Denotiamo con  $\mathcal{S}_X$  l'insieme degli H-processi semplici  $\mathcal{L}_X$ -adattati in  $[0, T]$ .

**Definizione 8.8.5** *Sia  $A \in \mathcal{S}_X$ , rappresentato dalla (8.13). L' H-integrale stocastico di  $A$  rispetto alla martingala astratta  $(M_t)$  è definito dalla*

$${}^{RS} \int_0^T A(t) dM_t := \sum_{k=1}^n A_{k-1}(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}). \quad (8.14)$$

Consideriamo ora l'applicazione

$$\alpha \in \mathcal{B}([0, T]) \mapsto \mu_X(\alpha) := \langle E(\alpha)X, X \rangle_{\mathcal{H}},$$

dove  $E(\alpha)$  è la misura (definita in 8.5) generata dalla famiglia spettrale  $(E_t)$ . Essendo  $E(\alpha)$  una proiezione in  $\mathcal{H}$ , risulta  $\langle E(\alpha)X, X \rangle_{\mathcal{H}} = \|E(\alpha)X\|^2$ , e, per il teorema 7.8.1, la  $\mu_X$  è una misura reale positiva.

Sia  $A \in \mathcal{S}_X$  rappresentato dall'espressione (8.13). Risulta:

$$\begin{aligned} \|A(t)\|_{\mathcal{L}_X(t)}^2 &= \|A_{k-1}\|_{\mathcal{L}_X(t_{k-1})}^2 && \text{per } t \in [t_{k-1}, t_k[ \text{ e} \\ L \int_0^T \|A(t)\|_{\mathcal{L}_X(t)}^2 d\mu_X(t) &= \sum_{k=1}^n \|A_{k-1}\|_{\mathcal{L}_X(t_{k-1})}^2 \mu_X(]t_{k-1}, t_k]). \end{aligned}$$

**Teorema 8.8.1** *Siano  $A, B \in \mathcal{S}_X$ , ed  $a, b \in \mathbb{C}$ . Allora*

$${}^{RS} \int_0^T (aA(t) + bB(t)) dM_t = a {}^{RS} \int_0^T A(t) dM_t + b {}^{RS} \int_0^T B(t) dM_t,$$

e vale inoltre la seguente stima:

$$\|{}^{RS} \int_0^T A(t) dM_t\|_{\mathcal{H}}^2 \leq L \int_0^T \|A(t)\|_{\mathcal{L}_X(t)}^2 d\mu_X(t). \quad (8.15)$$

La (8.15) ci permette di estendere l'H-integrale stocastico a funzioni a valori operatori non necessariamente semplici. Definiamo, per ogni  $A \in \mathcal{S}_X$ , la quasinorma

$$\|A\|_{\mathcal{S}_X} := \left( L \int_0^T \|A(t)\|_{\mathcal{L}_X(t)}^2 d\mu_X(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quozientiamo  $\mathcal{S}_X$  rispetto agli  $A \in \mathcal{S}_X$ , con  $\|A\|_{\mathcal{S}_X} = 0$ , e sia  $\hat{\mathcal{S}}_X$  il suo completamento.

**Definizione 8.8.6 (H-integrale stocastico)** *Una funzione a valori operatori  $t \in [0, T] \mapsto A(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  è detta H-integrabile rispetto alla martingala  $M_t = E_t X$  se  $A \in \hat{\mathcal{S}}_X$ . In tal caso esiste una successione  $(A_n)$  in  $\mathcal{S}_X$  tale che*

$$L \int_0^T \|A(t) - A_n(t)\|_{\mathcal{L}_X(t)}^2 d\mu_X(t) \rightarrow_n 0. \quad (8.16)$$

Chiamiamo  $H$ -integrale stocastico di  $A$  rispetto a  $M_t$  il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} {}^{RS} \int_0^T A_n(t) dM_t,$$

che esiste in  $\mathcal{H}$ , e lo denotiamo con

$${}^{RS} \int_0^T A(t) dM_t.$$

## Capitolo 9

# Integrali stocastici: un approccio spettrale

### 9.1 Geometria dell'attesa condizionata

Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità.

**Definizione 9.1.1** Una sotto- $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$  è una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{G}$  di unità  $\Omega$  inclusa in  $\mathcal{F}$ .

Denoto con  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , lo spazio delle funzioni reali con modulo di  $p$ -esima potenza  $P$ -sommabile su  $\Omega$ .

**Definizione 9.1.2** Sia  $\mathcal{G}$  una sotto- $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$ , e sia  $X \in L^1(\Omega)$ , a valori in  $\mathbb{R}$ .

Una  $Y \in L^1(\Omega)$  è detta attesa condizionata di  $X$  rispetto a  $\mathcal{G}$  se  $Y$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile e

$$\int_G Y dP = \int_G X dP \quad \text{per ogni } G \in \mathcal{G}.$$

In questo caso, la  $Y$  è denotata con  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ .

Qui di seguito fornisco due semplici esempi.

**Valore atteso di una variabile aleatoria.** Sia  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ , ed  $X \in L^1(\Omega)$ . L'attesa condizionata di  $X$  rispetto a  $\mathcal{G}$  è la funzione costante  $\int_\Omega X dP$ , ossia  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbf{E}[X]$  per ogni  $\omega \in \Omega$ .

**Un operatore di attesa condizionata.** Sia  $(A_n)$  una successione di insiemi disgiunti in  $\mathcal{F}$ , con  $\cup_{n=1}^\infty A_n = \Omega$ . Sia  $\mathcal{G}$  la sotto- $\sigma$ -algebra di tutte le possibili unioni degli  $A_n$ . Data  $X \in L^1(\Omega)$ , risulta:

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{A_n} X dP}{P(A_n)} \chi_{A_n}, \quad \text{con } 0/0 = 0.$$

Il seguente teorema stabilisce l'esistenza dell'attesa condizionata su  $L^1(\Omega)$ :

**Teorema 9.1.1** *Sia  $\mathcal{G}$  una sotto- $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$ .  
L'attesa condizionata  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  esiste per ogni  $X \in L^1(\Omega)$ .  
Inoltre, per  $1 \leq p < \infty$ , se  $X \in L^p(\Omega)$  risulta:*

$$\|\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]\|_p \leq \|X\|_p$$

**Dimostrazione.** Sia  $X \in L^1(\Omega)$ . Definiamo la seguente misura con segno su  $\mathcal{G}$ :

$$\lambda(G) = \int_G X dP.$$

La misura con segno  $\lambda$  è assolutamente continua rispetto a  $P$  su  $\mathcal{G}$ , e quindi, per il teorema di Radon-Nikodým<sup>1</sup>, esiste una funzione  $P$ -sommabile  $Y$   $\mathcal{G}$ -misurabile tale che

$$\lambda(G) = \int_G Y dP \quad \text{per ogni } G \in \mathcal{G},$$

e una tale  $Y$  soddisfa alle proprietà dell'attesa condizionata. L'esistenza è dunque dimostrata.

Da questa costruzione, si deduce immediatamente che  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ , cioè  $\mathbf{E}[\cdot|\mathcal{G}]$  è una proiezione, e il suo range coincide con le funzioni  $\mathcal{G}$ -misurabili in  $L^1(\Omega)$ . Inoltre,  $\mathbf{E}[\cdot|\mathcal{G}]$  trasforma funzioni non negative in funzioni non negative, e le funzioni costanti sono punti uniti per l'applicazione. Per completare la dimostrazione, resta da vedere che  $\|\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]\|_p \leq \|X\|_p$ , per  $X \in L^p(\Omega)$ .

Preso  $\phi(t) = |t|^p$ , con  $t$  reale, e applicando la disuguaglianza di Jensen<sup>2</sup>, si ottiene:

$$\phi(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbf{E}[\phi(X)|\mathcal{G}], \quad \text{ossia} \quad |\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|^p \leq \mathbf{E}[|X|^p|\mathcal{G}],$$

che porge:

$$\int_{\Omega} |\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|^p dP \leq \int_{\Omega} \mathbf{E}[|X|^p|\mathcal{G}] dP = \int_{\Omega} |X|^p dP,$$

essendo  $\Omega \in \mathcal{G}$ . Quindi l'operatore  $\mathbf{E}[\cdot|\mathcal{G}]$  è una contrazione.  $\square$

Questo risultato può essere esteso al caso in cui  $X$  sia una funzione  $P$ -sommabile a valori in uno spazio di Banach  $E$ , anche in assenza di RNP.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>v.N. Dunford e J.T. Schwartz [12], p. 176.

