ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Trasformata di Bargmann discreta

Relatore:
Chiar.mo Prof.
André Martinez

Presentata da:
Giacomo Santi

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Indice

Capitolo 1

Trasformata di Fourier continua e Distribuzioni

1.1 Trasformata di Fourier

Definizione 1.1. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Allora si definsce la sua trasformata di Fourier:*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Osservazione: Siccome $|e^{-i\xi x}| = 1$ allora, per ogni ξ, l'integrale converge assolutamente.
Vale inoltre:

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \int |f(x)| dx.$$

Teorema 1.1. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ allora $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Basta infatti osservare che vale il teorema di convergenza dominata:

$$|e^{-i\eta x} f(x) - e^{-i\xi x} f(x)| \leqslant 2|f(x)|.$$

□

Enunciamo ora un importante risultato che permette di ricostruire la funzione a partire dalla sua trasformata. Presentiamo il risultato solo per le funzioni almeno continue (cfr. [2] Sezione 7.2).

Teorema 1.2. *[di inversione di Fourier] Sia f continua e integrabile su $\mathbb{R}^d$ vale:*

$$f(x) = lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 |\xi|^2/2} \hat{f}(\xi) d\xi \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Se inoltre anche $\hat{f}$ è integrabile allora:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Corollario 1.3. *Se $\hat{f} = \hat{g}$ allora $f = g$.*

Se ϕ è la trasformata di Fourier di $f \in L^1$ diremo che f è la trasformata inversa di Fourier di ϕ e scriveremo:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\phi).$$

Grazie al corollario si ha che l'operatore $\mathcal{F}^{-1}$ è ben definito poichè la trasformata $\mathcal{F}$ è iniettiva.

Ora vogliamo sviluppare queste nozioni sulla trasformata di Fourier concentrandoci esclusivamente sullo spazio $L^2(\mathbb{R}^d)$. Vale il seguente:

Teorema 1.4. *[di Plancherel] La trasformata di Fourier si può estendere a partire da C_0^∞ in una mappa continua su tutto L^2 e vale:*

$$||\hat{f}||^2 = ||f||^2.$$

Dove:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Dimostrazione. Siano $f,\, g \in C_0^\infty$.

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int f(x) \overline{g(x)} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int \int f(x) \overline{e^{i\xi x} \hat{g}(\xi)} d\xi dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int \int f(x) e^{-i\xi x} \overline{\hat{g}(\xi)} dx d\xi \\
&= \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \\
&= \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.
\end{aligned}$$

E il risultato si ottiene per densità di C_0^∞ in L^2. □

1.2 Distribuzioni Temperate

Definizione 1.2. *Per* $f \in L^1_{loc}$ *denotiamo:*

$$f[\phi] = \int f(y)\phi(y)dy \qquad \phi \in C_0^\infty.$$

Una distribuzione F *è una mappa da* C_0^∞ *a* $\mathbb{R}$ *che soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) Linearità:

$$F[c_1\phi_1 + c_2\phi_2] = c_1F[\phi_1] + c_2F[\phi_2].$$

(ii) Continuità:
Per parlare di continuità è necessario definire una topologia.
Costruiamo tale topologia definendo quando una successione tende a zero in questo nuovo spazio.
Supponiamo che ϕ_k *sia una successione in* C_0^∞ *tale che supp(*ϕ_k*) sia contenuto in un compatto* K $\forall k$ *e che le funzioni* ϕ_k *e tutte le loro derivate* ∂^α *convergano uniformemente a zero quando* $k \longrightarrow 0$. *Allora:*

$$F[\phi_k] \longrightarrow 0.$$

Denotiamo con $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^d)$ *lo spazio di tali distribuzioni.*

