ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Varietà Algebriche affini

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Monica Idà

Presentata da:
Roberta Perissinotti Bisoni

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione

Questa tesi si propone come un primo approccio alle varietà algebriche affini, sfruttando le conoscenze acquisite principalmente nei corsi di Algebra e Geometria Proiettiva. In dettaglio, la tesi è suddivisa in tre capitoli.

Nel primo capitolo si analizzano alcune proprietà di una particolare classe di anelli, gli *anelli Noetheriani*, la cui particolarità risiede nei loro ideali: essi sono tutti finitamente generati. L'anello dei polinomi su un campo K in n variabili $K[x_1, \ldots, x_n]$, oggetto alla base dell'intero elaborato, è un anello Noetheriano ed ha quindi interessanti proprietà.
Si definisce poi nello spazio affine n-dimensionale $\mathbb{A}^n_K$ un *insieme algebrico* $\mathbf{V}(I)$ come luogo degli zeri di tutti i generatori di un ideale J in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Le proprietà degli insiemi algebrici sono tali da far sì che essi costituiscano i chiusi di una topologia, detta *topologia di Zariski*.
In modo naturale si definisce un'altra importante mappa, $\mathbf{I}$, che associa ad ogni sottoinsieme X di $\mathbb{A}^n_K$ l'ideale dei polinomi che si annullano su tutti i punti di X. Vengono poi approfondite le nozioni di insieme algebrico *irriducibile*, cioè che non si scompone in unione di due sottonsiemi chiusi propri non vuoti, e di *radicale* di un ideale J di $K[x_1, \ldots, x_n]$, ovvero l'insieme dei polinomi che elevati ad una opportuna potenza appartengono a J. Infine si dimostra una serie di risultati che portano ad un teorema fondamentale per la Geometria Algebrica, il *Nullstellensatz* (o Teorema degli zeri) di Hilbert: esso afferma che se K è algebricamente chiuso e J è ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$ è il radicale di J, da cui segue che ogni ideale massimale di $K[x_1, \ldots, x_n]$ è della forma $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ dove $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$.

Nel secondo capitolo si studiano le frecce fra insiemi algebrici e, più avanti, fra *varietà affini*. Andando con ordine, viene introdotta la struttura di *anello delle coordinate* di un sottoinsieme algebrico V, denotato con $K[V]$, ovvero una K-algebra che risulta essere l'insieme delle funzioni polinomiali da V in K. Si procede con lo studio di una tipologia particolare di mappe fra due insiemi algebrici V e W appartenenti a spazi affini di dimensioni non

necessariamente uguali, dette *mappe polinomiali*, le cui componenti sono m funzioni polinomiali di V. Un primo importante risultato che viene dimostrato è un teorema che afferma che le mappe polinomiali fra V e W sono in corrispondenza biunivoca con gli omomorfismi di K-algebre fra $K[V]$ e $K[W]$; da qui segue che, chiamando *isomorfismo* una mappa polinomiale che ammette inversa polinomiale, l'anello delle coordinate è un invariante per isomorfismi.
Quanto detto è un preludio all'introduzione del concetto di varietà affine, definita come coppia di due oggetti: un insieme V che attraverso una mappa polinomiale in $\mathbb{A}^n_K$ immerge V come sottoinsieme algebrico irriducibile e una K-algebra finitamente generata denotata con $K[V]$ che è identificabile all'anello delle coordinate dell'immagine di V. Attraverso lo studio del campo dei quozienti di $K[V]$, i cui elementi sono detti *funzioni razionali di V*, si dimostrano proprietà interessanti di alcuni insiemi legati alla varietà; per citarne uno, il *dominio di definizione* di una funzione razionale g/h di V, ovvero l'insieme dei punti di V in cui h non è nullo, risulta essere un aperto denso nella topologia di Zariski indotta su V.
Si introduce dunque la nozione di *mappa razionale fra V e W*, con V e W varietà affini, cioè una funzione parzialmente definita le cui componenti sono funzioni razionali da V a K da valutare nei punti comuni a tutti i domini di definizione di tali componenti; una particolare tipologia di mappa razionale è quella *dominante*, che conduce ad una equivalenza con i campi dei quozienti di K-algebre analoga a quella ricavata nell'ambito degli insiemi algebrici con le mappe polinomiali e una conseguenza di questo risultato è che le mappe polinomiali coincidono con le mappe razionali regolari ovunque: i *morfismi*.
Si approfondisce poi lo studio degli *aperti standard* di una varietà affine V: ciascuno di essi è il complementare di un insieme algebrico ricavato da un ideale principale in $K[V]$ e tutti insieme formano una base per la topologia di Zariski di V.

Infine, nel terzo capitolo si conclude la trattazione con lo studio di alcuni esempi: un isomorfismo che parametrizza una curva nello spazio affine $\mathbb{A}^3_K$ e due mappe polinomiali che parametrizzano in $\mathbb{A}^2_K$, rispettivamente, una curva con una cuspide e una curva con un nodo.

Capitolo 1

Insiemi algebrici

In questo capitolo con “anello” intendiamo A “anello unitario commutativo”. Inoltre, si indicherà con $\subset$ l'inclusione propria e con $\subseteq$ l'inclusione in generale.

1.1 Anelli Noetheriani

Definizione 1.1. Sia A un anello. A è detto *Noetheriano* se, per ogni $I \subseteq A$, I ideale di A, $\exists\, f_1, \ldots, f_k \in I : I = (f_1, \ldots, f_k)$, ovvero I è finitamente generato.

Proposizione 1.1.1. *Sia A un anello. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*
i) A Noetheriano
ii) Ogni catena ascendente

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

di ideali di A è stazionaria
iii) Ogni insieme non vuoto di ideali di A ha un elemento massimale.

Dimostrazione.

i) ⇒ii) Sia $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \dots$ una catena. Poniamo $I := \bigcup I_j$ allora I è un ideale. Infatti:

- se $a, b \in I \Rightarrow \exists\ j_1, j_2 : a \in I_{j_1},\ b \in I_{j_2} \Rightarrow a, b \in I_k$ con $k = max\{j_1, j_2\}$, I_k ideale $\Rightarrow a - b \in I_k \subseteq I \Rightarrow a - b \in I \Rightarrow (I, +)$ sottogruppo di A;

- se $a \in A,\ b \in I \Rightarrow \exists\ k : b \in I_k$, che è un ideale di $A \Rightarrow ab \in I_k \subseteq I \Rightarrow ab \in I$.

Allora per ipotesi $\exists\ f_1, \dots, f_k : I = (f_1, \dots, f_k) \Rightarrow f_i \in I_{m(i)}$ per qualche $m(i) \Rightarrow$ se $m := max(m(i))$, $I = I_m \Rightarrow$ la catena si ferma a I_m.

ii) ⇒iii) Sia *iii)* falsa, allora esiste un insieme di ideali $T \neq \emptyset$ senza elementi massimali. Sia $I_1 \in T \Rightarrow \exists\ I_2 \in T : I_1 \subset I_2$. Si può quindi costruire induttivamente una catena strettamente crescente di ideali, il che contraddice *ii)*.

iii) ⇒i) Sia I un ideale, $\mathfrak{I} := \{J \subseteq I : J$ è finitamente generato$\}$. $\mathfrak{I}$ è non vuoto, infatti $(0) \in \mathfrak{I}$. Per ipotesi $\mathfrak{I}$ ha un elemento massimale J_{max}. Supponiamo, per assurdo, che $J_{max} \neq I \Rightarrow \exists\ f \in I \setminus J_{max}$. Consideriamo l'ideale $J^* := J_{max} + (f)$;
J^* è finitamente generato e $J_{max} \subset J^* \Rightarrow J^* \in \mathfrak{I}$ e $J_{max} \subset J^* \Rightarrow$ assurdo per la massimalità di J_{max}.

□

Proposizione 1.1.2. *Sia A anello Noetheriano, I ideale di A. Allora A/I è Noetheriano.*

Dimostrazione.
Sia H ideale di $A/I \Rightarrow H = J/I$ con J ideale di A, A Noetheriano $\Rightarrow \exists\ f_1, \dots, f_k : J = (f_1, \dots, f_k) \Rightarrow H = (f_1 + I, \dots, f_k + I)$. Infatti:
$h \in H \Leftrightarrow h = j + I$ con $j \in J \Leftrightarrow h = (\sum_{i=1}^{k} a_i f_i) + I$ con $a_i \in A \Leftrightarrow h =$

$\sum_{i=1}^{k}(a_i + I)(f_i + I)$ con $a_i + I \in A/I \Rightarrow H = (f_1 + I, \dots, f_k + I)$.

□

Teorema 1.1.3. *(Teorema della base di Hilbert)*
Se A è Noetheriano $\Rightarrow$ $A[x]$ è Noetheriano.

Dimostrazione.
Sia $J \subset A[x]$, J ideale. Sia $J_n := \{a \in A : f = ax^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in J$, per qualche $b_i,\ i = 1, \dots, n-1\}$. J_n è un ideale di $A : J_n \subseteq J_{n+1}$. Infatti:

- se $a, b \in J_n \Rightarrow f = ax^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in J$, per qualche $b_i \in J, g = bx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 \in J$, per qualche $c_i \in J,\ J$ ideale$\Rightarrow$ $f - g = (a-b)x^n + \cdots \in J \Rightarrow a - b \in J_n \Rightarrow (J_n, +)$ sottogruppo di A;

- se $a \in A \subset A[x], b \in J_n \Rightarrow f = bx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in J$, per qualche b_i, J ideale di $A[x] \Rightarrow af = abx^n + ab_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ab_0 \in J \Rightarrow ab \in J_n$;

- se $a \in J_n \Rightarrow f = ax^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0 \in J$, per qualche b_i, J ideale di $A[x] \Rightarrow xf = ax^{n+1} + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0x + 0 \in J \Rightarrow a \in J_{n+1}$.