<sup>2</sup> Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convessa (cioè  $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ), e sia  $X \in L^1(\Omega)$  tale che  $\mathbf{E}[f(X)] < \infty$ . Allora  $f(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbf{E}[f(X)|\mathcal{G}]$ .

<sup>3</sup>v. J. Diestel and J.J. Uhl [11], pp. 122-123.

**Definizione 9.1.3** Sia  $X$  una variabile aleatoria reale su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Chiamiamo  $\sigma$ -algebra generata da  $X$ , e la denotiamo con  $\sigma(X)$ , la  $\sigma$ -algebra generata dalla famiglia delle controimmagini mediante  $X$  dei boreliani di  $\mathbb{R}$ .

**Proprietà dell'attesa condizionata.** Discendono immediatamente dalla definizione e dalla costruzione dell'attesa condizionata le seguenti proprietà.

Data  $\mathcal{G}$  sotto- $\sigma$ -algebra di  $\mathcal{F}$ , per ogni  $X, Y$  reali  $P$ -sommabili su  $\Omega$ , ed  $a, b$  in  $\mathbb{R}$  risulta:

- a) se  $X$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile, allora  $X = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ ;
- b) se  $\sigma(X)$  è indipendente da  $\mathcal{G}$ , allora  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  ;
- c)  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}]$  ;
- d)  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]]$  ;
- e)  $a\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[aX + bY|\mathcal{G}]$  ;
- f) se  $X \leq Y$   $P$ -q.o. , allora  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \leq \mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$  .

Dati  $X, Y \in L^1(\Omega)$  e  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  sotto- $\sigma$ -algre di  $\mathcal{F}$ , valgono le seguenti ulteriori proprietà:<sup>4</sup>

- g) se  $Y$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile e limitata, allora  $\mathbf{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  ;
- h) se  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ , allora  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$  .
- i) (**B. Levi**) Se  $(X_n)$  è una successione monotona crescente di funzioni in  $L^1(\Omega)$ , convergente  $P$ -q.o. a  $X$ , allora  $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{G}]$  converge a  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  .
- j) (**Convergenza dominata**) Se  $(X_n)$  è una successione di funzioni in  $L^1(\Omega)$ , convergente  $P$ -q.o. a  $X$ , ed esiste  $Y \in L^1(\Omega)$  tale che  $|X_n| \leq |Y|$   $P$ -q.o., allora  $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{G}]$  converge a  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  .
- k) (**Fatou**) Se  $(X_n)$  è una successione di funzioni non negative in  $L^1(\Omega)$ , convergente  $P$ -q.o. a  $X$ , ed esiste  $M > 0$  tale che  $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{G}] \leq M$  per ogni  $n$ , allora  $X \in L^1(\Omega)$ , e  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \leq M$  .

## 9.2 Processi stocastici e martingale

**Definizione 9.2.1 (Filtrazione)** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità, e sia  $(\mathbf{T}, \prec)$  un insieme orientato di indici.

Diciamo che la famiglia  $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  di sotto- $\sigma$ -algre di  $\mathcal{F}$  è una filtrazione su  $\mathcal{F}$ , se essa è un net non decrescente lungo  $\mathbf{T}$  rispetto all'inclusione, ossia

$$\tau_1 \prec \tau_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}.$$

---

<sup>4</sup>Per le dimostrazioni, vedi A. Pascucci [24], pp: 57-58.



Lo spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  munito di una filtrazione  $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  è sovente denotato con  $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_\tau, \tau \in \mathbf{T})$ .

**Definizione 9.2.2 (Processo stocastico adattato)** *Dato uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_\tau, \tau \in \mathbf{T})$ , chiamiamo processo stocastico un net di variabili aleatorie reali  $X_\tau$  su  $\Omega$ , dove  $\tau$  corre su  $\mathbf{T}$ , e lo denotiamo con  $(X_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$ .*

*Diciamo che il processo  $(X_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$ ,  $X_\tau \in L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), è adattato alla filtrazione  $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  se, per ogni  $\tau \in \mathbf{T}$ ,  $X_\tau$  è  $\mathcal{F}_\tau$ -misurabile.*

Per brevità, chiameremo un processo stocastico adattato ad una data filtrazione  $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  anche processo  $\mathcal{F}_\tau$ -adattato.

**Esempio.** Sia  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ , e  $P$  la misura di Lebesgue su  $[0, 1]$ .

Per ogni  $t \in [0, 1]$ , sia  $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{B}([0, t]), [t, 1])$ . La  $(\mathcal{F}_t, t \in [0, 1])$  è una filtrazione su  $\mathcal{B}([0, 1])$ . Data  $f \in L^1([0, 1])$ , la famiglia

$$f_t(x) = f(x)\chi_{[0,t]}(x)$$

è un processo stocastico adattato alla filtrazione  $(\mathcal{F}_t)$ .

**Definizione 9.2.3 (Martingala)** *Dato uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_\tau, \tau \in \mathbf{T})$ , una martingala è un processo stocastico  $(X_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$ ,  $X_\tau \in L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), adattato alla filtrazione  $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$ , e tale che, fissato ad arbitrio  $\tau_0 \in \mathbf{T}$ , risulta*

$$\mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_{\tau_0}] = X_{\tau_0} \quad \text{per ogni } \tau \succ \tau_0.$$

Il modo più semplice per costruire una martingala in  $L^p(\Omega)$  è il seguente

**Esempio.** Sia  $(\mathcal{F}_\tau, \tau \in \mathbf{T})$  una filtrazione su  $\mathcal{F}$ , e sia  $X \in L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Allora  $(\mathbf{E}[X | \mathcal{F}_\tau])_{\tau \in \mathbf{T}}$  è una martingala in  $L^p(\Omega)$ . Vedremo in seguito che tutte le martingale convergenti in norma  $L^p$  su  $\Omega$  sono di questo tipo.

**Esempio.** Sia  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ , e  $P$  la misura di Lebesgue su  $[0, 1]$ .

Data su  $\Omega$  la filtrazione  $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{B}([0, t]), [t, 1])$ , la

$$\begin{aligned} E_t &= 0 && \text{per } t < 0 \\ E_t &= \mathbf{E}[\bullet | \mathcal{F}_t] && \text{per } 0 \leq t \leq 1 \\ E_t &= I && \text{per } t > 1 \end{aligned}$$

è una famiglia spettrale in  $L^2(\Omega)$ .

Fissato  $f \in L^2(\Omega)$ , la  $(E_t(f))_{t \in [0,1]}$  è una martingala, esprimibile nella seguente forma:

$$E_t(f)(x) = f(x)\chi_{[0,t]}(x) + \frac{1}{P([t,1])} \int_{]t,1]} f(x) P(dx) \chi_{]t,1]}(x) \quad (0/0 = 0).$$

**Teoremi di convergenza.** È naturale chiedersi, data una martingala  $(X_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  in  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ), quali siano le condizioni di convergenza in  $L^p$ -norma, e, se  $p = 1$ , quando  $(X_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  converge q.o.