Vogliamo ora ampliare i concetti di analisi di Fourier già trattati per le funzioni integrabili su $\mathbb{R}^n$.
In generale se f,g sono due funzioni integrabili, tali che $\hat{f}, \hat{g} \in L^1$, si osserva che, scambiando l'ordine di integrazione, vale:

$$\int \hat{f}(y)g(y)dy = \int\int e^{-i\langle y,x\rangle} f(x)g(y)dxdy = \int f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Questo fatto può essere riscritto nella nuova notazione sulle distribuzioni nel modo seguente:

$$\hat{f}[g] = f[\hat{g}].$$

Vogliamo allora definire la trasformata di Fourier di una distribuzione F in maniera che valga:

$$\hat{F}[\phi] = F[\hat{\phi}].$$

Si verifica però facilmente un problema: $\phi \in C_0^\infty \not\Rightarrow \hat{\phi} \in C_0^\infty$.
Potrebbe quindi non avere senso la scrittura $F[\hat{\phi}]$.
La soluzione di questo problema è di allargare la classe delle funzioni test in maniera tale da renderla invariante per la trasformata di Fourier e di conseguenza di restringere la classe delle distribuzioni ammissibili. La costruzione più efficace fu individuata da Laurent Schwartz.

Definizione 1.3. *Si definisce funzione di Schwartz una funzione $\phi \in C^\infty$ tale che:*
ϕ e tutte le sue derivate di qualsiasi ordine $\partial^\alpha \phi$ vanno a zero all' infinito più velocemente di qualsiasi potenza di $|x|$.
Si pone $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:=spazio delle funzioni di Scwhartz.

La definizione può essere altrimenti così espressa:

$$\phi \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow sup_x|x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| < \infty \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d.$$

Teorema 1.5. *Se $\phi \in \mathcal{S}$ allora $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$.*

Definizione 1.4. *Una distribuzione temperata è una mappa lineare $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che esistono un intero positivo N e una costante $C \geq 0$ per cui $\forall \phi \in \mathcal{S}$:*

$$|F[\phi]| \leq \sum_{\alpha+\beta \leq N} sup_x|x^\beta \partial^\alpha \phi(x)|.$$

Si denota con $\mathcal{S}$ lo spazio delle distribuzioni temperate.

Possiamo allora definire su $\mathcal{S}'$ la trasformata di Fourier.

Definizione 1.5. *Sia $\phi \in \mathcal{S}$ e sia F una distribuzione temperata allora:*

$$\hat{F}[\phi] := F[\hat{\phi}].$$

$\hat{F}$ è detta trasformata di Fourier di F.

Abbiamo anche un analogo del teorema di inversione di Fourier anche per le funzioni di Schwartz, si ha:

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int e^{i\langle x,\xi \rangle} \phi(\xi) dx = \hat{\phi}(-x).$$

L'obiettivo sarebbe applicare ora questa definizione per ottenere la trasformata di Fourier per funzioni periodiche.
Osservazione: In generale se f è periodica non nulla allora:

$$\hat{f} \in \mathcal{S}' \text{ ma } \hat{f} \textbf{ non è una funzione}.$$

Esempio: La trasformate di Fourier della funzione cosatante $(2\pi)^{-d/2}$ è la delta di Dirac.
Si introduce allora la trasformata di Fourier discreta.

Capitolo 2

Trasformata di Fourier discreta

Notazioni: In questo paragrafo valgono le seguenti:

(i) le funzioni $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ vengono considerate di periodo 2π su **ogni** componente.

(ii) Si denota con Π^d lo spazio $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z}^d)$.

Le funzioni prese in esame saranno della forma:

$$f : \Pi^d \to \mathbb{C}$$

(iii) Il vettore $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ è della forma $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_d)$.

Definizione 2.1. *Sia $f : \Pi^d \to \mathbb{C}$, $f \in L^1(\Pi^d)$ si chiamano coefficienti di Fourier relativi alla funzione f le quantità:*

$$\hat{f}(\boldsymbol{n}) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[0,2\pi]^d} f(\boldsymbol{n}) e^{-i\boldsymbol{n}\cdot x} dx.$$

Si denota con serie di Fourier la seguente:

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(\boldsymbol{n}) e^{i\boldsymbol{n}x}.$$

In generale per $f \in L^1(\Pi^d)$ non è detto che la serie appena introdotta converga ma vale il seguente risultato:

Teorema 2.1. *Sia* $f \in L^2(\Pi^d)$ *allora:*

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(\boldsymbol{n})e^{i\boldsymbol{n}x}.$$

converge in $L^2(\Pi^d)$.
Vale inoltre:

$$f(x) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(\boldsymbol{n})e^{i\boldsymbol{n}x}.$$