Consideriamo in A la catena di ideali $J_0 \subseteq J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \dots$.
A Noetheriano $\Rightarrow \exists\ N : J_N = J_{N+1} = \dots$. Inoltre per $i \leq N$ si ha $J_i = (a_{i1}, \dots, a_{im(i)})$. Fissiamo tali generatori e poniamo per ciascuno di essi $F_{a_{ik}} = \{f \in J : f = a_{ik}x^i + b_{i-1}^{(i)}x^{i-1} + \cdots + b_0^{(i)}$, per opportuni $b_j^{(i)}, j = 0, \dots, i-1\}$. Scegliamo quindi $\forall i = 0, \dots, N,\ \forall k = 1, \dots, m(i) f_{ik} \in F_{a_{ik}}$, ; allora:

$$J = (\{f_{ik} :\ i = 0, \dots, N\ k = 1, \dots, m(i)\})$$

Infatti sia $g \in J,\ degg = h$ e sia b il coefficiente direttore di g. Allora $b \in J_h$ e data la stazionarietà della catena si ha:

$$b = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m(h)} c_{hk}a_{hk}, & \text{se } h \leq N \\ \\ \sum_{k=1}^{m(h)} c_{Nk}a_{Nk}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Considero:

$$g_1 := \begin{cases} g - (\sum_{k=1}^{m(h)} c_{hk} f_{hk}), & \text{se } h \leq N \\ \\ g - x^{h-N}(\sum_{k=1}^{m(h)} c_{Nk} f_{Nk}), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In ogni caso, $g_1 \in J$. Il termine di grado h di g_1 è $0 \Rightarrow degg_1 \leq degg - 1$. Applicando lo stesso ragionamento al polinomio g_1, dopo un numero finito di passi g risulta combinazione dei polinomi f_{ik}.

□

Definizione 1.2. Siano A un anello (commutativo unitario); un A-*modulo* B è un gruppo abeliano additivo con un'operazione esterna:

$$A \times B \to B$$
$$(a, x) \mapsto ax$$

tali che valgano:

1. $a(x + y) = ax + ay$
2. $(a + b)x = ax + bx$
3. $(a \cdot_A b)x = a(bx)$
4. $1_A x = x$

Definizione 1.3. Sia A un anello; diciamo che B è una A-*algebra* se B è sia un anello che un B-modulo con gli stessi gruppi additivi e vale, $\forall\ \lambda \in A,\ \forall\ x, y \in B,\ \lambda(xy) = (\lambda x) \cdot y = x(\lambda y)$.
In particolare, se K è un campo, un anello A è una K-*algebra* se A è un K-spazio vettoriale e vale, $\forall\ a, b \in A,\ \forall \lambda \in K,\ \lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

Definizione 1.4. Siano K un campo, A una K-algebra e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Sia:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \colon K[x_1, \ldots, x_n] &\to A \\ f &\mapsto f(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

la valutazione di f in $a_1, \ldots, a_n$. Sappiamo che $I = Ker(\mathbf{F})$ è un ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$; inoltre, se $\mathbf{F}$ è suriettiva allora sappiamo anche che $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ è isomorfo a A. In questo caso A si denota con $K[a_1, \ldots, a_n]$.
Diciamo che A è una *K-algebra finitamente generata* se $\exists\, n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A$, tali che $A = K[a_1, \ldots, a_n]$.
Quindi una K-algebra A è finitamente generata se esistono $n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A$ tali che per ogni $b \in A$ esiste $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ con $b = f(a_1, \ldots, a_n)$.
Per ulteriori dettagli si veda [2].

Osservazione 1. K è campo, quindi gli unici ideali di K sono $K = (1)$ e $I = (0) \Rightarrow K$ Noetheriano $\Rightarrow K[x_1]$ Noetheriano $\Rightarrow$ per induzione $K[x_1, \ldots, x_n]$ Noetheriano $\Rightarrow$ per la Proposizione 1.1.2 $K[x_1, \ldots, x_n]/Ker(\mathbf{F})$ Noetheriano, quindi una K-algebra finitamente generata è Noetheriana.

1.2 Insiemi algebrici

Definizione 1.5. Siano K un campo, $A = K[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathfrak{A} = \{J \subseteq A : J \text{ ideale di } A\}$. Se $f \in A$, $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_K$, allora l'elemento $f(a_1, \ldots, a_n) \in K$ è la valutazione di f in P. Sia infine $\wp(\mathbb{A}^n_K)$ l'insieme delle parti di $\mathbb{A}^n_K$.
Si definiscono le seguenti applicazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \colon \mathfrak{A} &\to \wp(\mathbb{A}^n_K) \\ J &\mapsto \mathbf{V}(J) \end{aligned}$$

con $\mathbf{V}(J) = \{P \in \mathbb{A}^n_K : f(P) = 0\ \forall f \in J\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \colon \wp(\mathbb{A}^n_K) &\to \mathfrak{A} \\ X &\mapsto \mathbf{I}(X) \end{aligned}$$

con $\mathbf{I}(X) = \{f \in A : f(P) = 0\ \forall P \in X\}$;

$X \in \mathbf{V}(\mathfrak{A})$ è detto *insieme algebrico.*

Proposizione 1.2.1 (Topologia di Zariski)**.** *L'applicazione* $\boldsymbol{V}$ *soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\boldsymbol{V}(0) = \mathbb{A}^n_K,\ \ \boldsymbol{V}(A) = \emptyset$
2. $\boldsymbol{V}(I) \cup \boldsymbol{V}(J) = \boldsymbol{V}(I \cap J)$
3. $\bigcap_\lambda \boldsymbol{V}(I_\lambda) = \boldsymbol{V}(\sum_\lambda I_\lambda)$

Quindi i sottoinsiemi algebrici di $\mathbb{A}^n_K$ *possono essere visti come gli insiemi chiusi di una topologia, chiamata topologia di Zariski.*

Dimostrazione.

1. Segue dalla definizione di $\mathbf{V}$;
2. sia $P \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$, supponiamo per esempio $P \in \mathbf{V}(J)$. Allora, se $f \in I \cap J \Rightarrow$ in particolare $f \in J \Rightarrow f(P) = 0 \Rightarrow P \in \mathbf{V}(I \cap J) \Rightarrow \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \subseteq \mathbf{V}(I \cap J)$. Supponiamo per assurdo $P \in \mathbf{V}(I \cap J),\ P \notin \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \Rightarrow \exists\, f \in I,\ g \in J$ tali che $f(P) \neq 0, g(P) \neq 0 \Rightarrow fg \in I \cap J$ con $fg(P) \neq 0$ quindi viene contraddetta l'ipotesi $\Rightarrow \mathbf{V}(I \cap J) \subseteq \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$. In conclusione $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(I \cap J)$;
3. $P \in \bigcap_\lambda \mathbf{V}(I_\lambda) \iff f(P) = 0\ \forall\ f \in I_\lambda,\ \forall \lambda \iff f(P) = 0\ \forall\ f \in \sum_\lambda I_\lambda \Rightarrow P \in \mathbf{V}(\sum_\lambda I_\lambda)$. Quindi $\bigcap_\lambda \mathbf{V}(I_\lambda) = \mathbf{V}(\sum_\lambda I_\lambda)$.

□

Osservazione 2. $A = K[x_1, \dots, x_n]$ Noetheriano $\Rightarrow J$ ideale di A è tale che $J = (f_1, \dots, f_k)$ per qualche $f_1, \dots, f_k \in A \Rightarrow \mathbf{V}(J) = \{P \in \mathbb{A}^n_K : f_i(P) = 0,\ i = 1, \dots, k\}$, chiuso rispetto la topologia di Zariski.
Dunque un aperto Y di Zariski. $Y \neq \emptyset$, è il complementare di un insieme algebrico in $\mathbb{A}^n_K$.
In particolare se $K = \mathbb{R}$ (oppure $\mathbb{C}$), allora $K[x]$ è un PID, quindi un insieme chiuso $X \subseteq \wp(\mathbb{A}^1_K)$ rispetto alla topologia di Zariski è un insieme del tipo:

$$\mathbf{V}(f) = \{P \in K : f(P) = 0\}$$

dove f è una funzione polinomiale in x, che è continua rispetto alla topologia euclidea; X è dunque chiuso anche rispetto la topologia euclidea.
Un aperto di Zariski non vuoto in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ o in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ è denso in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, rispettivamente in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$.

Proposizione 1.2.2. *Siano $X \subseteq \wp(\mathbb{A}^n_K)$, $J \in \mathfrak{A}$. Valgono le seguenti proprietà:*

1. *$I \subseteq J \Rightarrow \boldsymbol{V}(I) \supseteq \boldsymbol{V}(J)$;*
2. *$X \subseteq Y \iff \boldsymbol{I}(X) \supseteq \boldsymbol{I}(Y)$;*
3. *$X \subseteq \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}(X))$ e si ha $X = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I}(X)) \Leftrightarrow X$ è un insieme algebrico;*
4. *$J \subseteq \boldsymbol{I}(\boldsymbol{V}(J))$.*

Dimostrazione.