Una semplice ma cruciale proprietà di una martingala in  $L^p(\Omega)$  è la seguente:

**Proposizione 9.2.1** *Sia  $(X_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  una martingala in  $L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ). Se  $E \in \cup_\tau \mathcal{F}_\tau$ , allora esiste*

$$\lim_\tau \int_E X_\tau dP = F(E)$$

**Dimostrazione.** Sia  $E \in \cup_\tau \mathcal{F}_\tau$ . Poiché  $(\mathcal{F}_\tau, \tau \in \mathbf{T})$  è un net di sotto- $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{F}$  monotono non decrescente, esiste un  $\tau_1 \in \mathbf{T}$  tale che  $E \in \mathcal{F}_{\tau_1}$  per ogni  $\tau \succ \tau_1$ . Allora, per ogni  $\tau \succ \tau_1$  risulta

$$\int_E X_\tau dP = \int_E \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_{\tau_1}] dP = \int_E X_{\tau_1} dP.$$

Allora il net  $(\int_E X_\tau dP, \tau \in \mathbf{T})$  è definitivamente costante, e quindi convergente.  $\square$

**Teorema 9.2.1** *Sia  $1 \leq p < \infty$ . Una martingala  $(X_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  in  $L^p(\Omega)$  converge in norma  $L^p$  se e solo se esiste  $X \in L^p(\Omega)$  tale che, per ogni  $E \in \cup_\tau \mathcal{F}_\tau$  risulta*

$$\lim_\tau \int_E X_\tau dP = F(E) = \int_E X dP$$

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $X_\tau$  tenda ad  $X$  in norma  $L^p$ . Pertanto, poiché l'integrale di una funzione in  $L^p(\Omega)$  definisce un funzionale lineare limitato sullo spazio  $L^p(\Omega)$ , si ha

$$F(E) = \lim_\tau \int_E X_\tau dP = \int_E X dP \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{F}$$

e quindi per ogni  $E \in \cup_\tau \mathcal{F}_\tau$ .

Viceversa, supponiamo che esista un  $X \in L^p(\Omega)$  tale che, per ogni  $E \in \cup_\tau \mathcal{F}_\tau$  risulti  $\lim_\tau \int_E X_\tau dP = F(E) = \int_E X dP$ . Sia  $\mathcal{F}_\infty$  la  $\sigma$ -algebra generata da  $\cup_\tau \mathcal{F}_\tau$ . Poniamo  $X_\infty = \mathbf{E}[X | \mathcal{F}_\infty]$ . Allora  $F(E) = \int_E X_\infty dP$  per tutti gli  $E \in \cup_\tau \mathcal{F}_\tau$ . Inoltre risulta  $\mathbf{E}[X_\infty | \mathcal{F}_\tau] = X_\tau$  per ogni  $\tau \in \mathbf{T}$ .

Resta da mostrare che  $\lim_{\tau} \|X_{\tau} - X_{\infty}\|_p = 0$ . A questo punto, non è restrittivo supporre  $\mathcal{F}_{\infty} = \mathcal{F}$ . In virtù del fatto che  $\sigma(\cup_{\tau} \mathcal{F}_{\tau}) = \mathcal{F}$ , l'insieme delle funzioni semplici della forma  $\sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$  è denso in  $L^p(\Omega)$ . Di conseguenza, dato  $\varepsilon > 0$ , esiste una funzione semplice  $\Phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$ , con  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $E_k \in \cup_{\tau} \mathcal{F}_{\tau}$  tale che  $\|\Phi - X_{\infty}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Poiché  $(\mathcal{F}_{\tau}, \tau \in \mathbf{T})$  è un net monotono non decrescente, esiste un indice  $\tau_0$  tale che  $E_k \in \mathcal{F}_{\tau_0}$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ . Così,  $\Phi$  è  $\mathcal{F}_{\tau}$ -misurabile per tutti i  $\tau \succ \tau_0$  e

$$\mathbf{E}[\Phi | \mathcal{F}_{\tau}] = \Phi \quad \text{per } \tau \succ \tau_0.$$

Per  $\tau \succ \tau_0$  si ha

$$\begin{aligned} \|X_{\tau} - X_{\infty}\|_p &\leq \|X_{\tau} - \Phi\|_p + \|\Phi - X_{\infty}\|_p = \\ &= \|\mathbf{E}[X_{\infty} - \Phi | \mathcal{F}_{\tau}]\|_p + \|\Phi - X_{\infty}\|_p \leq \\ &\leq 2\|\Phi - X_{\infty}\|_p < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Il teorema 9.2.1 ha la seguente espressione equivalente

**Teorema 9.2.2** *Sia  $1 \leq p < \infty$ . Una martingala  $(X_{\tau})_{\tau \in \mathbf{T}}$  in  $L^p(\Omega)$  converge in norma  $L^p$  se e solo se esiste  $X \in L^p(\Omega)$  tale che  $\mathbf{E}[X | \mathcal{F}_{\tau}] = X_{\tau}$  per ogni  $\tau \in \mathbf{T}$ .*

**Proposizione 9.2.2** *Sia  $1 \leq p < \infty$ . Affinché la martingala  $(X_{\tau})_{\tau \in \mathbf{T}}$  in  $L^p(\Omega)$  converga in norma  $L^p$  ad  $X$  è necessario che le seguenti condizioni siano soddisfatte:*

- (i)  $\sup_{\tau \in \mathbf{T}} \|X_{\tau}\|_p < \infty$
- (ii)  $F(E) = \int_E X dP$  deve essere  $P$ -continua, i.e.  $F(E) \rightarrow 0$  per  $P(E) \rightarrow 0$ .

**Teorema 9.2.3 (Convergenza in media)** *Sia  $1 \leq p < \infty$ , e sia  $(X_{\tau})_{\tau \in \mathbf{T}}$  una martingala in  $L^p(\Omega)$ . Allora  $\lim_{\tau} X_{\tau}$  esiste in norma  $L^p$  se e solo se*

$$\begin{aligned} (p = 1) \quad &\sup_{\tau \in \mathbf{T}} \|X_{\tau}\|_1 < \infty \text{ e} \\ &\int_E \|X_{\tau}\| dP \rightarrow 0 \text{ uniformemente per } P(E) \rightarrow 0, E \in \mathcal{F}_{\tau}; \\ (1 < p < \infty) \quad &\sup_{\tau \in \mathbf{T}} \|X_{\tau}\|_p < \infty. \end{aligned}$$

Questo teorema fondamentale è stato esteso da J.Diestel e J.J. Uhl [11] al caso in cui la martingala  $(X_{\tau})$  sia una funzione a valori in uno spazio di Banach con la RNP.

### 9.3 Processi stocastici a tempo continuo

Nella teoria classica dei processi stocastici, una filtrazione  $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau \in \mathbf{T}}$  su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ha il seguente significato:  $\tau$  è una variabile temporale, ed  $\mathcal{F}_\tau$  è la famiglia di tutti gli eventi osservabili fino al tempo  $\tau$ . L'insieme di indici  $\mathbf{T}$  è solitamente un sottoinsieme di numeri reali, orientato dalla relazione  $\leq$ .

I più comuni esempi sono il tempo discreto:  $\mathbf{T} = \mathbf{N}$ , e il tempo continuo:  $\mathbf{T} = \mathbb{R}_+$ , ovvero  $\mathbf{T} = [0, T]$  per un  $T > 0$  fissato.

Le filtrazioni a tempo discreto  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{N}}$  corrispondono alle filtrazioni  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  con  $\mathcal{F}_t$  costante per ogni  $t$ ,  $[t] \leq t < [t] + 1$ . Le filtrazioni  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  corrispondono alle filtrazioni  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , costanti su  $[T, +\infty[$ .

Non è quindi restrittivo supporre, per ciascuno di questi casi, che sia  $\mathbf{T} = \mathbb{R}_+$ .

Data una filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , si pone

$$\mathcal{F}_{t-0} := \sigma\left(\bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s\right), \quad \text{per } t > 0, \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{t-0} = \mathcal{F}_t \quad \text{per } t = 0;$$

$$\mathcal{F}_{t+0} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s, \quad \text{per } t \geq 0$$

Chiaramente, per ogni  $s < t$ , risulta  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{s+0} \subset \mathcal{F}_{t-0} \subset \mathcal{F}_t$ . Anche le  $(\mathcal{F}_{t+0})_{t \in \mathbf{T}}$  e  $(\mathcal{F}_{t-0})_{t \in \mathbf{T}}$  sono filtrazioni su  $\mathcal{F}$ .

**Definizione 9.3.1** *Una filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  è detta continua da destra (risp. da sinistra) se  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+0}$  (risp.  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-0}$ ) per ogni  $t$ .*

**Definizione 9.3.2 (Processo misurabile)** *Il processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è detto misurabile se la mappa*

$$(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$$

*è misurabile su  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ , munito della  $\sigma$ -algebra prodotto  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ .*

Ogni processo stocastico  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  genera una filtrazione. Sia infatti  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ , ossia la più piccola  $\sigma$ -algebra rispetto alla quale  $X_s$  è misurabile per tutti gli  $s \leq t$ . La  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  così definita è la filtrazione minimale alla quale il processo  $\mathbf{X}$  è adattato, ed è chiamata *filtrazione naturale per  $\mathbf{X}$* .