Corollario 2.2. *Sotto le ipotesi del teorema si ha che:*

$$(\hat{f}(\boldsymbol{n}))_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d).$$

Possiamo ora definire la trasformata di Fourier discreta:

Definizione 2.2. *Sia* $f \in L^2(\Pi^d)$ *allora la trasformata di Fourier discreta della funzione* f *viene così costruita:*

$$F : L^2(\Pi^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d);$$

dove:

$$F(f) = (\hat{f}(\boldsymbol{n}))_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}.$$

Si ha che:

Teorema 2.3. *La trasformata di Fourier discreta è una isometria da* $L^2(\Pi^d)$ *a* $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.
Ovvero:

$$\|f\|^2_{L^2} = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(\boldsymbol{n})|^2.$$

Un ulteriore risultato consente anche di dedurre la regolarità della funzione f a partire dall'andamento all' infinito dei coefficienti di Fourier.

Teorema 2.4. *Sia* $f \in \mathbb{C}^k(\Pi^d)$ *allora i coefficienti di Fourier di f soddisfano:*

$$\|\boldsymbol{n}\|^k \hat{f}(\boldsymbol{n}) \longrightarrow 0 \text{ per } \|n\| \longrightarrow \infty.$$

e viceversa se $\hat{f}(\boldsymbol{n}) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{n}\|^{-k})$ *allora* $f \in C^{k-d-1}$.

Corollario 2.5. *Vale:*

$$f \in \mathbb{C}^\infty(\Pi^d) \iff \forall k \in \mathbb{N}^n \quad \hat{f}(\boldsymbol{n}) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{n}\|^{-k}).$$

Osservazione (ipoellitticità di operatori a coefficienti costanti): In particolare, se $g \in C^\infty(\Pi^d)$ e $P(D_x)$ è un operatore differenziale a coefficienti costanti (dove $D_x := \frac{1}{i}\partial_x = -i\partial_x$) tale che, per $||\mathbf{n}||$ abbastanza grande, si ha,

$$|P(\mathbf{n})| \geq ||\mathbf{n}||^\delta$$

con una certa $\delta > 0$, allora, ogni soluzione $f \in L^2(\Pi^d)$ di $P(D_x)f = g$ è C^∞. (In effetti, viene $\hat{f}(\mathbf{n}) = \hat{g}(\mathbf{n})/P(\mathbf{n})$ e quindi $\hat{f}(\mathbf{n}) = \mathcal{O}(\|\mathbf{n}\|^{-k})$ per ogni k.

Capitolo 3

Trasformata di Bargmann continua

Sia $u \in \mathcal{S}'$, abbiamo definito la trasformata di Fourier continua in questo modo:

$$\hat{u}[\phi] := \int u(\xi)\hat{\phi}(\xi)d\xi$$

Abbiamo osservato che la trasformata di Fourier della delta di Dirac è la funzione costante $(2\pi)^{-d/2}$.
La delta di Dirac rappresenta la massima concentrazione di una variabile mentre una funzione costante ne rappresenta la perfetta equidistribuzione. L'idea è di modificare la trasformata di Fourier per ottenere una trasformata che mantenga la localizzazione nella variabile x (cfr. [1, 3]).

Consideriamo ora una distribuzione $u \in \mathcal{S}'$, e localizziamola moltiplicandola con una gaussiana centrata in x, rappresentante la posizione, fino a $\mathcal{O}(\sqrt{h})$, dove $h > 0$ è un piccolo parametro aggiuntivo. Poi consideriamo la trasformata di Fourier rispetto alla variabile y. Si ottiene:

$$\int e^{-iy\xi/h-(x-y)^2/2h}u(y)dy.$$

Si aggiunge poi la moltplicazione per $e^{ix\xi}$ per ottenere un operatore di convoluzione e si normalizza, si ottiene:

Definizione 3.1. *La trasformata di Bargmann di una distribuzione $u \in \mathcal{S}'$ è:*

$$\begin{aligned} Tu(x,\xi) : &= \underbrace{2^{-\frac{d}{2}}(\pi h)^{-\frac{3d}{4}}}_{\alpha_{d,h}} \int e^{i(x-y)\xi/h-(x-y)^2/2h} u(y)dy \\ &= \alpha_{d,h} u_y [e^{i(x-y)\xi/h-(x-y)^2/2h}]. \end{aligned}$$

Osservazione: La trasformata di Fourier, modulo un fattore h, risulta localizzata attorno alla variabile ξ fino a $\mathcal{O}(\sqrt{h})$.