1. Se $P \in \mathbf{V}(J) \Rightarrow f(P) = 0\ \forall\ f \in J,\ J \supseteq I \Rightarrow f(P) = 0\ \forall\ f \in I \Rightarrow P \in \mathbf{V}(I) \Rightarrow \mathbf{V}(I) \supseteq \mathbf{V}(J)$;
2. se $X \subseteq Y$, sia $f \in \mathbf{I}(Y) \Rightarrow\ f(P) = 0\ \forall\ P \in Y \supseteq X \Rightarrow$ in particolare $f(P) = 0\ \forall\ P \in X \Rightarrow f \in \mathbf{I}(X) \Rightarrow \mathbf{I}(Y) \subseteq \mathbf{I}(X)$. Viceversa, se $\mathbf{I}(Y) \subseteq \mathbf{I}(X)$, sia $P \in X \Rightarrow\ f(P) = 0\ \forall\ f \in \mathbf{I}(X) \supseteq \mathbf{I}(Y) \Rightarrow$ in particolare $f(P) = 0\ \forall\ f \in \mathbf{I}(Y) \Rightarrow P \in Y \Rightarrow X \subseteq Y$.

3. Se $P \in X$, per definizione di $\mathbf{I}(X)$ si ha $f(P) = 0 \ \forall f \in \mathbf{I}(X) \Rightarrow P \in \mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) = \{P \in \mathbb{A}^n_K : f(P) = 0 \ \forall f \in \mathbf{I}(X)\}$.
   $X = \mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) \Rightarrow X$ è algebrico perché immagine mediante $\mathbf{V}$ dell'ideale $\mathbf{I}(X)$. Viceversa, se X è algebrico $\Rightarrow X = \mathbf{V}(I_0)$, I_0 ideale di A. Se $f \in I_0 \Rightarrow f(P) = 0 \ \forall P \in X \Rightarrow I_0 \subseteq \mathbf{I}(X) \Rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) \subseteq \mathbf{V}(I_0) = X$.

4. Se $f \in J$, $\mathbf{V}(J)$ individua un sottoinsieme algebrico $X : \forall \ P \in X, \ f(P) = 0 \Rightarrow$ dalla definizione di $\mathbf{I}(X)$ segue la tesi.

□

Osservazione 3. È interessante esaminare due casi particolari per cui $J \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$:

1. $(n = 1)$ K non algebricamente chiuso, $f \in K[x] \setminus K$ senza radici in K. Sia $J = (f) \subset K[x]$ $(1 \notin J)$.
   $\mathbf{V}(J) = \{P \in \mathbb{A}^1_K : f(P) = 0\} = \emptyset \Rightarrow \mathbf{I}(\mathbf{V}(J)) = K[x] \Rightarrow J \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$

2. $f \in K[x_1, \ldots, x_n], a \geq 2$. Sia $J = (f^a) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$.
   $\mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(f) \Rightarrow f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$. Ma $f \notin J \Rightarrow J \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$

Definizione 1.6. Introduciamo le seguenti definizioni:

1. Sia I ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$. Il *radicale di* I è l'insieme

$$\sqrt{I} = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : f^n \in I \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}$$

2. Un insieme algebrico X è detto *irriducibile* se non esistono due insiemi algebrici X_1 e X_2, $X_1 \neq \emptyset$, $X_2 \neq \emptyset$, $X_1 \neq X$, $X_2 \neq X$ tali che $X = X_1 \cup X_2$.

Proposizione 1.2.3. *Sia I ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$. Il radicale di I è un ideale.*

Dimostrazione.

Proviamo solo la chiusura rispetto $+_A$ (le altre proprietà sono immediate): siano $f, g \in \sqrt{I} \Rightarrow f^n \in I,\ g^m \in I$ per qualche $n, m \in \mathbb{N}$ e sia $r = n + m \Rightarrow (f+g)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{r-k} g^k \in I$ poiché per $k = 0, \ldots, m-1$ $r - k > n$ per cui $f^{r-k} \in I$ e per $k \geq m$ $g^k \in I,\ I$ ideale $\Rightarrow (f+g) \in \sqrt{I}$. □

Definizione 1.7. Un ideale I si dice *radicale* se $I = \sqrt{I}$.
Il radicale di un ideale I è un ideale radicale, cioè $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Proposizione 1.2.4. *Siano I ideale, $X \subset \mathbb{A}^n_K$ algebrico.*

1. *Se I è un ideale primo $\Rightarrow I$ è radicale.*
2. *X è irriducibile $\Leftrightarrow \boldsymbol{I}(X)$ è primo.*

Dimostrazione.

1. I primo. E' sempre vero che $I \subseteq \sqrt{I}$. Dimostriamo $I \supseteq \sqrt{I}$. Se $f \in \sqrt{I} \Rightarrow f^n \in I, I$ primo$\Rightarrow (f \in I\ \vee\ f^{n-1} \in I) \Rightarrow$ se vale $f \in I$ abbiamo concluso, altrimenti $f^{n-1} \in I \Rightarrow$ ripetendo il ragionamento al più $n-1$ volte si ha $f \in I \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq I$
$\Rightarrow I = \sqrt{I}$.

2. Dimostriamo la contronominale: X riducibile $\Leftrightarrow \mathbf{I}(X)$ non è primo.

   - X riducibile $\Rightarrow \exists\ X_1, X_2 \subset X$ algebrici : $X = X_1 \cup X_2 \Rightarrow \mathbf{I}(X) \subset \mathbf{I}(X_1),\ \mathbf{I}(X) \subset \mathbf{I}(X_2) \Rightarrow \exists f_1 \in \mathbf{I}(X_1) \setminus \mathbf{I}(X),\ f_2 \in \mathbf{I}(X_2) \setminus \mathbf{I}(X)$. Ora, $(f_1 \cdot f_2)(P) = 0\ \forall\ P \in X \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in \mathbf{I}(X)$, con $f_1, f_2 \notin \mathbf{I}(X) \Rightarrow \mathbf{I}(X)$ non è primo.

- $\mathbf{I}(X)$ non è primo $\Rightarrow \exists\ f_1, f_2 \notin \mathbf{I}(X) : f_1 \cdot f_2 \in \mathbf{I}(X)$. Siano $I_i = (\mathbf{I}(X), f_i),\ i = 1, 2,\ X_i := \mathbf{V}(I_i)\ i = 1, 2$ ($\Rightarrow X_i$ algebrici) $\Rightarrow$ $\forall\ P \in X(f_1 \cdot f_2)(P) = 0 \Rightarrow (f_1(P) = 0\ \vee\ f_2(P) = 0) \Rightarrow X = X_1 \cup X_2$ con $\emptyset \subset X_i \subset X \Rightarrow X$ riducibile.

$\square$

1.3 Nullstellensatz

Definizione 1.8. Siano A anello, B una A-algebra, $b_1, b_2 \in B$. Introduciamo le seguenti notazioni:

- $b_1 A := \{b_1 a : a \in A\}$;
- $b_1 A + b_2 A := \{h + k : h \in b_1 A, k \in b_2 A\}$.

Si dice che B è una $A-algebra\ finita$ se $\exists\ b_1, \ldots, b_n \in B : B = b_1 A + \cdots + b_n A$.

Quindi se K è un campo B è una K-algebra finita se come K-spazio vettoriale è finitamente generato, cioè se esistono $b_1, \ldots, b_n$ tali che ogni $a \in B$ si scriva come $a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,\ a_i \in K$.

Lemma 1.3.1. *Lemma di normalizzazione di Noether.*

Sia K campo infinito, $A = K[a_1, \ldots, a_n]$ una K-algebra finitamente generata. Allora $\exists\ y_1, \ldots, y_m \in A,\ m \leq n$ tali che:

1. *$y_1, \ldots, y_m$ sono algebricamente indipendenti su K, ovvero non esiste un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_m],\ f \neq 0$, tale che $f(y_1, \ldots, y_m) = 0$*
2. *A è una $K[y_1, \ldots, y_m]$-algebra finita.*

Dimostrazione.

Sia ϕ la mappa di K-algebre:

$$\phi\colon K[x_1,\dots,x_n] \to K[a_1,\dots,a_n] = A$$
$$x_i \mapsto a_i$$

Sia $I = Ker\phi$ e sia $f \in I \setminus \{0\}$.
Definiamo:

$$\begin{cases} a'_1 = a_1 - \alpha_1 a_n \\ \vdots \\ a'_{n-1} = a_{n-1} - \alpha_{n-1} a_n \end{cases}$$

con $\alpha_i \in K,\ i = 1,\dots,n-1$. Risulta $f(a'_1 + \alpha_i a_n,\dots,a'_{n-1} + \alpha_{n-1}a_n, a_n) = 0$. Si possono scegliere $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$ tali che, denotando con $x'_1,\dots,x'_{n-1}$ nuove variabili tali che $x_i = x'_i + \alpha_i x_n$ per $i = 1,\dots,n-1$, il polinomio $f(x'_1 + \alpha_i x_n,\dots,x'_{n-1} + \alpha_{n-1}x_n, x_n)$ sia monico in x_n $(\star)$. Infatti:
se $degf = d \Rightarrow f = F_d + G$ con F_d polinomio omogeneo di grado d e G tale che $degG \leq d-1 \Rightarrow f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = f(x'_1 + \alpha_1 x_n,\dots,x'_{n-1} + \alpha_{n-1}x_n, x_n) = F_d(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},1)x_n^d + h$, con h polinomio tale che il grado di x_n in h è minore o uguale a $d-1$. Poiché $F_d \neq 0$, possiamo scegliere gli α_i tali che $F_d(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},1) \neq 0 \Rightarrow f(x'_1 + \alpha_i x_n,\dots,x'_{n-1} + \alpha_{n-1}x_n, x_n)$ è monico in x_n.
Procediamo la dimostrazione per induzione su n.

