Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TASSO DI FUGA PER PERTURBAZIONI APERTE DI SISTEMI DINAMICI CAOTICI

Relatore
Prof. **Marco Lenci**

Candidato
Stefano Avanzini

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TASSO DI FUGA PER PERTURBAZIONI APERTE DI SISTEMI DINAMICI CAOTICI

Relatore
Prof. **Marco Lenci**

Candidato
Stefano Avanzini

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione **iii**

1 Risultati Preliminari **1**
1.1 Teoria della misura 1
1.1.1 Spazi di misura 1
1.1.2 Integrazione 4
1.1.3 Misure assolutamente continue 6
1.2 Probabilità 7
1.3 Analisi funzionale 10
1.3.1 Spazi di Banach 10
1.3.2 Operatori su Spazi di Banach 14
1.3.3 Operatore Aggiunto 16
1.3.4 Analisi spettrale 17

2 Teoria Ergodica **21**
2.1 Misure invarianti 21
2.2 Ergodicità 23
2.2.1 Mixing 29
2.3 Operatore di Koopman 30
2.3.1 Analisi spettrale 33

3 Operatore di Perron-Frobenius **37**
3.1 Definizione 37
3.2 Proprietà 38
3.3 Trasformazioni monotone a tratti 42
3.3.1 Rappresentazione di P_τ 42
3.3.2 Esistenza di misure invarianti assolutamente continue . 44
3.3.3 Operatori quasi-compatti 45

4 Tasso di fuga per sistemi aperti **47**
4.1 Risultati preliminari 47

4.1.1 Sistemi dinamici aperti 47
4.1.2 Gap spettrale 49
4.2 Teorema di perturbazione 51
4.2.1 Applicazioni 53
4.3 Operatori di Perron-Frobenius per sistemi aperti 55
4.3.1 Osservazioni preliminari 55
4.3.2 L'operatore P_0 56
4.3.3 Gli operatori P_ε 59

Conclusioni **69**

Bibliografia **73**

Introduzione

La teoria dei sistemi dinamici costituisce oggi un importante ramo della fisica matematica che, utilizzando soprattutto tecniche di analisi matematica, geometria e teoria dei numeri, trova applicazioni in svariati campi, come fisica, astronomia, biologia, meteorologia e economia. Secondo molti studiosi le origini di questa teoria risalgono agli studi sulla meccanica celeste che H. Poincaré pubblicò verso la fine del diciannovesimo secolo. Da questi e dai risultati di A. Lyapunov in teoria della stabilità si sono sviluppati i lavori di molti altri matematici come G. Birkhoff, S. Smale e A. Kolmogorov, che hanno contribuito a determinare la teoria attuale.

Un sistema dinamico è caratterizzato da uno spazio delle fasi, cioè da un insieme X i cui elementi rappresentano tutti gli stati che il sistema può assumere, e dall'evoluzione nel tempo di tale spazio: questa *dinamica* è modellizzata matematicamente da una famiglia di trasformazioni $\varphi_t : X \to X$ dipendenti dal parametro tempo t. Se t varia in un insieme continuo allora il sistema dinamico si dice continuo (per esempio quando φ_t è la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria), altrimenti si dice discreto (per esempio se consideriamo le iterazioni di una mappa su X). In questa tesi ci occuperemo di sistemi dinamici discreti.

Se T è una trasformazione su X, si può considerare l'evoluzione dei singoli punti, cioè studiare per ogni elemento $x \in X$, l'insieme $\{T^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, detto orbita di x. Tuttavia, poiché punti distinti possono presentare comportamenti molto diversi tra loro, questa analisi raramente fornisce informazioni significative sull'evoluzione globale del sistema. Per questo motivo solitamente si considerano spazi delle fasi X muniti di una certa struttura e trasformazioni su X che la preservano, permettendo così di osservare proprietà più generali del sistema dinamico. Per esempio i sistemi costituiti da una traformazione continua su uno spazio topologico sono oggetto degli studi di dinamica topologica, mentre i sistemi dinamici differenziabili sono dati da trasformazioni lisce su varietà differenziabili.