Osservazione: La trasformata di Bargmann viene classicamente definita in maniera leggermente differente.
Posto $z = x - i\xi \in \mathbb{C}^n$ si ha:

$$\widetilde{T}(z) := \int e^{-(z-y)^2/2h} u(y)dy.$$

Da cui:

$$Tu(x,\xi) = \alpha_{d,h} e^{-\xi^2/2h} \widetilde{T}(z).$$

Guardiamo ora quali sono le proprietà di questa nuova trasformata.

Proposizione 3.1. *[Proprietà 1] Per tutte le distribuzioni $u \in \mathcal{S}'$:*

$$e^{\xi^2/2h} Tu(x,\xi),$$

è una funzione olomorfa di $z = x - i\xi$ su $\mathbb{C}^d$.

Osservazione: in particolare vale che:

$$u \in \mathcal{S}' \Longrightarrow Tu(x,\xi) \textbf{ è una funzione}.$$

Proposizione 3.2. *[Proprietà 2] Sia $u \in \mathcal{S}'$ allora:*

$$hD_x Tu = (\xi + ihD_\xi)Tu.$$

Teorema 3.3. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ allora:*

$$Tu \in L^2(\mathbb{R}^{2d}).$$

si ha:

$$\|Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

La trasformata T è una isometria tra $L^2(\mathbb{R}^d)$ e $L^2(\mathbb{R}^{2d})$.

Corollario 3.4. *Per $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si ha $T^*Tu = u$.*

Osservazione: Il corollario non implica che T sia invertibile.
Infatti, si può vedere che TT^* è il proiettore ortogonale su $ImT|_{L^2} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, dove $ImT|_{L^2}$ è l'immagine della restrizione di T su L^2, che di fatto coincide con $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \{v(x,\xi)$ t.c $e^{\xi^2/2h}v(x,\xi)$ è una funzione olomorfa di $x - i\xi$ in $\mathbb{C}^d\}$.

Vale invece il seguente:

Teorema 3.5. *La trasformata $T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ è continua e vale:*

$$T(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^{2d}).$$

Inoltre $\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vale:

$$u = T^*Tu$$

dove per $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ si pone:

$$T^*v(y) = \alpha_{d,h} \int e^{-i(x-y)\xi/h - (x-y)^2/2h} v(x,\xi)\,dx d\xi,$$

che va interpretato come un integrale oscillatorio rispetto alla variabile ξ.

Osservazione: L'integrale:

$$T^*v(y) = \alpha_{d,h} \int e^{-i(x-y)\xi/h - (x-y)^2/2h} v(x,\xi)\,dx d\xi,$$

va interpretato come un integrale oscillatorio rispetto alla variabile ξ nel senso che per $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\quad T^*v[\phi]$ si ottiene formalmente a partire dall'integrale:

$$\alpha_{d,h} \int e^{-i(x-y)\xi/h - (x-y)^2/2h} v(x,\xi)\phi(y)\,dx d\xi dy,$$

con un numero sufficiente di integrazioni per parti rispetto a y, sfruttando il fatto che:

$$\frac{h}{i}\nabla_y e^{iy\xi/h} = \xi e^{iy\xi/h}.$$

Un vantaggio ulteriore nel lavorare con la trastormata di Bargmann risiede nel suo comportamento con gli operatori differenziali, come già evidenziato nella Proprietà 2. Enunciamo ora il seguente:

Teorema 3.6. *[Stime globali] Siano $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$, sia poi:*

$$P(x, hD_x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(hD_x)^\alpha,$$

un polinomio differenziale con $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Allora vale che:

$$\langle TPu, Tv\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \langle p(x,\xi)Tu, Tv\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{O}(h)\|\langle\xi\rangle^{m/2}Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}\|\langle\xi\rangle^{m/2}Tv\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d})}.$$

dove:

. $p(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

. $\langle\xi\rangle := \sqrt{1 + ||\xi||^2}$.