- Se $I = 0$ $a_1,\dots,a_n$ sono algebricamente indipendenti e hanno il ruolo quindi degli $y_1,\dots,y_m$ cercati.

- Supponiamo allora $I \neq 0$ e la tesi vera per $n-1$. Sia $f \in I \setminus \{0\},\ \alpha_i \in K,\ i = 1,\dots,n-1$ come sopra $\Rightarrow f$ individua una relazione algebrica monica soddisfatta da a_n con coefficienti in $A' = K[a'_1,\dots,a'_{n-1}] \subseteq A$ per $(\star)$. Per l'ipotesi induttiva $\exists\ y_1,\dots,y_m \in A'$: $y_1,\dots,y_m$ algebricamente indipendenti su K e A' è una $K[y_1,\dots,y_m]$-algebra finita

$\Rightarrow A = A'[a_n]$ è algebra finita su A' per [1], II. 3.12 *iii*), e quindi per quanto spiegato subito sotto A algebra finita su $K[y_1, \ldots, y_m]$.
Proviamo che se A, B, C sono anelli con $A \subset B \subset C$, B A-algebra finita, C B-algebra finita $\Rightarrow C$ è $A-$algebra finita. Infatti per ipotesi $\exists c_1, \ldots, c_k \in C$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$ tali che se $c \in C \Rightarrow \exists\ b^{(1)}, \ldots, b^{(k)}$: $c = \sum_{s=1}^{k} b^{(s)} c_s$ e, $\forall s = 1, \ldots, k,\ \exists\ a_s^{(1)}, \ldots, a_s^{(n)}$: $b^{(s)} = \sum_{t=1}^{n} a_s^{(t)} b_t \Rightarrow$ $c = \sum_{s=1}^{k} (\sum_{t=1}^{n} a_s^{(t)} b_t) c_s = \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} a_s^{(t)} (b_t c_s),\ b_t c_s \in C \Rightarrow C$ è una A-algebra finita.

$\square$

La seguente proposizione viene usata nella dimostrazione del Teorema degli zeri di Hilbert:

Proposizione 1.3.2. *Siano K un campo infinito e A una K-algebra finitamente generata. Se A è campo $\Rightarrow$ l'estensione $K \subset A$ è algebrica.*

La dimostrazione è basata sul Lemma di normalizzazione di Noether; per i dettagli si rimanda a [1] II. 3.15.

Teorema 1.3.3. *Teorema degli zeri di Hilbert (Nullstellensatz)*
Sia K un campo algebricamente chiuso, $A = K[x_1, \ldots, x_n]$. Allora:

1. *Ogni ideale massimale dell'anello dei polinomi A è della forma*

$$m_P = (x - a_1, \ldots, x - a_n)$$

   per $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_K^n$, ovvero $m_P = \boldsymbol{I}(P)$

2. *$J \subset A, J$ ideale di $A, J \neq (1) \Rightarrow \boldsymbol{V}(J) \neq \emptyset$ (ovvero i generatori di J hanno degli zeri comuni in $\mathbb{A}_K^n$)*

3. *$J \subset A, J$ ideale di $A \Rightarrow \boldsymbol{I}(\boldsymbol{V}(J)) = \sqrt{J}$*

Dimostrazione.

1. Sia $m \subseteq A$ un ideale massimale. Allora A/m è un campo.
   Sia $i : K \to A$ l'inclusione e $\pi : A \to A/m$ la proiezione canonica. Definiamo $\phi : K \to A \to A/m,\ \phi := \pi \circ i$.
   A/m è una K-algebra finitamente generata da $\pi(x_i),\ i = 1, \dots, n \Rightarrow$ per la Proposizione 1.3.2 A/m è algebrico su K. Ma K è algebricamente chiuso $\Rightarrow \phi$ è isomorfismo.
   Ora: $b_i := \pi(x_i),\ a_i := \phi^{-1}(b_i),\ i = 1, \dots, n \Rightarrow x_i - a_i \in Ker(\pi) \Rightarrow \exists\ a_1, \dots, a_n : (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq m$. Ma $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ è un ideale massimale in $A \Rightarrow m = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

2. $J \neq A,\ A$ Noetheriano $\Rightarrow \exists\ m \subseteq A$, m ideale massimale : $J \subseteq m$. Allora per la 1. $m = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ per qualche $a_1, \dots, a_n \Rightarrow \forall f \in J\ f(a_1, \dots, a_n) = 0 \Rightarrow P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(J) \Rightarrow \mathbf{V}(J) \neq \emptyset$

3. Sia J un ideale di $K[x_1, \dots, x_n],\ f \in K[x_1, \dots, x_n], J = (f_1, \dots, f_k)$ (A è Noetheriano). Consideriamo $J_1 = (J, fy - 1) \subset K[x_1, \dots, x_n, y]$. Se $Q \in \mathbf{V}(J_1)$ allora $Q = (a_1, \dots, a_n, a_y)$ tale che:
   $g(a_1, \dots, a_n) = 0\ \forall\ g \in J,\ P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(J)$ e $f(P) \cdot a_y = 1$, quindi $f(P) \neq 0,\ a_y = f(P)^{-1}$.
   Supponiamo $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(J)) \Rightarrow f(P) = 0\ \forall\ P \in V(J) \Rightarrow V(J_1) = \emptyset \Rightarrow$ per la 2. si ha $1 \in J_1$. Quindi:

   $$1 = \sum_{i=1}^{k} g_i f_i + g_0(fy - 1) \tag{1.1}$$

   con $g_j \in K[x_1, \dots, x_n, y],\ j = 0, \dots, n$. Sia N la potenza più grande con cui y appare in $g_0, \dots, g_k$. Moltiplicando per f^N la 1.1:

   $$f^N = \sum_{i=1}^{k} f^N g_i f_i + f^N g_0(fy - 1) \tag{1.2}$$

   Riscriviamo 1.2 usando come variabile fy al posto di y, dove $G_i(x_1, \dots, x_n, fy)$ denota $f^N g_i$ pensato come polinomio in $x_1, \dots, x_n, fy$:

   $$f^N = \sum_{i=1}^{k} G_i f_i + G_0(fy - 1)$$

Riducendo le due espressioni modulo l'ideale $U = (fy - 1)$:

$$[f^N]_{\sim U} = [\sum_{i=1}^{k} h_i(x_1, \dots, x_n) f_i]_{\sim U} \in K[x_1, \dots, x_n, y]/(fy - 1)$$

In entrambi i membri non vi è dipendenza dalla variabile y; inoltre, l'omomorfismo $K[x_1, \dots, x_n] \to K[x_1, \dots, x_n, y]/(fy - 1)$ è iniettivo, poiché si può interpretare come l'inclusione di $K[x_1, \dots, x_n]$ sul suo campo dei quozienti, quindi passando ai rappresentanti:

$$f^N = \sum_{i=1}^{k} h_i(x_1, \dots, x_n) f_i \in J \Rightarrow f^N \in J.$$

L'inclusione inversa è immediata.

$\square$

Osservazione 4. Il Nullstellensatz, insieme alla Proposizione 1.2.4, prova quindi che le applicazioni **V,I** inducono le seguenti biezioni:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{ ideali primi } \} & \subset & \{ \text{ ideali radicali } \} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \{ \text{ insiemi irriducibili } \} & \subset & \{ \text{ insiemi algebrici } \} \end{array}$$

Capitolo 2

Varietà affini

In questo capitolo supponiamo che K sia un campo algebricamente chiuso.

