

**ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

**SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA**  
- Sede di Forlì -

*CORSO DI LAUREA*  
**IN INGEGNERIA MECCANICA**  
Classe: L-9

**ELABORATO FINALE DI LAUREA**

In Meccanica degli Azionamenti

**Studio di fattibilità di un ausilio di  
manipolazione per persone con deficit all'arto  
superiore**

**CANDIDATO**

Ivo Campione

**RELATORE**

Ing. Marco Troncossi

Anno Accademico 2013/2014  
Sessione II



# Indice

<b><i>Sommario</i></b>	<b>5</b>
<b><i>1 Introduzione</i></b>	<b>7</b>
1.1 Obiettivi e target di riferimento	7
1.2 Ausili in circolo e commercio	8
<b><i>2 Definizione e specifiche tecniche</i></b>	<b>15</b>
2.1 Ricerca di scenari tipici	15
2.1.1 Esempi di scenari nel piano	15
2.1.2 Esempi di scenari nello spazio	16
2.2 Astrazione degli scenari	17
<b><i>3 Presentazione del meccanismo</i></b>	<b>23</b>
3.1 La pinza	24
3.1.1 Descrizione generale e configurazione non in presa	24
3.1.2 Presa di oggetti assimilabili ad un cilindro	25
3.1.3 Presa di oggetti assimilabili ad un parallelepipedo	27
3.2 Il braccio e le coppie cinematiche	32
3.3 La base	34
3.3.1 Panoramica generale	34
3.3.2 Bloccaggio di oggetti sul piano	36
3.3.3 Struttura interna del meccanismo	39
<b><i>4 Calcoli</i></b>	<b>49</b>
4.1 La pinza: procedimento generale di analisi	49
4.2 La pinza: studio senza attrito	52
4.2.1 Limitazione su $K$ per configurazione non in presa	52
4.2.2 Limitazione su $K$ per presa cilindro	56
4.2.3 Limitazione su $K$ per presa parallelepipedo	73
4.2.4 Scelta finale di $K$ e degli angoli di precarico	76
4.3 La pinza: studio con attrito	82
4.3.1 Oggetto cilindrico: attrito contro peso	82
4.3.2 Oggetto cilindrico: momento torcente trasmissibile	89
4.3.3 Oggetto rettangolare: attrito contro peso	91
4.4 La pinza: caso particolare di presa	94
4.5 La pinza: scelta finale delle costanti elastiche	98

4.6 Molla del braccio: scelta della costante elastica	100
<i>Conclusioni</i>	<i>101</i>
<i>Appendice</i>	<i>103</i>
<i>Bibliografia</i>	<i>111</i>



# *Sommario*

In questo lavoro di tesi verrà presentato il primo livello di progettazione, preceduto da uno studio preliminare riguardante le specifiche di progetto, di un dispositivo atto all'ausilio di persone diversamente abili, nel nostro caso persone con deficit all'arto superiore, come ad esempio amputati. Il dispositivo sviluppato ha la funzione di supporto statico, è stato infatti pensato essenzialmente per permettere il bloccaggio (sul piano o nello spazio) di una determinata categoria di oggetti, in modo da rendere possibile ai soggetti ai quali è indirizzato tutta una serie di mansioni, per loro altrimenti impossibili o comunque molto difficili da svolgere.

Verranno illustrati i disegni creati al CAD, spiegato il funzionamento qualitativo del meccanismo creato, e successivamente verrà presentato un modello matematico, grazie al quale sono stati calcolati possibili valori di alcune variabili in gioco, come ad esempio le costanti elastiche delle molle presenti.



# CAPITOLO 1

## INTRODUZIONE

### 1.1 Obiettivi e target di riferimento

Per persone con deficit più o meno gravi all'arto superiore, molte delle attività più semplici e naturali da svolgere per una persona normalmente abile possono risultare molto difficoltose o nel peggiore dei casi impedito. Vogliamo innanzitutto definire meglio cosa si intende per deficit e quali casi considereremo come target del lavoro svolto. In generale considereremo tutte quelle persone il cui uso di un arto superiore (uno solo tra i due) è impedito del tutto o gravemente limitato, ad esempio a causa di un'amputazione a livello del braccio o del polso, o a causa di alcune disfunzioni articolari.

L'idea grazie al quale è nato questo lavoro di tesi è derivata da un'osservazione degli ausili già presenti in commercio per persone con questa tipologia di deficit: si spazia da semplici dispositivi, ad esempio per lo svolgimento di specifiche mansioni culinarie o ricreative e hobbistiche, ad altri molto più complessi, che tentano ad esempio di ricreare in tutto e per tutto la geometria e le peculiarità di una mano. In generale si è notato come la maggior parte di tali dispositivi o è altamente specializzata nello svolgimento di determinati compiti, o la loro complessità e grado di meccanizzazione è tale da necessitare elevati costi di vendita e altri inconvenienti di comodità e affidabilità.

Si è intravista perciò la possibilità di creare un semplice dispositivo, puramente meccanico, che tentasse di conciliare nei limiti del possibile la flessibilità funzionale e la semplicità costruttiva, in modo da risultare tra le altre cose economico ed affidabile. Inoltre è emersa la richiesta di

qualcosa che sia “distaccato dal corpo” cioè che si utilizzi solo nel momento del bisogno e che in caso di non utilizzo non sia di intralcio o disturbo e non crei fastidio.

Da queste serie di considerazioni, si è optato per lo sviluppo di un dispositivo di manipolazione statica, fissabile ad un supporto piano come ad esempio un tavolo: la sua funzione è quella di sostenere staticamente oggetti, mantenendoli fissi e stabili in determinati punti dello spazio, o bloccati sul piano a cui è ancorato.

In linea generale infatti, possiamo dividere l'insieme delle operazioni svolte con due mani in:

- 1) operazioni che richiedono movimenti complessi di entrambe le mani (es. suonare uno strumento, scrivere velocemente al computer etc.)
- 2) operazioni che richiedono movimenti complessi di una mano (che chiameremo *mano primaria*) e semplice supporto dell'altra (*mano secondaria*), la quale ad esempio svolge compiti di bloccaggio sugli oggetti sui quali lavora la prima.

Escludendo il primo caso, praticamente impossibile dal punto di vista realizzativo se non con protesi all'avanguardia, un dispositivo di supporto statico può invece nel secondo caso emulare efficacemente la funzione della *mano secondaria*, mentre la mano sana svolge il compito della *mano primaria*.

## 1.2 Ausili in circolo e commercio

A monte dell'idea su cui si basa progetto, è stata fatta un'analisi preliminare dei dispositivi già presenti in commercio. Tra quelli presi in considerazione ci si è concentrati prettamente su quelli che permettono lo svolgimento di compiti diversamente impossibili da svolgere per persone con gravi deficit all'arto superiore, e non quelli ad esempio di facilitazione di essi.

Possiamo dividere i dispositivi principali in due macrocategorie:

- 1) **ausili per mansioni specifiche**
- 2) **ausili per mansioni generali e protesi**

I primi sono semplici ma specializzati, molto efficaci nelle loro mansioni ma non flessibili funzionalmente, i secondi, molto simili a protesi o protesi vere e proprie sono invece in generale più complessi meccanicamente e flessibili funzionalmente, in grado di svolgere diversi compiti ma in maniera solo mediamente efficace. Verrà di seguito illustrata una serie di ausili del primo tipo, visto che è la categoria alla quale faremo riferimento per lo sviluppo del nostro lavoro.

### *Ausili da cucina*

Rientrano in questo ambito gli ausili con i quali è possibile svolgere mansioni culinarie. Molte di esse possono risultare impossibili da svolgere e pericolose per un amputato, se non trattate con ausili specifici.



*Figura 1.1: Tagliere svedese*

*Questo tagliere può essere utilizzato per affettare, spezzettare, sminuzzare il cibo. È progettato per essere utilizzato con una sola mano.*



*Figura 1.2: Lavabicchieri*

*Doppia spazzola accoppiata con base dotata di ventosa per assicurarla sul fondo del lavello. Inserendo i bicchieri questi saranno spazzolati sia all'interno sia all'esterno.*



*Figura 1.3: Ferma pentola*

*Rende possibile mescolare le pietanze con una mano sola, senza dover tenere anche l'impugnatura della pentola.*

### *Ausili per lo svago*

Sono quegli ausili che aiutano a svolgere mansioni ricreative e di svago, come ad esempio leggere o giocare a determinati giochi.



*Figura 1.3: Leggio in plastica*

*È dotato di due braccetti per bloccare le pagine nella posizione voluta e al contempo facilita l'atto di sfogliare a chi può usare una sola mano.*



*Figura 1.4: Ultra-Viewer*

*È una lente d'ingrandimento che si appoggia al petto e rimane in posizione grazie a un cordoncino passante attorno al collo. Permette di avere così le mani libere per eseguire piccoli lavori o leggere.*



*Figura 1.5: Card Shuffler*

*Macchinetta per mischiare le carte da gioco.*



*Figura 1.6:  
Supporto  
per carte da  
gioco*

### *Ausili per la salute e l'igiene personale*

E' quella categoria di ausili che aiuta a svolgere mansioni riguardanti la salute e l'igiene personale. Alcune mansioni, come ad esempio quelle riguardanti operazioni da effettuare sulla mano stessa, necessitano ovviamente due mani e risultano perciò, nel caso di amputati o persone con deficit all'arto superiore, impossibili senza ausili specifici. Anche altre mansioni molto particolari, come ad esempio il taglio di pastiglie, possono risultare normalmente molto difficoltose senza di essi.



*Figura 1.7: Pill Splitter*

*E' un contenitore in plastica trasparente con chiusura dotata di lama per tagliare le pastiglie. Le pastiglie sono raccolte in un serbatoio e, all'occasione, vengono deposte sull'apposito ripiano dove, chiudendo il contenitore, la lama le suddividerà in parti eguali.*



*Figura 1.8: Spazzola con attacco a ventose*

*E' una spazzola in nylon che tramite due ventose si applica alle superfici dei sanitari da bagno. Indicata per la pulizia delle unghie o di qualsiasi altra parte del corpo o oggetto.*



*Figura 1.9: Specchio Pivot*

*E' uno specchio montato su un supporto metallico pesante, che permette di fissare l'angolazione.*



*Figura 1.10: Tavoletta per limare le unghie*

*E' una semplice tavoletta con superficie abrasiva, divisa in due grane per lavoro di sgrossatura e di fino. Si fissa al piano con due ventose.*

## ***Ausili per vestirsi***

Alcune operazioni che si fanno nel vestirsi possono necessitare l'utilizzo di due mani, come ad esempio l'allacciarsi le scarpe o i bottoni della camicia. Quelli qui presentati non sono veri e propri ausili ma capi d'abbigliamento pensati apposta per ovviare al problema.





*Figura 1.11: Lacci Coilers*

*Sono disegnati per scarpe sportive con allacciature fino a 8 occhielli. Questi lacci hanno una particolare struttura elicoidale che permette di chiudere la scarpa senza fare il nodo,*



*Figura 1.12: Camicia con chiusura a velcro*

In questo paragrafo si è vista una panoramica degli ausili in commercio, e come essi adempiano nella stragrande maggioranza a mansioni specifiche. Anche se molte funzioni svolte da essi sono pressoché insostituibili da un ausilio semplice e per mansioni generali, si può partire da una loro analisi per l'induzione di alcune situazioni generali tipiche di bloccaggio, e di come possono venire risolte, per ragionare poi su casi di mansioni meno settoriali e più generali.



## CAPITOLO 2

# DEFINIZIONE DELLE SPECIFICHE TECNICHE

## 2.1 Ricerca di scenari tipici

Abbiamo visto come il dispositivo debba poter svolgere funzioni di supporto statico, ovvero come debba tener fisso l'oggetto in una determinata posizione (dello spazio o del piano) mentre la mano sana svolge altri compiti più complessi.

Il bloccaggio dell'oggetto avviene attraverso opportune forze che devono agire in determinate direzioni, bisogna però tenere conto del fatto che alcune superfici dell'oggetto stesso devono in certi casi rimanere libere e accessibili (saranno denominate in seguito *lati di accessibilità*), quindi non tutte le direzioni si prestano all'applicazione delle suddette forze.

Basandosi su un'osservazione dei semplici compiti svolti dalla *mano secondaria*, si è iniziato col definire una serie di possibili *scenari* (oggetto + compito da svolgere). In base agli oggetti e alla natura dei compiti da svolgere, gli scenari sono stati divisi in scenari **nel piano** e scenari **nello spazio**.

### *2.1.1 Esempi di scenari nel piano*

Molte delle mansioni che richiedono l'utilizzo di due mani vengono svolte ad esempio su tavoli, o comunque mobili con una superficie piana. In questo tipo di mansioni solitamente, mentre una mano opera sull'oggetto, l'altra, sempre agendo sul piano tiene fisso l'oggetto.

Ecco riportati alcuni esempi:

- Tenere fermo un foglio mentre si scrive o si disegna, si cancella o si traccia una riga
- Cambiare le batterie ad esempio ad un telecomando/orologio
- Aprire un cellulare
- Aprire oggetti come bottiglie, lattine o scatolette
- Tenere fermo un oggetto per pulirlo/svitare viti/smontarlo/montarlo
- Tagliare con un cutter

Per considerazioni successive, si può restringere la lista di esempi di scenari esposta ad una lista ridotta (consideriamo solo gli scenari più “gravosi” e la cui risoluzione comporta una risoluzione anche degli altri) fino ad avere:

- Foglio fermo per cancellare
- Oggetto fermo per cutter (> tenere righello)
- Aprire cellulare
- Aprire telecomando
- Aprire bottiglie/scatolette

### ***2.1.2 Esempi di scenari nello spazio***

Per determinate mansioni è comune che, mentre una mano lavora su un determinato oggetto (su di un piano o meno) o parte della persona, l'altra agisca invece su un oggetto nello spazio: ad esempio puntando sul luogo di lavoro qualcosa che faciliti il compito. Un altro esempio è quello di compiti che, per loro stessa natura, possono venire più comodi da svolgere operando con entrambe le mani nello spazio (ad esempio tagliare qualcosa con le forbici). In tutti questi casi la una mano opera sempre

nello spazio. Gli esempi di scenari riportati sotto riguardano appunto compiti svolti su un oggetto nello spazio.

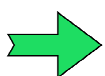
- Sorreggere una torcia elettrica
- Sorreggere una lente di ingrandimento
- Tenere un cellulare
- Tenere uno specchio
- Tagliare con forbici

## 2.2 Astrazione degli scenari

Una volta raccolti alcuni esempi significativi di scenari possibili, si è passati, a partire da essi, ad una generalizzazione degli stessi. Gli oggetti menzionati sopra (e in generale quelli di uso comune) sono nella maggior parte dei casi assimilabili a semplici figure geometriche, nel nostro caso a parallelepipedi, cilindri oppure oggetti piani. Su questi oggetti devono essere applicate determinate forze dall'ausilio lasciando però liberi determinati lati. Ogni scenario è stato perciò definito, oltre che da una figura geometrica rappresentante un oggetto generico di una determinata forma, da dei lati di accessibilità, e da delle forze da applicare in modo da vincolare l'oggetto.

Di seguito verrà presentata la serie di scenari astratti individuati, con accanto le specifiche tecniche, frutto di analisi degli oggetti di uso comune, che definiscono la variabilità delle dimensioni.

### Legenda



Lato accessibilità

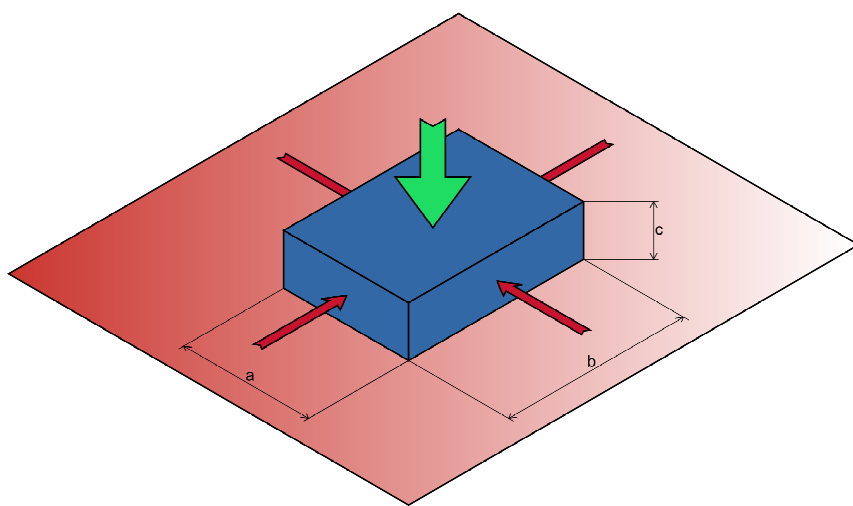


Forza

## Scenari astratti nel PIANO

### Scenario P1

Generico oggetto assimilabile ad un parallelepipedo su cui si agisce dall'alto, e il cui movimento nel piano deve essere bloccato.

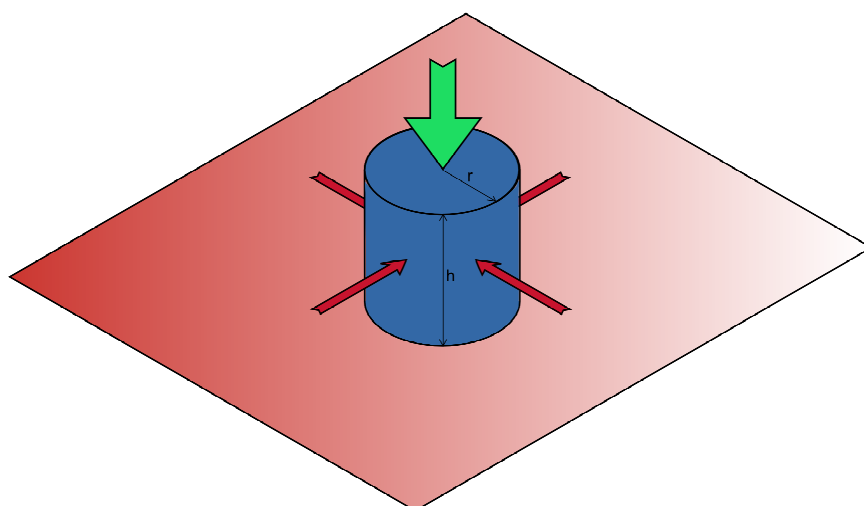


$$\begin{aligned} a &\leq 12.6 \text{ cm} \\ b &\geq 3 \text{ cm} \\ c &\geq 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Figura 2.1: scenario P1

### Scenario P2

Generico oggetto assimilabile ad un cilindro su cui si agisce dall'alto e il cui movimento sul piano deve essere bloccato.

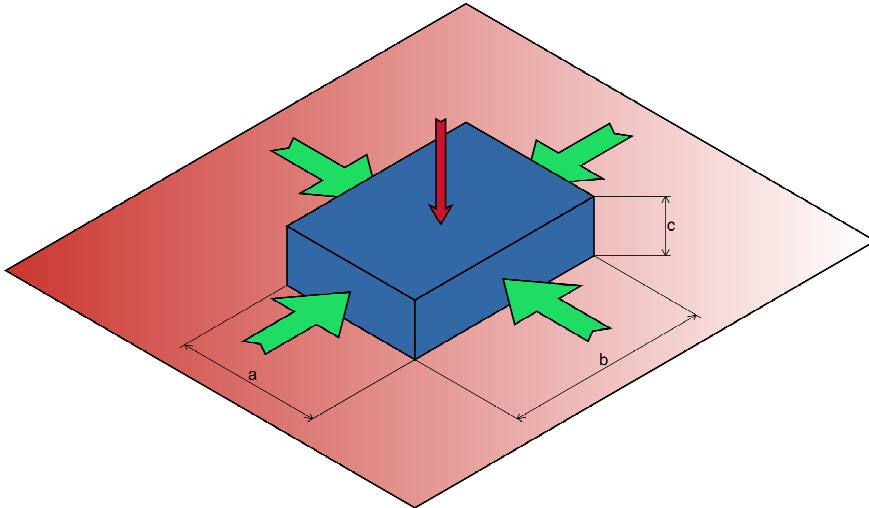


$$\begin{aligned} 2 &\leq h \leq 34 \text{ cm} \\ 2 &\leq r \leq 4.85 \text{ cm} \end{aligned}$$

Figura 2.2: scenario P2

### *Scenario P3*

Generico oggetto assimilabile ad un parallelepipedo (es. cellulare) su cui si agisce dai lati. Per essere bloccato sul piano viene tenuto premuto verso in basso da una forza verticale.

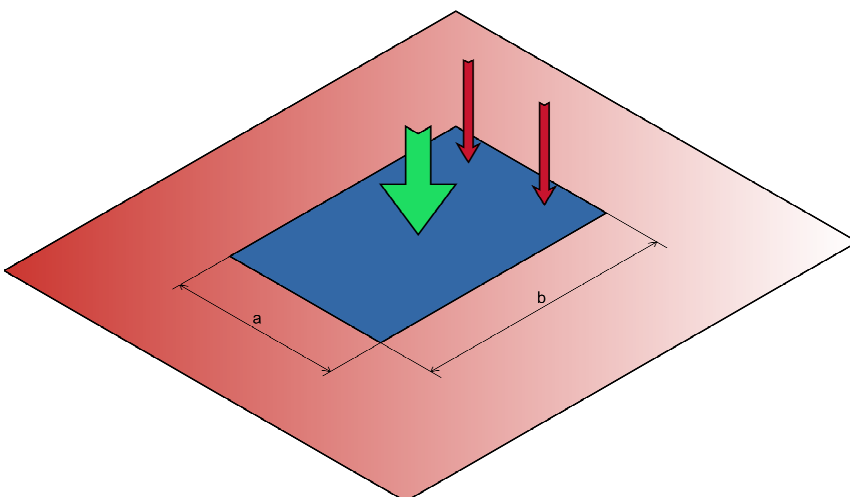


*Figura 2.3: scenario P3*

$$a \times b \times c \approx 12.5 \times 7 \times 1 \text{ cm}$$

### *Scenario P4*

Generico oggetto rettangolare di spessore trascurabile rispetto alle altre 2 dimensioni (es. foglio) su cui si agisce dall'alto. Viene tenuto premuto sul piano e dunque bloccato da forza verticali.



*Figura 2.4: scenario P4*

$$a \times b \approx 29.7 \times 21 \text{ cm}$$

# Scenari astratti nello SPAZIO

## Scenario S1

Generico oggetto assimilabile ad un parallelepipedo (es. specchio, lente, cellulare) che ha bisogno di due facce libere. Per bloccarlo nello spazio le forze vengono esercitate su almeno due delle restanti facce.

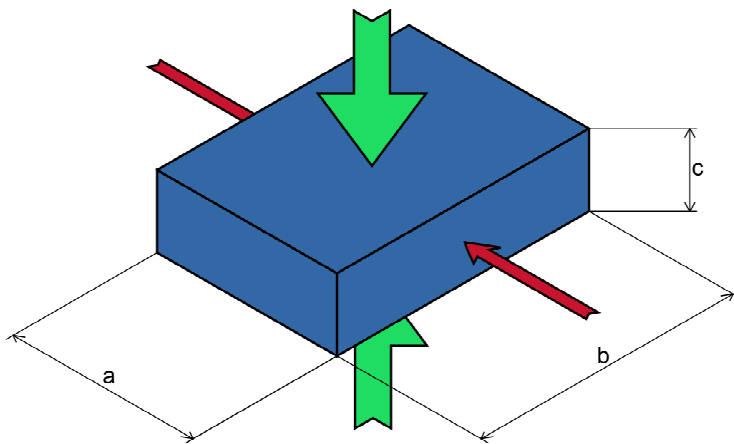


Figura 2.5: scenario S1

$$3 \leq a \leq 12.6 \text{ cm}$$

$$b \geq 3 \text{ cm}$$

$$0.5 \leq c \leq 3 \text{ cm}$$

## Scenario S2

Generico oggetto assimilabile ad un cilindro (es. torcia elettrica). Mentre una parte dell'oggetto deve essere accessibile, su un'altra possono essere

esercitate forze per il bloccaggio.

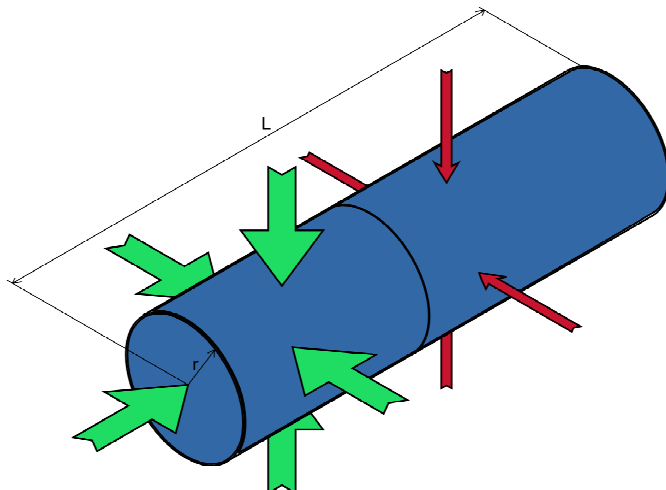


Figura 2.6: scenario S2

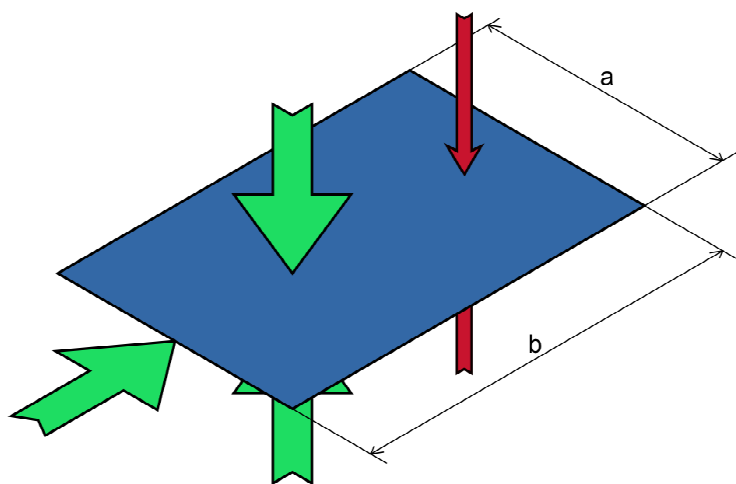
$$r \leq 4.85 \text{ cm}$$

$$3 \leq L \leq 34 \text{ cm}$$



### *Scenario S3*

Generico oggetto rettangolare di spessore trascurabile rispetto alle altre 2 dimensioni (es. foglio) su cui si agisce attorno. Le forze sono esercitate nella parte vicino al bordo posteriore.



*Figura 2.7: scenario S3*

$$a \times b \approx 29.7 \times 21 \text{ cm}$$



## CAPITOLO 3

### PRESENTAZIONE DEL MECCANISMO

In questo capitolo verrà presentato il meccanismo creato e spiegato il suo funzionamento. I colori usati nei disegni al CAD in generale non rispecchiano appieno i materiali, di cui si accennerà nel corso del capitolo, e sono stati usati principalmente per dare maggiore chiarezza al disegno e distinguere i vari componenti.