La teoria ergodica, invece, si occupa dell'evoluzione di uno spazio misurabile determinata da una mappa che ne preserva la misura. Questo genere di analisi della dinamica di un sistema si è sviluppato a partire dalle ricerche di L. Boltzmann, G. Birkhoff e J. Von Neumann e consente di studiare le proprietà qualitative dell'azione di un'opportuna mappa T (e delle sue iterate) su uno spazio di misura X. La teoria ergodica ha così portato ad applicare allo studio dei sistemi dinamici tecniche e risultati di teoria della misura e quindi, in particolare, di probabilità. Per questo motivo, nel capitolo 1 sono riportati alcuni concetti generali di queste discipline, oltre che di analisi funzionale.

In particolare, se lo spazio delle fasi X di un sistema dinamico è munito di una misura di probabilità e ζ è una variabile aleatoria su X, allora anche $\tau(\zeta)$ è una variabile aleatoria ed è quindi possibile studiare l'evoluzione delle distribuzioni di probabilità di tali variabili. Si passa cioè da una prospettiva deterministica (lo studio delle singole traiettorie, determinate univocamente dalla trasformazione τ) a una stocastica (lo studio di come evolvono le densità di probabilità su X). In particolare, ci si chiede se certe distribuzioni di probabilità ammettono una distribuzione limite, o più in generale se si possono applicare risultati equivalenti al teorema del limite centrale o alle leggi dei grandi numeri. Lo strumento tecnico che introdurremo per studiare la trasformazione di una densità di probabilità sotto l'effetto della mappa τ è l'operatore di Perron-Frobenius, a cui è dedicato il capitolo 3.

Un esempio di sistemi per i quali l'analisi ergodica risulta fondamentale è dato dai sistemi dinamici caotici. Infatti, nonostante le leggi che ne governano l'evoluzione siano deterministiche, questi sistemi sono caratterizzati dalla cosiddetta dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali (o effetto farfalla): esiste una costante Δ tale che le orbite di due punti arbitrariamente "vicini", dopo sufficiente tempo, possono avere una distanza maggiore o uguale a Δ. Ovviamente la definizione formale di quest'ultima proprietà richiede che lo spazio delle fasi X sia munito di una distanza e per questo è usata per introdurre i sistemi dinamici caotici in dinamica topologica. Nel capitolo 2 daremo la definizione di mappe espandenti a tratti che, anche senza uno studio topologico delle proprietà del sistema, esibiscono un comportamento tipicamente caotico. Nei capitoli successivi, dimostreremo diversi risultati (tra cui il teorema principale di questa tesi) per tale classe di trasformazioni.

Nel capitolo 4 ci occuperemo di sistemi dinamici aperti: se lo spazio delle fasi X è un dominio non invariante rispetto alla trasformazione τ (cioè se $\tau(X) \not\subset X$), a ogni iterazione l'orbita di un certo numero di punti esce dal dominio e quindi non ne consideriamo più la dinamica.

Equivalentemente si può pensare a un dominio X con un buco X_ε: ogni volta che un punto finisce in X_ε esce dal sistema dinamico e quindi non ne valutiamo più l'evoluzione. A ogni iterazione della mappa τ il sistema perde così una parte della sua massa, e sotto opportune ipotesi si può dimostrare che il tasso con cui la massa decresce, detto tasso di fuga, è esponenziale. I sistemi dinamici aperti costituiscono ottimi modelli per lo studio degli eventi rari (che matematicamente si possono rappresentare come insiemi della forma $\{x \in X : f(X) \geq \alpha\}$, dove f è l'osservabile del sistema che si vuole studiare e α è una soglia fissata). Infatti, se il buco X_ε è definito come la regione dello spazio delle fasi corrispondente a un predeterminato evento estremo, i punti di X la cui orbita non finisce in X_ε fino al tempo n costituiscono precisamente l'insieme di condizioni iniziali che, fino a tale tempo, non porteranno all'evento estremo. Purtroppo però, si è visto che le tecniche classiche di teoria ergodica e di teoria delle perturbazioni non permettono di ottenere statistiche significative per gli eventi rari.

Diverse ricerche sono state portate avanti recentemente su questo tema. In particolare, in alcune di queste si studia il tasso di fuga come funzione dell'osservabile e della soglia considerate. Poichè solitamente il tasso di fuga dipende dalle dimensioni e dalla posizione del buco X_ε, questi ultimi risultati sono generali e hanno quindi una vasta applicabilità.