2.1 Mappe sulle varietà

Definizione 2.1. Sia $\mathbf{I}(V)$ l'immagine tramite $\mathbf{I}$ di un sottoinsieme algebrico V. Consideriamo l'anello quoziente $K[V] := K[x_1, \ldots, x_n]/\mathbf{I}(V) = \{[f] : f \in K[x_1, \ldots, x_n]\}$ con $[f] = f + \mathbf{I}(V) = \{F \in K[x_1, \ldots, x_n] : f - F \in \mathbf{I}(V)\} = \{F \in K[x_1, \ldots, x_n] : f(P) - F(P) = 0, \ \forall\ P \in V\}$.
L'anello $K[V]$ è detto *anello delle coordinate di V*. In breve, ogni classe di equivalenza contiene tutti i polinomi che, valutati in tutti i punti di V, coincidono.
Possiamo definire una *funzione polinomiale su V* come una mappa $\tilde{f} : V \to K$ dove $\tilde{f}$ è la restrizione di una funzione polinomiale $f : \mathbb{A}^n_K \to K$, $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Per quanto detto sopra, le funzioni polinomiali su V si possono identificare agli elementi di $K[V]$. Più in dettaglio, sia $\gamma : K[x_1, \ldots, x_n] \to \{f : V \longrightarrow K : f \textit{ funzione}\}$ tale che $\gamma(f) = f_{|V}$. Banalmente si verifica che $Im\gamma = \{f : V \longrightarrow K : f \textit{ funzione polinomiale}\}$ è un sottoanello di tutte le funzioni da V in K e che γ è un omomorfismo. Quindi sappiamo che il

seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
K[x_1,\dots,x_n] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathrm{p}"] & \{f: V \longrightarrow K\} \\
K[x_1,\dots,x_n]/Ker\gamma \arrow[r, "\phi"] & \{f: V \longrightarrow K : f \textit{ funzione polinomiale}\} \arrow[u, "\mathrm{i}"]
\end{tikzcd}$$

dove p è la proiezione sul quoziente, i l'inclusione e ϕ è isomorfismo.
Ora, $Ker\gamma = \mathbf{I}(V)$ perché $f \in Ker\gamma \iff f_{|V} = 0 \iff f(P) = 0 \ \forall\ P \in V \iff f \in \mathbf{I}(V)$; quindi $K[x_1,\dots,x_n]/Ker\gamma = K[V]$, dunque si ha l'identificazione $K[V] \simeq \{f : V \longrightarrow K : f$ *funzione polinomiale*$\}$. Per questo motivo, con abuso di notazione, indicheremo $[f]$ con f.
Infine, osserviamo che $K[V]$ contiene le funzioni *coordinate*

$$x_i : V \to K$$
$$(a_1,\dots,a_n) \mapsto a_i$$

e che esse sono dei generatori di $K[V]$ poiché, in breve, se $[f] \in K[V]$ allora f è un polinomio nelle coordinate $x_1,\dots,x_n$.

Osservazione 5. Sia $\pi : K[x_1,\dots,x_n] \to K[V]$ la proiezione canonica. Applicando un risultato generale, sappiamo che esiste la corrispondenza biunivoca:

$$\{J \text{ ideale di } K[x_1,\dots,x_n] : \mathbf{I}(V) \subseteq J\} \to \{L \text{ ideale di } K[x_1,\dots,x_n]/\mathbf{I}(V)\}$$
$$J \quad \mapsto \quad \pi(J)$$

Nel Capitolo 1 abbiamo definito le applicazioni $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$, rispettivamente, su tutto $\mathfrak{A} = \{J \subseteq K[x_1,\dots,x_n] : J \text{ ideale di } K[x_1,\dots,x_n]\}$ e sull'insieme delle parti $\wp(\mathbb{A}^n_K)$. Sfruttando il risultato suddetto e 1. e 2. della Proposizione 1.2.2 è allora possibile ridefinire nello stesso modo $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$, rispettivamente, su $\{J \subseteq K[V] : J \text{ ideale di } K[V]\}$ e $\wp(V)$, deducendo proprietà di $\mathbf{V}$ e $\mathbf{I}$ analoghe a quelle studiate nel capitolo precedente.
In particolare, su V è possibile indurre la topologia di Zariski, per cui i sottoinsiemi chiusi sono i sottoinsiemi algebrici di V, dove con *algebrici* ci si riferisce alla funzione $\mathbf{V}$ appena vista, e questa topologia naturalmente non

è altro che la topologia indotta da quella di Zariski su $\mathbb{A}^n_K$.

Proposizione 2.1.1. *Sia V sottoinsieme algebrico. Sono equivalenti:*

1. *V è irriducibile;*

2. *se $U_1 \neq \emptyset,\ U_2 \neq \emptyset,\ U_1, U_2 \subset V$ aperti $\Rightarrow U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$;*

3. *se $U \neq \emptyset,\ U \subseteq V,\ U$ aperto $\Rightarrow U$ è denso in V.*

Dimostrazione.

- 1) $\iff$ 2): V irriducibile $\iff \forall\ Z_1 \neq \emptyset,\ Z_2 \neq \emptyset,\ Z_1, Z_2 \subset V$ algebrici (dunque chiusi) $V \neq Z_1 \cup Z_2 \iff \forall\, U_1,\ U_2$ aperti in V, $U_1 = V \setminus Z_1,\ U_2 = V \setminus Z_2,\ \ \emptyset \neq V \setminus (Z_1 \cup Z_2) = (V \setminus Z_1) \cap (V \setminus Z_2) = U_1 \cap U_2$.

- 2) $\iff$ 3): segue dal fatto che un sottoinsieme U è denso se e solo se $U \cap A \neq \emptyset$ per ogni aperto $A \neq \emptyset$.

□

Definizione 2.2. Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n_K, W \subseteq \mathbb{A}^m_K$ insiemi algebrici. Denotiamo con $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_m$ le coordinate rispettivamente di $\mathbb{A}^n_K$ e $\mathbb{A}^m_K$. Una mappa $f : V \to W$ è detta *mappa polinomiale* se $\exists F_1, \ldots, F_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tali che $f(P) = (F_1(P), \ldots, F_m(P))\ \forall\ P \in V$.
Nota: Il concetto di mappa polinomiale è una generalizzazione del concetto di funzione polinomiale.

Proposizione 2.1.2. *Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n_K, W \subseteq \mathbb{A}^m_K$ insiemi algebrici. Una funzione $f : V \to W$ è una mappa polinomiale $\iff \forall\ j = 1, \ldots, m\ f_j := y_j \circ f \in K[V]$.*
Se $f : V \to W$ è una mappa polinomiale scriveremo quindi $f = (f_1 \ldots, f_m)$.

Dimostrazione.

f è mappa polinomiale $\Rightarrow f = (F_1, \dots, F_m),\ F_1, \dots, F_m \in K[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow \forall\ j = 1, \dots, m\ \ y_j \circ f = F_j$, che essendo per definizione un polinomio valutabile in ogni punto di V, è una funzione polinomiale su $V \Rightarrow f_j \in K[V]$. Viceversa se $f_j \in K[V]\ \forall\ j = 1, \dots, m \Rightarrow f_j = [F_j]_{\sim_{I(V)}} \Rightarrow$ scegliendo m rappresentanti $F_j,\ \forall\ j = 1, \dots, m$ si ha $f = (F_1, \dots, F_m) \Rightarrow f$ mappa polinomiale.

□

Osservazione 6. Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n_K,\ W \subseteq \mathbb{A}^m_K,\ U \subseteq \mathbb{A}^l_K$ insiemi algebrici. Siano poi $f : V \to W,\ g : W \to U$ mappe polinomiali descritte da $g = (G_1, \dots, G_l),\ f = (F_1, \dots, F_m),\ G_1, \dots, G_l \in K[y_1, \dots, y_m],\ F_1, \dots, F_m \in K[x_1, \dots, x_n]$. Allora la composizione $g \circ f$ è una mappa polinomiale, in quanto $g \circ f = (G_1(F_1, \dots, F_m), \dots, G_l(F_1, \dots, F_m)) \in K[x_1, \dots, x_n]$

Definizione 2.3. Siano V, W come nella Proposizione 2.1.2. Una mappa polinomiale $f : V \to W$, è detta $isomorfismo$ se $\exists\ g : W \to V$ mappa polinomiale tale che $g \circ f = f \circ g = id$.

Esempio 2.1. Un esempio di mappa polinomiale è

$$\begin{aligned} \phi_n \colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} &\to \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \\ t &\mapsto (t^2, t^n) \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.4. Siano A, B due K-algebre. Allora una funzione $h : A \to B$ è detta *omomorfismo di K-algebre* se:

- h è omomorfismo di anelli;

- $\forall\ \lambda \in K,\ \forall a \in A,\ h(\lambda a) = \lambda h(a)$, cioè h è una applicazione lineare dei K-spazi vettoriali A e B.

Teorema 2.1.3. *Siano $V \subseteq \mathbb{A}^n_K,\ W \subseteq \mathbb{A}^m_K$ insiemi algebrici. Allora:*

1. *se $f : V \to W$ è mappa polinomiale allora f induce un omomorfismo di K-algebre:*
$$\begin{aligned} f^*\colon K[W] &\to K[V] \\ g \ &\mapsto \ g \circ f \end{aligned}$$

2. *se $\phi : K[W] \to K[V]$ è omomorfismo di K-algebre allora $\exists!\ f : V \to W$ mappa polinomiale tale che $\phi = f^*$;*

3. *se $f : V \to W,\ g : W \to U$ sono mappe polinomiali allora $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Dimostrazione.

1. Ricordiamo che $K[V]$ e $K[W]$ sono quozienti modulo un ideale di $K[x_1, \dots, x_n]$, quindi come visto nel Capitolo 1, sono K-algebre; osserviamo che $f^*(g) = g \circ f : V \to K$ è una funzione polinomiale di $K[V]$, per quanto detto in generale nell'Osservazione 6. Inoltre $\forall\ g, h \in K[V],\ \forall \lambda \in K:$
   - $f^*(g + h) = (g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f) = f^*(g) + f^*(h)$;
   - $f^*(gh) = gh \circ f = (g \circ f)(h \circ f) = f^*(g)f^*(h)$;
   - $f^*(\lambda g) = (\lambda g) \circ f = \lambda(g \circ f) = \lambda f^*(g)$.