*Figura 3.1: modello 3D dell'ausilio, qui rappresentato fissato ad un tavolo*

Il meccanismo finale creato, mostrato in *Figura 3.1*, può essere essenzialmente scomposto in tre blocchi funzionali, la *pinza*, il *braccio*, e la *base*.

Verranno di seguito analizzati tutti e tre prima in maniera separata, e poi sarà analizzato l'assieme e il suo funzionamento generale.

## 3.1 La pinza

### 3.1.1 Descrizione generale e configurazione non in presa

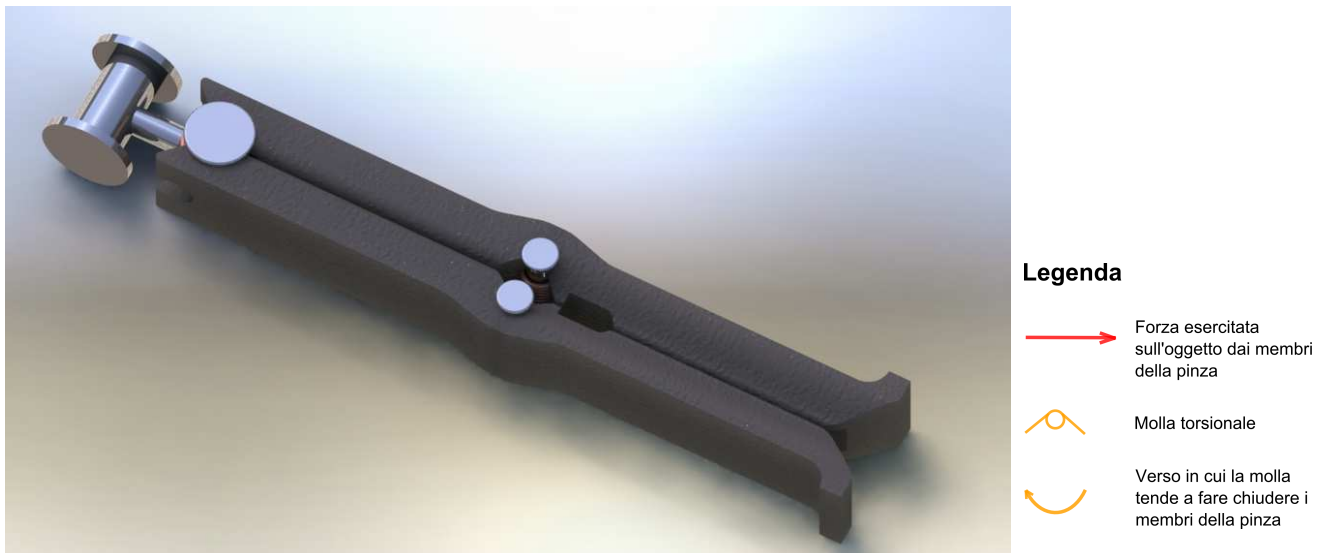


Figura 3.2: pinza in configurazione "non in presa", che chiameremo configurazione I.

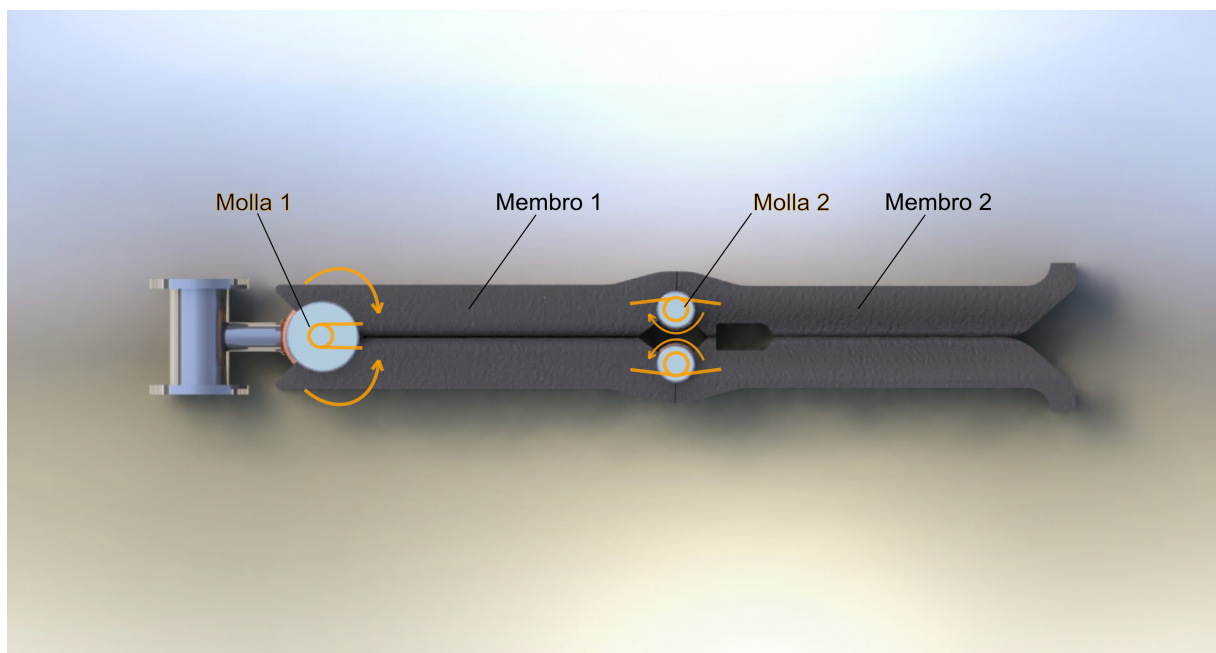
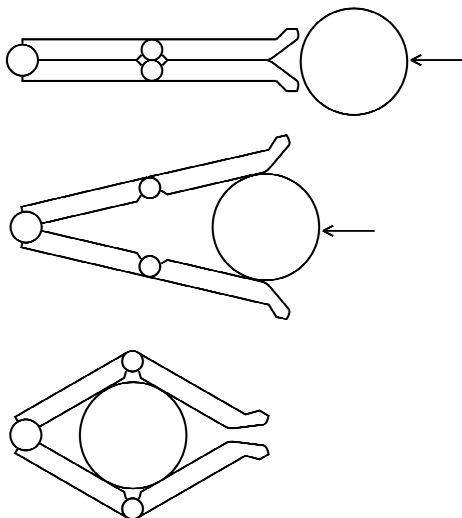


Figura 3.3: pinza nella configurazione I vista dall'alto, con in evidenza le molle torsionali e il modo in cui tendono a fare chiudere i membri.

La *pinza* è simmetrica e formata in totale da 4 membri, il *membro 1*, il *membro 2* e i loro uguali simmetrici. I membri sono pensati realizzati in un materiale di elevata flessibilità e alto coefficiente di attrito, come ad esempio gomma. In assenza di oggetti in presa essa si mantiene nella configurazione mostrata nella *Figura 3.3* grazie a tre molle, di cui una (*molla 1*) nella parte superiore a collegare il *membro 1* e il suo simmetrico e due a collegare i due membri di *tipo 1* con i rispettivi di *tipo 2*. Sia la *molla 1* che la *molla 2* tendono a fare “chiudere” i membri tra le quali sono interposte, e la pinza si mantiene nella configurazione di *Figura 3.3* perché “l’effetto di chiusura” della *molla 1* prevale su quello della *molla 2* e della sua simmetrica (per calcoli relativi a ciò vedere Capitolo 4, paragrafo 4.2.1). Nella *Figure 3.2* e *3.3* si può notare anche la presenza di scassi. Essi hanno la funzione di garantire maggiore stabilità nella presa di oggetti di una determinata categoria, ad esempio di piccolo spessore. Uno studio della loro forma e posizione ottimale non è stato eseguito, sarà solo proposto qualche disegno che ne può esemplificare l’uso. Nei prossimi paragrafi verranno mostrate e descritte alcune delle configurazioni *in presa* della *pinza* e spiegato il suo funzionamento.

### ***3.1.2 Presa di oggetti assimilabili ad un CILINDRO***

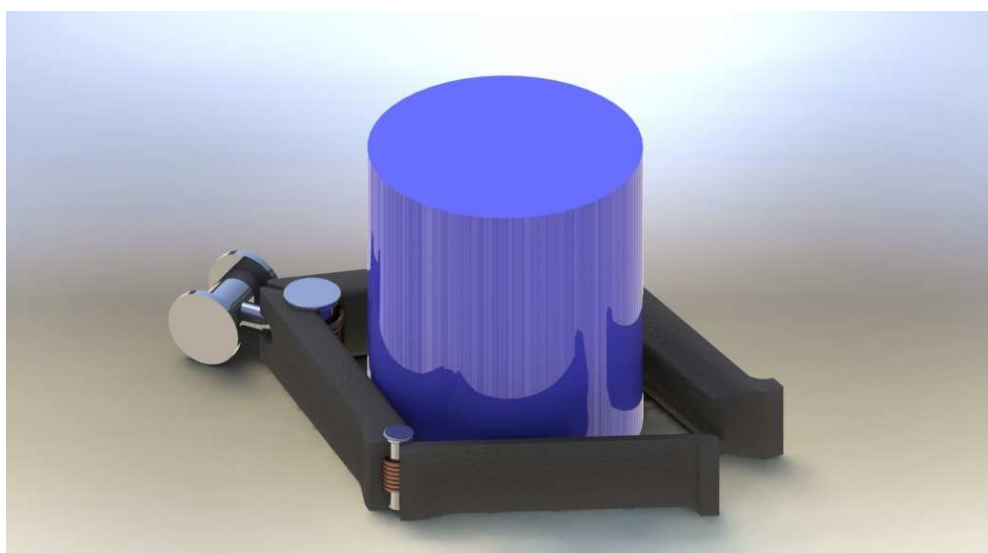


#### ***Principio di funzionamento***

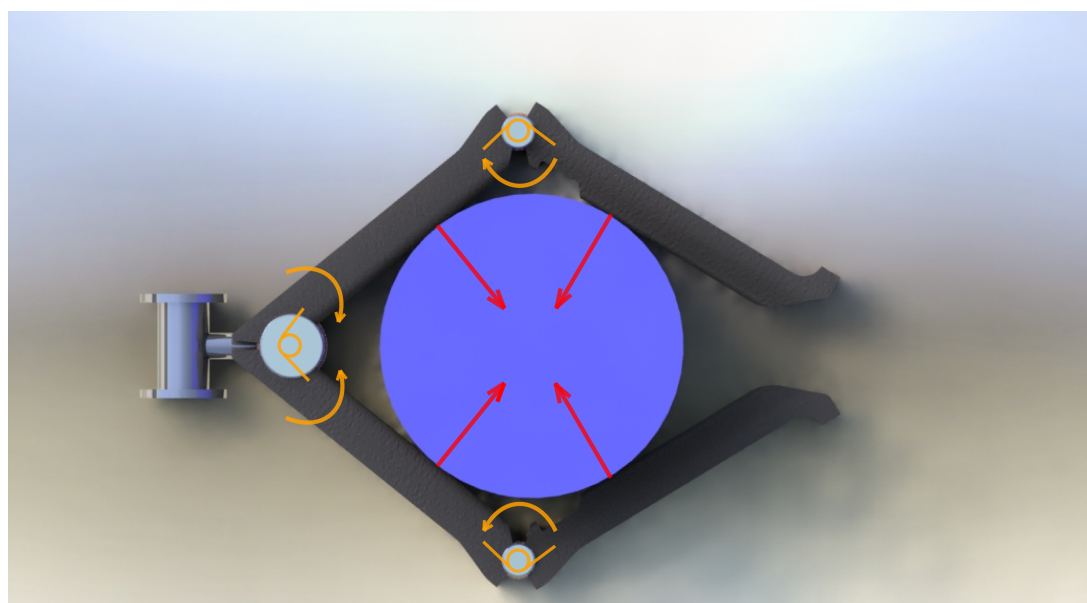
*Figura 3.4: imbocco e presa di un oggetto cilindrico*

Come si può notare nella *Figura 3.4* e nelle precedenti, le estremità dei membri di *tipo 2*, sono sagomati secondo una particolare geometria. Questo serve per permettere ad un

generico oggetto di entrare in presa. Infatti consideriamo di spingere sulla pinza (la cui traslazione è bloccata grazie alle coppie ad elevato attrito presenti nel *braccio*, di cui si parlerà in seguito) un generico oggetto cilindrico: la *pinza*, dalla iniziale *configurazione I*, tende ad aprirsi e successivamente richiudersi attorno all'oggetto grazie all'azione delle molle, come mostrato in *Figura 3.4*. La configurazione finale in presa è mostrata in maniera più chiara nelle successive *Figure 3.5* e *3.6*. A differenza delle altre superfici dei membri della *pinza*, la parte di imbocco è bene abbia bassi coefficienti d'attrito, per permettere una più facile apertura.



*Figura 3.5: generico oggetto cilindrico in presa*

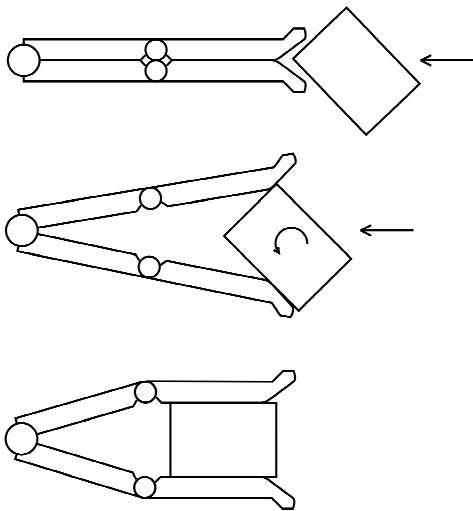


*Figura 3.6: generico oggetto cilindrico in presa, vista dall'alto.*

In *Figura 3.6* sono state messe in evidenza le forze e il modo in cui le molle tendono ad agire. Grazie a forze così disposte si può garantire un fissaggio dell'oggetto.

### ***3.1.2 Presa di oggetti assimilabili ad un PARALLELEPIPEDO***

#### ***Principio di funzionamento***



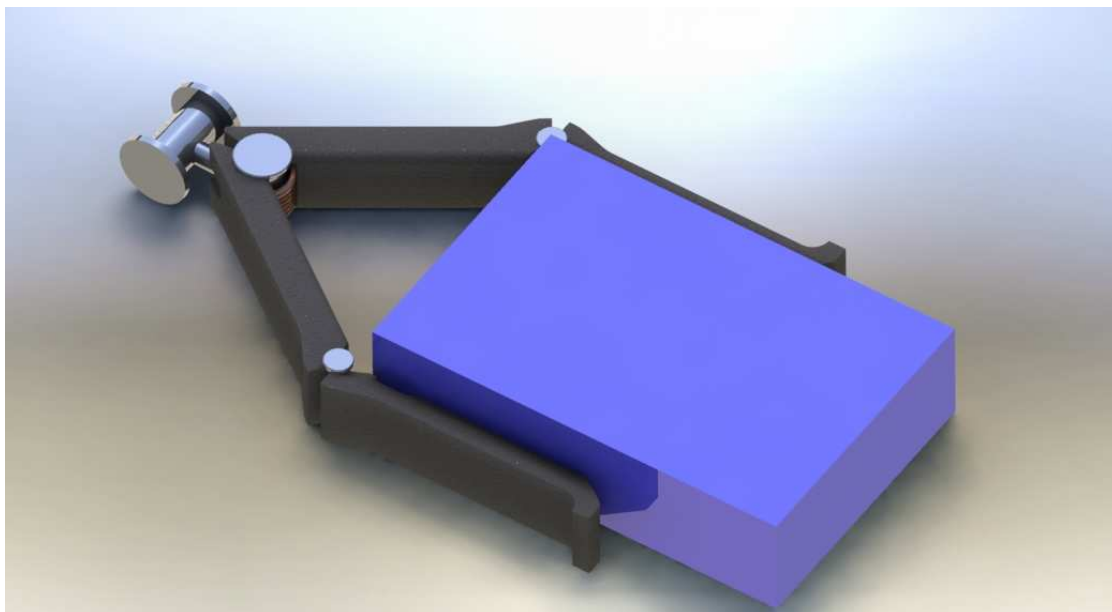
*Figura 3.7: imbocco e presa di un oggetto di sezione rettangolare.*

Oggetti di questo tipo, come illustrato in *Figura 3.7*, possono essere spinti nell'imbocco tramite lo spigolo, e successivamente, una volta che la pinza si sia sufficientemente aperta, ruotati e posizionati nella configurazione in presa.

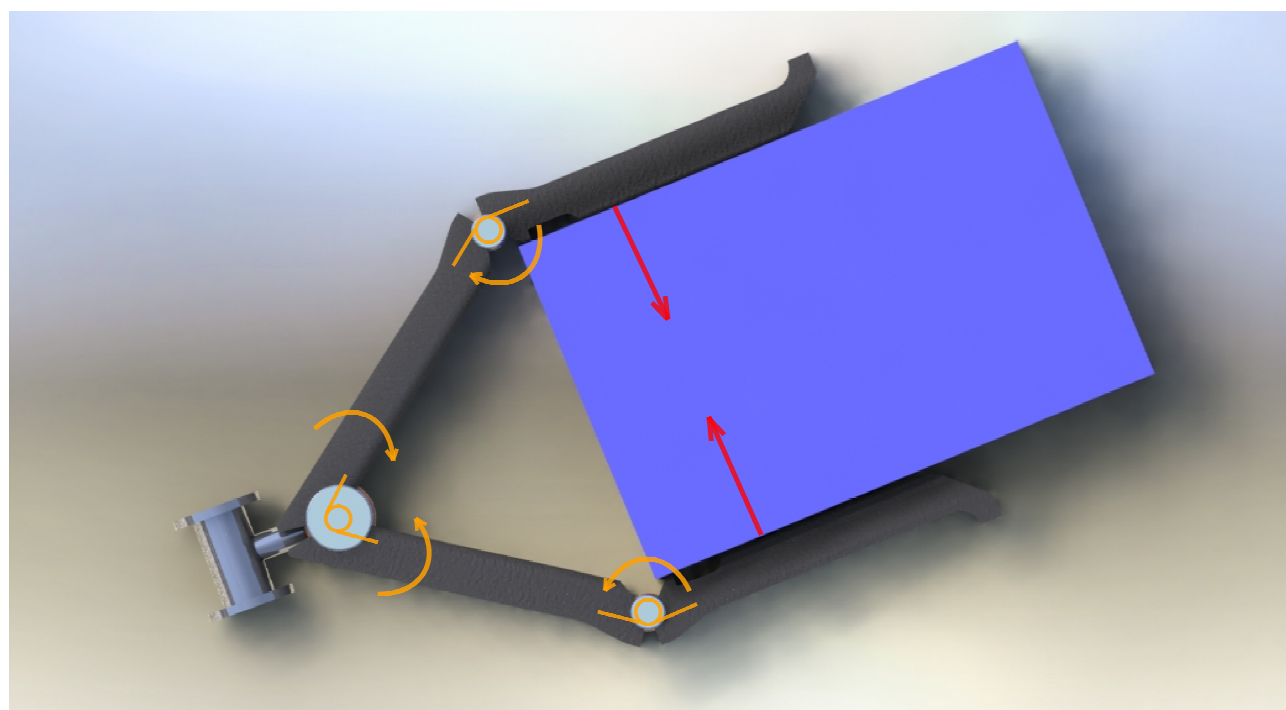
Questo principio di imbocco è valido per oggetti a sezione rettangolare di tutte le dimensioni (ovviamente entro le specifiche), visto che è indipendente dalle dimensioni del lato.

Distinguiamo in questo contesto due modalità di presa, *modo 1* e *modo 2*, in base a come disponiamo l'oggetto nella *pinza*. Inoltre saranno fatti esempi di presa negli scassi. In generale nei vari casi il principio di funzionamento è lo stesso o molto simile a quello descritto sopra.

## *Modo 1*



*Figura 3.8: oggetto rettangolare in presa (modo 1)*



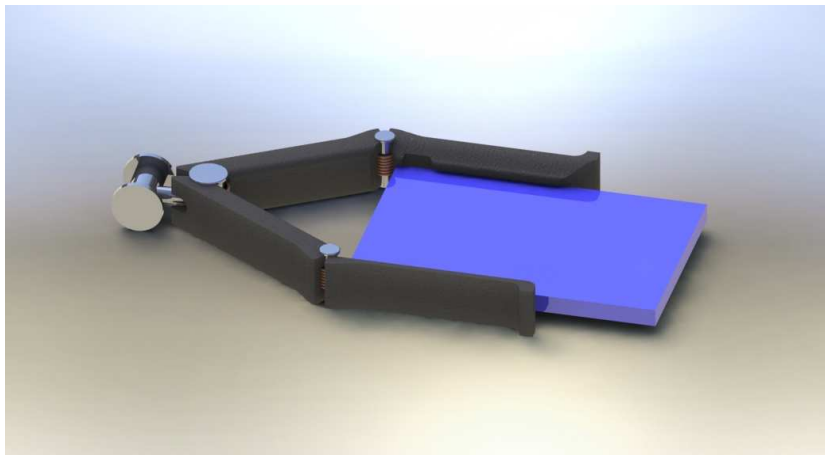
*Figura 3.9: oggetto rettangolare in presa (modo 1), vista dall'alto*

Nella *Figure 3.8* e *3.9* si può vedere una modalità con cui la pinza può tenere fissi oggetti rettangolari. I membri di *tipo 2* esercitano, grazie alle molle, una forza sulle pareti dell'oggetto permettendone il bloccaggio.

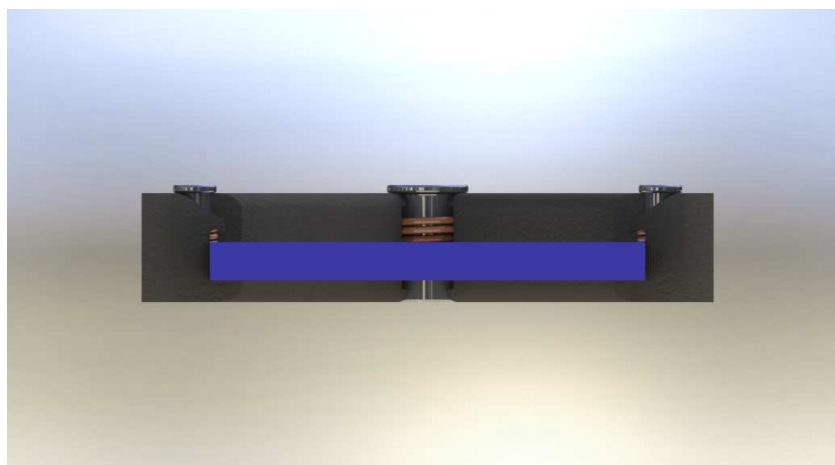


### *Scasso per oggetti di piccolo spessore*

Il *modo 1* di presa appena descritto può comportare, per oggetti di piccolo spessore, forti instabilità. Per questo è una buona idea valutare la possibilità d'inserimento di un scasso, come mostrato ad esempio in *Figura 3.10 e 3.11*. Si ricorda che il materiale di cui sono composti i membri della *pinza* è dotato di alta flessibilità, per cui uno scasso, se realizzato nel modo giusto, può adattarsi a spessori compresi in un certo intervallo. Inoltre questo tipo di scasso, assottigliando determinati punti dei membri, può fare sì che essi si adattino meglio anche ad oggetti di spessore più elevato, una volta premuti contro di essi.



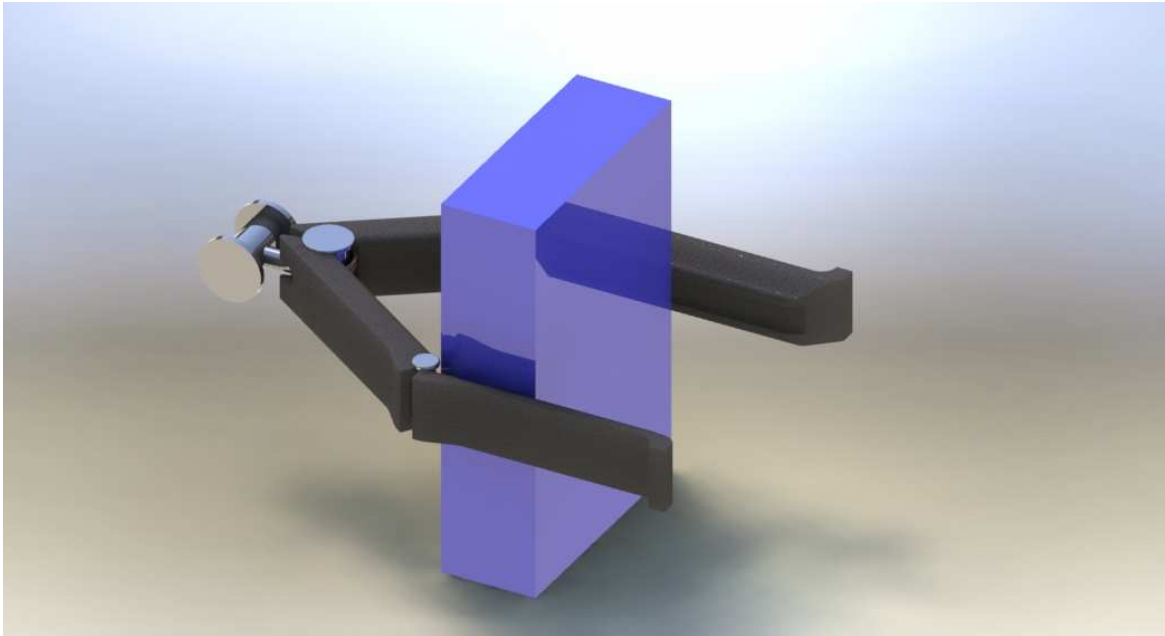
*Figura 3.10: oggetto rettangolare di piccolo spessore in presa(modo 1)*



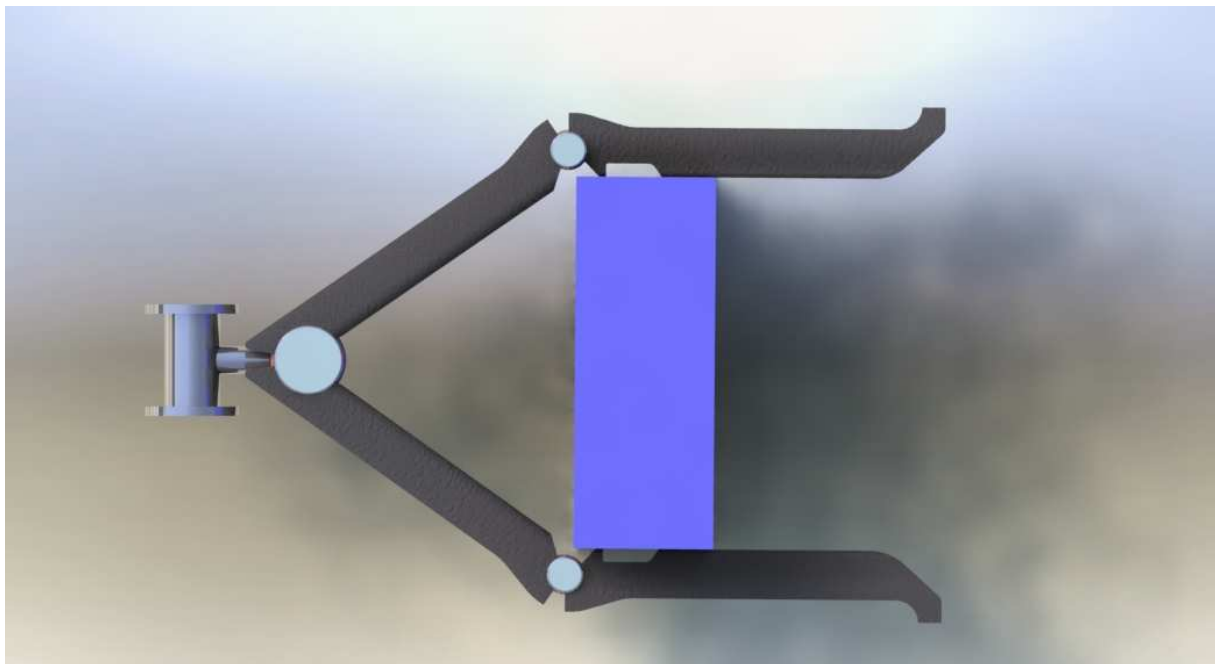
*Figura 3.11: oggetto rettangolare di piccolo spessore in presa (modo 1), vista dal davanti*

## *Modo 2*

E' molto simile al *modo 1*, solo che la parete dell'oggetto occupa solo una parte dei membri di *tipo 2*.