**Definizione 9.3.3 (Processo progressivamente misurabile)** *Il processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è detto progressivamente misurabile se, per ogni  $t$ , la sua restrizione all'intervallo  $[0, t]$  è misurabile su  $[0, t] \times \Omega$ , munito della  $\sigma$ -algebra prodotto a  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}$ .*

**Definizione 9.3.4** Un processo stocastico  $(X_t)_{t \geq 0}$  è detto *continuo da destra* (risp. *da sinistra*) se per ogni fissato  $\omega \in \Omega$ ,  $X_t(\omega) = X_{t+0}(\omega)$  (risp.  $X_t(\omega) = X_{t-0}(\omega)$ ), per ogni  $t \geq 0$ .

**Teorema 9.3.1** Ogni processo adattato continuo da destra, o da sinistra, è progressivamente misurabile.

**Definizione 9.3.5 (Variazione  $p$ -esima)** Sia  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  un processo stocastico. Dato  $t > 0$ , diciamo che  $\mathbf{X}$  è a *variazione  $p$ -esima* ( $1 \leq p < \infty$ ) limitata su  $[0, t]$  se, per ogni  $\omega \in \Omega$ , il net

$$V_t^{(p)}(\mathbf{X}, P, \omega) = \sum_{k=1}^n |X_{\tau_k}(\omega) - X_{\tau_{k-1}}(\omega)|^p \quad P = (0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t)$$

converge lungo l'insieme  $\mathcal{D}_t$  delle partizioni dell'intervallo  $[0, t]$ , orientato dalla  $\prec$  definita in 1.2.

Denotiamo tale limite, se esiste, con  $V_t^{(p)}(\mathbf{X})(\omega)$ .

Dato un processo stocastico  $\mathbf{X}$ , la  $V_t^{(1)}(\mathbf{X})(\omega)$  è detta *variazione* di  $\mathbf{X}$  su  $[0, t]$ , e la  $V_t^{(2)}(\mathbf{X})(\omega)$  *variazione quadratica* di  $\mathbf{X}$  su  $[0, t]$ , ed è sovente denotata con  $\langle \mathbf{X}(\omega) \rangle_t$ .

Dato un processo stocastico  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , la variazione  $V^{(1)}(\mathbf{X})(\omega)$  su  $[0, t]$  esiste se e solo se, per ogni fissato  $\omega \in \Omega$ , l'applicazione  $s \in [0, t] \mapsto \gamma_\omega(s) = X_s(\omega)$  è a variazione totale limitata su  $[0, t]$ .

## 9.4 Famiglie spettrali e martingale in $L^2(\Omega)$

Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità, ed  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtrazione su  $\mathcal{F}$ , con  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$ .

L'applicazione

$$E_t = \mathbf{E}[\bullet | \mathcal{F}_t] \quad \text{per } t \geq 0, \quad E_t = 0 \quad \text{per } t < 0$$

è una famiglia spettrale nello spazio di Hilbert  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Fissato  $M_\infty \in L^2(\Omega)$ , il processo stocastico  $\mathbf{M} = (M_t)_{t \geq 0}$

$$M_t = E_t(M_\infty) \quad \text{ossia} \quad M_t = \mathbf{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t] \quad (9.1)$$

è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala in  $L^2(\Omega)$  convergente in norma  $L^2$  ad  $M_\infty$ . Viceversa, per il teorema 9.2.2, una martingala  $(M_t)_{t \geq 0}$  converge per  $t \rightarrow \infty$  se esiste un  $M_\infty \in L^2(\Omega)$  tale che valga 9.1. Per il teorema 9.2.3, affinché ciò accada, è sufficiente che la  $\mathbf{M}$  sia  $L^2$ -limitata, ossia che  $\sup_{t \geq 0} \mathbf{E}(|M_t|^2) < \infty$ .

Denotiamo lo spazio delle martingale  $L^2$ -limitate con  $\mathcal{M}_2$ , e il sottospazio

delle martingale continue  $L^2$ -limitate con  $\mathcal{M}_2^c$ .  
Sullo spazio  $\mathcal{M}_2$  si può definire la seguente norma:

$$\|\mathbf{M}\| = \|M_\infty\|_2 = (\mathbf{E}[M_\infty^2])^{\frac{1}{2}}.$$

Quozientando  $\mathcal{M}_2$  rispetto ai processi modificati<sup>5</sup>, lo spazio  $(\mathcal{M}_2, \|\cdot\|)$  è uno spazio di Hilbert, ed  $\mathcal{M}_2^c$  è un suo sottospazio chiuso.

Per quanto visto nella sezione 8.2, una famiglia spettrale in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  non è, in generale, a variazione limitata, nemmeno fortemente. Questa nozione si traduce, per le martingale in  $\mathcal{M}_2$ , nell'affermare che, in generale, esse non sono a variazione limitata.

Per quanto invece riguarda la variazione quadratica, possiamo enunciare l'analogo del teorema 8.2.2:

**Teorema 9.4.1** *Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità, ed  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtrazione su  $\mathcal{F}$ ,  $(\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F})$ .*

*Ogni  $\mathcal{F}_t$ -martingala  $\mathbf{M} = (M_t)_{t \geq 0}$  in  $\mathcal{M}_2$  è a variazione quadratica limitata su tutto  $\mathbb{R}_+$ . In particolare, per ogni  $\omega \in \Omega$ , e per ogni  $t > 0$ , esiste finito  $\langle \mathbf{M}(\omega) \rangle_t$ .*

Sia ora  $T > 0$  fissato,  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  una filtrazione su  $\mathcal{F}$ , con  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ .

A questa filtrazione corrisponde la  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , con  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  e  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$  per  $t \geq T$ .

L'applicazione

$$E_t = \mathbf{E}[\bullet | \mathcal{F}_t] \quad \text{per } t \geq 0, \quad E_t = 0 \quad \text{per } t < 0$$

è una famiglia spettrale limitata nello spazio di Hilbert  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , nel senso visto nella sezione 8.1. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} E_t &= 0 && \text{per } t < 0 \\ E_t &= \mathbf{E}[\bullet | \mathcal{F}_t] && \text{per } 0 \leq t \leq T \\ E_t &= I && \text{per } t > T. \end{aligned}$$

Fissato  $M_\infty \in L^2(\Omega)$ , il processo stocastico  $\mathbf{M} = (M_t)_{t \geq 0}$

$$M_t = E_t(M_\infty) \quad \text{ossia} \quad M_t = \mathbf{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t] \quad (9.2)$$

è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala in  $L^2(\Omega)$  definitivamente costante per  $t \rightarrow +\infty$ , e quindi convergente in norma  $L^2$  a  $I(M_\infty) = M_\infty$ . La  $\mathbf{M}$  è  $L^2$ -limitata: infatti

---

<sup>5</sup> Dati due processi  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  ed  $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t \geq 0}$  su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , si dice che  $\mathbf{X}$  ed  $\mathbf{Y}$  sono uno la modifica dell'altro se  $P(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1$  per ogni  $t \geq 0$ .

$\|\mathbf{M}\| = \|M_\infty\|_2 = (\mathbf{E}[M_\infty^2])^{\frac{1}{2}} < \infty$ , essendo  $M_\infty \in L^2(\Omega)$ . Viceversa, data una  $\mathcal{F}_t$ -martingala  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  in  $L^2(\Omega)$ , esiste  $M_\infty \in L^2(\Omega)$ , tale che  $\mathbf{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t] = M_t$  per ogni  $t \in [0, T]$ . Denotiamo lo spazio delle martingale  $(M_t)_{t \in [0, T]}$  in  $L^2(\Omega)$  con  $\mathcal{M}_2^T$ .

Sullo spazio  $\mathcal{M}_2^T$  si può definire la seguente norma:

$$\|\mathbf{M}\|_T := (\mathbf{E}[M_T^2])^{\frac{1}{2}} = \|M_T\|_2.$$

Quozientando  $(\mathcal{M}_2^T, \|\cdot\|_T)$  rispetto ai processi modificati su  $[0, T]$ , esso è ovviamente un sottospazio di  $(\mathcal{M}_2, \|\cdot\|)$ .