L'obiettivo principale di questa tesi è introdurre un teorema astratto contenuto nell'articolo *Rare Events, Escape Rates and Quasistationarity: Some Exact Formulae* [16] di G. Keller e C. Liverani e verificare che alcune mappe espandenti a tratti sull'intervallo unitario ne soddisfano le ipotesi. Questo ci consentirà di ottenere, per tale classe di trasformazioni, un'espansione al prim'ordine (nella dimensione ε del buco) per il tasso di fuga e quindi, in particolare, dimostreremo che la funzione che ad ε associa il tasso di fuga del sistema aperto con buco X_ε è differenziabile in $\varepsilon = 0$.

Capitolo 1

Risultati Preliminari

Nel primo capitolo richiamiamo alcune nozioni di teoria della misura e di probabilità che permetteranno di introdurre più facilmente i sistemi dinamici e le loro proprietà ergodiche. Inoltre, gli ultimi paragrafi contengono alcuni risultati di analisi funzionale che useremo nei capitoli successivi, dopo aver definito gli operatori di Koopman e di Perron-Frobenius.
All'inizio di ogni paragrafo saranno indicati i riferimenti bibliografici principali, mentre i rimandi per un risultato specifico saranno riportati a lato dello stesso.

1.1 Teoria della misura

Riportiamo in questo paragrafo alcune definizioni e proprietà di teoria della misura. I riferimenti principali sono: *Real and Complex Analysis* di W. Rudin [24] per le prime nozioni, *Probability and Measure* di P. Billingsley [2] per i risultati sull'integrazione e *Laws of Chaos* di A. Boyarsky e P. Góra [4] per la sezione sulle misure assolutamente continue.

1.1.1 Spazi di misura

Sia X un insieme arbitrario.

Definizione 1.1.1. Una collezione $\mathfrak{T}$ di sottoinsiemi di X si dice *topologia* su X se $\mathfrak{T}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\varnothing \in \mathfrak{T}$ e $X \in \mathfrak{T}$

2. se $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{T}$, allora $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{T}$

3. se $\{A_\alpha\}$ è una famiglia di elementi di $\mathfrak{T}$ (finita, numerabile o non numerabile), allora $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathfrak{T}$

Se $\mathfrak{T}$ è una topologia su X, allora $(X, \mathfrak{T})$ si dice *spazio topologico.* Gli elementi di $\mathfrak{T}$ si chiamano *insiemi aperti* e i loro complementari rispetto a X *insiemi chiusi.*

Definizione 1.1.2. Dati due spazi topologici $(X, \mathfrak{T})$ e $(Y, \mathfrak{T}')$, un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *continua* se per ogni aperto A di Y, $f^{-1}(A)$ è un aperto di X.

Definizione 1.1.3. Una famiglia $\mathfrak{F}$ di sottoinsiemi di X si dice *σ-algebra* su X se valgono le seguenti:

1. $X \in \mathfrak{F}$
2. per ogni $A \in \mathfrak{F}$, $A^c \in \mathfrak{F}$, dove $A^c := X \setminus A$
3. se $\{A_n\}$ è una successione di elementi di $\mathfrak{F}$, allora $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathfrak{F}$

Se $\mathfrak{F}$ è una σ-algebra su X, allora $(X, \mathfrak{F})$ si dice *spazio misurabile* e gli elementi di $\mathfrak{F}$ si chiamano *insiemi misurabili.*

Definizione 1.1.4. Sia $\mathfrak{I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora si dice σ-algebra *generata* da $\mathfrak{I}$ e si indica con $\sigma(\mathfrak{I})$ la più piccola σ-algebra su X contenente $\mathfrak{I}$.

Teorema 1.1.1. *Per ogni famiglia $\mathfrak{I}$ di sottoinsiemi di X, $\sigma(\mathfrak{I})$ è ben definita e coincide con l'intersezione di tutte le σ-algebre su X contenenti $\mathfrak{I}$.*

Osservazione 1.1.1. Sia $(X, \mathfrak{T})$ uno spazio topologico. Allora il teorema 1.1.1 implica che esiste la σ-algebra generata dalla topologia $\mathfrak{T}$, cioè una σ-algebra $\mathfrak{B}$ tale che ogni insieme aperto in X appartiene a $\mathfrak{B}$.