2. Per $\forall\ i = 1, \dots, m$ siano $w_i : W \to K$ le funzioni coordinate su W; sappiamo che $w_i \in K[W] \Rightarrow K[W] = K[w_1, \dots, w_m] = K[y_1, \dots, y_m]/I(W)$. Sia ϕ come nell'ipotesi. Definisco $f_i := \phi(w_i) \in K[V]$ (quindi $f_i : V \to K$ funzione polinomiale) e sia dunque $f : V \to \mathbb{A}^m_K,\ f(P) =$

$(f_1(P), \ldots, f_m(P))$. Banalmente f è una mappa polinomiale.
Inoltre $f(V) \subseteq W$: infatti sia $G \in I(W) \Rightarrow G(P) = G(w_1(P), \ldots, w_m(P)) = 0 \;\; \forall\, P \in W \Rightarrow 0 = G(w_1, \ldots, w_m) = \phi(G(w_1, \ldots, w_m)) = G(\phi(w_1), \ldots, \phi(w_m)) = G(f_1, \ldots, f_m)$.
La seconda uguaglianza è giustificata dal fatto che G è un polinomio e ϕ è omomorfismo di K-algebre. Quindi siccome $G \in I(W)$, $G(f(P)) = G(f_1(P), \ldots, f_m(P)) = 0 \Rightarrow f(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P)) \in W \Rightarrow f(V) \subseteq W$ quindi f è una mappa polinomiale da V a W. Inoltre $f^*(w_i) = w_i \circ f = w_i(f_1, \ldots, f_m) = f_i = \phi(w_i) \Rightarrow \phi = f^*$. Infatti i w_i costituiscono un insieme di generatori per $K[W]$.

3. $(g \circ f)^*(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = g^*(h) \circ f = f^*(g^*(h)) = (f^* \circ g^*)(h)$.

□

Corollario 2.1.4. *Da 1. e 2. del Teorema 2.1.3 segue che, ponendo $M := \{f : V \to W : f \text{ mappa polinomiale}\}$ e $O = \{\phi : K[V] \to K[W] : \phi \text{ omomorfismo di } K\text{-algebre}\}$ si ha una biezione:*

$$\begin{aligned} M &\to O \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

Inoltre, una mappa polinomiale $f : V \to W$ è isomorfismo $\iff$ $f^* : K[W] \to K[V]$ è isomorfismo.
Quindi V, W sono insiemi algebrici isomorfi $\iff$ $K[V]$, $K[W]$ sono isomorfi, cioè l'anello delle coordinate è un invariante per isomorfismi.

2.2 Varietà affini

Definizione 2.5. Una *varietà affine su un campo K* è una coppia $(V, K[V])$ tale che:

1. $K[V]$ è una K-algebra finitamente generata di funzioni $f : V \to K$;

2. per un'opportuna scelta di generatori $x_1, \ldots, x_n$ di $K[V]$ la mappa $\mathbf{x} : V \to \mathbb{A}^n_K$, $\mathbf{x}(P) = (x_1(P), \ldots, x_n(P))$ immerge V come insieme algebrico irriducibile.

Osservazione 7. Se V varietà affine allora $K[V]$ è una K-*algebra* finitamente generata isomorfa all'anello delle coordinate di $\mathbf{x}(V) : K[x_1, \ldots, x_n]/\mathbf{I}(\mathbf{x}(V))$ dove $\mathbf{I}(\mathbf{x}(V))$ è primo, quindi $K[V]$ è un dominio di integrità. Dunque ha senso considerarne il campo dei quozienti.

Definizione 2.6. Sia V una varietà affine.

- Il campo dei quozienti di $K[V]$ è detto *campo delle funzioni di* V e viene denotato con $K(V) = \{g/h : g, h \in K[V], h \neq 0\}$. Un elemento di $K(V)$ è detto *funzione razionale di* V.

  Nota. Non è detto che una funzione razionale su V sia una funzione che abbia come dominio V, a causa degli eventuali zeri di h. Per questo motivo si introducono le definizioni che seguono.

- Sia $f \in K(V)$, $P \in V$. f è detta *regolare in* P (o che P *è nel dominio di definizione di* f) se esistono $g, h \in K[V]$: $f = g/h$ con $h(P) \neq 0$.

  Nota. E' possibile che una funzione razionale abbia più rappresentazioni essenzialmente diverse del tipo g/h poiché, in generale, $K[V]$ non è UFD.

- Poniamo, infine:

- *domf* $= \{P \in V : f$ regolare in $P\}$, detto *dominio di definizione di* f;

- $\mathcal{O}_{V,P} = \{f \in K(V) : f \text{ regolare in } P\} = K[V][\{h^{-1} : h \in K[V],\ h(P) \neq 0\}]$, detto *anello locale di* V *in* P.

Teorema 2.2.1. *Siano* V *una varietà affine,* $P \in V$, $f \in K(V)$. *Valgono allora le seguenti affermazioni:*

1. $\mathcal{O}_{V,P}$ *è sottoanello di* $K(V)$;

2. *domf è aperto denso nella topologia di Zariski di* V;

3. *domf*$=V \iff f \in K[V]$. *In altri termini,* f *è funzione razionale regolare ovunque* $\iff f$ *è funzione polinomiale.*

4. $\forall\ h \in K[V]$, *sia* $V_h = \{P \in V : h(P) \neq 0\} = V \setminus \boldsymbol{V}(h)$; *allora* $V_h \subseteq$ *domf* $\iff f \in K[V][h^{-1}]$.

Dimostrazione.

1. - Utilizzando le proprietà della struttura di campo di $K(V)$, se $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{V,P} \Rightarrow f_1 = g_1h_1^{-1}, f_2 = g_2h_2^{-1}$ con $h_1(P) \neq 0, h_2(P) \neq 0 \Rightarrow f_1 - f_2 = g_1h_1^{-1} - g_2h_2^{-1} = (g_1h_1^{-1})(h_2h_2^{-1}) - (g_2h_2^{-1})(h_1h_1^{-1}) = (g_1h_2)(h_1^{-1}h_2^{-1}) - (g_2h_1)(h_1^{-1}h_2^{-1}) = (g_1h_2 - g_2h_1)(h_1^{-1}h_2^{-1}) = GH^{-1}$ con $G = g_1h_2 - g_2h_1 \in K[V],\ H \in K[V],\ H(P) = h_1(P)h_2(P) \neq 0$;

   - con procedimenti analoghi, se $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{V,P} \Rightarrow f_1f_2 \in \mathcal{O}_{V,P}$.

   Quindi $\mathcal{O}_{V,P}$ è sottoanello di $K(V)$.

2. Sia $D_f := \{h \in K[V] : hf \in K[V]\} = \{h \in K[V] : f = g/h,\ g \in K[V]\} \cup \{0\}$. D_f è un ideale di $K[V]$ perché:

   - se $h_1, h_2 \in D_f \Rightarrow h_1f, h_2f \in K[V]$, che è anello $\Rightarrow h_1f - h_2f = (h_1 - h_2)f \in K[V] \Rightarrow h_1 - h_2 \in D_f$;

- se $h \in D_f \Rightarrow hf \in K[V]$, anello $\Rightarrow \ \forall\, g \in K[V],\ g(hf) = (gh)f \in K[V] \Rightarrow gh \in D_f,\ \forall\, g \in K[V]$. Quindi D_f ideale di $K[V]$.

Dunque ha senso considerare $\mathbf{V}(D_f) = \{P \in V : h(P) = 0\ \forall\ h \in D_f\} = V \setminus domf$, che è quindi un insieme algebrico $\Rightarrow V \setminus domf$ chiuso rispetto alla topologia di Zariski $\Rightarrow domf$ è aperto rispetto alla topologia di Zariski, in quanto complementare di un chiuso. Inoltre $domf \neq \emptyset$ perché altrimenti f non esisterebbe $\Rightarrow$ per il punto 3 della Proposizione 2.1.1 segue che $domf$ è un aperto denso in V;

3. $f \in K[V] \iff D_f = (1) \iff \mathbf{V}(D_f) = V \setminus domf = \emptyset \iff V = domf$;

4. $V_h \subseteq domf \iff V_h \cap\ \mathbf{V}(D_f) = \emptyset \iff h(P) = 0\ \forall\ P \in \mathbf{V}(D_f)$, cioè $h \in I(V(D_f))$, D_f ideale $\iff$ (per il punto 3 del Nullstellensatz $I(V(D_f)) = \sqrt{D_f}$)$h \in \sqrt{D}_f \iff h^n \in D_f$ per qualche $n \iff h^n f \in K[V] \iff f = g/h^n,\ g \in K[V] \iff f \in K[V][h^{-1}]$.

□

Definizione 2.7. Sia V una varietà affine di $\mathbb{A}^n_K$.
Una *mappa razionale* $f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^n_K$ è una funzione parzialmente definita tale che $\exists f_1, \dots, f_n \in K(V)$ funzioni razionali:

$$f(P) = (f_1(P), \dots, f_n(P)) \quad \forall\ P \in \bigcap_{i=1}^{n} domf_i =: domf$$

Se $P \in domf$ allora f è detta *regolare in P*.

Se W è una varietà affine di $\mathbb{A}^m_K$ si definisce una *mappa razionale f tra V e W*, $f : V \dashrightarrow W$ come una mappa razionale $f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^m_K$ tale che $f(domf) \subseteq W$.