Una notevole proprietà delle martingale in  $L^2(\Omega)$  è l'ortogonalità degli incrementi:

**Proposizione 9.4.1** *Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità, ed  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  una filtrazione su  $\mathcal{F}$ . Se  $\mathbf{M}$  è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala in  $L^2(\Omega)$ , ed  $Y$  è una variabile aleatoria in  $L^2(\Omega)$   $\mathcal{F}_s$ -misurabile, allora*

$$\mathbf{E}[Y(M_t - M_s)] = 0 \quad \text{per } t \geq s.$$

**Dimostrazione.** Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\mathbf{E}[Y(M_t - M_s)] < \infty,$$

e quindi

$$\mathbf{E}[Y(M_t - M_s)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y(M_t - M_s) | \mathcal{F}_s]] = \mathbf{E}[Y \mathbf{E}[(M_t - M_s) | \mathcal{F}_s]] = 0.$$

□

Un esempio tipico è  $Y = M_s$ , e si ottiene  $\mathbf{E}[M_s(M_t - M_s)] = 0$ . Una comune applicazione è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2M_s \mathbf{E}[M_t | \mathcal{F}_s] + M_s^2 = \\ &= \mathbf{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - M_s^2. \end{aligned}$$

**Definizione 9.4.1 (Martingala normale)** *Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ .*

*Diciamo che la  $\mathcal{F}_t$ -martingala  $(N_t)_{t \geq 0}$  in  $L^2(\Omega)$  è una martingala normale se  $(N_t^2 - t)_{t \geq 0}$  è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala.*

**Proposizione 9.4.2** *Siano  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ , e  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $\mathcal{F}_t$ -martingala in  $L^2(\Omega)$ .*

*Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (a)  $(N_t)_{t \in [0, T]}$  è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala normale ;

(b) per ogni  $s, t \in [0, T]$ , con  $s < t$ ,  $\mathbf{E}[(N_t - N_s)^2 | \mathcal{F}_s] = t - s$ .

Una delle più note martingale normali è il *moto Browniano*, o *processo di Wiener*, che appartiene alle più importanti classi di processi stocastici: è infatti una martingala continua, un processo Gaussiano, ed è anche un *processo di Lévy*, ossia un processo stocastico *càdlàg*<sup>6</sup> con incrementi stazionari indipendenti<sup>7</sup>. Più precisamente:

**Definizione 9.4.2 (Moto Browniano)** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità, con filtrazione  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ .

Un *moto Browniano reale* è un processo stocastico  $(W_t)_{t \geq 0}$  adattato alla filtrazione  $(\mathcal{F}_t)$ , con le proprietà:

- (i)  $W_0 = 0$  q.s.;
- (ii) se  $0 \leq s < t$ , allora  $W_t - W_s$  ha distribuzione normale gaussiana  $\mathcal{N}_{0, t-s}$  ( $\mathcal{N}_{\mu, \sigma^2} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ );
- (iii) se  $0 \leq u \leq s < t$ , allora le variabili aleatorie  $W_t - W_s$  e  $W_u$  sono tra loro indipendenti;
- (iv)  $\mathbf{W}$  è un processo continuo da destra e da sinistra;

Il moto Browniano è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala. Infatti per ogni  $t \geq 0, h > 0$  risulta:

$$\mathbf{E}[W_{t+h} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[W_{t+h} - W_t | \mathcal{F}_t] + \mathbf{E}[W_t | \mathcal{F}_t] = 0 + W_t = W_t,$$

perché  $W_t$  è indipendente da  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ , e  $W_t$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile. Anche il processo  $(W_t^2 - t)$  è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala. Basta mostrare che

$$\mathbf{E}[W_{t+h}^2 - W_t^2 | \mathcal{F}_t] = h.$$

Scrivendo  $W_{t+h}^2 - W_t^2$  nella forma equivalente  $(W_{t+h} - W_t)^2 + 2W_t(W_{t+h} - W_t)$ , ed essendo  $(W_{t+h} - W_t)^2$  indipendente da  $\mathcal{F}_t$ , ed  $W_t$   $\mathcal{F}_t$ -misurabile, si ha:

$$\mathbf{E}[W_{t+h}^2 - W_t^2 | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[W_{t+h} - W_t]^2 + 0 = h.$$

È così mostrato che il moto Browniano  $\mathbf{W}$  è una martingala normale. Risulta inoltre:

$$\mathbf{E}[W_t] = 0, \quad \text{e} \quad \mathbf{E}[W_t^2] = t \quad \text{per ogni } t$$

Si ha quindi

$$\|\mathbf{W}\|_t = \mathbf{E}[W_t^2] = t \quad \text{per ogni fissato } t > 0.$$

<sup>6</sup>Dal francese: continue à droite, limitée à gauche (continuo da destra, limitato da sinistra).

<sup>7</sup>Il processo  $(X_t)$  ha incrementi stazionari indipendenti se, presi ad arbitrio  $s, t, h > 0$ ,  $X_{t+h} - X_t$  ha la stessa distribuzione di  $X_{s+h} - X_s$ .



**Teorema 9.4.2 (Lévy)** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità con filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

Una  $\mathcal{F}_t$ -martingala normale  $\mathbf{N} = (N_t)_{t \geq 0}$  che sia continua da destra e da sinistra, e tale che  $N_0 \stackrel{q.s.}{=} 0$  è un moto Browniano.

**Nota.** Partendo da un moto Browniano  $\mathbf{W} = (W_t)_{t \geq 0}$ , Wiener ha costruito una misura sullo spazio delle funzioni reali continue su  $\mathbb{R}_+$ , concentrata sulle funzioni  $\gamma_\omega(t) = W_t(\omega)$ , che, per  $\omega$  quasi ovunque in  $\Omega$ , su ogni intervallo  $[0, t]$  sono cammini non rettificabili, e non differenziabili in alcun punto. D'altra parte, a livello macroscopico, il moto Browniano ha delle sorprendenti proprietà di regolarità. Per esempio, data una funzione  $f$  in  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ , per ogni  $t > 0$ , la funzione  $x \in \mathbb{R} \mapsto f_t(x) = \mathbf{E}[f(x + W_t)]$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$  su tutto  $\mathbb{R}$ ! Di più, la  $f(t, x) = f_t(x)$  è la soluzione della celebre equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con condizione iniziale  $u(0, x) = f(x)$ .

## 9.5 L'integrale spettrale forte di una funzione scalare come generalizzazione dell'integrale stocastico di Paley-Wiener

Un integrale stocastico, dove la funzione integranda  $u(t)$  è un processo deterministico (funzione scalare), e la funzione integratrice è un moto Browniano  $\mathbf{W}$ , è stato introdotto da Paley, Wiener e Zygmund nel modo seguente.

Sia  $u \in \mathcal{C}_0^1([0, 1])$ , ossia  $u \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ , con  $u(0) = u(1) = 0$ . Dato  $\mathbf{W} = (W_t)$  moto browniano reale, l'integrale di Paley-Wiener di  $u$  rispetto a  $\mathbf{W}$  è

$$Y = \int_0^1 u(t) dW_t = -^R \int_0^1 u'(t) W_t dt.$$

Si può osservare come  $Y$  sia un integrale di Riemann-Stieltjes definito attraverso un integrale di Riemann.

L'integrale  $Y$  è una variabile aleatoria in  $L^2(\Omega)$ , con valore atteso nullo ( $\mathbf{E}[Y] = 0$ ), e varianza pari al quadrato della norma  $L^2$  della  $u$  ( $\text{Var}[Y] = \mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = \|u\|_2^2$ ). Quest'ultima uguaglianza mostra un'isometria tra lo spazio  $\mathcal{C}_0^1([0, 1])$ , normato con norma  $L^2$ , e di elemento generico  $u$ , e lo spazio  $L^2(\Omega)$ , cui l'integrale appunto appartiene.