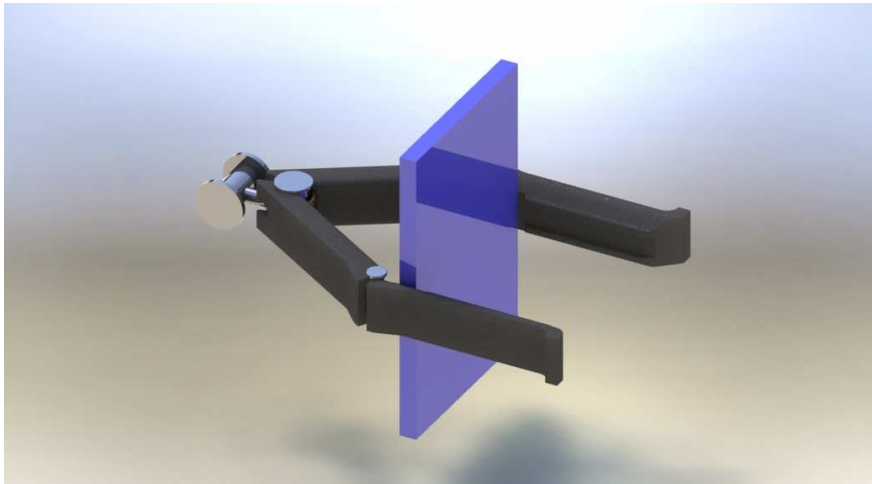
*Figura 3.12: oggetto rettangolare in presa (modo 2)*



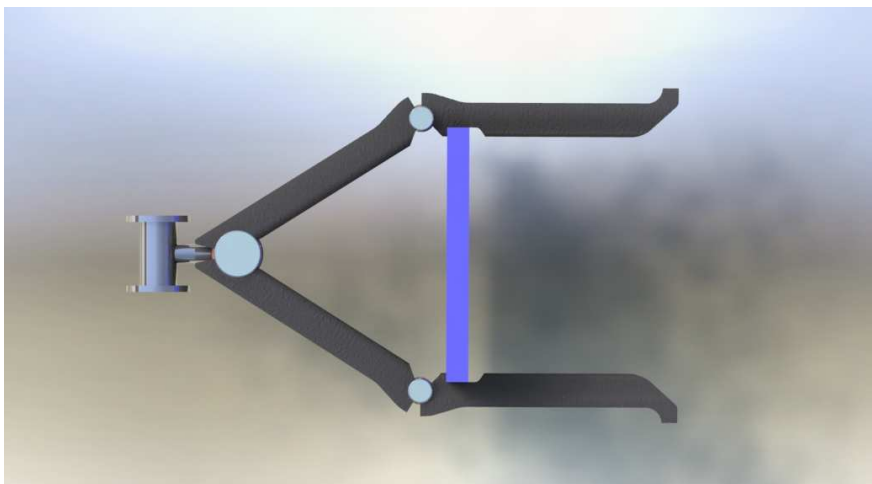
*Figura 3.13: oggetto rettangolare in presa (modo 2), vista dall'alto*

### *Scasso per oggetti di piccolo spessore*

Anche in questo caso può essere comodo l'utilizzo di scassi, come mostrato in *Figura 3.14* e *3.15*. Questo tipo di oggetti, visto lo spessore molto ridotto, può essere infilato attraverso di esso, dopodiché ruotato una volta giunti allo scasso.



*Figura 3.14: presa di un oggetto rettangolare di piccolo spessore (modo 2)*



*Figura 3.15: presa di un oggetto rettangolare di piccolo spessore (modo 2), vista dall'alto*

Si è così conclusa la panoramica delle principali modalità di presa della pinza. Ovviamente ne possono esistere molte altre, per particolari oggetti non assimilabili alle figure elementari viste sopra.

## 3.2 Il braccio e le coppie cinematiche

Il *braccio* vero e proprio è composto da due segmenti, di cui uno uscente dalla *base*, telescopico, e uno dotato di una molla a compressione, che, se compressa, ne fa variare la lunghezza (ma in maniera trascurabile). Sono presenti sei coppie cinematiche, tutte ad attrito radente. Tra di esse si distinguono **5 coppie rotoidali** e **1 coppia prismatica**.

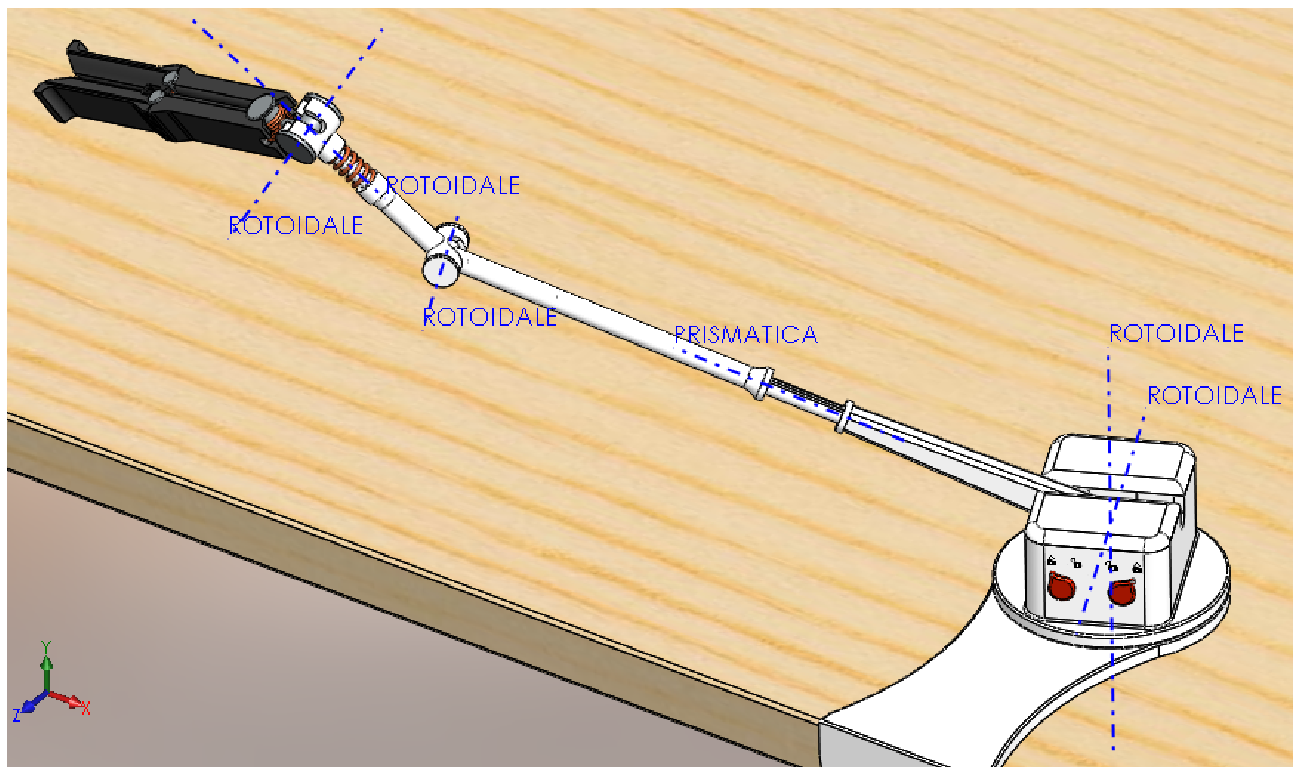


Figura 3.16: coppie cinematiche presenti nel braccio



Figura 3.17: ingrandimento della coppia prismatica

## *Calcolo dei gradi di libertà*

Verranno di seguito calcolati i gradi di libertà del meccanismo spaziale escludendo quelli interni della *pinza*:

$$GdL = 6(m - 1) - 5C_1 - 4C_2 - 3C_3 - 2C_4 - C_5$$

con  $m$ : numero di membri

$C_n$ : numero di coppie cinematiche che permettono n GdL

Nel nostro caso  $m = 7$

Mentre le coppie sono tutte di tipo  $C_1$ :  $C_1 = 6$

$$GdL = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 = 6$$

## *Considerazioni*

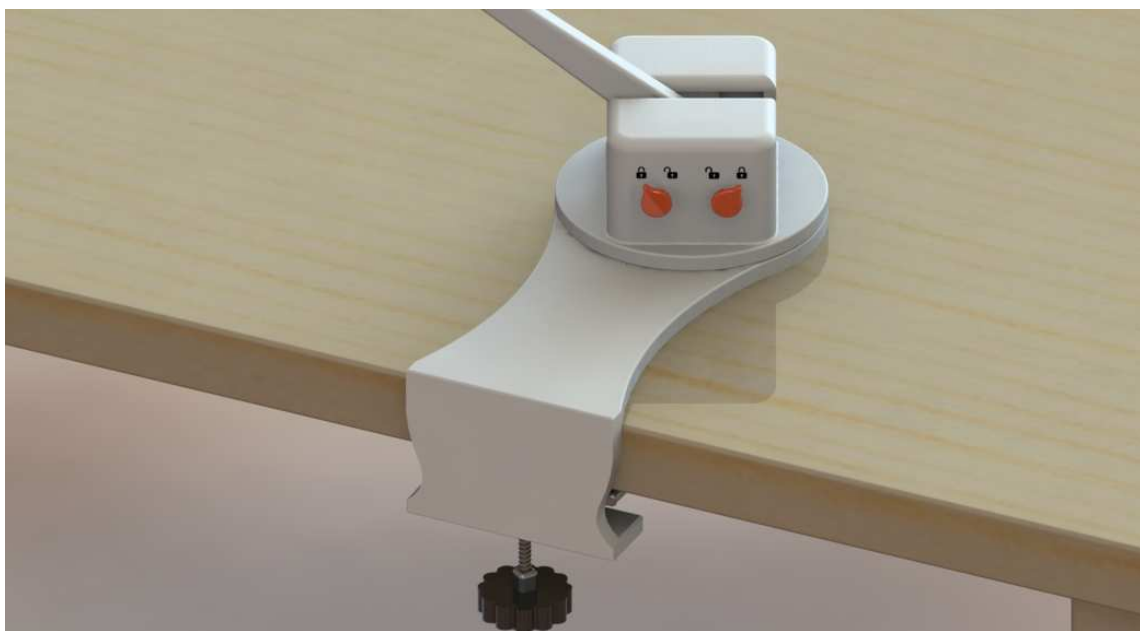
Il *braccio* deve essere in grado di reggere sforzi di natura piuttosto varia, ma non di intensità eccessivamente elevata. Per questo si può valutare, per l'economia e la versatilità, l'utilizzo di qualche tipo di plastica adatta allo scopo.

Le coppie ad attrito vanno inoltre opportunamente dimensionate, cioè va fatto in modo che offrano un'opportuna resistenza passiva al moto, grazie alla quale si mantenga la posizione raggiunta, e che offrano abbastanza resistenza da permettere di infilare un oggetto senza che il tutto trasli in direzione opposta nel momento dell'imbocco dello stesso. Questi specifici calcoli non sono stati svolti nel corso della tesi, ma sono stati lasciati a sviluppi futuri.

## 3.3 La base

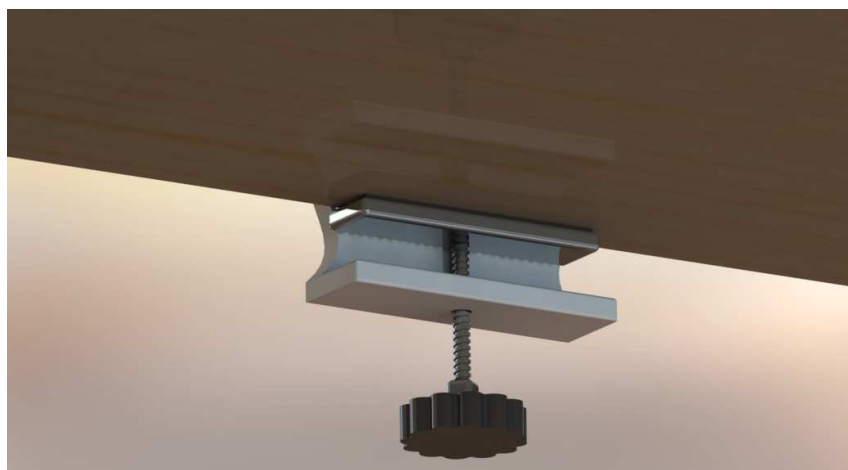
### 3.3.1 Panoramica generale

La *base* dell'ausilio creato è formata da una morsa di fissaggio e dalla base vera e propria, all'interno della quale è presente un meccanismo che permette alcune peculiarità di movimento del segmento uscente da essa.



*Figura 3.18: disegno complessivo della base*

### *Morsa di fissaggio*



*Figura 3.19: la morsa di fissaggio*

Il fissaggio della *base* ad un tavolo o ad un generico mobile può essere realizzato mediante una morsa simile a quella illustrata in *Figura 3.19*, in grado di fare presa su spessori entro un certo intervallo.

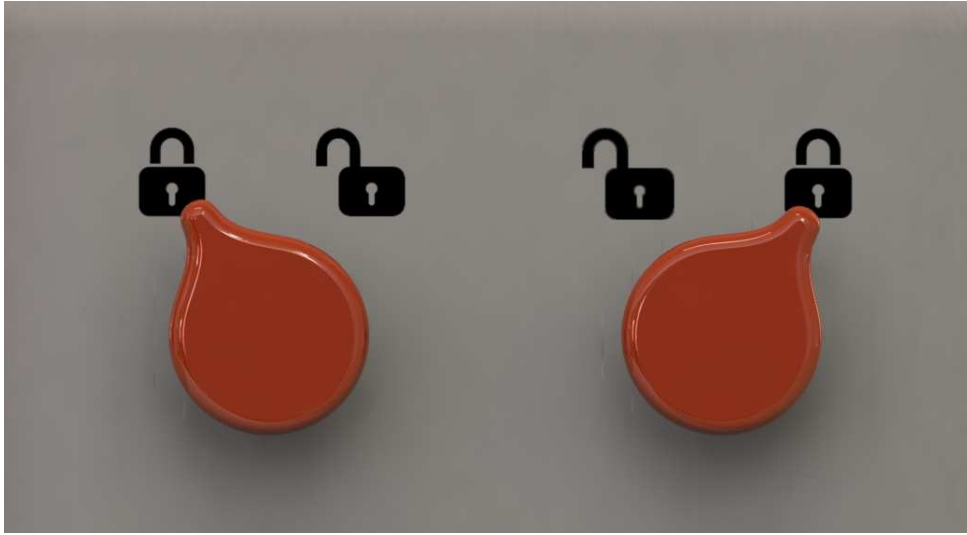
### *Le manopole*



*Figura 3.20: le manopole.*

Su un lato della *base* sono presenti due manopole, ognuna della quali ha due possibili posizioni. Verrà ora spiegato l'effetto della loro posizione sui movimenti del segmento uscente dalla base. Lo scopo di ciò sarà spiegato subito dopo.

Analizziamo le posizioni della manopola di sinistra: se è orientata verso l'interno il segmento uscente dalla *base* può muoversi (ad attrito) nel semipiano di sinistra in entrambi i versi. Se invece è orientata verso l'esterno, il segmento può muoversi entro un certo angolo in entrambi i versi, e oltre quell'angolo (che chiameremo *angolo limite*, misurato dalla direzione verticale) può solo scendere. Stessa cosa simmetrica nel semipiano di destra, in cui il tutto è gestito dalla manopola di destra.



*Figura 3.21: ingrandimento sulle manopole: sono stati usati, per identificare le due posizioni possibili di ogni manopola, i simboli di lucchetto aperto e chiuso.*

Se ad esempio entrambe le manopole sono nella posizione di *Figura 3.21*, si crea un cono di possibili posizioni (considerando anche la coppia rotoidale con asse perpendicolare al tavolo di appoggio della base), che chiameremo *cono di libertà* all'interno del quale il braccio può muoversi liberamente, mentre oltre quel cono il braccio può solo scendere. Per fare risalire il braccio una volta oltrepassato il *cono di libertà* devo girare la corrispondente manopola, e allora potrò trascinare il braccio anche nell'altro verso.

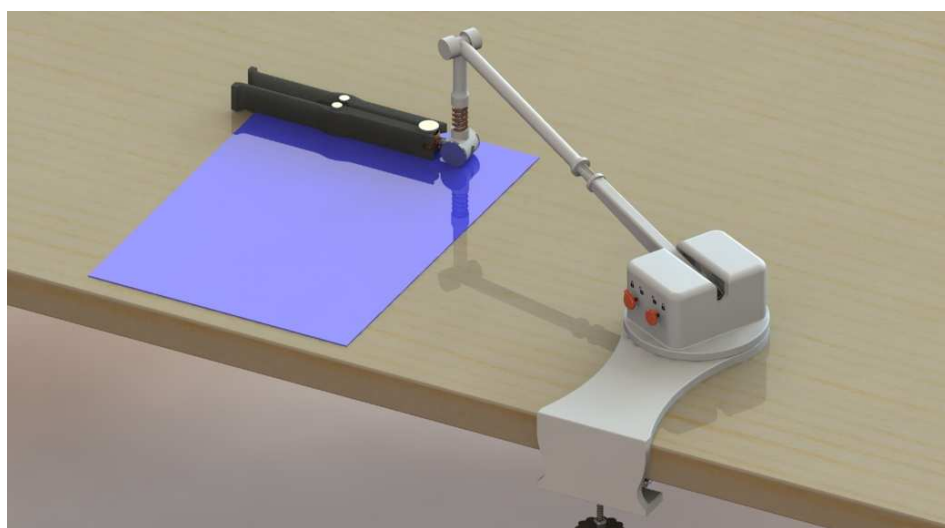
In poche parole il *cono di libertà* è quella parte di spazio in cui il braccio uscente dalla base si può muovere liberamente qualsiasi sia la posizione delle manopole.

### ***3.3.2 Bloccaggio di oggetti sul piano***

Abbiamo visto nelle specifiche come l'ausilio debba in alcuni casi poter esercitare una forza in grado di premere oggetti verso il basso, per mantenerli fissi ad esempio ad un tavolo. Questa mansione è svolta dall'azione congiunta del meccanismo descritto sopra e di una molla,



situata nella parte terminale del secondo segmento del *braccio*, prima della *pinza*. Infatti una volta che il braccio non può più tornare verso l'alto, una volta che si è giunti all'appoggio della *pinza* sul tavolo, ogni ulteriore movimento verso il basso del braccio farà comprimere la molla, che, non potendo fare tornare il braccio verso l'alto, preme verso il basso la *pinza* esercitando così una certa forza sull'oggetto dall'alto verso il basso. Sono possibili due modi in cui la *pinza* può premere un oggetto verso il basso:



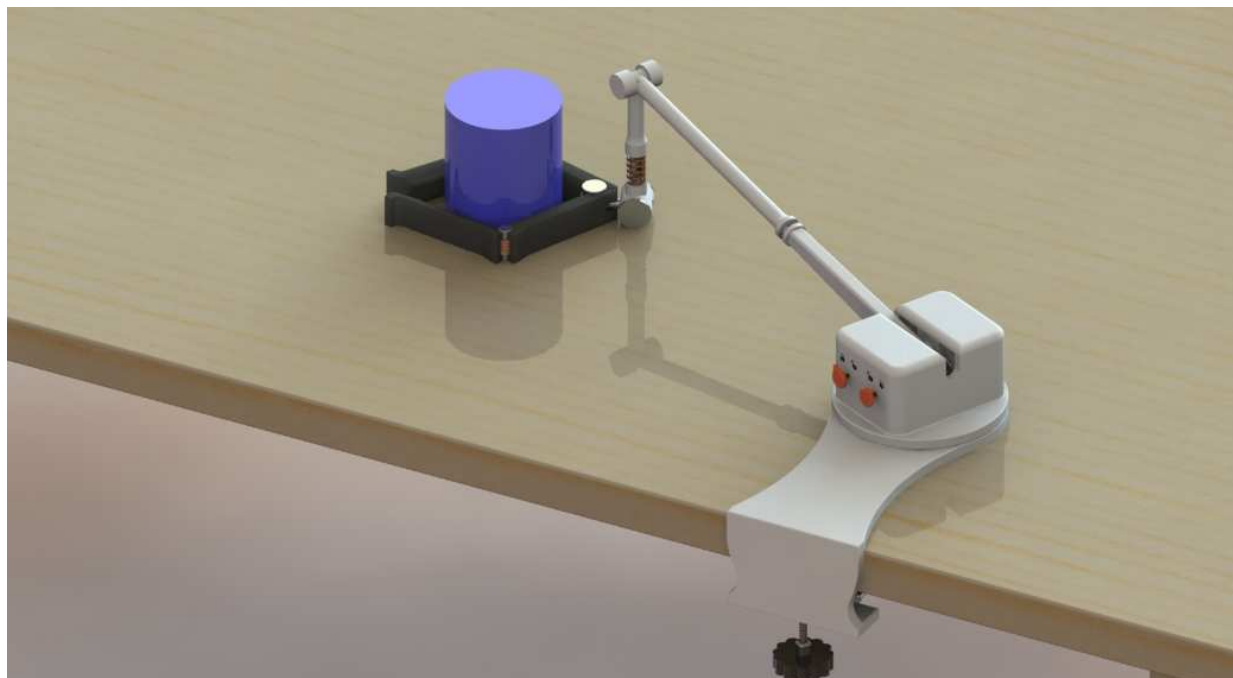
*Figura 3.22:*  
*esempio di*  
*bloccaggio*  
*oggetti sul piano*  
*(Modo A): la*  
*pinza si appoggia*  
*sull'oggetto con*  
*parte o tutta la*  
*superficie*  
*inferiore.*



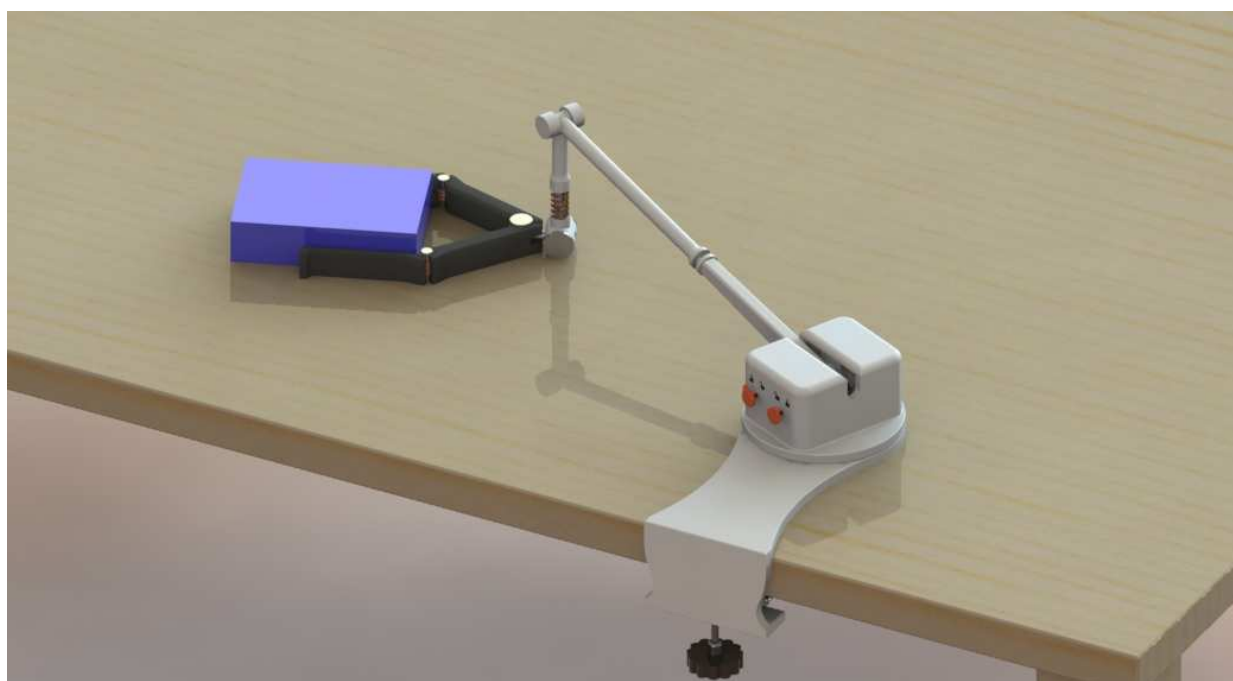
*Figura 3.23:*  
*esempio di*  
*bloccaggio*  
*oggetti sul piano*  
*(Modo B): la*  
*pinza si appoggia*  
*sull'oggetto con*  
*le due estremità*  
*terminali,*  
*permettendo di*

*applicare una forza in un preciso punto e in maniera più concentrata.*

Il principio di funzionamento spiegato in *Figura 3.22* può essere combinato con quella di presa di un oggetto, come illustrato nelle immagini di seguito.