Osservazione: Nel Teorema 3.3 abbiamo visto come T sia una isometria tra $L^2(\mathbb{R}^d)$ e $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Ora però consideriamo una funzione periodica $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e la sua immagine mediante T.
In generale abbiamo:

$$T(f) \notin L^2(\mathbb{R}^{2n})$$

e inoltre $T(f)$ non è nemmeno periodica nella x.
Andiamo perciò a costruire una trasformata che meglio si adatti con problemi periodici.

Capitolo 4

Trasformata di Bargmann discreta

Notazioni: In questo paragrafo valgono le seguenti:

(i) le funzioni $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ vengono considerate di periodo 2π su **ogni** componente.

(ii) Si denota con Π^d lo spazio $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z}^d)$.

Definizione 4.1. *Sia $u \in L^2(\Pi^d)$ allora definiamo la trasformata di Bargmann **discreta** di u in $(x, \boldsymbol{n}) \in \Pi^d \times \mathbb{Z}^d$:*

$$Tu(x, \boldsymbol{n}) := c \int e^{i(x-y)\cdot \boldsymbol{n} - \psi(x-y)/h} u(y) dy.$$

Dove:

. *$c > 0$ è un coefficiente meglio specificato in seguito;*

. *$h > 0$ è un parametro aggiuntivo ;*

. *$\psi(t_1, ..., t_d) = \psi_0(t_1) + ... + \psi_0(t_d)$ con,*

$$\psi_0(t) := 1 - \cos(t).$$

In particolare, $\psi_0(t)$ è una funzione periodica tale che:

$$\psi_0(t) \quad \sim \quad \frac{t^2}{2} \quad per \quad t \to 0.$$

Proposizione 4.1. *La trasformata di Bargmann discreta è un operatore*

$$T : L^2(\Pi^d) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d; L^2(\Pi^d)) =: \mathcal{H}.$$

Inoltre scelto:

$$c = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \mu^{-\frac{d}{2}} \text{ con } \mu = \int_0^{2\pi} e^{-2(1-cos(x))/h} dx,$$

si ha che T è una isometria.

Dimostrazione. Abbiamo,

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \|Tu(x,n)\|_{L^2(\Pi^d)}^2 &= |c|^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d} Tu(x,\mathbf{n})\overline{Tu(x,\mathbf{n})} \\
&= |c|^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d\times\Pi^d} e^{i(x-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h-i(x-z)\mathbf{n}-\psi(x-z)/h} u(y)\overline{u(z)}dxdydz \\
&= |c|^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d\times\Pi^d} e^{i(z-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h-\psi(x-z)/h} u(y)\overline{u(z)}dxdydz.
\end{aligned}$$

Inoltre, per le funzioni periodiche abbiamo osservato come, per quanto riguarda la trasformata di Fourier valga:

$$f(z) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{n})e^{inz},$$

dove $\hat{f}(\mathbf{n})$ rappresenta l'$\mathbf{n}$-esimo coefficiente di Fourier. Allora:

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d f(z) &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{n}z} \int_{\Pi^d} e^{-iy\mathbf{n}} f(y)dy \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d} e^{i(z-y)\mathbf{n}} f(y)dy.
\end{aligned}$$

Ne viene allora che:

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d} e^{i(z-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h-\psi(x-z)/h} u(y)\overline{u(z)}dy = (2\pi)^d e^{-2\psi(x-z)/h} u(z)\overline{u(z)}.$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{\mathcal{H}} &= (2\pi)^d|c|^2\int_{\Pi^d\times\Pi^d} e^{-2\psi(x-z)/h}|u(z)|^2dxdz\\ &= (2\pi)^d|c|^2\|u\|_{L^2(\Pi^d)}\int_{\Pi^d} e^{-2\psi(x)/h}dx.\end{aligned}$$

Posto allora:

$$\mu = \int_0^{2\pi} e^{-2(1-cos(x))/h}dx \geq 0,$$

viene:

$$\|Tu\|_{\mathcal{H}} = (2\pi)^d|c|^2\mu^d\|u\|_{L^2(\Pi^d)}.$$

Scelto perciò:

$$c = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mu^{-\frac{d}{2}},$$

si ha T isometria.