Essendo  $C_0^1([0, 1])$   $L^2$ -denso in  $L^2([0, 1])$ , data  $f \in L^2([0, 1])$ , esiste una successione  $(u_n)$  tale che  $u_n \xrightarrow{L^2} f$ . Dato quindi  $\varepsilon > 0$ , per  $n, m \geq N$  abbastanza grande, è  $\|u_n - u_m\|_2 < \varepsilon$ . Inoltre, la successione delle variabili aleatorie  $Y_n = \int_0^1 u_n(t) dW_t$  è di Cauchy in  $L^2(\Omega)$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \|Y_n - Y_m\|_2^2 &= \mathbf{E}[(\int_0^1 u_n(t) dW_t - \int_0^1 u_m(t) dW_t)^2] = \\ &= \mathbf{E}[(\int_0^1 (u_n - u_m)(t) dW_t)^2] = \|u_n - u_m\|_2^2 < \varepsilon^2, \end{aligned}$$

Per la completezza di  $L^2(\Omega)$ , la successione  $(Y_n)$  è convergente. Resta quindi definito l'integrale di  $f$  rispetto a  $\mathbf{W}$  come limite delle  $Y_n$ :

$$\int_0^1 f(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u_n(t) dW_t.$$

Anche qui si può osservare come un integrale di Lebesgue-Stieltjes sia stato definito come limite di integrali di Riemann-Stieltjes.

In virtù del Teorema di estensione degli operatori<sup>8</sup>, l'applicazione  $f \in L^2([0, 1]) \mapsto \int_0^1 f(t) dW_t \in L^2(\Omega)$  è un'isometria di  $L^2([0, 1])$  in  $L^2(\Omega)$ .

Vogliamo ora mostrare che l'integrale stocastico di Paley-Wiener del processo deterministico  $u(t)$  rispetto al moto Browniano  $\mathbf{W}$  è l'integrale spettrale della funzione scalare  $u$  rispetto ad un'opportuna famiglia spettrale  $E_t$  in  $L^2(\Omega)$ , applicato in un dato punto.

Ricordiamo che, dato un moto Browniano reale  $\mathbf{W} = (W_t)_{t \geq 0}$ , e fissato  $T > 0$ , la restrizione di  $\mathbf{W}$  all'intervallo  $[0, T]$ , ossia il processo stocastico  $\hat{W}_t = W_t$  per  $0 \leq t < T$ ,  $\hat{W}_t = W_T$  per  $t \geq T$ , è una martingala in  $\mathcal{M}_2$ , definitivamente costante, e convergente a  $W_T \in L^2(\Omega)$ . Per quanto visto nella sezione 9.4, la

$$E_t = \mathbf{E}[\bullet | \hat{\mathcal{F}}_t] \quad \text{per } t \geq 0, \quad E_t = 0 \quad \text{per } t < 0, \quad (9.3)$$

con  $(\hat{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$  filtrazione naturale per  $\hat{\mathbf{W}}$ , è una famiglia spettrale limitata su  $[0, T]$ , e risulta

$$E_t(W_T) = \hat{W}_t = W_t \quad \text{per ogni } 0 \leq t \leq T.$$

Consideriamo l'integrale di Riemann-Stieltjes spettrale, introdotto nella sezione 8.2

$$RS \int_a^b u(t) dE_t$$

---

<sup>8</sup>Sia  $L$  un sottospazio lineare denso in  $(E, \|\cdot\|)$ , e sia  $T$  un operatore lineare da  $L$  allo spazio di Banach  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  tale che  $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|$  per un  $C > 0$ . Allora esiste un unico operatore lineare continuo  $\hat{T}$  da  $E$  ad  $Y$ , tale che  $\hat{T}x = Tx$  per ogni  $x \in L$ , e  $\|\hat{T}x\|_Y \leq C\|x\|$ .

dove  $u$  è una funzione scalare, ed  $(E_t)$  è una famiglia spettrale in uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$ . La formula di integrazione per parti dell'integrale di Riemann-Stieltjes classico<sup>9</sup>, è valida anche per l'integrale spettrale, e si dimostra allo stesso modo. Quindi, se la funzione scalare  $u(t)$  è integrabile rispetto ad  $(E_t)$  su  $[a, b]$ , risulta:

$${}^{RS}\int_a^b u(t) dE_t + {}^{RS}\int_a^b E_t du(t) = u(b)E_b - u(a)E_a,$$

dove con  ${}^{RS}\int_a^b E_t du(t)$  si intende il limite del net  $\sum_{k=1}^n (u(t_k) - u(t_{k-1})) E_{\xi_k}$  lungo l'insieme orientato  $(\mathcal{P}, \prec)$  delle partizioni marcate di  $[a, b]$ .

Siano ora  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ ,  $u \in C_0^1([0, 1])$ ,  $\hat{\mathbf{W}} = (W_t)_{t \in [0, 1]}$  moto Browniano ristretto all'intervallo  $[0, 1]$ , ed  $E_t$  come in (9.3). Essendo, per il teorema 8.2.3, ogni funzione scalare continua Riemann-Stieltjes integrabile rispetto ad ogni famiglia spettrale limitata, e applicando la formula di integrazione per parti, si ha:

$$\begin{aligned} [{}^{RS}\int_0^1 u(t) dE_t] \cdot W_1 &= (u(1)E_1 - u(0)E_0) \cdot W_1 - [{}^{RS}\int_0^1 E_t du(t)] \cdot W_1 = \\ &= -[{}^{RS}\int_0^1 E_t du(t)] \cdot W_1 = -{}^{RS}\int_0^1 E_t(W_1) du(t) = -{}^{RS}\int_0^1 W_t du(t) = \\ &= -\int_0^1 u'(t) W_t dt. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale stocastico di Paley-Wiener su  $[0, 1]$  di un processo deterministico  $u$  rispetto ad un moto Browniano  $(W_t)_{t \in [0, 1]}$  è l'integrale di Riemann-Stieltjes spettrale di  $u$  rispetto alla famiglia spettrale  $(E_t)$  associata a  $(W_t)$ , calcolato in  $W_1$ .

## 9.6 L'integrale stocastico di Itô

Nel seguito  $\mathbf{W} = (W_t)_{t \geq 0}$  è un moto browniano reale su uno spazio di probabilità completo  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  filtrazione naturale per  $\mathbf{W}$ .

K. Itô ha definito un integrale stocastico che estende quello di Paley-Wiener, dove le funzioni integrande sono processi stocastici  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in [0, T]}$  in  $L^2(\Omega)$  con le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathbf{X}$  è progressivamente misurabile rispetto alla filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$
- (ii)  $\int_0^T \mathbf{E}[X_t^2] dt$  esiste finito .

---

<sup>9</sup>v. sezione 1.5.

Denotiamo il loro insieme con  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , che, con la norma indotta da  $L^2([0, T] \times \Omega)$ ,<sup>10</sup> è un suo sottospazio chiuso, e quindi esso stesso è uno spazio di Hilbert.

In analogia con la costruzione dell'integrale di Paley-Wiener, si definisce l'integrale di Itô per una opportuna classe di funzioni densa in  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , e poi si estende a tutto lo spazio con un passaggio al limite.

Consideriamo il sottospazio lineare di  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$  dei processi semplici

$$X_t(\omega) = \sum_{j=1}^m [X_{t_{j-1}}(\omega) \chi_{[t_{j-1}, t_j[}(t)] + X_T(\omega) \chi_{\{T\}}$$

dove  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , e  $X_{t_j} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_j}, P)$ , e lo denotiamo con  $\mathbb{L}_S^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$

L'integrale di Itô del processo semplice  $\mathbf{X}$  rispetto a  $\mathbf{W}$  è definito dalla

$$\int_0^T X_t dW_t = \sum_{j=1}^m X_{t_{j-1}}(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})$$

L'insieme  $\mathbb{L}_S^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$  è  $\mathbb{L}^2$ -denso in  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , e si pone

$$\int_0^T X_t dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \Phi_{n,t} dW_t,$$

dove  $(\Phi_{n,t})$  è una successione di processi semplici  $\mathbb{L}^2$ -convergente ad  $\mathbf{X}$ .

**Una definizione equivalente.** Sull'intervallo  $[0, T]$ , sia data la successione di partizioni  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \dots < t_{n,n} = T\}$ , con  $t_{k,n} = \frac{k}{n}T$ .