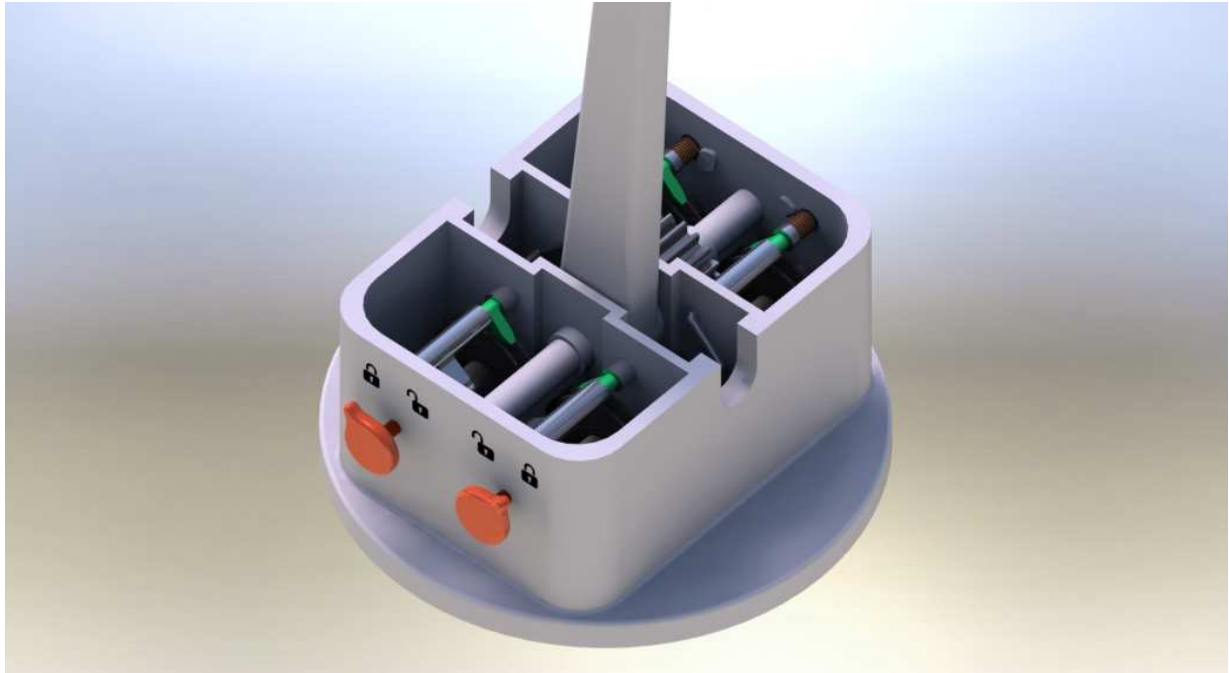
*Figura 3.24: presa di un oggetto cilindrico e azione di bloccaggio contro il tavolo*



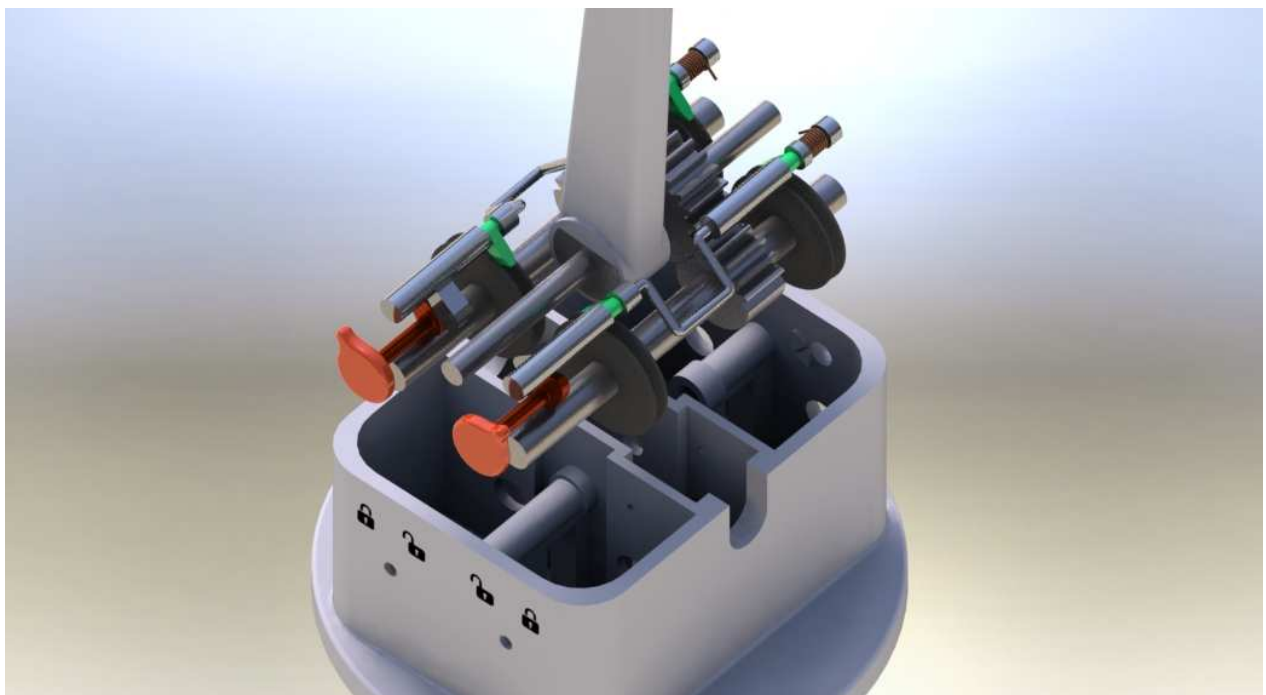
*Figura 3.25: presa di un parallelepipedo e azione di bloccaggio contro il tavolo*

### *3.3.3 Struttura interna del meccanismo*

In questa parte verrà illustrata la struttura del meccanismo interno alla *base* che permette il funzionamento del braccio spiegato sopra.

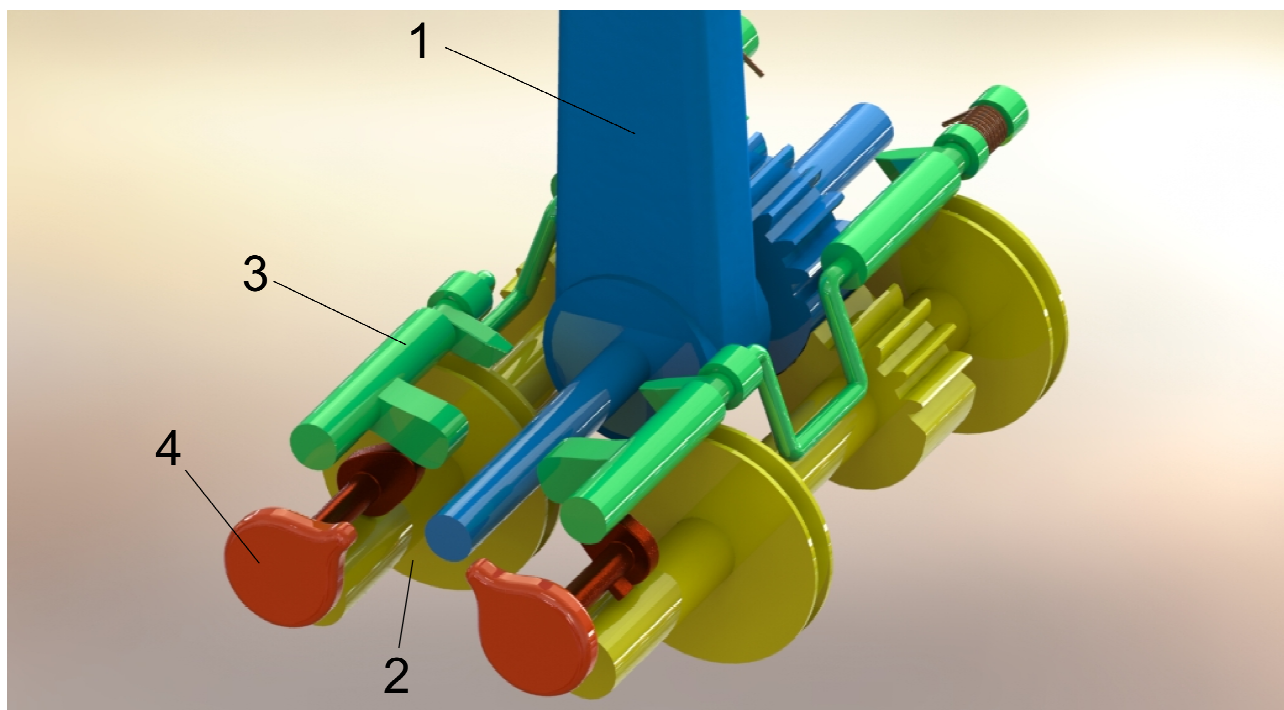


*Figura 3.26: base senza coperchio*



*Figura 3.27: interno della base esploso dal case*

Per maggiore chiarezza d'ora in avanti saranno colorati dello stesso colore tutti i membri uguali o che si muovono solidalmente.



*Figura 3.28: meccanismo con i vari membri messi in evidenza. Sono presenti, non considerando quelli simmetrici, 4 membri*

Il meccanismo è perfettamente simmetrico rispetto ad un asse centrale verticale, e così il funzionamento. Verrà spiegato il funzionamento della parte di sinistra, ipotizzando di muovere il braccio in quel semipiano.

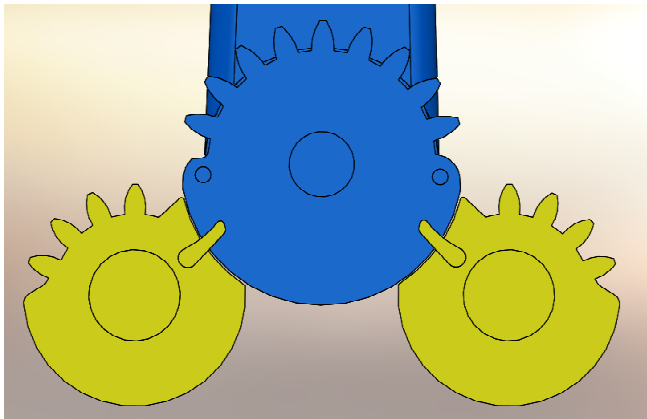
Descriviamo i vari membri considerando la *Figura 3.28*

**Membro 1** (blu): segmento uscente, collegato ad una ruota dentata.

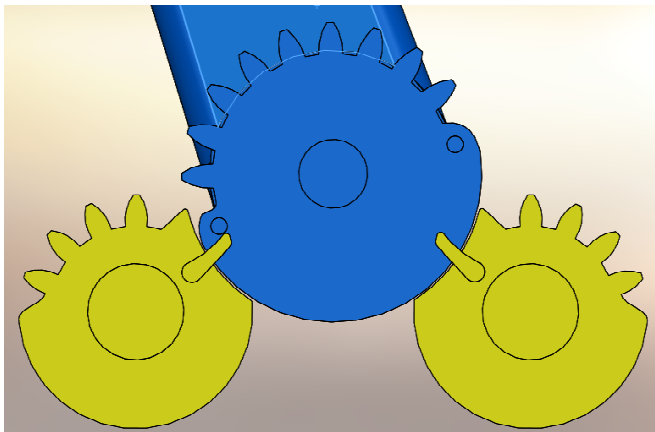
**Membro 2** (giallo): ruota dentata collegata a due dischi a gola trapezoidale, il cui tamburo striscia su due corrispettivi nottolini, appartenenti al **Membro 3** (verde).

**Membro 4** (arancio): è la manopola che viene girata dall'utente, alla sua estremità vi è una camma, in contatto con una parte del membro 3.

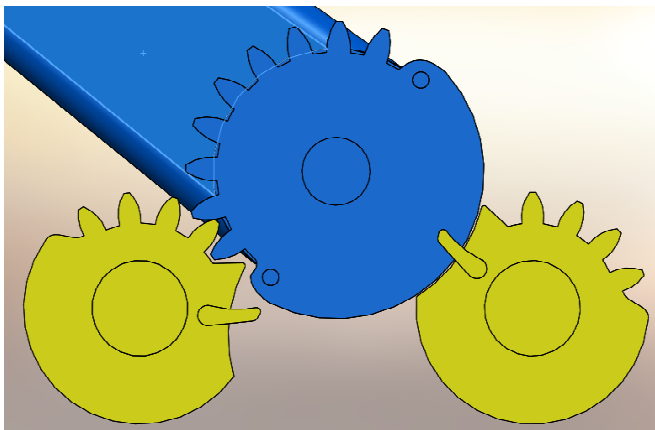
Analizziamo in primo luogo il meccanismo di ingranamento tra il *membro 1* (blu) e il *membro 2* (giallo). Il principio è quello delle ruote stellari: c'è ingranamento solo per certe posizioni relative delle due ruote, mentre quando non c'è ingranamento solo una tra le due ruote è in grado di ruotare, mentre all'altra non è permessa la rotazione.



*Figura 3.29: fino ad un certo angolo non c'è ingranamento tra le ruote dentate, e mentre la ruota blu ruota le ruote gialle sono mantenute fisse nella loro posizione grazie ad un certo profilo di contatto.*



*Figura 3.30: da un certo angolo si ha inizio dell'ingranamento. Un perno sulla ruota del membro 1 viene a contatto con una specifica parte della ruota del membro 2 che inizia così a ruotare, dopodiché inizia l'ingranamento vero e proprio*

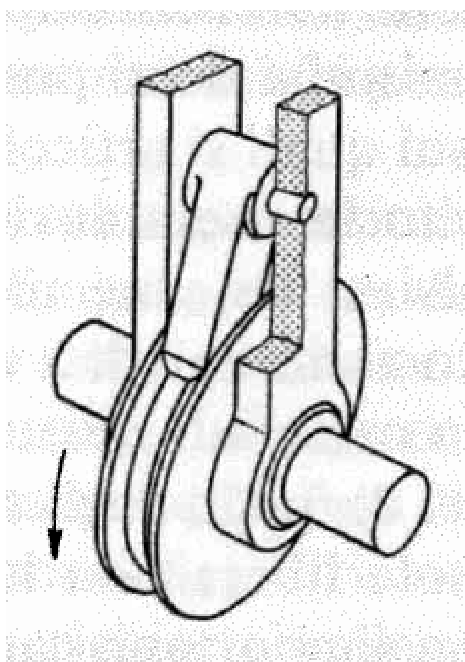


*Figura 3.31: ingranamento avvenuto*

Analizziamo ora il resto del meccanismo.

Ritornando alla *Figura 3.28*, tra i due dischi del *membro 2* (giallo) e i due rispettivi nottolini del *membro 3* (verde) avviene, se questi ultimi sono premuti sui dischi, un **arpionismo ad attrito**.

*Funzionamento generale di un arpionismo ad attrito:*

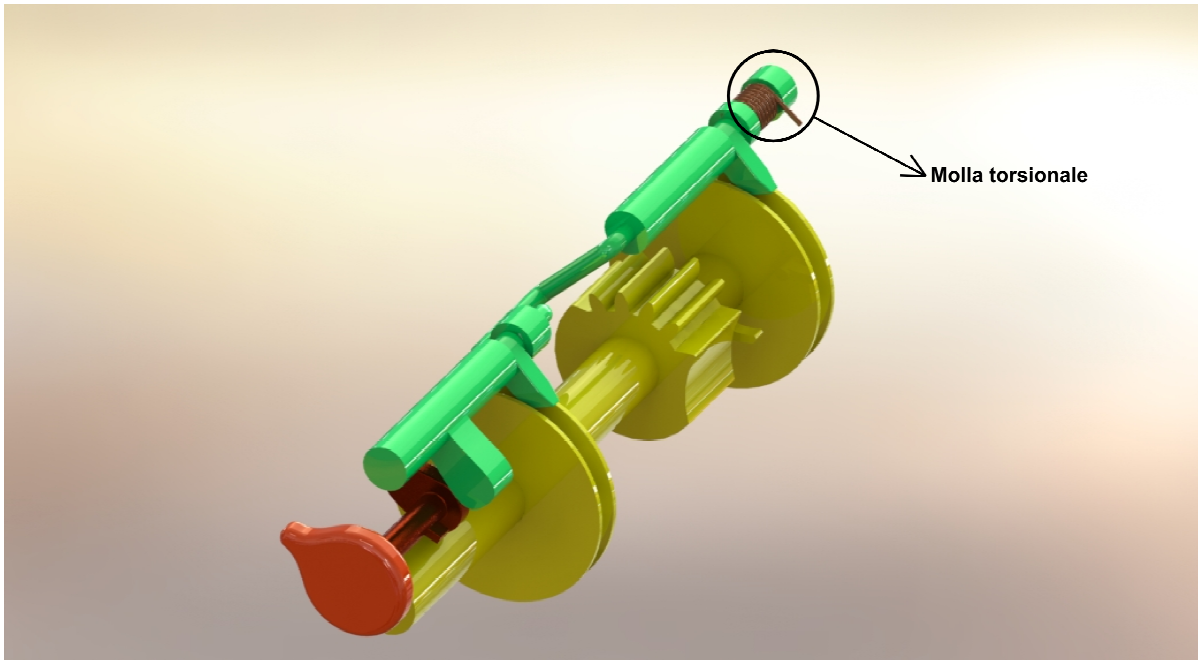


*Figura 3.32: arpionismo ad attrito con gola trapezoidale*

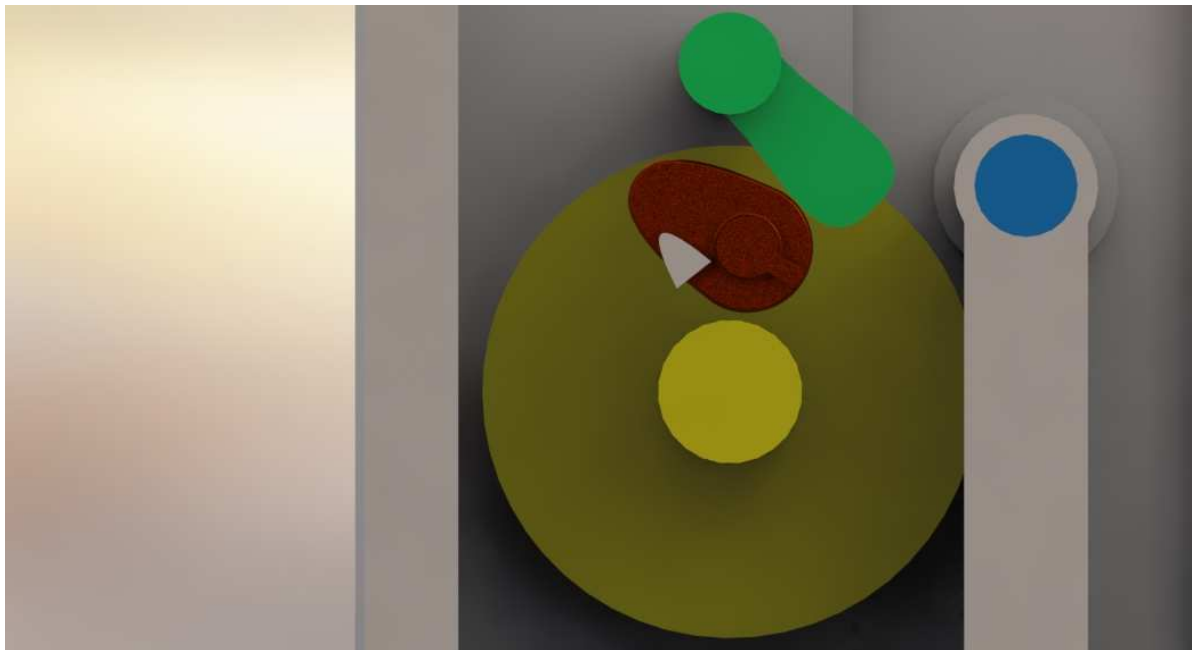
Un nottolino strisciante su un tamburo è disposto in modo da bloccarsi per attrito in un dato verso di rotazione ed esercitare invece azioni molto ridotte nel verso opposto. Per aumentare la coppia trasmessa è possibile sfruttare l'effetto cuneo, dotando la ruota di una gola trapezoidale.

Quindi, osservando la *Figura 3.28*, la rotazione del *membro 2* (giallo), se i nottolini sono premuti, è permessa solo in un verso, perché nel verso opposto il nottolino si impunta sul disco. Una molla torsionale esercita una forza che tende a spingere verso il basso i nottolini, e a premerli sui dischi. Se si gira il *membro 4* (arancio) verso sinistra però il nottolino si alza, e l'arpionismo viene interrotto (*Figure 3.35 e 3.36*).

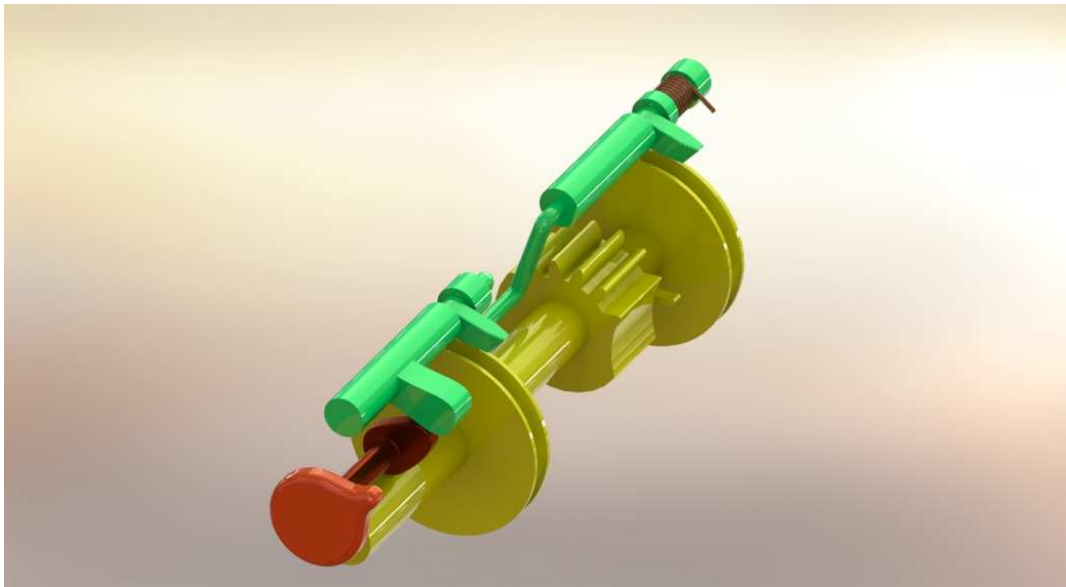




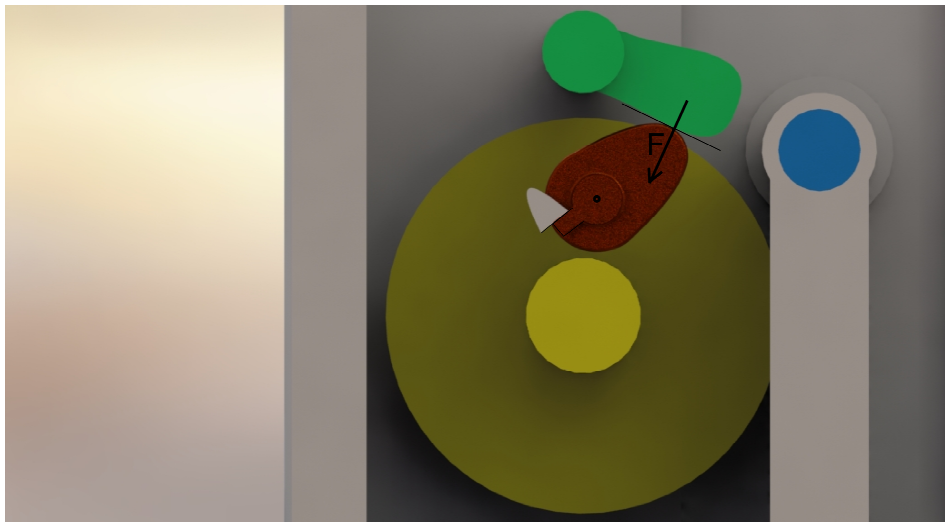
*Figura 3.33: arpionismo attivato. La camma è abbassata e i nottolini sono premuti sui dischi.*



*Figura 3.34: arpionismo attivato, vista in sezione del contatto tra la camma e profilo del membro 3.*



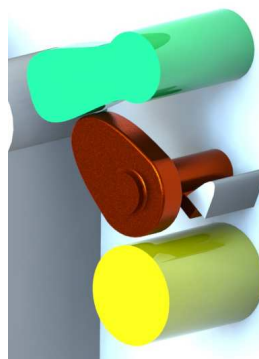
*Figura 3.35: arpionismo disattivato*



*Figura 3.36: arpionismo disattivato, vista in sezione del contatto tra la camma e profilo del membro 3.*



*Figura 3.37: la manopola, con la Camma all'estremità*



*Figura 3.38: retro della Figura 3.36*



Nella *Figura 3.36* si può notare come il profilo del *membro 3* (verde) eserciti una forza (dovuta all'azione della molla torsionale), che tenderebbe a fare ruotare ulteriormente la camma in senso orario.

Per evitare ciò è stato previsto nel *case* uno specifico appoggio di bloccaggio. Nella posizione di *Figura 3.36*, il tutto è perciò stabile, e i due nottolini del *membro 3* (verde) non sono in contatto con il tamburo dei dischi del *membro 2* (giallo), perciò l'arpionismo è disattivato.

Quindi ricapitolando: consideriamo la parte sinistra del meccanismo di *Figura 3.28*: se il braccio del *membro 1* (blu) si muove entro un certo angolo non c'è ingranamento tra la ruota dentata del *membro 1* (blu) e quella del *membro 2* (giallo), quindi in ogni caso il braccio si può muovere liberamente. Oltre il punto di ingranamento invece sono possibili due configurazioni:

- 1) Il *membro 4* (arancio) è in una posizione tale per cui la camma è abbassata e i nottolini strisciano sul tamburo, in questo caso il braccio continuando a muoversi verso il basso provoca una rotazione dei dischi il cui verso è unidirezionale
- 2) Il *membro 4* è in una posizione tale per cui la camma è alzata, e quindi i nottolini non strisciano sul tamburo dei dischi, che sono liberi di muoversi in entrambe le direzioni.

Nella *configurazione 1*, nel momento in cui voglio fare risalire il braccio, basta girare la manopola, in modo da passare alla *configurazione 2*.

Nel caso il braccio scenda verso destra, il tutto è gestito in maniera indipendente dalla manopola di destra, quindi sono possibili configurazioni dove, ad esempio, il braccio sia libero di muoversi completamente nel semipiano di destra ma sia bloccata la salita oltre un certo angolo in quello di sinistra.

Altre considerazioni facendo riferimento alla *Figura 3.28*: i dischi sono due per aumentare l'effetto dell'arpionismo, e equilibrare meglio le spinte in gioco. La forma particolare dell'asse del *membro 3* (verde), che subisce un cambiamento al centro, è dovuta al fatto che il braccio del *membro 1* (blu) non deve sbattere contro di esso nel momento in cui scende.

### ***Considerazioni sulla fattibilità costruttiva del meccanismo interno***

La struttura del meccanismo interno è meccanicamente semplice, e questo è un fatto positivo, tuttavia una problematica costruttiva e di costi può essere la realizzazione delle particolari ruote dentate descritte (*Figure 3.29, 3.30, 3.31*) non presenti in commercio e che richiedono perciò elevati costi di realizzazione, molto variabili anche in base al loro materiale, che va perciò scelto con cura. Altrimenti si può pensare a soluzioni diverse da questa, che utilizzino componenti standardizzati, con il rischio di risultare più complesse meccanicamente e perciò penalizzate sotto alcuni punti di vista. Bisogna anche valutare un corretto dimensionamento dei vari componenti presenti, e verificare che le loro dimensioni siano sufficientemente limitate, in modo che il tutto abbia un ingombro accettabile e non risulti scomodo.