□

Costruiamo ora un operatore che mappi lo spazio $\mathcal{H}$ in $L^2(\Pi^d)$. Vogliamo che per tale operatore T^* valga:

$$\langle T^*U, v\rangle_{L^2} = \langle U, Tv\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}\langle U, Tv\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\int_{\Pi^d} U(y,\mathbf{n})\overline{Tv(y,\mathbf{n})}dy\\ &= c\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\int_{\Pi^d\times\Pi^d} U(y,\mathbf{n})e^{-i(y-x)\mathbf{n}+\psi(x-y)/h}\overline{v(x)}dxdy\\ &= \int_{\Pi^d}\overline{v(x)}dx\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\int_{\Pi^d} ce^{i(x-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h}U(y,\mathbf{n})dy.\end{aligned}$$

Poniamo allora:

Definizione 4.2.

$$T^*U(x) := c\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}\int_{\Pi^d} e^{i(x-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h}U(y,\mathbf{n})dy.$$

Proposizione 4.2. *Definito in tal modo l'operatore T^* otteniamo la seguente proprietà: Per ogni $f \in L^2(\Pi^d)$,*

$$f = T^*Tf.$$

Osservazione: In particolare, si ottiene nuovamente,

$$\begin{aligned} f(x) &= T^*Tf(x) \\ &= c \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d} e^{i(x-y)n-\psi(x-y)/h} Tf(y,\mathbf{n})dy \\ &= c \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} e^{ix\mathbf{n}} \int_{\Pi^d} e^{-iy\mathbf{n}-\psi(x-y)/h} Tf(y,\mathbf{n})dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} e^{ix\mathbf{n}} \hat{f}(\mathbf{n}). \end{aligned}$$

Dalla proposizione segue immediatamente che:

Corollario 4.3.

$$f \in \mathbb{C}^\infty(\Pi^d) \iff \forall N \in \mathbb{N}, \quad \langle \boldsymbol{n} \rangle^N Tf \in \mathcal{H}.$$

Andiamo ora a rivedere i teoremi enunciati per la trasformata continua in chiave discreta. Vogliamo infatti dimostrare che la trasfomata di Bargmann discreta così definita è un buon operatore quando è applicata a derivazioni parziali.

Proposizione 4.4. *Sia $u \in L^2(\Pi^d)$ allora vale:*

(i) $(hD_x)(Tu) = T(hD_y u)$,
dove $D_x = \frac{1}{i}\partial_x = -i\partial_x$.

(ii) $hD_xTu = (h\boldsymbol{n})Tu(x,\boldsymbol{n}) + iT_1u(x,\boldsymbol{n})$,
dove:

$$T_1u(x,\boldsymbol{n}) := c\int_{\Pi^d} \widetilde{\psi}(x-y)e^{i(x-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h}u(y)dy,$$

avendo posto:

$$\widetilde{\psi}(t_1,...,t_d) := (\sin(t_i))_{1\le i\le d}.$$

Teorema 4.5. *Siano $u, v \in L^2(\Pi^d)$. Allora vale il seguente risultato:*

$$\langle ThD_y u, Tv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle hD_x Tu, Tv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle h\mathbf{n}Tu, Tv\rangle_{\mathcal{H}}$$

Dimostrazione. Premettiamo il seguente:

Lemma 4.6.

$$\langle T_1 u, Tv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Tv, T_1 v\rangle_{\mathcal{H}}$$

Dimostrazione Lemma: Abbiamo,

$$\begin{aligned}
\langle T_1 u, Tv\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d} T_1 u(x,\mathbf{n})\overline{Tv(x,\mathbf{n})}dx \\
&= c^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d\times\Pi^d} \widetilde{\psi}(x-y)e^{i(x-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h-i(x-z)\mathbf{n}-\psi(x-z)/h} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times u(y)\overline{v(z)}dxdydz \\
&= c^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d\times\Pi^d} (\widetilde{\psi}(x-z) + [\widetilde{\psi}(x-y) - \widetilde{\psi}(x-z)]) \\
&\qquad\qquad\qquad \times e^{i(z-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h-\psi(x-z)/h}u(y)\overline{v(z)}dxdydz.
\end{aligned}$$

D'altra parte, analogamente:

$$\langle Tu, T_1 v\rangle_{\mathcal{H}} = c^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d\times\Pi^d} \widetilde{\psi}(x-z)e^{i(z-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h-\psi(x-z)/h}u(y)\overline{v(z)}dxdydz.$$