Definizione 2.8. Sia V una varietà affine di $\mathbb{A}^n_K$, W varietà affine di $\mathbb{A}^m_K$. Una mappa razionale tra V e W $f : V \dashrightarrow W$ è detta *dominante* se $f(domf)$

è denso in W rispetto alla topologia di Zariski. Equivalentemente, f dominante se non esiste un insieme chiuso, dunque algebrico, $X \subset W : dom f \subset X$.

Osservazione 8. Se $f : V \dashrightarrow W$, $g : W \dashrightarrow U$ mappe razionali allora $g \circ f$ potrebbe non essere definita. Infatti supponiamo che f sia data da $f_1, \ldots, f_m \in K(V)$, quindi $f(P) = (f_1(P), \ldots, f_m(P)) \ \forall \ P \in \bigcap_{i=1}^{n} dom f_i$; sia $g \in K[W]$, scegliendo un rappresentante $G \in K[y_1, \ldots, y_m]$, si ha $g = [G]_{\sim I(W)}$ e $g \circ f = G(f_1, \ldots, f_m)$ è ben definita come elemento di $K(V)$. Quindi abbiamo ancora un omomorfismo di K-algebre:

$$\begin{aligned} f^* : K[W] &\to K(V) \\ G \ &\mapsto \ G(f_1, \ldots, f_m) = g \circ f \end{aligned}$$

Ma se $h \neq 0, \ h \in Ker(f^*)$, allora non avrebbe senso $f^*(g/h)$ e dunque f^* non potrebbe essere estesa ad un omomorfismo di campi. Per questo motivo si introduce il concetto di mappa razionale dominante.
In dettaglio, supponiamo f dominante; come già detto, essa induce un omomorfismo di K-algebre $f^* : K[W] \to K(V)$, e si ha $h \in Ker(f^*) \iff h \circ f = 0 \iff h(f(dom f)) = \{0\} \iff f(dom f) \subseteq \mathbf{V}(h) = \{P \in W : k(P) = 0 \ \forall k \in (h)\}$, f dominante $\iff (h) = (0) \iff h = 0 \iff f^*$ iniettiva.
Viene dunque risolto il problema precedentemente affrontato.

Osservazione 9. Se $f : V \dashrightarrow W$ è dominante, $g : W \dashrightarrow U$ mappa razionale parzialmente definita da $g_1, \ldots, g_l \in K(W)$ allora la composizione $g \circ f : V \dashrightarrow U$ è la mappa razionale le cui componenti sono $f^*(g_i)$.

Teorema 2.2.2. *Siano $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$, $W \subseteq \mathbb{A}_K^m$ varietà affini. Allora:*

1. *se $f : V \dashrightarrow W$ è mappa razionale dominante allora f induce un omomorfismo di campi:*

$$\begin{aligned} f^* \colon K(W) &\to K(V) \\ g \ &\mapsto \ g \circ f \end{aligned}$$

2. *se* $\phi : K(W) \to K(V)$ *è omomorfismo di campi allora* $\exists!\ f : V \dashrightarrow W$ *mappa razionale dominante tale che* $\phi = f^*$*;*

3. *se* $f : V \to W,\ g : W \to U$ *sono mappe razionali dominanti allora* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Dimostrazione.
La dimostrazione è analoga (con qualche accorgimento in più) a quella del Teorema 2.1.3 □

Definizione 2.9. Siano V, W varietà affini, $U \subseteq V$ sottoinsieme aperto per la topologia di Zariski. Si dice che una mappa razionale $f : V \dashrightarrow W$ induce un *morfismo* $f : U \to W$ se $U \subseteq domf$, cioè se f è regolare in ogni $P \in U$.
Se $U_1 \subseteq V, U_2 \subseteq W$ sono sottoinsiemi aperti per la topologia di Zariski allora un morfismo $f : U_1 \to U_2$ è una mappa razionale $f : V \dashrightarrow W :\ U_1 \subseteq domf$ e $f(U_1) \subseteq U_2$.
Un *isomorfismo* è un morfismo $f : U_1 \to U_2$ tale che esiste $g : U_2 \to U_1$ morfismo tale che $g \circ f = f \circ g = id$.

Definizione 2.10. Sia V varietà affine, $g \in K[V]$; poniamo $V_g := V \setminus \mathbf{V}(g) = \{P \in V : g(P) \neq 0\}$. La famiglia $\{V_g : g \in K[V]\}$ è detta la *famiglia degli aperti standard di V.*

Proposizione 2.2.3. *Siano* V, W *varietà affini. Valgono i seguenti risultati:*

1. *Esiste una corrispondenza biunivoca fra* $\{f : V \to W : f\ morfismo\}$ *e* $\{f : V \to W : f\ \textit{mappa polinomiale}\}$*;*

2. *ogni aperto standard* V_f *è isomorfo ad una varietà affine;*

3. *se* $f \in K[V]$ *allora* $K[V_f] = K[V][f^{-1}]$.

Dimostrazione.

1. $f : V \to W$ morfismo $\iff$ $f : V \dashrightarrow W$ mappa razionale tale che $V \subseteq domf \iff \exists f_1, \dots, f_m \in K(V)$, cioè funzioni razionali: $f(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P))\ \forall\ P \in domf = \bigcap domf_i$, con $V = domf$ quindi $V = \bigcap domf_i, i = 1, \dots, m \iff$ per il punto 3 del Teorema 2.2.1 $f_1, \dots, f_m \in K[V] \iff \exists F_1, \dots, F_m \in K[x_1, \dots, x_n] : f_i = [F_i]_{\sim I(V)}$, cioè $f_i = F_{i|V} \iff f(P) = (F_1(P), \dots, F_m(P))\ \forall\ P \in V$.

2. Siano $F \in K[x_1, \dots, x_n]$: $f = [F]_{\sim I(V)}$, $J = (I(V), yF - 1) \in K[x_1, \dots, x_n, y]$. Sia $W = \mathbf{I}(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_K$; $F(P) \neq 0\ \forall\ P \in W$. Infine, sia data la funzione:

$$\phi : W \to V_f$$
$$(p_1, \dots, p_n, q) \mapsto (p_1, \dots, p_n)$$

   ϕ è una mappa polinomiale, perché $\phi(P) = (x_1(P), \dots, x_n(P))\ \forall\ P \in W \Rightarrow$ è un morfismo. Sia ora:

$$\psi : V_f \to W$$
$$(q_1, \dots, q_n) \mapsto (q_1, \dots, q_n, \frac{1}{F(q_1, \dots, q_n)})$$

   Anche ψ è morfismo in quanto mappa razionale regolare ovunque: $\psi(Q) = (x_1(Q), \dots, x_n(Q), \frac{1}{F(Q)})$ (nota: $f = F_{|V}$ quindi $1/f$ è regolare in $V_f = V \setminus \mathbf{V}(f)$). Si ha:
   $(\psi \circ \phi)(p_1, \dots, p_n, q) = \psi(\phi(p_1, \dots, p_n, q)) = \psi(p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_n, \frac{1}{F(p_1, \dots, p_n)})$.
   So che per $(p_1, \dots, p_n, q) \in W$, $\forall g \in J\ g((p_1, \dots, p_n, q)) = 0$, in particolare $(yF-1)((p_1, \dots, p_n, q)) = qF((p_1, \dots, p_n, q)) - 1 \Rightarrow F((p_1, \dots, p_n, q)) = 1/q$. Quindi $(\psi \circ \phi)(p_1, \dots, p_n, q) = (p_1, \dots, p_n, \frac{1}{\frac{1}{q}}) = (p_1, \dots, p_n, q)$.
   $(\phi \circ \psi)(q_1, \dots, q_n) = \phi(\psi(q_1, \dots, q_n)) = \phi(q_1, \dots, q_n, \frac{1}{F(q_1, \dots, q_n)}) = (q_1, \dots, q_n)$.

3. Si dimostra sfruttando i risultati del Teorema 2.2.1; infatti $g \in K[V][f^{-1}] \iff$ per il punto 4, $V_f \subseteq domg \Rightarrow g \in K[V_f]$. Viceversa, $g \in K[V_f] \iff$ per il punto 3, $domg = V_f \Rightarrow$ per il punto 4, $g \in K[V][f^{-1}]$.

$\square$

Proposizione 2.2.4. *Sia V una varietà affine. La famiglia* $\{V_f\}_{f\in K[V]}$ *di tutti gli aperti standard di V costituisce una base per la topologia di Zariski su V; quindi una base di aperti è data da una famiglia di varietà affini.*

Dimostrazione.

Sia $U \subseteq V$ un aperto per la topologia di Zariski di V. Allora $U = V \setminus W$, W chiuso rispetto la topologia di Zariski, cioè W insieme algebrico della forma $\mathbf{V}(I), I$ ideale di $K[V]$ Noetheriano, quindi $\exists f_1, \ldots, f_k \in K[V] : \ I = (f_1, \ldots, f_k) \Rightarrow W = \mathbf{V}((f_1, \ldots, f_k)) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{V}(f_i)$. Quindi $U = V \setminus W = V \setminus (\bigcap_{i=1}^{k} \mathbf{V}(f_i)) = \bigcup_{i=1}^{k}(V \setminus V(f_i)) = \bigcup_{i=1}^{k} V_{f_i}$ $\square$

Capitolo 3

Esempi

Esempio 3.1. Sia $\varphi : \mathbb{A}^1_K \to \mathbb{A}^3_K$, $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$; sia $\mathcal{C}$ l'immagine di φ; φ è una mappa polinomiale che ha come immagine un insieme algebrico, precisamente $\mathcal{C} = \mathbf{V}(I)$ con $I = (z - x^3, y - x^2) \subset K[x, y, z]$. Infatti:

- $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P = (a, a^2, a^3),\ a \in K \Rightarrow\ \forall f \in I,\ f = f_1(z - x^3) + f_2(y - x^2),\ f_1, f_2 \in K[x, y, z], f(P) = f_1(P) \cdot 0 + f_2(P) \cdot 0 = 0 \Rightarrow P \in \mathbf{V}(I) \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathbf{V}(I)$;

- $P = (a, b, c) \in \mathbf{V}(I) \Rightarrow (z - x^3)(P) = 0,\ (y - x^2)(P) = 0 \Rightarrow c = a^3,\ b = a^2 \Rightarrow P \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathbf{V}(I) \subseteq \mathcal{C}$.