Definizione 1.1.5. La σ-algebra generata dalla topologia si dice *σ-algebra dei Boreliani* e i suoi elementi si chiamano *insiemi Boreliani* di X.

Definizione 1.1.6. Dati $(X, \mathfrak{F})$ spazio misurabile e $(Y, \mathfrak{T})$ spazio topologico, un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *misurabile* se per ogni aperto V di Y, $f^{-1}(V)$ è un insieme misurabile di X.

Osservazione 1.1.2. Dalle definizioni precedenti segue che se f è un'applicazione continua tra due spazi topologici X e Y, allora f è misurabile rispetto alla σ-algebra dei Boreliani.

Definizione 1.1.7. Sia $A \in \mathfrak{F}$ un insieme misurabile di X. La *funzione indicatrice* di A è definita da

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Definizione 1.1.8. Una funzione f definita su X si dice *semplice* se la sua immagine è costituita solo da un numero finito di valori $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Equivalentemente, f è semplice se si può scrivere come

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$$

dove $A_i = \{x \in X : f(x) = \alpha_i\}$.

Osservazione 1.1.3. Ovviamente, per ogni insieme misurabile A di X, la funzione indicatrice di A è una funzione misurabile. Pertanto, una funzione semplice f è misurabile se e soltanto se gli insiemi A_i sono misurabili $\forall i$.

Definizione 1.1.9. Sia $(X, \mathfrak{F})$ uno spazio misurabile. Allora, un'applicazione $\mu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}^+$ si dice *misura* su X se è tale che:

1. $\mu(\varnothing) = 0$

2. se $\{A_n\}$ è una successione di elementi di $\mathfrak{F}$ disgiunti a due a due, allora

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Una misura μ su X si dice *finita* se $\mu(X) < \infty$, *infinita* altrimenti. Uno spazio misurabile $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ munito di una misura μ su X si dice *spazio di misura.*

Definizione 1.1.10. [2] Una famiglia $\mathcal{P}$ di sottoinsiemi di X si definisce π*-sistema* se per ogni $A, B \in \mathcal{P}$, si ha che $A \cap B \in \mathcal{P}$.

Teorema 1.1.2. *[2] Siano $\mathcal{P}$ un π-sistema di X, $\mathfrak{I} = \sigma(\mathcal{P})$. Se μ_1 e μ_2 sono due misure definite su $\mathfrak{I}$ tali che $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ per ogni $B \in \mathcal{P}$, allora $\mu_1 = \mu_2$.*

1.1.2 Integrazione

Dato uno spazio di misura $(X, \mathfrak{F}, \mu)$, con $\mu(X) < \infty$, vogliamo definire l'integrale $\int f d\mu$ di una generica funzione f rispetto alla misura μ.

Definizione 1.1.11. Sia $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura, con μ misura finita.

- Se $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ è una funzione semplice su X, allora si pone

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

- Se f è una funzione non negativa su X, si definisce

$$\int f d\mu = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i} \left[\inf_{x \in A_i} f(x) \right] \mu(A_i)$$

  dove il sup è calcolato su tutte le partizioni finite $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)$ di X [1].

- Infine, per una funzione f generica, l'integrale è definito come

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

  dove f^+ e f^- rappresentano la parte positiva e la parte negativa di f, rispettivamente.

Una funzione f si dice *integrabile* se ha integrale finito, cioè se $\int f d\mu \neq \pm\infty$.

Teorema 1.1.3. *Siano $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura, con μ misura finita, f e g funzioni integrabili su X, α e β due numeri reali. Allora valgono le seguenti:*

i. *<u>Monotonicità</u>*

  Se f e g sono tali che $f \leq g$ quasi ovunque, allora

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

[1] Tale definizione è equivalente a: $\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu \mid g \text{ funzione semplice}, g \leq f \right\}$