### ***Considerazioni sul bloccaggio di oggetti nel piano***

Abbiamo descritto il legame tra funzionamento della *base* e del *braccio*, e come si inquadra nell'idea di bloccaggio di oggetti sul piano. Si può notare come ad una maggiore comodità di movimento del *braccio* da parte dell'utente (che corrisponde all'utilizzo di più coppie cinematiche), corrisponda una minore stabilità del braccio durante il bloccaggio. Si è quindi cercata una soluzione di compromesso. Per valutare in maniera

migliore l'effettiva efficacia di alcune delle varie soluzioni possibili, la realizzazione di un prototipo faciliterebbe di molto il compito.



# CAPITOLO 4

## CALCOLI

In questo capitolo verranno presentati i calcoli effettuati. Ci si è concentrati in modo particolare sulla *pinza*, e sulla determinazione dei suoi parametri in modo da soddisfare le specifiche di progetto. Lo scopo principale, oltre a fornire un modello matematico in grado di descrivere il suo comportamento in diverse situazioni tipiche, è stato quello di determinare un possibile valore delle costanti elastiche delle molle presenti

### 4.1 La pinza: procedimento generale di analisi

Come illustrato nella parte iniziale del precedente capitolo ( *Paragrafo 3.1.1*), la *pinza* è simmetrica e formata da tre molle torsionali, una a unire i due membri di *tipo 1* e due uguali a unire i membri di *tipo 1* con i rispettivi di *tipo 2*. Per semplicità i membri di *tipo 1* sono stati supposti di lunghezza uguale ai membri di *tipo 2*, e d'ora in avanti essa sarà indicata con  $\ell$ . Con  $k_1$  si è indicata la costante elastica della *molla 1* e con  $k_2$  quella della molla di *tipo 2* (vedi *Figura 3.3* del *Paragrafo 3.3.1*).

Nella prima parte di questo capitolo sono state analizzate tre configurazioni tipiche che deve poter assumere la *pinza*. Si può osservare come in assenza di forze attive esterne (come ad esempio la forza peso) il modo di configurarsi della *pinza* attorno ad un determinato oggetto non dipenda tanto dal valore in se delle costanti elastiche delle molle, bensì dal valore relativo di  $k_1$  rispetto a  $k_2$ . Per questo è stato introdotto il parametro  $\kappa = \frac{k_1}{k_2}$  e fatte considerazioni su di esso. L'analisi di queste tre

situazioni è stata fatta in assenza di attrito, in quanto le limitazioni su  $\kappa$  sarebbero risultate più restrittive ed il modello più cautelativo. L'attrito infatti in questi casi non ha un ruolo determinante: la sua presenza non fa che aumentare la stabilità del tutto e aggiungere ulteriori posizioni di equilibrio a quelle già esistenti nel caso senza attrito. Da questo studio, che potremmo definire sulla *ammissibilità delle configurazioni* si è scelto un valore del rapporto  $\kappa$ , considerato fissato poi nella seconda parte dei calcoli.

Nella seconda parte sono stati invece analizzati quei casi in cui l'attrito è **necessario** per l'equilibrio. Nei casi qui esaminati, ad esempio nei casi in cui la forza di attrito permette di bilanciare la forza peso (senza attrito l'oggetto scivolerebbe inevitabilmente fuori dalla *pinza*) è importante che almeno un tipo di molla (*molla 1* o *molla 2*) abbia una rigidezza sufficiente a sviluppare una determinata forza di attrito. In questo caso si sono fatte considerazioni non più sul rapporto  $\kappa$ , ma su  $k_2$  (si poteva scegliere indifferentemente anche  $k_1$ , una volta noto uno dei due e il rapporto  $\kappa$  si ricava immediatamente l'altro).

### *Procedimento generale:*

#### STUDIO SENZA ATTRITO

*limitazioni su  $\kappa$  derivanti da:*

- 1) Determinata configurazione della *pinza* non in presa
- 2) Presa di un oggetto cilindrico (senza peso)
- 3) Presa di un oggetto parallelepipedo (senza peso)

#### STUDIO CON ATTRITO

*limitazioni su  $k_2$  derivanti da:*

- 1) Forza di attrito contrapposta alla forza peso su un oggetto cilindrico con asse perpendicolare alla superficie su cui si apre la *pinza*.
- 2) Momento torcente trasmissibile su un oggetto cilindrico
- 3) Forza di attrito contrapposta alla forza peso su oggetto parallelepipedo

#### CASO PARTICOLARE

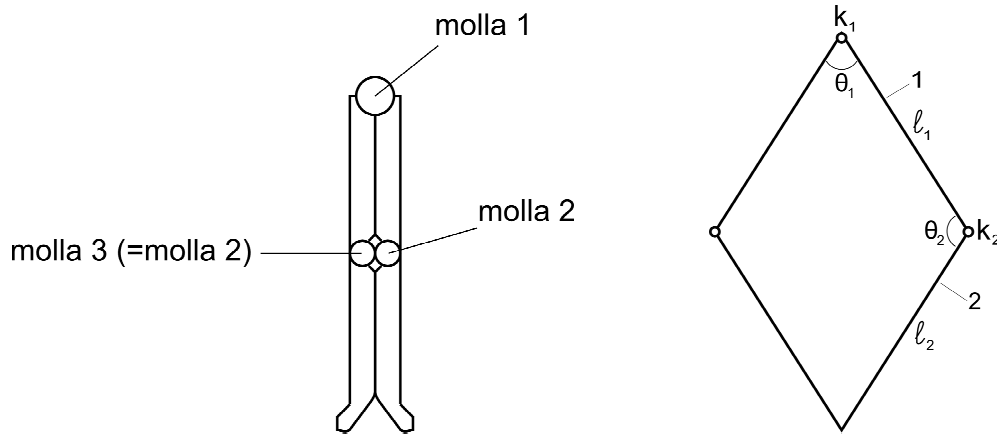
Studio in assenza di attrito della presa di un oggetto cilindrico su cui agisce sul piano su cui si apre la pinza, la forza peso. E' stato lasciato come ultimo caso e separato in quanto per affrontarlo ci si è basati su considerazioni e procedimenti visti in entrambi i casi precedenti.

Di seguito verranno analizzati tutti i casi sopra.

## 4.2 La pinza: studio senza attrito

### 4.2.1 Limitazione su $\kappa$ per configurazione non in presa

Senza oggetti in presa la *pinza* deve mantenersi in una determinata configurazione, la *configurazione I*, di *Figura 4.1*:



*Figura 4.1: configurazione I*      *Figura 4.2: configurazione generica*

Nella *Figura 4.2* è mostrata una configurazione generica della *pinza* non in presa. Essa è simmetrica, essendo simmetrica la geometria della *pinza* e uguali le costanti elastiche delle molle di *tipo 2*.

I momenti delle molle torsionali sono proporzionali agli angoli di apertura, per cui:

$$M_1 = k_1 (\theta_1 + \alpha_{p1}) \quad (2.1.1)$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 + \alpha_{p2}) \quad (2.1.2)$$



La (2.1.1) vale per la *molla 1*, mentre la (2.1.2) sia per la *molla 2* che per la *molla 3*, essendo entrambe uguali di *tipo 2*.

$\alpha_{p1}$  e  $\alpha_{p2}$  sono gli angoli di precarico rispettivamente della *molla 1* e della *molla 2* (uguale a quello della *molla 3*). Ipotizziamo che il contatto tra le due estremità finali dei membri di *tipo 2* avvenga sempre nel punto situato nell'estremità, anche nel caso limite in cui siano verticali (*configurazione I*). In quella situazione il contatto, considerando la *Figura 4.1*, non avviene più su un punto, bensì su una linea. Possiamo però fare riferimento ad una configurazione subito (infinitesimamente) prima di *I*, in cui il contatto avviene su un punto.

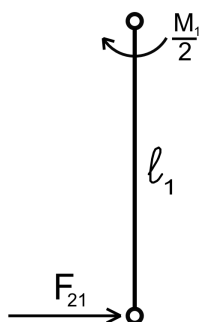
Nella *configurazione I*, quella cioè voluta,  $\theta_1$  vale 0 e  $\theta_2$  vale  $\pi$  (è il massimo angolo di apertura permesso, oltre il quale il *membro 2* non può fisicamente ruotare) perciò  $M_1$  è minimo e  $M_2$  è massimo. Se ci si allontana dalla configurazione *I*,  $M_1$  aumenta e  $M_2$  diminuisce, per cui se si imposta l'equilibrio della *configurazione I*, per ogni altra generica configurazione, l'azione delle molle riporta la *pinza* in *I*.

Impostiamo dunque l'equilibrio della configurazione *I* in cui:

$$\theta_1 = 0$$

$$\theta_2 = \pi$$

*Equilibrio del membro 1*



*Figura 4.3*

$$\frac{M_1}{2} = F_{21} \ell_1 \rightarrow F_{21} = \frac{M_1}{2\ell_1}$$

Equilibrio del membro 2

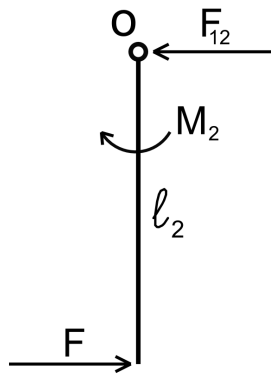


Figura 4.4

Imponendo che la sommatoria dei momenti rispetto al polo O sia nulla, e così la sommatoria delle forze si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum M_{i_o} = 0 &\rightarrow F l_2 = M_2 \\ \sum F_i = 0 &\rightarrow F = F_{12} \end{aligned}$$

Ora combiniamo opportunamente le informazioni ricavate dagli equilibri dei due membri:

$$\begin{cases} F l_2 = M_2 \\ F = \frac{M_1}{2l_1} \end{cases} \rightarrow \frac{M_2}{l_2} = \frac{M_1}{2l_1} \rightarrow M_1 = 2M_2 \frac{l_1}{l_2}$$

Per ogni  $M_1$  superiore la *pinza* è comunque in equilibrio nella *configurazione I*, per ragioni evidenti di simmetria. Per cui la condizione da verificarsi per avere la *configurazione I* è:

$$M_1 \geq 2M_2 \frac{l_1}{l_2}$$

Poiché  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \pi$ :

$$M_1 = k_1 (\theta_1 + \alpha_{p1}) = k_1 \alpha_{p1}$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 + \alpha_{p2}) = k_2 (\pi + \alpha_{p2})$$

da cui:

$$k_1 \alpha_{p1} \geq 2k_2 (\pi + \alpha_{p2}) \frac{l_1}{l_2}$$

E si può così ricavare la limitazione su  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} \geq \frac{2(\pi + \alpha_{p2})}{\alpha_{p1}} \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (2.1.3)$$

Se infine, come ipotizzato inizialmente,  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ , si ha:

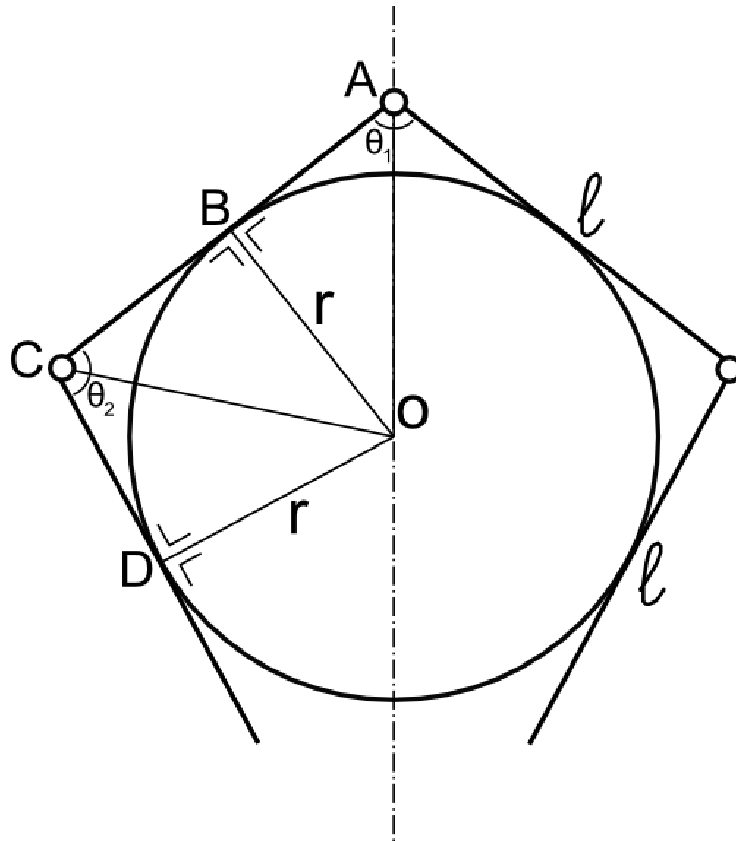
$$\kappa \geq \frac{2(\pi + \alpha_{p2})}{\alpha_{p1}} \quad (2.1.4)$$

Vediamo come la (2.1.4) dipenda dagli angoli di precarico. D'ora in avanti, nel corso del capitolo, considereremo gli angoli di precarico variabili nei seguenti intervalli, dettati da ragioni di realizzazione pratica:

$$\alpha_{p1} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \alpha_{p2} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$$

### 4.2.2 Limitazione su $\kappa$ per presa cilindro

Consideriamo il caso di 4 segmenti di uguale lunghezza  $\ell$  tangenti ad una circonferenza come mostrato in *Figura 4.5*. La figura è simmetrica rispetto ad un asse verticale, quindi per considerazioni geometriche, ci concentreremo sulla metà di sinistra.



*Figura 4.5*

Vogliamo ora ricavare  $\theta_2$  in funzione di  $\theta_1$ , che considereremo il nostro unico grado di libertà. Infatti, dato il raggio  $r$  della circonferenza e la lunghezza  $\ell$  dei membri, ogni possibile configurazione a 4 punti di tangenza è univocamente determinabile dato un certo valore di  $\theta_1$ .

Sistema ad 1 GdL:  $\theta_1$

$\triangle BCO \equiv \triangle CDO$  perché sono due triangoli rettangoli con ipotenusa in comune e un cateto uguale. Perciò  $\widehat{BCO} \equiv \widehat{OCD} = \frac{\theta_2}{2}$

Consideriamo il triangolo rettangolo  $\triangle ABO$ :

$$\overline{AB} = r \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}\right)$$

Consideriamo il triangolo rettangolo  $\triangle BCO$ :

$$\overline{BC} \cdot \tan\frac{\theta_2}{2} = r$$

Si ottiene un sistema:

$$\begin{cases} \overline{BC} = \ell - \overline{AB} = \ell - r \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}\right) \\ \overline{BC} \cdot \tan\frac{\theta_2}{2} = r \end{cases}$$

Da cui, dividendo la seconda equazione per la prima, si ottiene:

$$\tan\frac{\theta_2}{2} = \frac{r}{\ell - r \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}\right)} = \frac{r}{\ell - r \cot\frac{\theta_1}{2}} \rightarrow \theta_2 = 2 \arctan \frac{r}{\ell - r \cot\frac{\theta_1}{2}}$$

Introduciamo il parametro  $\lambda = \frac{\ell}{r}$ . Quindi in definitiva:

$$\theta_2 = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot\frac{\theta_1}{2}} \tag{2.2.1}$$

## *Considerazioni sul parametro $\lambda$*

Il parametro  $\lambda = \frac{\ell}{r}$  è rappresentativo delle dimensioni relative dei segmenti della *pinza* rispetto all'oggetto di raggio  $r$ .

In linea teorica esso varia tra 0 e  $\infty$ . Se  $\lambda \rightarrow 0$ , ovvero le dimensioni dell'oggetto sono infinitamente grandi rispetto ad  $\ell$ , la condizione di tangenza a 4 punti può comunque essere mantenuta.

Man mano che  $\lambda$  cresce, si arriverà ad un punto in cui la *pinza* sarà in grado di *accerchiare completamente* l'oggetto. La condizione di *accerchiamento completo* è quella in cui gli estremi dei segmenti inferiori vengono a toccarsi (il disegno di *figura 2.1* diventa un rombo circoscritto ad una circonferenza).

Il valore limite di  $\lambda$  per il quale ciò diventa possibile è  $\lambda = 2$  cioè per  $\ell = 2r$ . Nel caso avvenga, la configurazione limite è quella di un quadrato circoscritto ad una circonferenza.  $\lambda \geq 2$  è una condizione *necessaria ma non sufficiente* per l'*accerchiamento completo*: infatti l'oggetto è in equilibrio nella posizione di *accerchiamento completo* solo per determinati valori delle costanti elastiche delle molle, o meglio del rapporto  $\kappa$  come del resto per ogni posizione di equilibrio della *figura 2.1*. Ad esempio supponiamo che la costante elastica  $k_1$  della *molla 1* sia molto maggiore di quella della *molla 2*, l'oggetto tenderà a sgusciare via fuori dalla *pinza*, anche con  $\lambda \geq 2$ .

In generale si possono distinguere dunque due casi:

- 1)  $\lambda < 2$  Possibile solo l'*accerchiamento parziale*
- 2)  $\lambda \geq 2$  Possibile sia l'*accerchiamento parziale* (possibile in ogni caso per determinati valori di  $\kappa$ , che quello *completo*).

Sarà in generale trattato il primo caso, infatti la presa di oggetti di raggio più grande rispetto alle dimensioni della *pinza* è più difficoltosa, vista la maggiore tendenza che ha l'oggetto a “sgusciare fuori” da essa.

## Condizioni di compatibilità coi vincoli

Analizziamo ora le **condizioni di compatibilità**, ovvero l'intervallo di valori di  $\theta_1$  per cui è possibile avere una configurazione del tipo mostrato in *figura 4.5*, ovvero a 4 punti di tangenza.

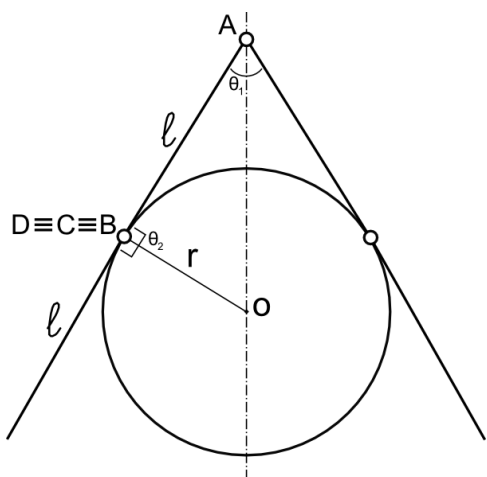


Figura 4.6

Configurazione di  $\theta_1$  minimo :

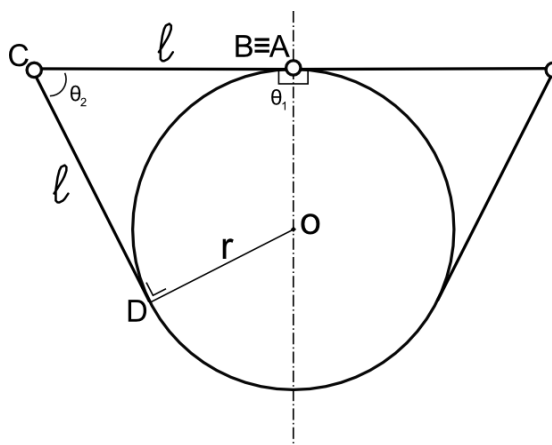


Figura 4.7

Configurazione di  $\theta_1$  massimo

Nella configurazione limite della *Figura 4.6* si hanno due punti di tangenza, ognuno doppio. Si nota subito che  $\theta_2 = \pi$ .

Per quanto riguarda  $\theta_1$  dalla figura si può scrivere:

$$l \tan \frac{\theta_1}{2} = r \quad \text{Da cui:} \quad \theta_1 = 2 \arctan \left( \frac{1}{\lambda} \right)$$

Nella configurazione limite della *Figura 4.7* si hanno 3 punti di tangenza, di cui uno doppio in  $A$ . Si vede subito che  $\theta_1 = \pi$

$$\theta_2 = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\pi}{2}} = 2 \arctan \frac{1}{\lambda}$$

In definitiva, le condizioni di compatibilità risultano:

$$2 \arctan\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \theta_1 \leq \pi \quad (2.2.2)$$

### Ulteriore condizione

Un'ulteriore condizione, *necessaria ma non sufficiente* per l'equilibrio, è la seguente:  $\psi < \frac{\pi}{2}$

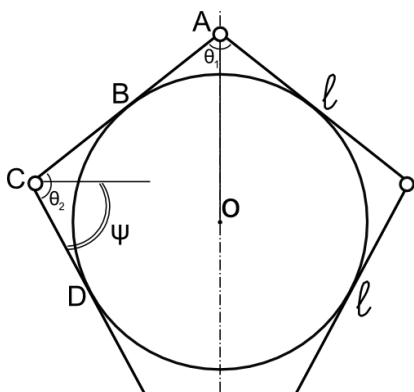


Figura 4.8:  $\psi < \frac{\pi}{2}$

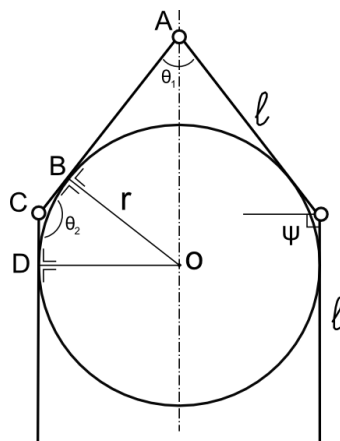


Figura 4.9: Configurazione limite, in cui  $\psi = \frac{\pi}{2}$

Per  $\psi$  maggiori, considerando il lato di sinistra (a destra la situazione è simmetrica) la forza applicata nel punto di tangenza  $D$  diventa di verso concorde a quella applicata in  $B$ . In assenza di attrito, a meno che le due forze non siano nulle (significherebbe assenza di molle) non ci può essere equilibrio.

La condizione  $\psi < \frac{\pi}{2}$  si traduce in:

$$\psi = \theta_2 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}\right) = \theta_2 - \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_1}{2} < \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta_2 + \frac{\theta_1}{2} < \pi$$



Ricordando la (2.2.1), cioè che:

$$\theta_2 = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} \quad (2.2.1)$$

Si ha:

$$2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + \frac{\theta_1}{2} < \pi \quad (2.2.3)$$

La (2.2.3) è una disequazione in  $\theta_1$  parametrica risolvibile in forma chiusa, la cui risoluzione è riportata in appendice a fine tesi.

Il suo risultato è:

$$0 < \theta_1 < 2 \arctan \frac{1}{\lambda} \quad \text{per} \quad \lambda \leq 1$$

$$\theta_1 < 2 \arctan \frac{1}{\lambda} \vee 4 \arctan \left( \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) < \theta_1 < 4 \arctan \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \quad \text{per} \quad \lambda > 1$$

Considerando le **condizioni di compatibilità**, necessarie per avere quattro punti di tangenza precedentemente trovate nella (2.2.2):

$$2 \arctan \left( \frac{1}{\lambda} \right) \leq \theta_1 \leq \pi \quad (2.2.2)$$

Si vede che per  $\lambda \leq 1$  non c'è intersezione tra le condizioni, infatti non esistono configurazioni a 4 punti di tangenza in cui  $\Psi < \frac{\pi}{2}$  se  $\lambda \leq 1$  cioè se  $\ell \leq r$ .

Questo porta a fare la seguente considerazione: affinché la *pinza* blocchi un oggetto di raggio  $r$  (in assenza di attrito), una condizione *necessaria ma non sufficiente* è che  $\lambda > 1$ .

Quindi d'ora in avanti non considereremo più  $\lambda > 0$  ma  $\lambda > 1$ .

Se  $\lambda > 1$  c'è intersezione tra le condizioni su  $\theta_1$ . Dobbiamo valutare quale è più grande tra  $\pi$  e  $4\arctan\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)$ .

Poniamo  $4\arctan\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) > \pi$  e sviluppiamo:

$$\arctan\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) > \frac{\pi}{4}$$

Applicando la tangente ad entrambi i membri:

$$\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) > 1 \rightarrow \sqrt{\lambda^2 - 1} > 1 - \lambda$$

Per  $\lambda > 1$  il primo termine è sempre positivo, mentre il secondo sempre negativo, quindi la disequazione è sempre verificata.

Quindi:

$$4\arctan\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) > \pi \quad \forall \lambda > 1$$

Di conseguenza l'intersezione delle condizioni risulta:

$$4\arctan\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) < \theta_1 < \pi$$

Si può dimostrare che:  $2\arctan\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) = \arctan\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$

Quindi l'intervallo si può anche scrivere come

$$2 \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} < \theta_1 < \pi \quad (2.2.4)$$

### *Posizioni di equilibrio*

In questa parte cercheremo eventuali posizioni di equilibrio della configurazione mostrata in *figura 4.5*.

Per prima cosa valuteremo l'espressione dell'energia totale elastica  $E$  del sistema. Poi deriveremo e porremo la derivata uguale a zero, per trovare eventuali posizioni di equilibrio. Se esistono, dovremo poi verificare che siano posizioni di *equilibrio stabile*.

L'energia elastica della *molla 1* e della *molla 2* vale rispettivamente:

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 (\theta_1 + \alpha_{p1})^2 \quad (2.2.5)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 + \alpha_{p2})^2 \quad (2.2.6)$$

Da cui l'energia totale, considerando che nel sistema è presente un molla di *tipo 1* e due molle di *tipo 2*:

$$E = E_1 + 2E_2 = \frac{1}{2} k_1 (\theta_1 + \alpha_{p1})^2 + k_2 (\theta_2 + \alpha_{p2})^2$$

Ricordando la (2.2.1) cioè che:

$$\theta_2 = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}}$$

Si ottiene

$$E = E(\theta_1) = \frac{1}{2}k_1(\theta_1 + \alpha_{p1})^2 + k_2 \left( 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + \alpha_{p2} \right)^2 \quad (2.2.7)$$

Prima di derivare ricordiamo che:

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dE}{d\theta_1} = k_1(\theta_1 + \alpha_{p1}) + 2k_2 \left( 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + \alpha_{p2} \right) \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{\left(\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}\right)^2}} \cdot \frac{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}}}{\left(\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= k_1(\theta_1 + \alpha_{p1}) - k_2 \left( 4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + 2\alpha_{p2} \right) \cdot \frac{1}{\left[ \left(\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}\right)^2 + 1 \right] \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} =$$

$$= k_1(\theta_1 + \alpha_{p1}) - k_2 \left( 4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + 2\alpha_{p2} \right) \cdot \frac{1}{\left[ \lambda^2 - 2\lambda \cot \frac{\theta_1}{2} + \cot^2 \frac{\theta_1}{2} + 1 \right] \sin^2 \frac{\theta_1}{2}} =$$

$$= k_1(\theta_1 + \alpha_{p1}) - k_2 \left( 4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + 2\alpha_{p2} \right) \cdot \frac{1}{\left[ \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} - 2\lambda \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_1}{2} + \cos^2 \frac{\theta_1}{2} + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right]} =$$

$$= k_1(\theta_1 + \alpha_{p1}) - k_2 \left( 4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + 2\alpha_{p2} \right) \cdot \frac{1}{\left[ \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} - \lambda \sin \theta_1 + 1 \right]}$$

Ora poniamo  $\frac{dE}{d\theta_1} = 0$  per trovare le posizioni di equilibrio.

$$\frac{dE}{d\theta_1} = k_1(\theta_1 + \alpha_{p1}) - k_2 \left( 4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + 2\alpha_{p2} \right) \cdot \frac{1}{\left[ \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} - \lambda \sin \theta_1 + 1 \right]} = 0$$

Da cui possiamo ricavare il rapporto  $\kappa = \frac{k_1}{k_2}$

$$\kappa = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_{1eq}}{2}} + 2\alpha_{p2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \left( \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2} - \lambda \sin \theta_{1eq} + 1 \right)} \quad (2.2.8)$$

Con le condizioni:

$$1) \ 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} < \theta_1 < \pi \quad (2.2.4)$$

$$2) \ 1 < \lambda < 2$$

$$3) \ \alpha_{p1} \in \left( 0, \frac{\pi}{4} \right]$$

$$4) \ \alpha_{p2} \in \left[ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Vogliamo ora verificare che le posizioni di equilibrio al variare di  $\kappa$  siano di *equilibrio stabile*, per fare questo procediamo in questo modo: fissiamo dei valori di  $\lambda$ ,  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{p2}$  interni ai rispettivi intervalli, prendiamo un valore di  $\theta_{1eq}$  interno all'intervallo della (2.2.4) e troviamo dalla (2.2.8) il valore di  $\kappa$

corrispondente. Dopodiché scegliamo un valore di  $k_1$  o  $k_2$ , (scelto uno dei due noto  $\kappa$  trovo l'altro). Ora abbiamo tutti i termini da sostituire nella (2.2.7). Tracciamo ora un grafico della (2.2.7), funzione di  $\theta_1$  e vediamo graficamente se ha un minimo per  $\theta_1 = \theta_{1eq}$ . Se ha un minimo, e non un massimo o un flesso orizzontale (casi in cui si può annullare la derivata prima) allora la posizione è di *equilibrio stabile*. Poi si ripete il procedimento per vari valori dei parametri e di  $\theta_{1eq}$ . E' stata creata una funzione in Matlab che, presi in ingresso i valori di  $\lambda$ ,  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{p2}$ ,  $\theta_{1eq}$ ,  $k_2$ , traccia un grafico dell'energia totale in funzione di  $\theta_1$ . Si può verificare graficamente che la funzione energia totale E ha un minimo per l'angolo di equilibrio immesso.