Inoltre φ è un isomorfismo. Infatti sia $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{A}^1_K$, $\psi(a, b, c) = a$, che è una mappa polinomiale definita dalla funzione polinomiale x.
$(\psi \circ \varphi)(t) = \psi(\varphi(t)) = \psi(t, t^2, t^3) = t$. Sia ora $(a, b, c) \in \mathcal{C}$ (quindi $b = a^2,\ c = a^3$) allora $(\varphi \circ \psi)(a, b, c) = \varphi(\psi(a, b, c)) = \varphi(a) = (a, a^2, a^3) = (a, b, c)$. Dunque φ è isomorfismo.

Esempio 3.2. Sia $\mathcal{C} = \mathbf{V}((y^2 - x^3)) \subset \mathbb{A}^2_K$.

1. Sia $f : \mathbb{A}^1_K \to \mathcal{C}$, $f(t) = (t^2, t^3)$; $\mathcal{C} = \mathbf{V}(I)$ con $I = (y^2 - x^3)$. Infatti:

- $(a,b) = P \in \mathbf{V}(I) \Rightarrow (y^2 - x^3)(P) = 0 \Rightarrow b^2 = a^3$; sia u una radice quadrata di a; allora $u^6 = b^2$ cioè u è una radice terza di b, per cui $P = (u^2, u^3) \Rightarrow \mathbf{V}(I) \subseteq \mathcal{C}$;
- $P \in \mathcal{C} \Rightarrow P = (a^2, a^3)$ con $a \in K \Rightarrow (y^2 - x^3)(P) = 0 \Rightarrow P \in \mathbf{V}(I) \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathbf{V}(I)$.

Dunque $\mathcal{C}$ è un insieme algebrico, perciò ha senso chiedersi se f è una mappa polinomiale e in effetti lo è poiché $t^2, t^3 \in K[t]$. Si dice che f è una *parametrizzazione razionale di* $\mathcal{C}$.

2. $(\mathcal{C}, K[\mathcal{C}])$ è una varietà affine. Infatti $I(\mathcal{C}) = (y^2 - x^3)$ è un ideale primo, perché $F = y^2 - x^3$ è un polinomio irriducibile in $K[x,y] \Rightarrow \mathcal{C}$ è irriducibile per la Proposizione 1.2.4. Il polinomio F è irriducibile perché se non lo fosse allora $F = GH,\ G, H \in K[x,y]$; ora, se uno tra G e H ha grado 2 in y, sia esso ad esempio $G \Rightarrow$ in H non è presente y, K algebricamente chiuso $\Rightarrow$ esiste uno zero di H, sia esso $p \Rightarrow F$ si annulla in ogni punto (p, y), con y qualunque, ma questa è una contraddizione perché ci sono solo due soluzioni del tipo (p,y), ovvero $(p,y) : y^2 = p^3$. Se invece G, H hanno grado 1 in $y \Rightarrow y^2 - x^3 = (Ay + B)(Cy + D)\ A, B, C, D \in K[x] \Rightarrow AC = 1 \Rightarrow A = \lambda \in K,\ C = \lambda^{-1}, B = -\lambda^2 D$ e $\lambda^2 D^2 = -x^3$, che contraddice la regola dei gradi.

3. La mappa f ammette una inversa razionale. Infatti sia $g : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{A}^1_K$, $g((a,b)) = b/a\ \forall\ (a,b) \in domg$.
   Siano $x, y \in K[x,y],\ [x]_{\sim I}, [y]_{\sim I} \in K[\mathcal{C}] = K[x,y]/I$. Allora g è una mappa razionale definita dalla funzione razionale $h = Y/X \in K(\mathcal{C})$ con $X = [x]_{\sim I},\ Y = [y]_{\sim I}$.
   $(f \circ g)(a,b) = f(g(a,b)) = f(b/a) = ((b/a)^2, (b/a)^3),\ (a,b) \in domg \subset \mathcal{C} \Rightarrow b^2 = a^3 \Rightarrow ((b/a)^2, (b/a)^3) = (a,b)$.
   $(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g((t^2, t^3)) = t^3/t^2 = t$.

Quindi g è un'inversa razionale di

$$f : \mathbb{A}^1_K \to \mathcal{C}$$
$$t \mapsto (t^2, t^3)$$

4. $domg = \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$. Infatti $domg = dom\ Y \cap dom\ X^{-1} = \mathcal{C} \cap dom\ (YX^{-1}) = \{(a,b) \in \mathcal{C} : X(a,b) \neq 0\} = \{(a,b) \in \mathcal{C} : a \neq 0\} = \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$.

5. $A^1_K \setminus \{(0,0)\}$ e $\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$ sono isomorfe, infatti: $A^1_K \setminus \{(0,0)\}$ e $\mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$ sono varietà affini, quindi ponendo

$$\tilde{f} : A^1_K \setminus \{(0,0)\} \to \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$$
$$t \mapsto f(t) = (t^2, t^3)$$

allora $\tilde{f}$ è un morfismo.
$domg = \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$ quindi per le argomentazioni sulle composizioni tra f e g fatte nel punto 3 si ha che $g : \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\} \to A^1_K \setminus \{(0,0)\}$ è il morfismo inverso di $\tilde{f} \Rightarrow A^1_K \setminus \{(0,0)\} \simeq \mathcal{C} \setminus \{(0,0)\}$

Esempio 3.3. Sia $\mathcal{C} : y^2 = x^3 + x^2 \subset \mathbb{A}^2_K$.
Sia poi $\varphi : \mathbb{A}^1_K \to Im\varphi,\ \varphi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$.
$Im\varphi = \mathcal{C}$. Infatti:

- se $P \in Im\varphi$ allora $\exists\ t \in K :\ P = (t^2 - 1, t^3 - t) =: (a, b)$. Verifichiamo la condizione $b^2 = a^3 + a^2 :\ (t^3 - t)^2 = (t^2 - 1)^3 + (t^2 - 1)^2 \iff (t(t^2 - 1))^2 = (t^2 - 1)^2(t^2 - 1 + 1) \iff t^2(t^2 - 1)^2 = (t^2 - 1)^2 t^2 \iff 0 = 0 \Rightarrow$ la condizione è soddisfatta, quindi $P \in \mathcal{C} \Rightarrow Im\varphi \subseteq \mathcal{C}$;

- se $P \in \mathcal{C}$ allora $P = (a, b)$ con $b^2 = a^3 + a^2$. Se $a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow P = \varphi(1) \Rightarrow P \in Im\varphi$. Supponiamo quindi $a \neq 0$ e poniamo $t := \frac{b}{a}$; allora

$\varphi(t) = P$. Infatti:

$$\varphi(t) = (\frac{b^2}{a^2} - 1, \frac{b^3}{a^3} - \frac{b}{a}) = (\frac{a^3 + a^2}{a^2} - 1, \frac{b}{a} (\frac{b^2}{a^2} - 1)) =$$

$$= (a + 1 - 1, \frac{b}{a} (\frac{a^3 + a^2}{a^2} - 1)) = (a, \frac{b}{a} (a + 1 - 1)) = (a, b) = P$$

$\Rightarrow P \in Im\varphi \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq Im\varphi$.

φ è una mappa polinomiale ma non è un isomorfismo. Infatti se φ fosse un isomorfismo allora $\varphi^* : K[\mathcal{C}] \to K[\mathbb{A}^1_K]$ sarebbe isomorfismo di K-algebre. $K[\mathcal{C}] = K[x, y]/I(\mathcal{C})$, $I(\mathcal{C}) = (y^2 - x^3 - x^2)$, $K[\mathbb{A}^1_K] = K[t]$. Dunque $\varphi^*([x]_{\sim I(\mathcal{C})}) = t^2 - 1$, $\varphi^*([y]_{\sim I(\mathcal{C})}) = t^3 - t$. Quindi $Im(\varphi^*) = K[t]$ sarebbe la K-algebra generata da t^2-1 e $t(t^2-1)$, ovvero $K[t] = K[t^2-1, t(t^2-1)] \subset K[t]$ perché se fossero uguali allora si avrebbe $t = h(t^2 - 1) + r(t(t^2 - 1)) = (t^2 - 1)(1 + rt) \Rightarrow$ contraddizione per la regola dei gradi.

Bibliografia

[1] Miles Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge, Cambridge University Press, 1988.

[2] M.F.Atiyah - I.G.Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[3] N.Jacobson: Basic Algebra I. W.H.Freeman and Company, San Francisco, 1974.