In particolare, poiché vale sempre $f \leq |f|$, si ha

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

ii. *Linearità*

$\alpha f + \beta g$ *è ancora una funzione integrabile, e vale*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

iii. *Convergenza monotona*

Se $\{f_n\}$, $f_n \geq 0$ $\forall n$, *è una successione non decrescente di funzioni tale che* $f_n \to f$ *quasi ovunque, allora* $\{\int f_n d\mu\}$ *è una successione non decrescente tale che*

$$0 \leq \int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$$

iv. *Convergenza dominata*

Se $\{f_n\}$ *è una successione di funzioni tale che* $|f_n| \leq g$ *per ogni* n, *con* g *integrabile, e se* $f_n \to f$ *quasi ovunque, allora le funzioni* f_n *e* f *sono integrabili e vale*

$$\int f_n d\mu \longrightarrow \int f d\mu$$

Definizione 1.1.12. Se $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ è uno spazio di misura, allora per ogni funzione f su X e per ogni $A \in \mathfrak{F}$ si definisce

$$\int_A f d\mu = \int \mathbf{1}_A f d\mu$$

Proposizione 1.1.4. *Se* f *e* g *sono due funzioni integrabili su* X *tali che* $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ *per ogni* $A \in \mathfrak{F}$, *allora* $f = g$ *quasi ovunque.*

1.1.3 Misure assolutamente continue

Definizione 1.1.13. Siano ν e μ due misure sullo stesso spazio misurabile $(X, \mathfrak{F})$. ν si dice *assolutamente continua* rispetto a μ se, per ogni $A \in \mathfrak{F}$ tale che $\mu(A) = 0$, risulta $\nu(A) = 0$. In tal caso si scrive $\nu \ll \mu$.

Teorema 1.1.5 (Teorema di Radon-Nikodym)**.** *Siano ν e μ due misure di probabilità sullo spazio misurabile $(X, \mathfrak{F})$. Se $\nu \ll \mu$, allora esiste un'unica funzione $f \in \mathfrak{L}^1(X, \mathfrak{F}, \mu)$ tale che, per ogni $A \in \mathfrak{F}$, vale*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

f si dice derivata di Radon-Nikodym e si indica con $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Definizione 1.1.14. Sia X uno spazio metrico compatto e μ una misura su $(X, \mathfrak{F})$, dove $\mathfrak{F}$ indica la σ-algebra dei Boreliani su X. Si definisce *supporto* di μ il più piccolo insieme chiuso in X di misura piena, cioè

$$\mathrm{supp}(\mu) = X \setminus \bigcup_{\substack{\mathcal{O}\text{-aperto} \\ \mu(\mathcal{O})=0}} \mathcal{O}$$

Denotiamo ora con $\mathfrak{M}(X)$ lo spazio delle misure su $(X, \mathfrak{F})$ e supponiamo che $\tau : X \to X$ sia una trasformazione misurabile su X (cioè: $\tau^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$ per ogni $A \in \mathfrak{F}$). Allora τ induce una trasformazione τ_* su $\mathfrak{M}(X)$ nel modo seguente:

$$(\tau_*\mu)(A) = \mu(\tau^{-1}A) \tag{1.1}$$

poiché τ è misurabile, è facile vedere che $\tau_*\mu \in \mathfrak{M}(X)$, cioè che la trasformazione τ_* è ben definita.

Definizione 1.1.15. Sia $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di probabilità. Allora, una trasformazione $\tau : X \to X$ si dice *non singolare* se e soltanto se $\tau_*\mu \ll \mu$, cioè se per ogni $A \in \mathfrak{F}$ tale che $\mu(A) = 0$ risulta $\tau_*\mu(A) = \mu(\tau^{-1}A) = 0$.

Proposizione 1.1.6. *Siano $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di probabilità e $\tau : X \to X$ una trasformazione non singolare su X. Allora, se $\nu \ll \mu$, vale anche $\tau_*\nu \ll \tau_*\mu \ll \mu$.*

Proposizione 1.1.7 (Cambio di variabile)**.** *[2] Supponiamo che $f : X \to \mathbb{R}$ e $\tau : X \to X$ siano due funzioni misurabili rispetto alla σ-algebra $\mathfrak{F}$. Allora, f è integrabile rispetto a $\tau_*\mu$ se e soltanto se $f \circ \tau$ è integrabile ripetto a μ. In tal caso, per ogni $A \in \mathfrak{F}$ vale*

$$\int_{\tau^{-1}A} (f \circ \tau) d\mu = \int_A f d(\tau_*\mu)$$

1.2 Probabilità

Richiamiamo ora alcuni concetti fondamentali di probabilità. Per i dettagli si rimanda a *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications* di L.B. Castaneda, V. Arunachalam e S. Dharmaraja [5].