Quindi,

$$\langle T_1 u, Tv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Tv, T_1 v\rangle_{\mathcal{H}} + R$$

con

$$R = c^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d\times\Pi^d} [\widetilde{\psi}(x-y) - \widetilde{\psi}(x-z)]e^{i(z-y)\mathbf{n}-\psi(x-y)/h-\psi(x-z)/h}u(y)\overline{v(z)}dxdydz.$$

Ora mostriamo che $R = 0$.
Consideriamo il seguente risultato valido per la trasformata discreta di Fourier, che abbiamo già utilizzato in precedenza:

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d f(z) &= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{n}z} \int_{\Pi^d} e^{-iy\mathbf{n}} f(y)dy \\
&= \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d} e^{i(z-y)\mathbf{n}} f(y)dy.
\end{aligned}$$

e lo applichiamo alla funzione:

$$\int_{\Pi^d} [\widetilde{\psi}(x-y) - \widetilde{\psi}(x-z)] e^{-\psi(x-y)/h - \psi(x-z)/h} u(y) dy.$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} R &= c^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d\times\Pi^d} [\widetilde{\psi}(x-y) - \widetilde{\psi}(x-z)] e^{i(z-y)\mathbf{n} - \psi(x-y)/h - \psi(x-z)/h} u(y)\overline{v(z)} dx dy dz. \\ &= c^2 \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \int_{\Pi^d\times\Pi^d} [\widetilde{\psi}(x-z) - \widetilde{\psi}(x-z)] e^{i(z-z)\mathbf{n} - \psi(x-z)/h - \psi(x-z)/h} u(z)\overline{v(z)} dx dz. \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ora dimostriamo il teorema.

$$\langle ThD_y u, Tv\rangle = \langle hD_x Tu, Tv\rangle = \langle h\mathbf{n}Tu, Tv\rangle + i\langle T_1 u, Tv\rangle.$$

D'altra parte, integrando per parti, si ottiene,

$$\begin{aligned} \langle hD_x Tu, Tv\rangle &= \langle Tu, hD_x Tv\rangle \\ &= \langle Tu, h\mathbf{n}Tv + iT_1 v\rangle \\ &= \langle h\mathbf{n}Tu, Tv\rangle - i\langle Tu, T_1 v\rangle \\ &= \langle h\mathbf{n}Tu, Tv\rangle - i\langle T_1 u, Tv\rangle, \end{aligned}$$

dove l'ultima identità risulta dal lemma. Allora:

$$\langle h\mathbf{n}Tu, Tv\rangle + i\langle T_1 u, Tv\rangle = \langle h\mathbf{n}Tu, Tv\rangle - i\langle T_1 u, Tv\rangle.$$

Ovvero

$$\langle T_1 u, Tv\rangle = 0.$$

Da cui segue l'asserto. □

Teorema 4.7. *[Stime globali] Siano* $u, v \in L^2(\Pi^d)$, *sia poi:*

$$P(x, hD_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(hD_x)^\alpha,$$

un polinomio differenziale con $a_\alpha \in C^\infty(\Pi^d)$.

Allora vale che:

$$\langle TPu, Tv\rangle_{\mathcal{H}} = \langle p(x, h\mathbf{n})Tu, Tv\rangle_{\mathcal{H}} + \mathcal{O}(h)\|\langle \mathbf{n}h\rangle^{m/2}Tu\|_{\mathcal{H}}\|\langle \mathbf{n}h\rangle^{m/2}Tv\|_{\mathcal{H}}.$$

dove $p(x, h\mathbf{n}) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(h\mathbf{n})^\alpha$.