Dato  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in [0, T]}$  in  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , il limite in norma  $L^2$  della successione delle somme di Riemann-Stieltjes, con marcature  $\xi^{(n)} = (\xi_k^{(n)})_{k=1, \dots, n}$ , con  $\xi_k^{(n)} = t_{k-1, n}$ , ossia

$$RS(P_n) = \sum_{k=1}^n X_{t_{k-1, n}}(W_{t_{k, n}} - W_{t_{k-1, n}}),$$

è detto integrale di Itô di  $\mathbf{X}$  rispetto a  $\mathbf{W}$ .

Qui di seguito sintetizziamo le principali proprietà dell'integrale di Itô<sup>11</sup>.

<sup>10</sup>  $L^2([0, T] \times \Omega) := L^2([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}[0, T] \times \mathcal{F}, dt \otimes P)$ , dove  $dt$  è la misura di Lebesgue su  $\mathcal{B}([0, T])$ .

<sup>11</sup> Trattazioni più estese dell'integrale di Itô si trovano in A. Pascucci [24] pp. 199-219, e in A. Bobrowski [4] pp. 139-146.

**L'integrale di Itô come martingala.** Sia  $\mathbf{X} = (X_s)_{s \geq 0}$  un processo stocastico tale che, per ogni  $t > 0$ , la restrizione di  $\mathbf{X}$  a  $[0, t]$  sia in  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t)$ . Il processo stocastico  $(Y_t)_{t \geq 0}$ ,

$$Y_t = \int_0^t X_s dW_s$$

è una martingala continua.

**L'isometria di Itô.** L'applicazione

$$\mathbf{X} \mapsto \int_0^T X_t dW_t$$

è un'isometria dallo spazio  $\mathbb{L}_S^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$  ad  $L^2(\Omega)$ , essendo

$$\left\| \int_0^T X_t dW_t \right\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathbf{X}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

In virtù del Teorema di estensione degli operatori, l'integrale di Itô è un'isometria lineare da tutto  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$  a  $L^2(\Omega)$ .

**Estensioni dell'integrale di Itô.** Vi sono diversi modi di generalizzare la nozione di integrale di Itô. Per le integrande, si possono indebolire le condizioni di misurabilità ed integrabilità, e ottenere limiti di integrali di processi semplici in probabilità, e non in  $L^2$ . Per quanto riguarda invece l'integratrice, si possono considerare processi diversi dai moti Browniani. Le più note estensioni sono relative ad integratrici che sono martingale normali, o martingale locali continue.

## 9.7 L'H-integrale stocastico spettrale come generalizzazione dell'integrale di Itô

In 8.8 abbiamo introdotto l'integrale spettrale di Riemann-Stieltjes

$${}^{RS} \int_0^T A(t) dM_t$$

dove la funzione integratrice  $t \in [0, T] \mapsto M_t = E_t M$  ( $E_t$  famiglia spettrale continua da destra e limitata su  $[0, T]$ ) è una martingala astratta in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , ed  $(A(t))_{t \in [0, T]}$  è una famiglia di operatori lineari continui in  $\hat{S}_M$ , completamento dello spazio  $S_M$  degli H-processi semplici  $\mathcal{L}_M$ -adattati in  $[0, T]$ .

V. Tesko [28] ha mostrato che tale integrale generalizza l'integrale stocastico di Itô di processi in  $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$  rispetto a funzioni integratrici che sono martingale normali.

Più precisamente, ora  $\mathcal{H}$  è  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , con  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$   $P$ -completo, munito di una filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  continua da destra, con  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ , e  $(N_t)_{t \in [0, T]}$  è una  $\mathcal{F}_t$ -martingala normale. Non è restrittivo supporre  $N_0 = 0$ . Segue, dalle proprietà delle martingale che

$$N_t = \mathbf{E}[N_T | \mathcal{F}_t].$$

Abbiamo visto che  $\mathbf{E}[\bullet | \mathcal{F}_t]$  è un proiettore ortogonale nello spazio  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sul suo sottospazio  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ , e che, inoltre la corrispondente funzione a valori proiezioni

$$\begin{aligned} E_t &= 0 && \text{per } t < 0 \\ E_t &= \mathbf{E}[\bullet | \mathcal{F}_t] && \text{per } 0 \leq t \leq T \\ E_t &= I && \text{per } t > T. \end{aligned}$$

è una famiglia spettrale in  $L^2(\Omega)$ .

Così, la martingala normale  $(N_t)_{t \in [0, T]}$  può essere interpretata come una martingala astratta, cioè:

$$t \in [0, T] \mapsto N_t = \mathbf{E}[N_T | \mathcal{F}_t] = E_t N_T \in \mathcal{H}.$$

Nello spazio  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si può quindi costruire l'H-integrale stocastico di Riemann-Stieltjes rispetto alla martingala normale  $(N_t)_{t \in [0, T]}$ .

Sia  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in [0, T]}$  un processo  $\mathcal{F}_t$ -adattato in  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ . Consideriamo la funzione  $A_{\mathbf{X}}$ , definita su  $[0, T]$ , a valori operatori di moltiplicazione in  $L^2(\Omega)$

$$t \in [0, T] \mapsto A_{\mathbf{X}}(t), \quad A_{\mathbf{X}}(t) : G \in L^2(\Omega) \mapsto X_t G \in L^2(\Omega). \quad (9.4)$$

Tale funzione assumerà il ruolo dell'integranda  $A(t)$  nell'H-integrazione rispetto alla martingala astratta  $N_t = E_t N_T$ .

In 8.8 abbiamo introdotto una misura reale positiva associata alla martingala astratta  $E_t M$  :

$$\alpha \in \mathcal{B}([0, T]) \mapsto \mu_M(\alpha) = \langle E(\alpha)M, M \rangle_{\mathcal{H}} = \|E(\alpha)M\|^2$$

dove  $E(\alpha)$  è la misura (definita in 8.5) generata dalla famiglia spettrale  $(E_t)$ . In questo contesto, la corrispondente  $\mu_{N_T}$  è la misura di Lebesgue su  $\mathcal{B}([0, T])$ . Si ha infatti, per  $\alpha = [0, t] \subset [0, T]$  :

$$\mu_{N_T}([0, t]) = \|E([0, t])N_T\|_2^2 = \|(E_{t+0} - E_{0-0})N_T\|_2^2 = \|N_t\|_2^2 = \mathbf{E}[N_t^2] = t.$$

Per quanto riguarda invece la famiglia crescente  $\mathcal{L}_M = (\mathcal{L}_M(t))$  di operatori lineari in  $\mathcal{H}$ , limitati da  $\mathcal{H}_M(t)$  ad  $\mathcal{H}$ , dove  $\mathcal{H}_M(t)$  è lo span dell'insieme  $\{(E_{s_2} - E_{s_1})M : ]s_1, s_2] \subset ]t, T]\}$ , risulta che la  $\mathcal{L}_M(t)$ -misurabilità in  $\mathcal{H}$  è equivalente alla classica  $\mathcal{F}_t$ -misurabilità in  $L^2(\Omega)$ . Più precisamente, vale il seguente

**Lemma 9.7.1** *Sia  $0 \leq t < T$ . Per un dato  $X \in L^2(\Omega)$ , l'operatore  $A_X$  di moltiplicazione per la funzione  $X$  in  $L^2(\Omega)$  è  $\mathcal{L}_{N_T}(t)$ -misurabile se e solo se la  $X$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile. Inoltre, se  $X \in L^2(\Omega)$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile, risulta*

$$\|A_X\|_{\mathcal{L}_{N_T}(t)} = \|A_X\|_{\mathcal{L}_{N_T}(s)} = \|X\|_2, \quad t \leq s < T \quad (9.5)$$

**Dimostrazione.** Sia  $X \in L^2(\Omega)$   $\mathcal{F}_t$ -misurabile. Mostriamo che l'operatore  $A_X$  è  $\mathcal{L}_{N_T}(t)$ -misurabile.