Ecco riportata la funzione *VerificaMinimi* creata:

```
function [] = VerificaMinimi(lambda,alfa1,alfa2,tetaleq,k2)
I=2*atan(1/(lambda^2-1)^(1/2));
    if ((tetaleq<I) || (tetaleq>pi))
        fprintf('Tetal di equilibrio deve essere compreso tra %.3f e
pigreco\n',I);
    else
        tetal=I:0.01:pi;
        K=Keq(tetaleq,lambda,alfa1,alfa2);
        k1=k2*K;
        E=Energia(tetal,k1,k2,alfa1,alfa2,lambda);
        plot(tetal,E,'g','Linewidth',1.5);
        xlabel('\thetal');
        ylabel('E');
    end
end
```

Dove al suo interno essa richiama la funzione *Energia*:

```
function [E] = Energia(tetal,k1,k2,alfa1,alfa2,lambda)
E=1/2*k1*(tetal+alfa1).^2+k2*(2*atan(1./(lambda-cot(tetal./2)))+alfa2).^2;
end
```

Ad esempio, digitando da riga di comando:

```
VerificaMinimi(1.8,pi/4,0,2,0.4)
```

Si ottiene il grafico di *Figura 4.10*

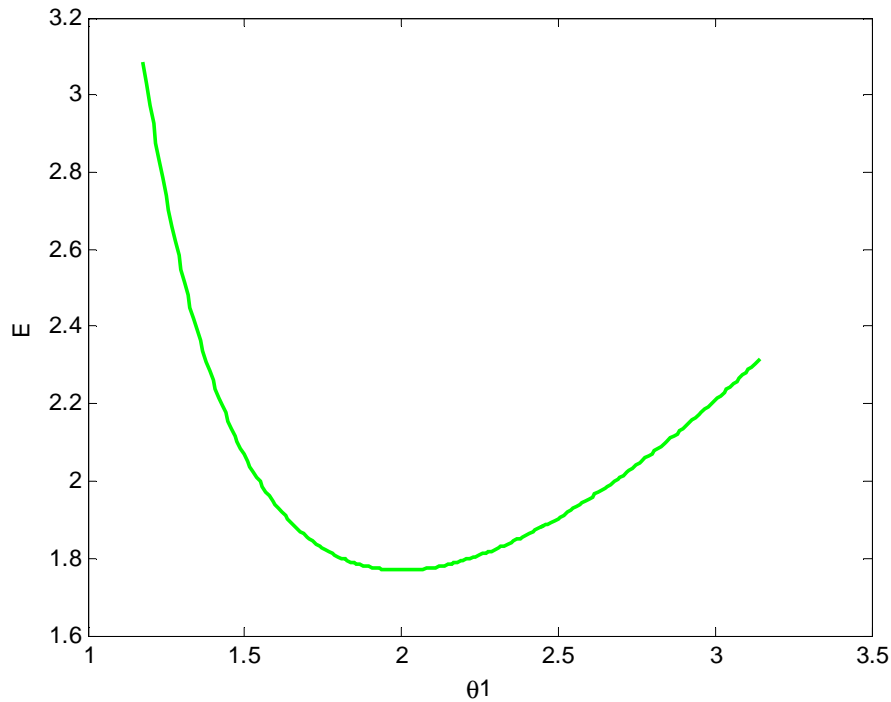


Figura 4.10

Si può vedere dalla *Figura 4.10* come la curva abbia un minimo per  $\theta_{1eq} = 2$ , quello che si era immesso nella funzione *VerificaMinimi*.

### *Determinazione dell'intervallo di $\kappa$*

L'angolo  $\theta_{1eq}$  è  $\theta_1$  di equilibrio: ad ogni  $\theta_{1eq}$  corrisponde, secondo la formula (2.2.8), un certo valore di  $\kappa$ .

Il nostro scopo è limitare i valori di  $\kappa$ . Per fare questo facciamo variare  $\theta_{1eq}$  su tutto il suo dominio, ovvero sull'intervallo (2.2.4). Dalla funzione (2.2.8), del tipo  $\kappa = \kappa(\theta_{1eq})$ , possiamo ricavare anche il corrispondente intervallo di variazione di  $\kappa$ , codominio della funzione.

Per valutare il codominio partiamo facendo delle considerazioni grafiche: disegniamo con Matlab nell'intervallo (2.2.4) una serie di curve  $\kappa = \kappa(\theta_{1eq})$  per alcuni valori dei vari parametri  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{p2}$ ,  $\lambda$  appartenenti ai rispettivi intervalli.

Per fare ciò è stato creato uno specifico script, lo script *VerificaMonotoniaK* dove vengono variati i diversi parametri in cicli annidati, e per ogni ciclo viene disegnato il grafico  $\kappa = \kappa(\theta_{1eq})$ .

```

for lambda=1.01:0.25:1.98
  for alfa1=0:0.5:pi/4
    for alfa2=-pi/4:0.5:pi/4
      A=2*atan((1/(lambda^2-1)).^(1/2));
      B=4;
      x=A:0.01:B;
      K=(4*atan(1./(lambda-
cot(x/2)))+2*alfa2)./((x+alfa1).*((lambda^2)*(sin(x/2)).^2-lambda.*sin(x)+1));
      plot(x,K,'b','Linewidth',1.2);
      xlabel('\theta');
      ylabel('\kappa');
      hold on;
    end
  end
end
end

```

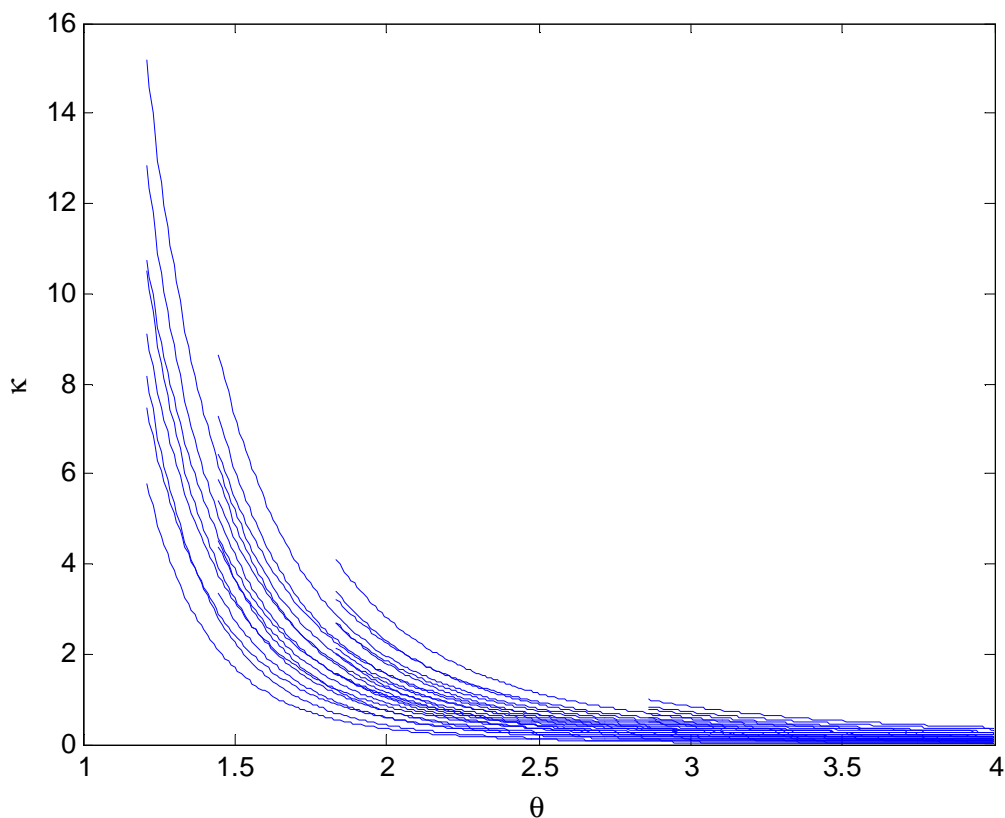


Figura 4.11: risultato dello script *VerificaMonotoniaK*

Si può notare come le curve siano tutte monotone decrescenti. Di conseguenza, i valori limite entro i quali è compreso  $\kappa$  sono quelli corrispondenti alla funzione calcolata negli estremi dell'intervallo di  $\theta$ .



Calcoliamo dunque  $\kappa$  negli estremi dell'intervallo (2.2.4).

$$\kappa_{\max} = \kappa \Big|_{\theta_1 = 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}} = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right)} + 2\alpha_{p_2}}{\left( 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \alpha_{p_1} \right) \left[ \lambda^2 \sin^2 \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) - 2\lambda \sin \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) \cos \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) + 1 \right]}$$

Procediamo a semplificare l'espressione, considerando che:

$$\cot \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) = \frac{1}{\tan \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}} = \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

Si può inoltre dimostrare che:

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Se } x = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \rightarrow \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

$$\rightarrow \sin \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\rightarrow \cos \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda}$$

Per cui:

$$\begin{aligned} \kappa_{\max} &= \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}} + 2\alpha_{p_2}}{\left(2 \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \alpha_{p_1}\right) \left[1 - 2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda} + 1\right]} = \frac{2 \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_2}}{\left(2 \arctan \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} + \alpha_{p_1}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda}\right)} = \\ &= \lambda \frac{2 \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_2}}{\left[4 \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_1}\right] (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})} = \lambda (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \frac{2 \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_2}}{4 \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_1}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\kappa_{\max} = \lambda (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \frac{2 \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_2}}{4 \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_1}} \quad (2.2.9)$$

$$\kappa_{\min} = \kappa_{|\theta_1 = \pi} = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\pi}{2}} + 2\alpha_{p_2}}{(\pi + \alpha_{p_1}) \left(\lambda^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} - \lambda \sin \pi + 1\right)} = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda} + 2\alpha_{p_2}}{(\pi + \alpha_{p_1}) (\lambda^2 + 1)} \quad (2.2.10)$$

In definitiva:

$$\kappa_{\min} < \kappa < \kappa_{\max}$$

$$\frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda} + 2\alpha_{p_2}}{(\pi + \alpha_{p_1}) (\lambda^2 + 1)} < \kappa < \lambda (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \frac{2 \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_2}}{4 \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p_1}} \quad (2.2.11)$$

Consideriamo la funzione (2.2.10):

$$\kappa_{\min} = \kappa_{\min}(\lambda)$$

Si può notare che al crescere di  $\lambda$  nell'intervallo  $1 < \lambda < 2$  il denominatore della funzione cresce, mentre il numeratore cala, dunque  $\kappa_{\min}$  decresce.

Consideriamo la funzione (2.2.9)

$$\kappa_{\max} = \kappa_{\max}(\lambda)$$

E' stata creata una funzione in Matlab, la funzione *Kmax*, che, presi in ingresso i valori degli angoli di precarico, traccia la funzione  $\kappa_{\max}(\lambda)$  nell'intervallo  $1 < \lambda < 2$ .

*Codice Matlab di Kmax*

```
function [] = Kmax(alfa1,alfa2)
lambda=1:0.01:2;
Kmax=lambda.*(lambda+sqrt(lambda.^2-1)).*(2*atan(lambda+sqrt(lambda.^2-1))+alfa1)./(4*atan(lambda-sqrt(lambda.^2-1))+alfa2);
plot(lambda,Kmax,'g','Linewidth',1.5);
xlabel('\lambda');
ylabel('\kappamax');
end
```

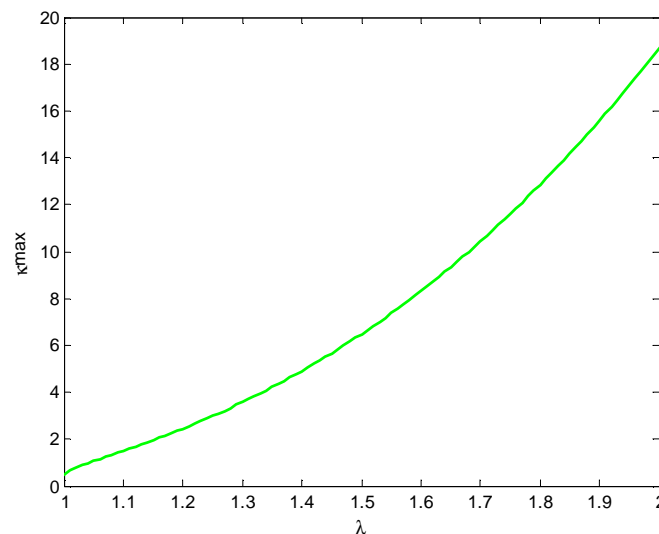


Figura 4.12: grafico di *Kmax* valutato con gli angoli di precarico nulli

Si può vedere in *Figura 4.12* come  $\kappa_{\max}$  aumenti all'aumentare di  $\lambda$ .

In definitiva in questo paragrafo si è determinato l'intervallo (2.2.11), funzione di  $\lambda$  e degli angoli di precarico, in cui deve essere compreso  $\kappa$  per fare sì che avvenga la presa di un oggetto cilindrico. Si è inoltre fatto vedere come questo intervallo si amplia in entrambi i versi all'aumentare di  $\lambda$ .

### ***Riassunto del procedimento***

**1-** Si è trovati una serie di limitazioni sull'unico grado di libertà del meccanismo:  $\theta_1$ , arrivando all'intervallo (2.2.4), in cui deve essere compreso.

Le limitazioni sono derivate da:

- condizioni di compatibilità coi vincoli (4 punti di tangenza) (2.2.2)
- ulteriore condizione, *necessaria ma non sufficiente* per l'equilibrio della presa (2.2.3)

**2-** Si è impostato un calcolo, che fornisse l'angolo di equilibrio (verificato stabile)  $\theta_{1eq}$ , in funzione dei vari parametri tra cui anche il parametro  $\kappa$ , arrivando così ad una relazione tra  $\theta_{1eq}$  e  $\kappa$  del tipo  $\kappa = \kappa(\theta_{1eq})$  (2.2.8)

**3-** Dalla relazione trovata nel *Punto 2*, facendo poi variare gli angoli di equilibrio su tutto l'intervallo trovato nel *Punto 1*, si è trovato il corrispondente intervallo (2.2.11) di variazione di  $\kappa$ , funzione di  $\lambda$  e degli angoli di precarico.

**4-** Si è fatto vedere come questo intervallo si ampliasse all'aumentare di  $\lambda$ .

### 4.2.3 Limitazione su $\kappa$ per presa parallelepipedo

In questo paragrafo vogliamo trovare un intervallo di  $\kappa$  ottimale per la presa di un oggetto parallelepipedo.

Vogliamo fare in modo che nella presa di un oggetto di larghezza  $b$  (lato che si infila nella *pinza*), i membri di *tipo 2* si configurino in modo parallelo, dopo aver infilato l'oggetto fino ad una distanza  $a$  dal fulcro, come mostrato nelle *Figure 4.13 e 4.14*.

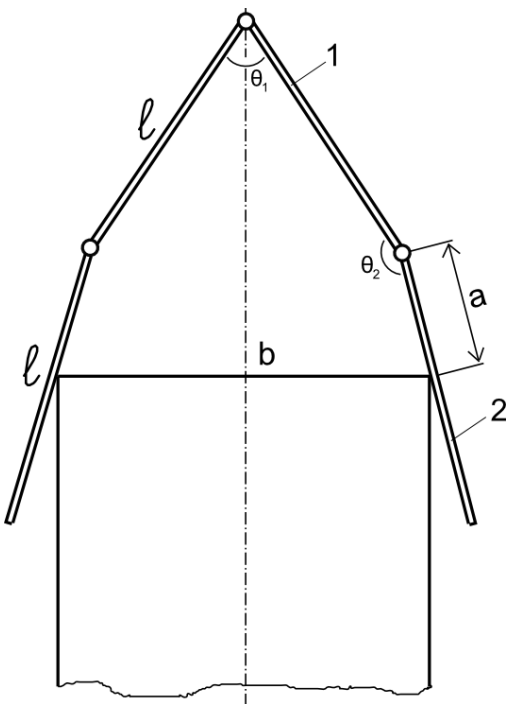


Figura 4.13

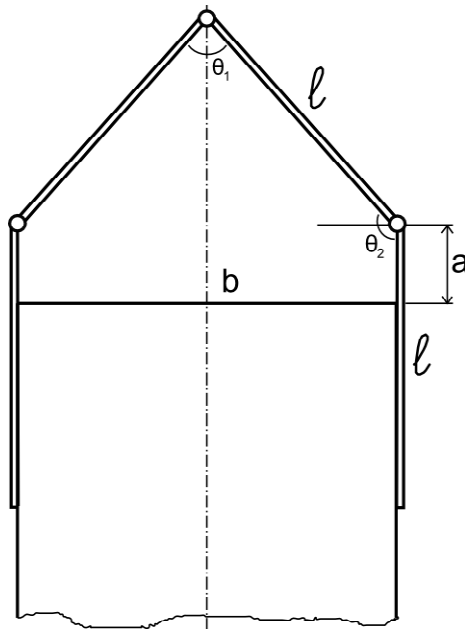


Figura 4.14: configurazione P

Nella *configurazione P*:

$$l \sin \frac{\theta_1}{2} = \frac{b}{2} \rightarrow \theta_1 = 2 \arcsin \frac{b}{2l}$$

$$\theta_2 = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\theta_1}{2} \rightarrow \theta_2 = \pi - \frac{\theta_1}{2}$$

Equilibrio del membro 2:

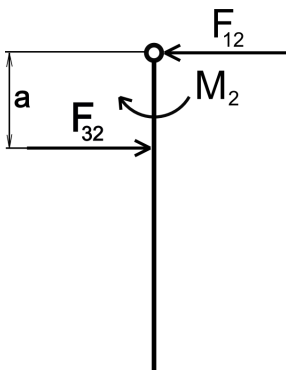


Figura 4.15: membro 2 nella configurazione P

$$F_{12}a = M_2$$

Equilibrio del membro 1:

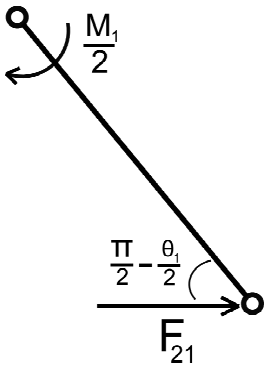


Figura 4.16: membro 1 nella configurazione P

$$F_{21}l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{M_1}{2}$$

$$F_{21}l \cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{M_1}{2}$$

Mettendo a sistema le equazioni derivanti dall'equilibrio dei due membri:

$$\begin{cases} F_{12}a = M_2 \\ F_{21}l \cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{M_1}{2} \\ F_{12} = F_{21} \end{cases}$$

Risolvendo si trova:

$$M_2 = \frac{M_1}{2l \cos\frac{\theta_1}{2}} a$$

Se  $M_2$  aumenta, il *membro 2* tende maggiormente a ruotare facilitando la configurazione voluta, per cui, la condizione diventa:

$$M_2 \geq \frac{M_1}{2\ell \cos \frac{\theta_1}{2}} a$$

Con  $M_1$  ed  $M_2$  valutati nella *configurazione P*:

$$M_1 = k_1 (\theta_1 + \alpha_{p1}) = k_1 \left( 2 \arcsin \frac{b}{2\ell} + \alpha_{p1} \right)$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 + \alpha_{p2}) = k_2 \left( \pi - \frac{\theta_1}{2} + \alpha_{p2} \right) = k_2 \left( \pi - \arcsin \frac{b}{2\ell} + \alpha_{p2} \right)$$

Inoltre nella *configurazione P*:

$$\ell \sin \frac{\theta_1}{2} = \frac{b}{2} \rightarrow \sin \frac{\theta_1}{2} = \frac{b}{2\ell} \rightarrow \cos \frac{\theta_1}{2} = \sqrt{1 - \left( \frac{b}{2\ell} \right)^2} = \frac{1}{2\ell} \sqrt{4\ell^2 - b^2}$$

Da cui:

$$k_2 \left( \pi - \arcsin \frac{b}{2\ell} + \alpha_{p2} \right) \geq k_1 \left( 2 \arcsin \frac{b}{2\ell} + \alpha_{p1} \right) \cdot \frac{a}{\sqrt{4\ell^2 - b^2}}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} B &= \frac{b}{2\ell} \quad 0 < B < 1 \\ A &= \frac{a}{\ell} \quad 0 \leq A < 1 \end{aligned} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{4\ell^2 - b^2}} = \frac{\frac{a}{2\ell}}{\frac{\sqrt{4\ell^2 - b^2}}{2\ell}} = \frac{\frac{1}{2}A}{\sqrt{1 - B^2}} = \frac{A}{2\sqrt{1 - B^2}}$$

Da cui infine:

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} \leq \frac{(2\pi - 2\arcsin B + 2\alpha_{p2}) \sqrt{1 - B^2}}{(2\arcsin B + \alpha_{p1}) A} \quad (2.3.1)$$

#### 4.2.4 Scelta finale di $\kappa$ e degli angoli di precarico

Da ognuno dei tre casi visti sopra:

-configurazione non in presa della pinza

-presa oggetto cilindrico

-presa oggetto parallelepipedo

si è ricavata una limitazione su  $\kappa$ , in tutto tre, qui sotto riassunte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \geq \frac{2(\pi + \alpha_{p2})}{\alpha_{p1}} \end{array} \right. \quad (2.1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\arctan \frac{1}{\lambda} + 2\alpha_{p2}}{(\pi + \alpha_{p1})(\lambda^2 + 1)} < \kappa < \lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \frac{2\arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p2}}{4\arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \alpha_{p1}} \end{array} \right. \quad (2.2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \leq \frac{2\pi - 2\arcsin B + 2\alpha_{p2}}{2\arcsin B + \alpha_{p1}} \cdot \frac{\sqrt{1 - B^2}}{A} \end{array} \right. \quad (2.3.1)$$



Vogliamo ora fissare il valore di qualche parametro, per arrivare come risultato finale ad avere un intervallo numerico intersezione dei tre sopra, all'interno del quale sceglieremo infine un valore di  $\kappa$ .

Per prima cosa fissiamo il valore dei parametri  $\lambda$  e  $B$ . Li fissiamo ai valori che fanno restringere maggiormente gli intervalli sopra.

Infatti sono parametri che sono rappresentativi delle situazioni di presa, e vanno considerate le situazioni più gravose. Poi fissiamo anche  $A$ .

### **Parametro 1: $\lambda$**

Abbiamo visto come l'intervallo (2.2.11) aumenti in entrambi i versi all'aumentare di  $\lambda$ . Per cui ci metteremo nel caso in cui  $\lambda = \lambda_{\min}$ , che è il caso in cui l'intervallo è più ristretto possibile.

Per determinare  $\lambda_{\min}$  fissiamo per prima cosa a 9 cm la lunghezza  $\ell$  dei membri della *pinza*: è una lunghezza verosimile, che fa sì che la pinza sia sufficientemente grande per il bloccaggio degli oggetti delle specifiche ma non scomoda e troppo ingombrante. Conoscendo il raggio massimo che la *pinza* deve poter prendere dalle specifiche, sappiamo anche il valore minimo di  $\lambda$ :

$$\lambda_{\min} = \frac{\ell}{r_{\max}} = \frac{9 \text{ cm}}{4.85 \text{ cm}} \approx 1.86.$$

Potrebbe essere che il valore di  $\ell$ , sia troppo basso, e di conseguenza anche il valore di  $\lambda_{\min}$ , creando problemi di intersezione tra le varie condizioni, in quel caso scelgo un nuovo  $\ell$  più alto e ripeto il procedimento illustrato di seguito.

### **Parametro 2: $B$**

All'aumentare di  $B$  il numeratore della (2.3.1) cala e il denominatore cresce. Perciò la (2.3.1) ha meno probabilità di essere soddisfatta (e ci metteremo

dunque in quel caso) per il B più alto possibile, ovvero per il valore massimo di larghezza di un oggetto previsto dalle specifiche:

$$B = \frac{b}{2\ell} = \frac{b_{\max}}{2\ell} = \frac{12.6 \text{ cm}}{18 \text{ cm}} = 0.7$$

### Parametro 3: A

Consideriamo la condizione (2.3.1): il parametro A lo possiamo scegliere abbastanza liberamente, supponiamo ad esempio di volere che i membri inferiori della pinza si dispongano paralleli dopo aver infilato l'oggetto parallelepipedo tra i due membri inferiori fino ad arrivare ad una distanza dal fulcro pari ad  $\frac{1}{7}$  di  $\ell$ . Sceglieremo  $A = \frac{1}{7}$

$$\text{Quindi: } \lambda = 1.86 \quad B = 0.7 \quad A = \frac{1}{7}$$

Da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \geq \frac{2(\pi + \alpha_{p2})}{\alpha_{p1}} \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1.973 + 2\alpha_{p2}}{4.46(\pi + \alpha_{p1})} < \kappa < 6.377 \cdot \frac{2.574 + \alpha_{p2}}{1.135 + \alpha_{p1}} \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \leq 5 \cdot \frac{4.732 + 2\alpha_{p2}}{1.551 + \alpha_{p1}} \end{array} \right. \quad (2.4.3)$$

Rimane ora la scelta degli angoli di precarico  $\alpha_{p1}$  e  $\alpha_{p2}$ .