Dimostrazione. Proviamo il teorema per $m = 0$ e $d = 1$.
Vogliamo allora dimostrare che:

$$\langle Tau, Tv\rangle = \langle aTu, Tv\rangle + \mathcal{O}(h)\|Tu\|\|Tv\|.$$

Ora:

$$\begin{aligned}
\langle Tau, Tv\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]} Ta(y)u(t)\overline{Tv(y)}dy \\
&= c^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{i(x-y)n-(1-\cos(x-y))/h-i(x-z)n+(1-\cos(x-z))/h} a(y)u(y)\overline{v(z)}dxdydz \\
&= c^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{i(z-y)n-(1-\cos(x-y))/h+(1-\cos(x-z))/h} a(y)u(y)\overline{v(z)}dxdydz.
\end{aligned}$$

Ora applichiamo il seguente risultato:

$$\begin{aligned}
2\pi f(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inz} \int_{[0,2\pi]} e^{-iyn} f(y)dy \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]} e^{i(z-y)n} f(y)dy,
\end{aligned}$$

alla funzione:

$$\int_{[0,2\pi]} e^{-(1-\cos(x-y))/h+(1-\cos(x-z))/h} a(y)u(y)\overline{v(z)}dz.$$

Otteniamo:

$$\langle Tau, Tv\rangle = c^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{-(1-\cos(x-y))/h} a(y)u(y)\overline{v(y)}dxdy.$$

Poniamo ora $a(y) = a(x) + b(x, y)(x - y)$. Si ha

$$
\begin{aligned}
\langle Tau, Tv\rangle &= c^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{-2(1-\cos(x-y))/h}[a(x) + (x-y)b(x,y)]u(y)\overline{v(y)}dxdy \\
&= \underbrace{c^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{-2(1-\cos(x-y))/h} a(x)u(y)\overline{v(y)}dxdy +}_{\langle aTu,Tv\rangle} \\
&\quad + \underbrace{c^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{-2(1-\cos(x-y))/h}[(x-y)b(x,y)]u(y)\overline{v(y)}dxdy.}_{R}
\end{aligned}
$$

Andiamo ora a stimare R.

$$
|R| \leq C \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} e^{-2(1-\cos(x-y))/h}(x-y)|u(y)||\overline{v(y)}|dxdy.
$$

In particolare:

$$
\int_{[0,2\pi]} e^{-2(1-\cos t)/h}dt = \int_{[-\pi,\pi]} e^{-2(1-\cos t)/h}dt.
$$

Ma, scelto c abbastanza grande $2(1-\cos t) \geq \frac{t^2}{c}$. Allora:

$$
\begin{aligned}
\int_{[-\pi,\pi]} e^{-2(1-\cos t/h}dt &\leq \int_{[-\pi,\pi]} e^{-\frac{t^2}{ch}}dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{ch}}dt \quad \text{posto: } t = \sqrt{h}s \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{c}}\sqrt{h}\sqrt{h}ds = \mathcal{O}(h).
\end{aligned}
$$

Ne viene quindi

$$
|R| \leq \mathcal{O}(h)\|Tu\|\|Tv\|.
$$

Nel caso $m = d = 1$, il risultato si vede in modo analogo, sostituendo u con $hD_x u$, poi usando gli stessi argomenti come nella prova del Teorema 4.5. La prova del caso generale $m, d \geq 1$ si vede con argomenti simili. $\square$

Osservazione: Usando il Teorema 4.7, si può ottenere un risultato di ipoellitticità per gli operatori ellittici a coefficienti variabili su Π^d. Più specificatamente, se $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(D_x)^\alpha$ e $p(x, \mathbf{n}) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \mathbf{n}^\alpha$ sono tali che esiste $C > 0$ con,

$$|p(x, \mathbf{n})| \geq \frac{1}{C} ||\mathbf{n}||^m, \quad (x \in \Pi^d, \, ||\mathbf{n}|| \geq C),$$

allora, ogni funzione $u \in L^2(\Pi^d)$ tale che $P(x, D_x)u \in C^\infty(\Pi^d)$ è in $C^\infty(\Pi^d)$. Infatti, basta applicare prima il Teorema 4.7 all'operatore $\widetilde{P}(x, hD_x, h)^N := [h^m P(x, D_x)]^N$ con $N \geq 1$ arbitrario, poi il Corollario 4.3.

Bibliografia

[1] Gerald B.Folland,
Harmonic Analysis in Phase Space,
Princeton University Press (1989).

[2] Gerald B.Folland,
Fourier Analysys and its Applications.
Brooks/Cole Publishing Company,
Washington 1992.

[3] André Martinez,
An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis.
Springer-Verlag New-York, UTX Series, ISBN: 0-387-95344-2 (2002)