Definizione 1.2.1. Sia $(\Omega, \mathfrak{F})$ uno spazio misurabile. Se P è una misura su Ω tale che $P(X) = 1$, allora P si dice *misura di probabilità*. In tal caso, lo spazio $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ si dice *spazio di probabilità* e gli insiemi misurabili $A \in \mathfrak{F}$ si dicono *eventi*.

Definizione 1.2.2. Siano $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $A, B \in \mathfrak{F}$ due eventi. Allora A e B si dicono *indipendenti* se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Se $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ sono due sotto σ-algebre di $\mathfrak{F}$, allora $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ si dicono *indipendenti* se $\forall A \in \mathfrak{F}_1$ e $\forall B \in \mathfrak{F}_2$, A e B risultano indipendenti.

Definizione 1.2.3. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ e un evento A tale che $P(A) > 0$, per ogni $B \in \mathfrak{F}$ si definisce *probabilità condizionata* di B dato A

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Osservazione 1.2.1. Dalle due definizioni precedenti segue che, fissato un evento A tale che $P(A) > 0$, un evento B è indipendente da A se e soltanto se $P(B|A) = P(B)$.

Definizione 1.2.4. Siano $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $\mathfrak{B}$ la σ-algebra dei Boreliani su $\mathbb{R}$. Si definisce *variabile aleatoria* (reale) una funzione misurabile $X : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Nota. Equivalentemente, la funzione $X : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ è una variabile aleatoria se $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathfrak{F}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione 1.2.2. Se X è una variabile aleatoria sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ e $\tau : \Omega \to \Omega$ è una trasformazione misurabile, allora $\tau(X)$ è ancora una variabile aleatoria su Ω.

Definizione 1.2.5. [8] Sia X è una variabile aleatoria sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Allora si definisce *valore atteso* di X il numero

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X dP$$

Definizione 1.2.6. [8] Siano X una variabile aleatoria sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ e $\mathfrak{I}$ una sotto σ-algebra di $\mathfrak{F}$. Allora si dice *attesa condizionata* di X rispetto a $\mathfrak{I}$ la variabile aleatoria $\mathbb{E}[X|\mathfrak{I}]$ tale che

$$\int_A \mathbb{E}[X|\mathfrak{I}] dP = \int_A X dP$$

per ogni $A \in \mathfrak{I}$.

Definizione 1.2.7. Se X è una variabile aleatoria su Ω, si dice σ-algebra *generata* da X la più piccola σ-algebra $\sigma(X)$ rispetto alla quale la funzione X risulta misurabile.

Osservazione 1.2.3. $\sigma(X)$ coincide con l'intersezione di tutte le σ-algebre rispetto alle quali X risulta una funzione misurabile. In particolare quindi, $\sigma(X)$ è una sotto σ-algebra di $\mathfrak{F}$.

Definizione 1.2.8. Due variabili aleatorie X e Y definite sullo stesso spazio di probabilità si dicono *indipendenti* se $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$ sono indipendenti.

Definizione 1.2.9. Siano $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uno spazio di probabilità e X una variabile aleatoria reale definita su Ω. Si definisce *funzione di ripartizione* di X la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ data da:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Se F_X è una funzione assolutamente continua, allora la variabile aleatoria X si dice *continua*, se invece F_X è una funzione semplice, X si dice *discreta*.

Definizione 1.2.10. [8] Una successione $\{X_n\}$ di variabili aleatorie si dice *indipendente e identicamente distribuita (i.i.d.)* se tutte le variabili hanno uguale funzione di ripartizione e se sono indipendenti a due a due.

Teorema 1.2.1 (Legge Forte dei Grandi Numeri). *[8] Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. a valori reali. Allora*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i = \mathbb{E}[X_1] \right) = 1$$

Definizione 1.2.11. Siano $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uno spazio di probabilità e X una variabile aleatoria continua definita su Ω. Si dice *funzione di densità* di X la funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se esiste, tale che:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Nota. Risulta evidente dall'ultima definizione che, se una variabile aleatoria continua X ammette densità f_X, allora $f_X \in \mathfrak{L}^1(\Omega)$, e per ogni punto in cui F'_X risulta definita, vale $f_X(x) = F'_X(x)$. Inoltre, si può dimostrare che per ogni evento $B \in \mathfrak{F}$

$$P(B) = \int_B f_X dP$$

Osservazione 1.2.4. Se f_X è la densità di probabilità di una variabile aleatoria X, allora f_X soddisfa le seguenti proprietà:

- $f_X \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

Viceversa, ogni funzione a valori in $\mathbb{R}$ che soddisfa le due proprietà precedenti è la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua.