E' opportuno sceglierli in modo che gli intervalli abbiano intersezione, e che l'intervallo risultante sia più ampio possibile, in modo di avere una più vasta variabilità sulla scelta successiva di  $\kappa$ .

Si vede, facendo qualche tentativo, che non per tutti valori di  $\alpha_{p1}$  e  $\alpha_{p2}$  si ha intersezione tra la condizione (2.4.1) e (2.4.2). In particolare, affinché ci sia intersezione, la cosa più difficile è avere soddisfatta la (2.4.4), condizione affinché esista l'intersezione tra la (2.4.1) e la (2.4.2).

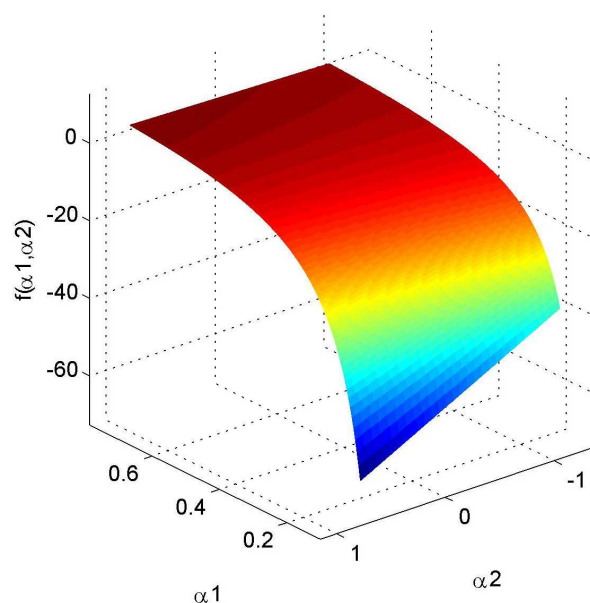
$$\frac{2(\pi + \alpha_{p2})}{\alpha_{p1}} < 6.377 \cdot \frac{2.574 + \alpha_{p2}}{1.135 + \alpha_{p1}} \quad (2.4.4)$$

Ovvero:

$$f(\alpha_{p1}, \alpha_{p2}) = 6.377 \cdot \frac{2.574 + \alpha_{p2}}{1.135 + \alpha_{p1}} - \frac{2(\pi + \alpha_{p2})}{\alpha_{p1}} > 0 \quad (2.4.5)$$

Si è disegnato con Matlab il grafico della funzione a due variabili (2.4.5), mostrato nella *Figura 4.17* e *4.18*, per vedere graficamente se esistono valori di  $\alpha_{p1}$  e  $\alpha_{p2}$  per cui essa è maggiore di zero. E' stato disegnato tramite lo script *Grafico3D* mostrato di seguito:

```
[x,y]=meshgrid(0.1:0.005:pi/4,-pi/3:0.005:pi/4);
f=6.377*(2.574+y)./(1.135+x)-2*(pi+y)./x;
mesh(x,y,f);
xlabel('\alpha1');
ylabel('\alpha2');
zlabel('f(\alpha1,\alpha2)');
```



*Figura 4.17*

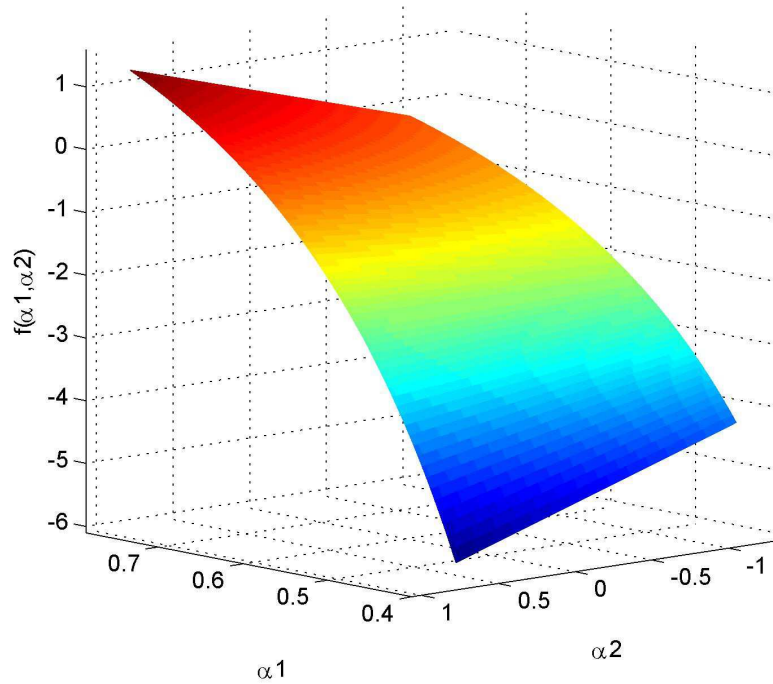


Figura 4.18: ingrandimento della Figura 4.17 nella zona in cui la funzione cambia di segno. Per ingrandirlo è stata modificata la prima riga dello script nel modo seguente: `[x,y]=meshgrid(0.4:0.005:pi/4,-pi/3:0.005:pi/4);`

Il grafico della funzione è stato disegnato sul seguente dominio:

$$\alpha_{p1} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \frac{\pi}{4} \approx 0,8$$

$$\alpha_{p2} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right] \quad \frac{\pi}{3} \approx 1$$

Si vede che la funzione è maggiore di zero per alcuni valori degli angoli di precarico, e in particolare, è massima agli estremi dell'intervallo, per:

$$\alpha_{p1} = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \text{ scelgo } \alpha_{p1} = \alpha_{p2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha_{p2} = \frac{\pi}{4}$$

Verifichiamo che ci sia intersezione per  $\alpha_{p1} = \alpha_{p2} = \frac{\pi}{4}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \geq 10 \\ 0.202 < \kappa < 11.155 \quad \rightarrow \quad 10 \leq \kappa < 11.155 \\ \kappa \leq 13.488 \end{array} \right.$$

C'è intersezione, e posso dunque scegliere un  $\kappa$  nell'intervallo finale trovato.  
Scelgo  $\kappa = 10.5$ .

Quindi in definitiva da questo primo studio senza attrito si è determinato il valore di:

$$\alpha_{p1} = \alpha_{p2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\kappa = 10.5$$

$$\ell = 9 \text{ cm}$$

## 4.3 La pinza: studio con attrito

In questa parte verranno analizzati i casi in cui l'attrito è necessario per l'equilibrio. Supporremo in tutti i casi trattati che il coefficiente di attrito radente statico  $\mu_s$  tra la *pinza* e un generico oggetto in presa valga 1.

$$\mu_s = 1$$

Inoltre, nei casi dove sarà presente, considereremo la massa  $m$  dell'oggetto quella massima di progetto, fissata a 1 kg.

$$m = 1 \text{ kg}$$

### 4.3.1 Oggetto cilindrico: attrito contro peso

Analizziamo la presa di un oggetto cilindrico di massa  $m$ , supponendo che esso venga tenuto sospeso come nella figura sotto.

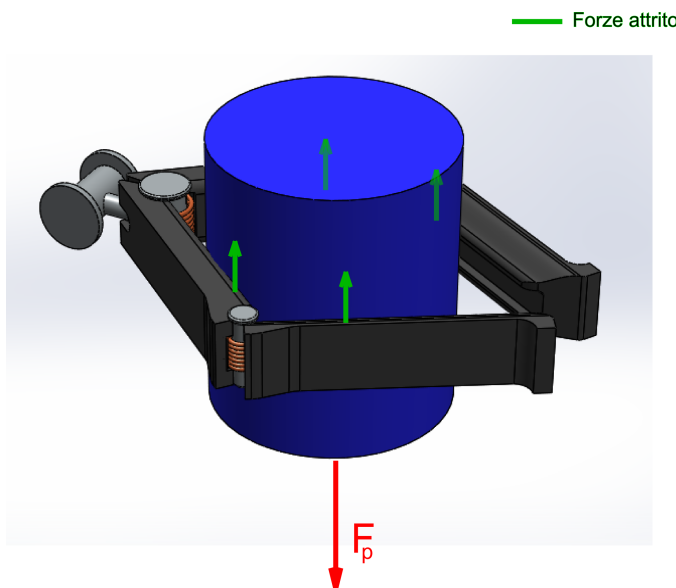


Figura 4.19

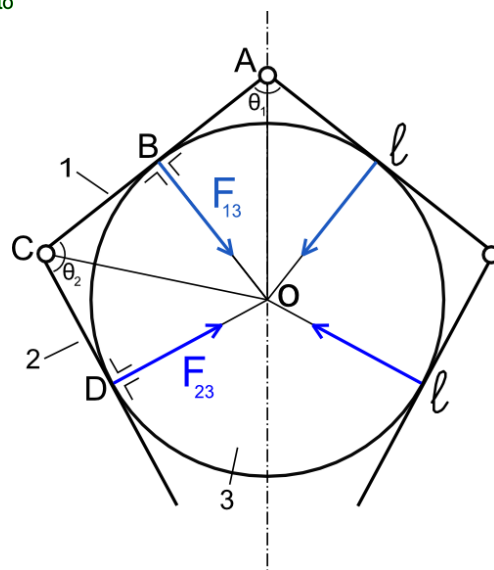


Figura 4.20

Senza attrito, l'oggetto scivolerebbe verso il basso. La forza peso è equilibrata dalla forza d'attrito che si sviluppa tra la *pinza* e l'oggetto.

Impostiamo di seguito l'equilibrio dei vari membri, per ricavarci un'espressione delle forze impresse dalla pinza sull'oggetto a partire dai momenti esercitati dalle molle. I momenti esercitati dalle molle saranno noti, infatti considereremo che la pinza si configuri circa nella posizione di equilibrio in cui si configurerebbe in assenza di attrito (di fatto con l'attrito si creano una serie di posizioni di equilibrio aggiuntive nel duo intorno).

*Equilibrio del membro 2:*

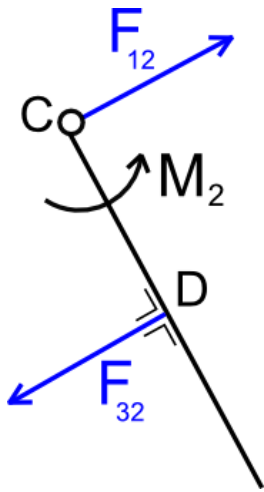


Figura 4.21

$$\overline{CD} = d$$

$$M_2 = F_{32}d \rightarrow F_{32} = \frac{M_2}{d} = F_{23}$$

$$F_{12} = F_{32}$$

*Equilibrio del membro 1*

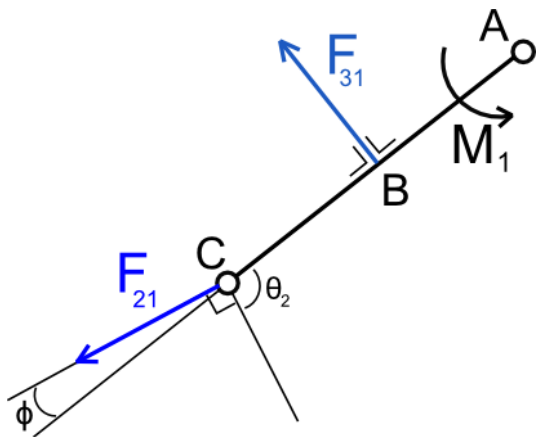


Figura 4.22

$$\overline{AB} = c$$

$$\Phi = \pi - \left( 2\pi - \theta_2 - \frac{\pi}{2} \right) = \theta_2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{2} &= F_{31}c + F_{21}\ell \sin\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow F_{31} = \frac{\frac{M_1}{2} + F_{21}\ell \cos\theta_2}{c} = \frac{M_1}{2c} + F_{21} \frac{\ell}{c} \cos\theta_2 = \\ &= \frac{M_1}{2c} + \frac{M_2}{d} \frac{\ell}{c} \cos\theta_2 = F_{13} \end{aligned}$$

L'oggetto non scivola verso il basso se la forza massima di attrito statico sviluppabile è maggiore della forza peso:

$$\mu_s (2F_{13} + 2F_{23}) \geq mg \quad (3.1.1)$$

con  $g$  accelerazione di gravità:  $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$

Sostituendo nella (3.1.1) le espressioni delle forze trovate:

$$2\mu_s \left( \frac{M_1}{2c} + \frac{M_2}{d} \frac{\ell}{c} \cos\theta_2 + \frac{M_2}{d} \right) \geq mg$$

$$\frac{M_1}{2c} + \frac{M_2}{d} \left( \frac{\ell}{c} \cos\theta_2 + 1 \right) \geq \frac{mg}{2\mu_s}$$

$$\frac{k_1(\theta_1 + \alpha_{p1})}{2c} + \frac{k_2(\theta_2 + \alpha_{p2})}{d} \left( \frac{\ell}{c} \cos\theta_2 + 1 \right) \geq \frac{mg}{2\mu_s}$$

$$k_2 \left[ \kappa \frac{(\theta_1 + \alpha_{p1})}{2c} + \frac{(\theta_2 + \alpha_{p2})}{d} \left( \frac{\ell}{c} \cos\theta_2 + 1 \right) \right] \geq \frac{mg}{2\mu_s}$$

$$k_2 \geq \frac{mg}{2\mu_s \left[ \kappa \frac{(\theta_1 + \alpha_{p1})}{2c} + \frac{(\theta_2 + \alpha_{p2})}{d} \left( \frac{\ell}{c} \cos\theta_2 + 1 \right) \right]}$$



Con:

$$c = r \cot \frac{\theta_1}{2}$$

$$d = \ell - r \cot \frac{\theta_1}{2}$$

$$k_2 \geq \frac{mg}{2\mu_s \left[ \kappa \frac{(\theta_1 + \alpha_{p1})}{2r \cot \frac{\theta_1}{2}} + \frac{(\theta_2 + \alpha_{p2})}{\ell - r \cot \frac{\theta_1}{2}} \left( \frac{\ell}{r \cot \frac{\theta_1}{2}} \cos \theta_2 + 1 \right) \right]} =$$

$$= \frac{mg\ell}{2\mu_s \left[ \kappa \frac{\lambda(\theta_1 + \alpha_{p1})}{2 \cot \frac{\theta_1}{2}} + \frac{(\theta_2 + \alpha_{p2})}{1 - \frac{1}{\lambda} \cot \frac{\theta_1}{2}} \left( \frac{\lambda}{\cot \frac{\theta_1}{2}} \cos \theta_2 + 1 \right) \right]}$$

Quindi in definitiva:

$$k_2 \geq \frac{mg\ell}{\mu_s \left[ \lambda \kappa (\theta_1 + \alpha_{p1}) \tan \frac{\theta_1}{2} + 2 \frac{(\theta_2 + \alpha_{p2})}{1 - \frac{1}{\lambda} \cot \frac{\theta_1}{2}} \left( \lambda \tan \frac{\theta_1}{2} \cos \theta_2 + 1 \right) \right]} \quad (3.1.2)$$

Ricordando la (2.2.1)

$$\theta_2 = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} \quad (2.2.1)$$

Nella (3.1.2) sono noti:

$$\kappa = 10.5$$

$$\alpha_{p1} = \alpha_{p2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\mu_s = 1$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\ell = 9 \text{ cm} = 0.09 \text{ m}$$

Per quanto riguarda,  $\lambda$  consideriamo come approssimazione che l'oggetto di peso massimo sia anche quello di raggio massimo. Per cui:

$$\lambda = \lambda_{\min} = 1.86$$

In presenza di attrito la *pinza* si configura in un intorno della posizione di equilibrio senza attrito. Consideriamo come approssimazione la posizione di equilibrio in assenza di attrito.

Ricordando la (2.2.8) trovata precedentemente nella tesi:

$$\kappa = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_{1eq}}{2}} + 2\alpha_{p2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \left( \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2} - \lambda \sin \theta_{1eq} + 1 \right)} \quad (2.2.8)$$

noti  $\kappa$ ,  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{p2}$ ,  $\lambda$ , si può ricavare, tramite l'analisi numerica, il valore di  $\theta_{1eq}$ :

$$f(\theta_{1eq}) = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_{1eq}}{2}} + 2\alpha_{p2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \left( \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2} - \lambda \sin \theta_{1eq} + 1 \right)} - \kappa = 0 \quad (3.1.3)$$

E' stata creata in Matlab, la funzione *Tetaeq*, che, presi in ingresso i valori di  $\lambda$ ,  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{p2}$  e  $\kappa$  disegna il grafico di  $f(\theta_{1eq})$  e calcola, nel caso esista (se esiste è unica), la radice dell'equazione (3.1.3).

```
function [Tetaeq]=Tetaeq(lambda,alfa1,alfa2,K)
A=2*atan((1/(lambda^2-1)).^(1/2));
tetal=A:0.001:pi;
a=1:0.001:pi;
f=Keq(tetal,lambda,alfa1,alfa2)-K;
plot(tetal,f,'b','Linewidth',1.5);
hold on;
xlabel('\thetaleq');
ylabel('f');
plot(a,0,'g','Linewidth',1.5);
KA=Keq(A,lambda,alfa1,alfa2)-K;
Kpi=Keq(pi,lambda,alfa1,alfa2)-K;
if (KA*Kpi>0)
    fprintf('La funzione non ha zeri in questo intervallo\n');
else
    z=@(tetal)(Keq(tetal,lambda,alfa1,alfa2)-10.5);
    Tetaeq=fzero(z,[A,pi]);
end
```

Che utilizza al suo interno la funzione *Keq* così strutturata:

```
function [K] = Keq(tetal,lambda,alfa1,alfa2)
K=(4*atan(1./(lambda-
cot(tetal/2)))+2*alfa2)./(((tetal+alfa1).*((lambda^2)*(sin(tetal/2)).^2-
lambda.*sin(tetal)+1)));
end
```

Se ad, esempio nel nostro caso, si digita da riga di comando:

```
Tetaeq(1.86,pi/4,pi/4,10.5)
```

Si ottiene il grafico di *Figura 4.23*

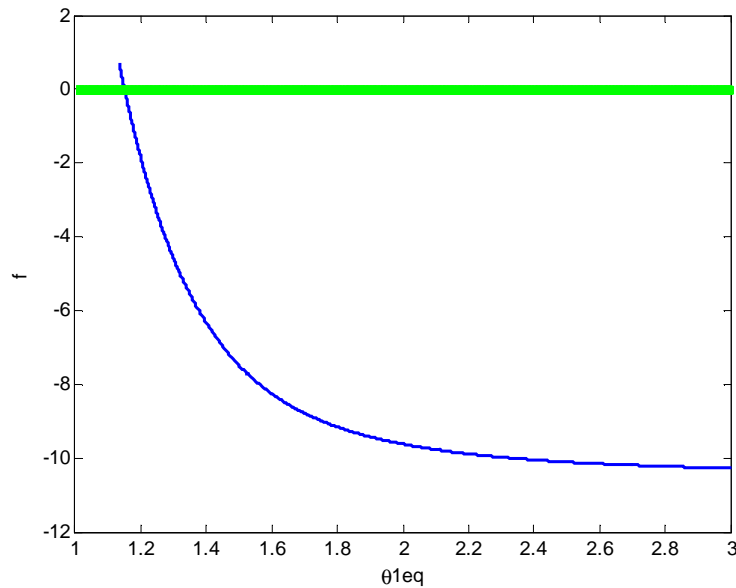


Figura 4.23

Inoltre la funzione creata  $Keq$  fa sì che Matlab fornisca una soluzione numerica dell'equazione sopra. In questo caso fornisce:  $\theta_{1eq} = 1.1505 \approx 1.15$  rad

Che è l'angolo in cui si configura la pinza all'equilibrio da cui possiamo ricavare anche il valore di  $\theta_2$  grazie alla (2.2.1):

$$\theta_2 = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} = 2.528 \text{ rad} \quad (2.2.1)$$

Abbiamo ora tutti i valori da sostituire nella (3.1.2)

$$k_2 \geq \frac{0.883}{10.5 \cdot 1.86 \cdot \left(1.15 + \frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\frac{1.15}{2}\right) + 2 \frac{\left(2.528 + \frac{\pi}{4}\right)}{1 - 0.538 \cdot \cot \frac{1.15}{2}} \left(1.86 \cdot \tan \frac{1.15}{2} \cos(2.528) + 1\right)} =$$

$$= \frac{0.883}{24.495 + 39.024 \cdot 0.0145} = \frac{0.883}{25.061} = 0.0352 \quad (3.1.4)$$

$$\rightarrow k_2 \geq 0.0352 \text{ Nm} = 3.52 \text{ Ncm}$$

### 4.3.2 Oggetto cilindrico: momento torcente trasmissibile

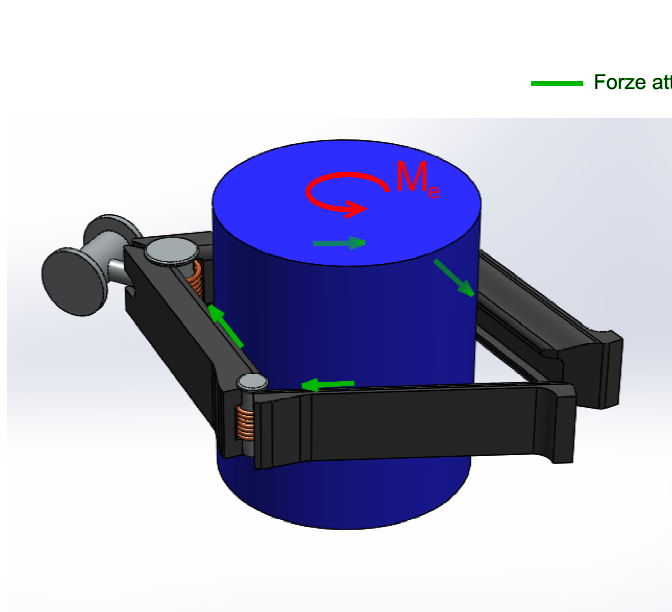


Figura 4.24

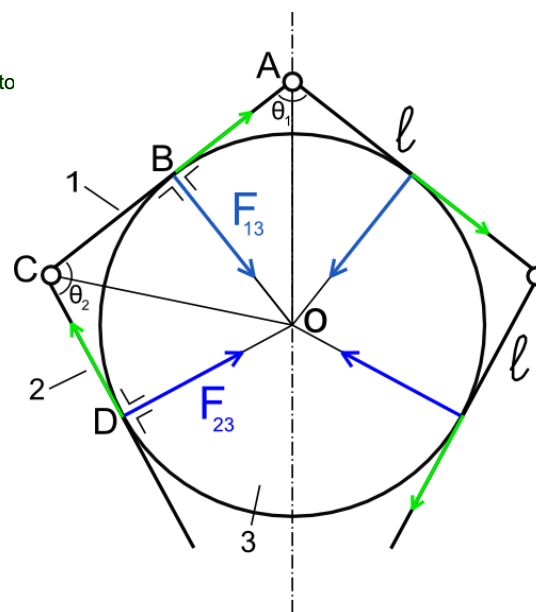


Figura 4.25

Il momento massimo generabile dalla forza di attrito deve essere maggiore del momento massimo esterno  $M_e$ . Questo perché la *pinza* deve in generale poter impedire la rotazione dell'oggetto in presa, in modo da permettere ad esempio lo svitamento di tappi.

$$2\mu_s (F_{13} + F_{23})r \geq M_e \quad (3.2.1)$$

Dalla (3.2.1), per analogia alla (3.1.1), poiché l'espressione di  $F_1$  ed  $F_2$  rimane la stessa, si ha:

$$k_2 \geq \frac{M_e \lambda}{\mu_s \left[ \lambda \kappa (\theta_1 + \alpha_{p1}) \tan \frac{\theta_1}{2} + 2 \frac{(\theta_2 + \alpha_{p2})}{1 - \frac{1}{\lambda} \cot \frac{\theta_1}{2}} \left( \lambda \tan \frac{\theta_1}{2} + 1 \right) \right]} \quad (3.2.2)$$

$$\text{con } \theta_2 = 2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} \quad (2.2.1)$$

$M_e$  è un dato di progetto, nella formula consideriamo il momento torcente massimo esterno da equilibrare. Per le mansioni quotidiane, i momenti torcenti massimi da trasmettere si hanno nello svitamento/avvitamento di tappi di oggetti di uso comune, come bottiglie o barattoli. La coppia di serraggio in questi casi varia tra circa 1 e 10 Nm. Inoltre solitamente oggetti come bottiglie o barattoli hanno un raggio inferiore (quello attorno a cui si stringe la pinza) elevato (prenderemo  $\lambda$  minimo).

Quindi prendiamo:

$$M_e = 10 \text{ Nm}$$

$$\mu_s = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 1.86 \\ \kappa = 10.5 \\ \alpha_{p1} = \alpha_{p2} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \theta_{1eq} \approx 1.15 \text{ (ricavabile come nel paragrafo 4.3.1)}$$

Da cui, per analogia alla (3.1.4) (stessa formula, cambia il numeratore):

$$k_2 \geq \frac{18.6}{25.061} = 0.742 \text{ Nm} = 74.2 \text{ Ncm}$$

### 4.3.3 Oggetto rettangolare: attrito contro peso

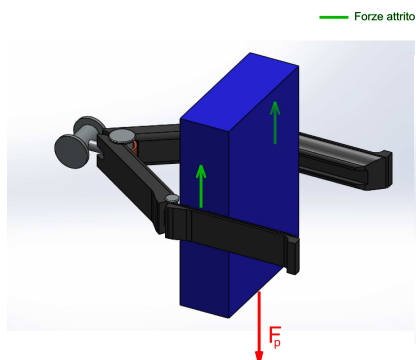


Figura 4.26

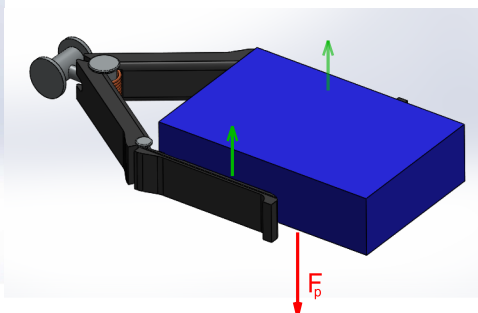


Figura 4.27

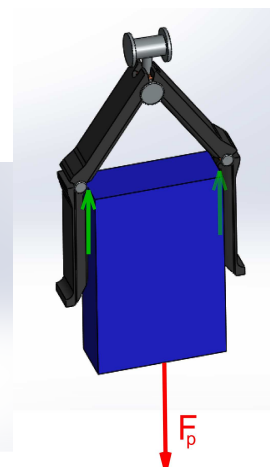


Figura 4.28

I casi mostrati nelle *Figure 4.26, 4.27, 4.28*, anche se apparentemente diversi, sono tutti simili se trattati come faremo di seguito. Perciò studieremo un caso a scelta tra quelli sopra, e le conclusioni a cui arriveremo varranno anche per gli altri due. Consideriamo il caso della *Figura 4.28*.