Tenendo conto che  $X$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile, che  $(N_t)$  è una martingala normale, e che la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_0$  è triviale, per ogni intervallo  $]s_1, s_2] \subset ]t, T]$ , risulta

$$\begin{aligned} \|A_X(N_{s_2} - N_{s_1})\|_2^2 &= \|X(N_{s_2} - N_{s_1})\|_2^2 = \mathbf{E}[X^2(N_{s_2} - N_{s_1})^2] = \\ &= \mathbf{E}[X^2(N_{s_2} - N_{s_1})^2 | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[X^2 \mathbf{E}[(N_{s_2} - N_{s_1})^2 | \mathcal{F}_{s_1}] | \mathcal{F}_0] = \\ &= \mathbf{E}[X^2 \mathbf{E}[(N_{s_2} - N_{s_1})^2 | \mathcal{F}_{s_1}]] = \mathbf{E}[X^2](s_2 - s_1) = \mathbf{E}[X^2] \mathbf{E}[(N_{s_2} - N_{s_1})^2] = \\ &= \|X\|_2^2 \|N_{s_2} - N_{s_1}\|_2^2. \end{aligned}$$

In modo analogo si può mostrare che

$$\|A_X G\|_2^2 = \|X\|_2^2 \|G\|_2^2, \quad G \in \mathcal{H}_{N_T}(t) = \text{span}\{N_{s_2} - N_{s_1} \mid ]s_1, s_2] \subset ]t, T]\}.$$

Quindi  $A_X \in \mathcal{L}_{N_T}(t)$ , e inoltre vale la (9.5).

Mostriamo ora che  $A_X$  è parzialmente commutante con  $E$ , cioè che

$$A_X E_s G = E_s A_X G, \quad G \in \mathcal{H}_{N_T}(t), \quad s \in [t, T].$$

Poiché  $X \in L^2(\Omega)$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile, ed  $FG \in L^2(\Omega)$ , allora, per ogni  $s \in [t, T]$ , ed ogni  $G \in \mathcal{H}_{N_T}(t)$ , si ha

$$A_X E_s G = X E_s G = X \mathbf{E}[G | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[XG | \mathcal{F}_s] = E_s A_X G.$$

È così provata la prima parte del lemma. Mostriamo adesso che, se per un dato  $X \in L^2(\Omega)$ , l'operatore  $A_X$  è  $\mathcal{L}_{N_T}(t)$ -misurabile, allora  $X$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile.

Giacché  $A_X$  è un operatore  $\mathcal{L}_{N_T}(t)$ -misurabile, per ogni  $s \in [t, T]$

$$A_X E_s G = E_s A_X G, \quad G \in \mathcal{H}_{N_T}(t),$$

o, equivalentemente,

$$A_X \mathbf{E}[G | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[A_X G | \mathcal{F}_s], \quad G \in \mathcal{H}_{N_T}(t). \quad (9.6)$$

Sia  $s \in [t, T]$ , e  $]s_1, s_2] \subset ]t, s]$ . Poniamo

$$G := N_{s_2} - N_{s_1} \in \mathcal{H}_{N_T}(t).$$

Evidentemente,  $G$  è  $\mathcal{F}_s$ -misurabile, e

$$A_X \mathbf{E}[G | \mathcal{F}_s] = A_X G = XG, \quad \mathbf{E}[A_X G | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[XG | \mathcal{F}_s] = G \mathbf{E}[X | \mathcal{F}_s].$$

Usando la (9.6), otteniamo

$$XG = GE[X|\mathcal{F}_s].$$

Si ha dunque

$$X = \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_s], \quad s \in ]t, T].$$

Poiché, per ipotesi, famiglia spettrale  $s \in [0, T] \mapsto E_s = \mathbf{E}[\bullet|\mathcal{F}_s] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  è continua da destra, l'ultima eguaglianza vale per  $s = t$ , e quindi  $X$  è  $\mathcal{F}_t$ -misurabile.  $\square$

Come semplice conseguenza del Lemma 9.7.1, si ottiene finalmente:

**Teorema 9.7.1 (V. Tesko)** *Sia  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in [0, T]}$  un processo stocastico in  $L^2(\Omega)$ , misurabile. La famiglia  $(A_{\mathbf{X}}(t))_{t \in [0, T]}$  di operatori di moltiplicazione data dalla (9.4) è  $H$ -integrabile rispetto alla martingala normale  $\mathbf{N}$  se e solo se  $\mathbf{X} \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ . In tal caso, l' $H$ -integrale stocastico di  $(A_{\mathbf{X}}(t))_{t \in [0, T]}$  rispetto alla martingala astratta  $\mathbf{N} = (E_t N_T)_{t \in [0, T]}$  coincide con l'integrale stocastico di Itô di  $\mathbf{X}$  rispetto ad  $\mathbf{N}$ , ossia*

$${}^{RS} \int_0^T A_{\mathbf{X}}(t) d(E_t N_T) = \int_0^T X_t dN_t.$$



# Bibliografia

- [1] C.R. Adams and J.A. Clarkson, *On Definitions of Bounded Variation Functions of Two Variables*, Trans. A.M.S., Vol. 35. No 4 (Oct 1933), pp. 824 - 854.
- [2] Yu.M. Berezanski and N.W. Zhernakov, *A Spectral Approach to Quantum Stochastic Integrals*, Reports on Mathematical Physics, Volume 28, Issue 3, December 1989, Pages 347-360.
- [3] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley Sons, Inc., 1968.
- [4] A. Bobrowski, *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [5] H.E. Bray, *Elementary Properties of the Stieltjes Integral*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 20, No. 3 (Mar., 1919), pp. 177-186.
- [6] H. Cartan, *Formes Differentielles*, Hermann, Paris, 1967.
- [7] Cecconi-Stampacchia, *Analisi Matematica, vol I*, Liguori, Napoli, 1974.
- [8] G. Cimmino, *Istituzioni di Analisi Infinitesimale, Vol. II*, 3.ed., R. Patron, Bologna, 1964.
- [9] J. A. Clarkson, *On Double Riemann-Stieltjes Integrals* Bull. Amer. Math. Soc. Volume 39, Number 12 (1933), pp. 929-936.
- [10] L. Daboni, voce ( *Distribuzioni di Probabilità*), Enciclopedia della Scienza e della Tecnica, 1980
- [11] J. Diestel, J.J. Uhl Jr., *Vector Measures*, A.M.S. Mathematical Surveys, N. 15, 1977.
- [12] N. Dunford e J.T. Schwartz, *Linear Operators Part I - General Theory* Interscience, New York, 1963.
- [13] N. Dunford e J.T. Schwartz, *Linear Operators Part II - Spectral Theory* Interscience, New York, 1963.

- [14] M. Fréchet, *Extension au Cas des Integrals Multiples d'une Définition de l'Intégrale due à Stieltjes*, Nouvelles Annales de Mathématiques, (4), vol. 10 (1910), pp. 241-256.
- [15] D.H. Fremlin *Measure Theory, vol. 1*, Torres Fremlin, 2000.
- [16] D.H. Fremlin *Measure Theory, vol. 2*, Torres Fremlin, 2001.
- [17] B.V. Gnedenko, *Theory of Probability*, 6. ed., Gordon and Breach, Amsterdam, 1997.
- [18] T. H. Hildebrandt, *Definitions of Stieltjes Integrals of the Riemann Type*, The American Mathematical Monthly, Vol. 45, No. 5 (May, 1938), pp. 265-278
- [19] E.W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 2. ed., Cambridge University Press, London, 1927.
- [20] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale*, MIR, Mosca, 1980.
- [21] Littlewood, *On Bounded Bilinear Forms in an Infinite Number of Variables*, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, vol. 1 (1930), pp.164-174.
- [22] E.R. Lorch, *Spectral theory*, Oxford University Press, New York, 1962.
- [23] E. J. McShane, *Partial Orderings and Moore-Smith Limits*, The American Mathematical Monthly, Vol. 59, No. 1 (Jan., 1952), pp. 1-11
- [24] A. Pascucci, *Calcolo Stocastico per la Finanza*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.
- [25] F. Riesz e B. Sz. Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, 3.ed., Paris, Gauthier-Villars ; Budapest, Akademiai Kiado, 1955.
- [26] H.H. Schaefer, *Introduzione alla Teoria Spettrale*, Scuola Normale, Pisa, 1970.
- [27] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, 4.corrected print, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [28] V. Tesko, *A Stochastic Integral of Operator-Valued Functions*, Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 14 (2008), no. 2, pp. 132-141.