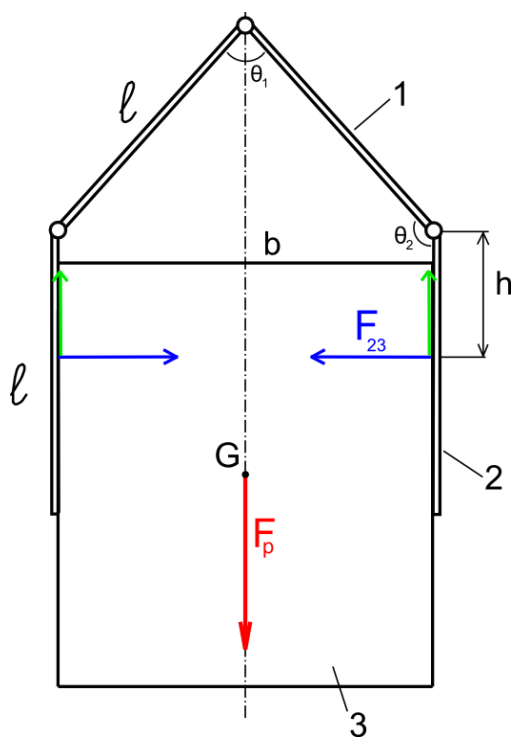


Figura 4.29

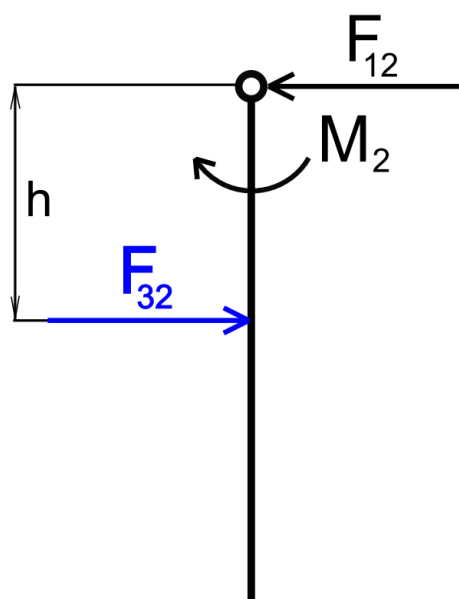


Figura 4.30: equilibrio membro 2

Consideriamo l'equilibrio del *membro 2*, considerando la forza, invece che distribuita su una superficie, concentrata in un punto a distanza  $h$  dal fulcro.

$$0 \leq h \leq \ell$$

$$M_2 = F_{32}h \rightarrow F_{32} = \frac{M_2}{h}$$

Affinché l'oggetto non cada, la forza di attrito massima deve essere maggiore o uguale alla forza peso, per cui:

$$2F_{23}\mu_s \geq mg$$

$$\frac{2\mu_s M_2}{h} \geq mg$$

$$\frac{2\mu_s}{h} k_2 (\theta_2 + \alpha_{p2}) \geq mg$$

Da cui infine:

$$k_2 \geq \frac{mgh}{2\mu_s (\theta_2 + \alpha_{p2})} \tag{3.3.1}$$

Con:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\mu_s = 1$$

$$\alpha_{p2} = \frac{\pi}{4}$$



Sostituendo nella (3.3.1) si ha:

$$k_2 \geq \frac{9.81h}{2\left(\theta_2 + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{9.81h}{2\theta_2 + \frac{\pi}{2}} \quad (3.3.2)$$

Con  $\theta_2 = \pi - \frac{\theta_1}{2} = \pi - \arcsin B$  dove  $B = \frac{b}{2\ell}$

In questo caso  $\theta_2$  varia tra  $\pi$  quando  $b \rightarrow 0$  e  $\frac{\pi}{2}$  quando  $b = 2\ell$ .

Il caso peggiore, essendo  $\theta_2$  al denominatore, è quello in cui  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , che corrisponde al caso di oggetto di larghezza massima prendibile.

$h$  è una frazione di  $\ell$  e varia tra 0 ed  $\ell$ . Supponiamo  $h \approx \frac{\ell}{2} = 4.5$  cm

Da cui:

$$k_2 \geq 0.0937 \text{ Nm} = 9.37 \text{ Ncm}$$

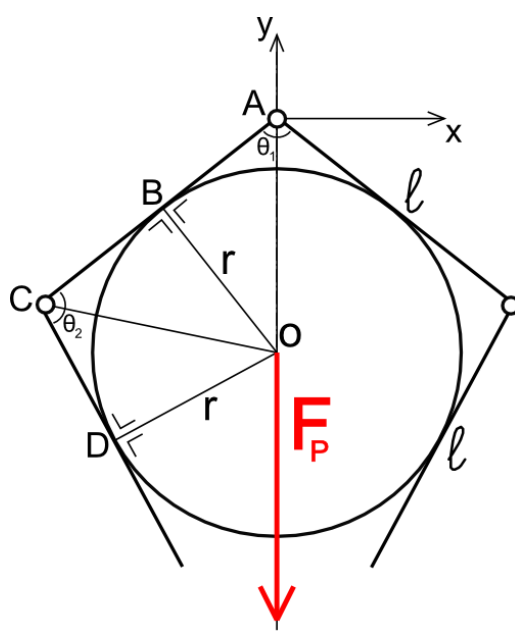
## 4.4 La pinza: caso particolare di presa

Verrà infine presentato un ultimo caso, studiato senza attrito, quello di un cilindro di massa  $m$ , la cui forza peso agisce sul piano su cui si apre la *pinza*, come mostrato in *Figura 4.31*.

A differenza dei casi appena trattati, qui l'attrito non è **necessario** all'equilibrio: esso lo facilita, ma per valori sufficientemente elevati delle costanti elastiche delle molle, si può avere anche senza, per questo sarà trattato senza (un equilibrio senza implica un equilibrio con).

In questo caso il fatto di trascurare l'attrito porta ad una importante sovrastima della rigidità delle molle. Questo è un caso intermedio tra quelli visti in precedenza e più complesso da trattare: la configurazione di presa che si viene a creare non dipende solo, come nei casi visti precedentemente senza attrito, da  $\kappa$ , e quindi dalla rigidità relativa di una molla rispetto ad un'altra, ma anche dallo specifico valore di esse. Si pensi infatti che se le molle non sono sufficientemente rigide l'oggetto cade.

Sarà presentata una possibile trattazione, da prendere con le dovute cautele, e che verrà esposta col solo scopo di fornire formule da verificare/modificare opportunamente in seconda battuta.



*Figura 4.31*

Considerando il sistema di assi riportati in *Figura 4.31*, trovo le coordinate del baricentro, in cui è applicata la forza peso, in funzione dell'unico grado di libertà  $\theta_1$ :

$$G \equiv O$$

$$AO \sin \frac{\theta_1}{2} = r$$

Il baricentro G ha dunque, rispetto ad un sistema di riferimento con centro in A, coordinate:

$$G \left( 0, -\frac{r}{\sin \frac{\theta_1}{2}} \right)$$

Procedo a trovare il termine di energia potenziale gravitazionale che andrà sommato all'espressione dell'energia totale trovata precedentemente nella tesi.

$$U_p = -mgy_G = \frac{mgr}{\sin \frac{\theta_1}{2}}$$

La derivata dell'energia totale sarà la somma della derivata calcolata in precedenza più la derivata del nuovo termine che vale:

$$\frac{dU_p}{d\theta_1} = -\frac{1}{2} mgr \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{mg\ell}{\lambda} \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}} \quad (4.1)$$

L'espressione della derivata dell'energia totale diventa:

$$\frac{dU}{d\theta_1} = k_1(\theta_1 + \alpha_{p1}) - k_2 \left( 4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + 2\alpha_{p2} \right) \cdot \frac{1}{\left[ \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_1}{2} - \lambda \sin \theta_1 + 1 \right]} - \frac{1}{2} \frac{mg\ell}{\lambda} \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}} = 0$$

$$\kappa - \frac{1}{2} \frac{mg\ell}{\lambda k_2} \frac{\cos \frac{\theta_{1eq}}{2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2}} = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_{1eq}}{2}} + 2\alpha_{p2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \left[ \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2} - \lambda \sin \theta_{1eq} + 1 \right]}$$

$$\chi = \frac{1}{2} \frac{mg\ell}{\lambda k_2} \frac{\cos \frac{\theta_{1eq}}{2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2}} \quad (4.2)$$

$$\kappa - \chi = \frac{4 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_{1eq}}{2}} + 2\alpha_{p2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \left[ \lambda^2 \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2} - \lambda \sin \theta_{1eq} + 1 \right]} \quad (4.3)$$

A destra dell'uguale abbiamo la stessa espressione del caso senza peso (2.2.8), mentre a sinistra abbiamo  $\kappa$  corretto di un termine  $\chi$  dipendente da  $k_2$ . Vogliamo fare in modo di avere un valore di  $k_2$  tale che  $\chi$  sia trascurabile (almeno un ordine di grandezza inferiore a  $\kappa$ ), in modo che la pinza si configuri come se il peso circa non agisse. A quel punto mi rifaccio al caso senza peso, e scelto l'opportuno valore di  $\lambda$  posso ricavare  $\theta_{1eq}$  dalla (4.3) con  $\chi \approx 0$  che diventa la (2.2.8).

Impongo dunque che:

$$\chi = \frac{1}{2} \frac{mg\ell}{\lambda k_2} \frac{\cos \frac{\theta_{1eq}}{2}}{(\theta_{1eq} + \alpha_{p1}) \sin^2 \frac{\theta_{1eq}}{2}} \leq 0.1 \quad (4.4)$$

Considereremo anche qui il caso in cui  $\lambda = 1.86$ , considerando come nel paragrafo 4.3.1 che l'oggetto di peso massimo sia anche quello di raggio massimo.

Se  $\chi$  è trascurabile, l'angolo di equilibrio è quello in assenza di peso corrispondente a  $\lambda = 1.86$ , cioè  $\theta_{1eq} \approx 1.15$  rad.

Gli altri valori noti sono:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\ell = 9 \text{ cm} = 0.09 \text{ m}$$

$$\alpha_{p1} = \frac{\pi}{4}$$

Sostituendo questi valori nella (4.4) si ha:

$$0.5 \cdot \frac{1 \cdot 9.81 \cdot 0.09}{1.86} \frac{\cos \frac{1.15}{2}}{\left(1.15 + \frac{\pi}{4}\right) \sin^2 \frac{1.15}{2}} \cdot \frac{1}{k_2} = \frac{0.348}{k_2} \leq 0.1$$

Da cui infine:

$$k_2 \geq 3.48 \text{ Nm}$$

$$k_2 \geq 348 \text{ Ncm}$$

## 4.5 La pinza: scelta finale delle costanti elastiche

In definitiva le condizioni trovate riguardanti  $k_2$  sono riassunte di seguito:

$$k_2 \geq 3.52 \text{ Ncm (attrito contro peso oggetto cilindrico)} \quad (5.1)$$

$$k_2 \geq 74.2 \text{ Ncm (momento torcente oggetto cilindrico)} \quad (5.2)$$

$$k_2 \geq 9.37 \text{ Ncm (attrito contro peso oggetto rettangolare)} \quad (5.3)$$

$$k_2 \geq 348 \text{ Ncm (forza elastica contro peso oggetto cilindrico)} \quad (5.4)$$

Le condizioni (5.2) e (5.4) sono le più sovrastimate. Infatti per quanto riguarda la (5.2) si è ipotizzato un momento esterno massimo di 10 Nm, caso di picco molto raro nelle comuni mansioni.

Nella (5.4) invece l'attrito gioca un ruolo, anche se non strettamente necessario, sicuramente determinante per l'equilibrio, e la trattazione senza attrito porta ad una evidente sovrastima di  $k_2$ .

Le costanti elastiche che compaiono nella trattazione sono costanti di proporzionalità tra momento torcente e angolo. Vediamo, per valutare se esse hanno senso fisicamente, di trasformarle in maniera approssimata in costanti di proporzionalità tra forza e allungamento:

$$F = kx = k\theta r$$

$$M = k_T \theta \rightarrow Fr \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = k_T \theta \rightarrow Fr \cos \theta = k_T \theta$$

$$\begin{cases} F = k\theta r \\ Fr \cos \theta = k_T \theta \end{cases} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{k}{k_T} \frac{r}{\cos \theta} \rightarrow k = \frac{k_T}{r^2} \cos \theta$$

Supponiamo piccoli angoli:  $\cos \theta \approx 1$

Inoltre supponiamo  $r^2 \approx 10 \text{ cm}^2$

Da cui:

$$k \approx 0.1 k_T$$

I  $k$  equivalenti della (5.1) e della (5.4) valgono ad esempio:

$$k_{e2} \approx 0.35 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 35 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k_{e4} \approx 34.8 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \approx 3480 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Escludendo la (5.4), abbastanza lontana dalle altre e come già detto la più sovrastimata, potremmo prendere:

$$k_2 = 75 \text{ Ncm} \left( k_{2e} \approx 7.5 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 750 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right)$$

Da cui:

$$k_1 = \kappa \cdot k_2 = 10.5 \cdot 75 = 787.5 \text{ Ncm} \left( k_{1eq} \approx 78.75 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 7875 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right)$$

## 4.6 Molla del braccio: scelta della costante elastica

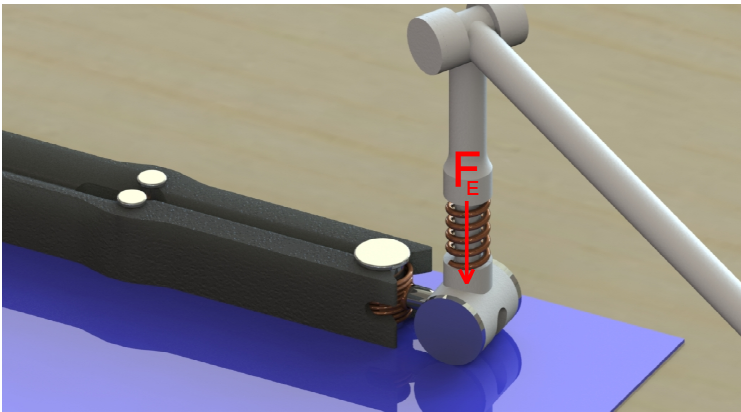


Figura 4.32

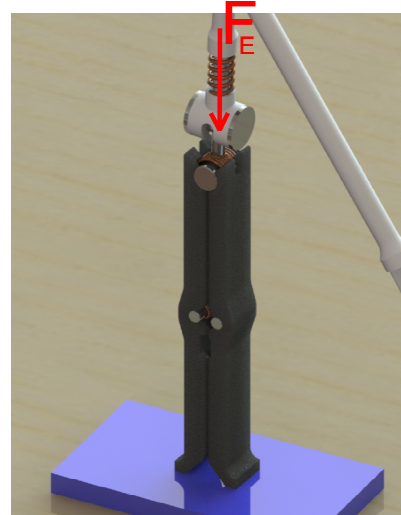


Figura 4.33

La molla presente nel segmento del braccio a cui è poi collegata la *pinza*, è una molla a compressione, la cui forza elastica  $F_E$  è proporzionale all'allungamento  $\Delta l$ :

$$F_E = k_3 \Delta l$$

Il dispositivo, in base a quanto si fa scendere il braccio, e quindi si comprime la molla, può fare variare la forza impressa verso il basso da un valore nullo fino ad un valore massimo, corrispondente alla compressione massima della molla.

Supponiamo che il dispositivo debba poter esercitare una forza massima di 200 N, inoltre fissiamo la compressione massima pari a 2 cm.

$$F_{E_{\max}} = k_3 \Delta l_{\max}$$

$$k_3 = \frac{F_{E_{\max}}}{\Delta l_{\max}} = \frac{200}{2} = 100 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$



# *Conclusioni*

In questo lavoro di tesi, partendo da un'idea molto generale riguardante la possibilità di creazione di un semplice ausilio con funzioni di supporto statico, si è delineata una sua geometria, e impostato un ben preciso progetto, il tutto preceduto da un breve studio riguardante le specifiche, derivanti da osservazioni di scenari tipici quotidiani. L'ausilio creato è essenzialmente composto da una pinza ad un grado di libertà passivo (con molle) che permette l'afferraggio di oggetti parallelepipedi e cilindrici, e da un braccio a sei gradi di libertà con coppie folli (cioè non motorizzate), che permette di esercitare forze di bloccaggio contro un piano e/o di sostenere nello spazio oggetti afferrati. Questo è possibile, in base alla situazione, grazie all'elevato attrito previsto nelle coppie cinematiche (sostenere oggetti nello spazio) o grazie al funzionamento combinato di un meccanismo di non ritorno interno alla base e di una molla presente nel braccio (fissare oggetti sul piano). Esso sembra in grado, almeno in linea teorica, di svolgere bene i compiti richiesti, anche se in alcuni casi ci può essere qualche parziale limitazione. Il meccanismo ideato e il suo funzionamento è stato presentato in maniera qualitativa tramite disegni al CAD e, per ogni blocco funzionale, è stata fornita un'idea di principio e delle specifiche basi per una eventuale progettazione più dettagliata futura.

Nella seconda parte della tesi, è stato presentato un modello matematico atto a descrivere il comportamento della *pinza*, col quale è possibile una scelta, anche se non ancora del tutto ottimale, sicuramente funzionale, di quasi tutti i suoi parametri di progetto tra cui le costanti elastiche delle molle, gli angoli di precarico e la lunghezza dei membri della *pinza* stessa. Le formule sono state nella maggior parte dei casi sviluppate prima in maniera generale, e solo in seguito si è passati ad una specializzazione delle stesse, questo per facilitare e velocizzare eventuali modifiche e considerazioni future e rendere il modello più flessibile.

Per sviluppi futuri e ulteriori considerazioni sarebbe comunque cosa sensata la realizzazione di un prototipo, che faciliterebbe di molto il lavoro.

Inoltre restano da fare diversi calcoli, in primo luogo per la scelta ed il dimensionamento di tutte le coppie ad attrito presenti nel meccanismo. Per quanto riguarda la *base* invece, è importante in modo particolare il dimensionamento dell'arpionismo ad attrito. Un altro punto cardine che non è stato sviluppato è in generale la scelta dei materiali, che va curata ed è di fondamentale importanza, ovviamente si cercherà di scegliere, tra i materiali che soddisfano le specifiche, quelli più economici.

# Appendice

Risoluzione della disequazione parametrica (con  $\lambda$  come parametro):

$$2 \arctan \frac{1}{\lambda - \cot \frac{\theta_1}{2}} + \frac{\theta_1}{2} < \pi \quad (2.2.3)$$

Poniamo  $\theta_1 = 4x$

$\theta_1$  è sicuramente compreso tra 0 e  $\pi$ , per cui  $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$$\arctan \frac{1}{\lambda - \cot 2x} < \frac{\pi}{2} - x$$

Applicando la tangente ad entrambi i membri

$$\frac{1}{\lambda - \cot 2x} < \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda - \cot 2x} < \cot x$$

Si ottiene la disequazione fratta

$$\frac{1 - \cot x (\lambda - \cot 2x)}{\lambda - \cot 2x} < 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore

NUMERATORE  $> 0$

$$1 - \cot x(\lambda - \cot 2x) > 0$$

$$\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

$$\rightarrow 1 - \lambda \cot x + \cot x \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} > 0 \rightarrow \cot^2 x - 2\lambda \cot x + 1 > 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \lambda^2 - 1 \rightarrow 3 \text{ casi possibili}$$

$$1) 0 < \lambda < 1 (\lambda > 0) \rightarrow \frac{\Delta}{4} < 0 \rightarrow \text{Il numeratore è sempre } > 0$$

$$2) \lambda = 1 \rightarrow \frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow (\cot^2 x - 1) > 0 \rightarrow \cot x \neq 1 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$3) \lambda > 1$$

Per quanto riguarda il caso 3)

$$\cot x > \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \vee \cot x < \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

Poichè  $\lambda > 1$  sicuramente  $\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$  e  $\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$  sono entrambi  $> 0$

Per cui, invertendo ogni membro e razionalizzando

$$\tan x < \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cdot \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}} = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

$$\rightarrow \tan x < \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \rightarrow x < \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

∨

$$\tan x > \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cdot \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}} = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

$$\rightarrow \tan x > \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \rightarrow x > \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

Quindi, nel caso  $\lambda > 1$  lo studio del numeratore  $> 0$  porta a

$$x < \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \quad \vee \quad x > \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

DENOMINATORE  $> 0$

$$\lambda - \cot 2x > 0 \rightarrow \cot 2x < \lambda \rightarrow \frac{1}{\tan 2x} < \lambda$$

Poichè  $\lambda > 0$  posso invertire i membri

$$\tan 2x > \frac{1}{\lambda} \rightarrow x > \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$$

Combiniamo ora i segni del numeratore e del denominatore.

Poichè per quanto riguarda il numeratore vi sono 3 casi distinti, analizzeremo un caso alla volta.

$$1) 0 < \lambda < 1$$

$$N > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$$

La disequazione iniziale risulta verificata, considerando anche che  $x > 0$  per

$$0 < x < \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$$

Da cui, ricordando la sostituzione iniziale  $\theta_1 = 4x \rightarrow x = \frac{\theta_1}{4}$

$$0 < \theta_1 < 2 \arctan \frac{1}{\lambda}$$

$$2) \lambda = 1$$

$$N > 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}$$

$$D > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$$

La disequazione iniziale risulta verificata, considerando anche che  $x > 0$  per

$$0 < x < \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$$

ovvero per

$$0 < \theta_1 < 2 \arctan \frac{1}{\lambda}$$

Essendo in questo specifico caso  $\lambda = 1$

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

3)  $\lambda > 1$

$$N > 0 \rightarrow x < \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vee x > \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

$$D > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$$

Dobbiamo ordinare i termini

$$\arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

$$\arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$$

Si vede chiaramente che  $\arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) < \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$

Resta da inserire il termine  $\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$

E' stato creato uno script in Matlab, lo script *Diseq*, che disegna per valori di  $\lambda$  che hanno senso nel nostro caso (si è preso  $1 < \lambda \leq 10$ ) le due funzioni.

Script *Diseq*:

```
lambda=1:0.01:10;  
y=1/2*atan(1./lambda);  
z=atan(lambda-sqrt(lambda.^2-1));  
plot(lambda,y,'b','Linewidth',2);  
hold on  
plot(lambda,z,'g','Linewidth',2);  
xlabel('\lambda');
```

Che se richiamato disegna il seguente grafico:

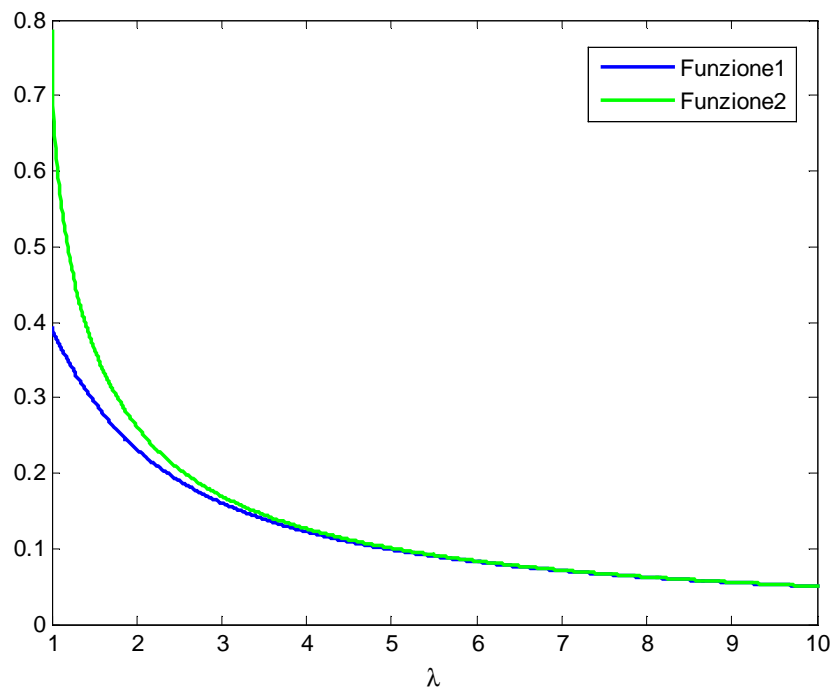


Figura 1

Si può vedere dalla *Figura 1* come nell'intervallo considerato la funzione

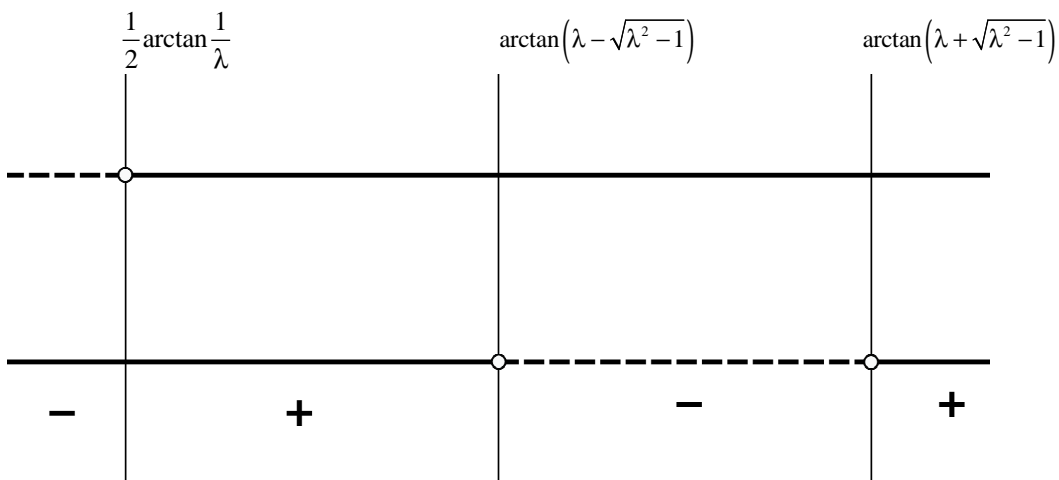
$\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda}$  (Funzione 1) è minore di  $\arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})$  (Funzione 2).



Si può verificare che per  $\lambda=10$  la *Funzione 1* è ancora minore della *Funzione 2*, infatti:

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{10} \approx 2,86 < \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \approx 2,87$$

Mettiamoci per cui nell'intervallo  $1 < \lambda \leq 10$  e disegniamo lo schema dei segni:



Da esso si ricava:

$$\rightarrow x < \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{\lambda} \vee \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) < x < \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

Da cui infine

$$\theta_1 < 2 \arctan \frac{1}{\lambda} \vee 4 \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) < \theta_1 < 4 \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

Quindi in definitiva la disequazione iniziale ha soluzione:

$$0 < \theta_1 < 2 \arctan \frac{1}{\lambda} \quad \text{per} \quad \lambda \leq 1$$

$$\theta_1 < 2 \arctan \frac{1}{\lambda} \vee 4 \arctan(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) < \theta_1 < 4 \arctan(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \quad \text{per} \quad \lambda > 1$$

# *Bibliografia*

[http://www.amygdalaweb.it/index.php?main\\_page=index&cPath=34](http://www.amygdalaweb.it/index.php?main_page=index&cPath=34)

<https://www.pattersonmedical.co.uk/app.aspx>

<http://www.thomashilfen.de/>

R. Ghigliazza, C. U. Galletti, *Meccanica applicata alle macchine*, UTET 1986