Definizione 1.2.12. [4] Sia $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Si denota con

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\Omega, \mathfrak{F}, P) = \{f \in \mathfrak{L}^1(\Omega, \mathfrak{F}, P) : f \geq 0, \ \|f\|_1 = 1\}$$

lo spazio delle densità di probabilità.

Osservazione 1.2.5. [4] Se $f \in \mathfrak{D}$, allora

$$\mu_f(A) = \int_A f d\mu \ll \mu$$

è una misura su Ω e f risulta la derivata di Radon-Nikodym (detta anche *densità*) di μ_f, per il teorema 1.1.5.
Supponiamo ora che ν sia una misura su Ω assolutamente continua rispetto a μ e che τ sia una trasformazione non singolare su Ω. Allora, grazie alla proposizione 1.1.6 sappiamo che anche $\tau_*\nu$ è una misura assolutamente continua rispetto a μ. Pertanto, si può considerare l'operatore che associa alla densità di ν quella di $\tau_*\nu$, cioè l'operatore di Perron-Frobenius. Poiché tale operatore agisce su $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{L}^1(\Omega)$, risulterà più facile da studiare rispetto alla trasformazione $\tau_* : \mathfrak{M}(\Omega) \to \mathfrak{M}(\Omega)$.

1.3 Analisi funzionale

Come vedremo nei prossimi capitoli, molte proprietà di un sistema dinamico possono essere studiate attraverso l'operatore di Koopman e l'operatore di Perron-Frobenius. Questi operatori presentano tuttavia caratteristiche diverse a seconda dello spazio di funzioni su cui sono definiti. Per questo motivo è importante conoscere le strutture di alcuni di questi spazi (in particolare degli spazi di Banach) e le loro proprietà.
I riferimenti principali per questa sezione sono i seguenti volumi: *Real and Complex Analysis* di W. Rudin [24] per le definizioni e le prime proprietà degli spazi di Banach, *Laws of Chaos* di A. Boyarsky e P. Góra [4] per la teoria sulle funzioni a variazione limitata, *Functional Analysis* di M. Reed e B. Simon [22] e *A Course in Functional Analysis* di J. B. Conway [7] per i paragrafi sugli operatori tra spazi di Banach. In particolare, i risultati riportati nel paragrafo sull'analisi spettrale si possono trovare in *Perturbation Theory for Linear Operators* di T. Kato [14]

1.3.1 Spazi di Banach

Definizione 1.3.1. Sia X uno spazio vettoriale. Una funzione $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ si dice *norma* se, per ogni $f, g \in X$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, valgono le seguenti:

1. $\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$
2. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Se $\|\cdot\|$ è una norma su X, la coppia $(X, \|\cdot\|)$ è detta *spazio normato*.

Definizione 1.3.2. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e $\{f_n\}_{n\geq 0}$ una successione di elementi di X. Allora, si dice che $\{f_n\}_{n\geq 0}$ *converge a* f in X e si scrive $f_n \to f$ se esiste $f \in X$ tale che $\|f_n - f\| \to 0$ in $\mathbb{R}$, per $n \to \infty$.

Definizione 1.3.3. Una successione $\{f_n\}_{n\geq 0}$ si dice *successione di Cauchy* se $\|f_m - f_n\| \to 0$ per $m, n \to 0$.

Osservazione 1.3.1. Ogni successione convergente in X è una successione di Cauchy. In generale, però, non vale il viceversa.

Definizione 1.3.4. Uno spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in X è convergente.
Uno spazio normato e completo si dice *spazio di Banach*.

Esempi. Sia $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ uno spazio di misura.

- Lo spazio $\mathfrak{L}^\infty(X)$ delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ misurabili e limitate su X, cioè tali che $\sup_X |f(x)| = M < \infty$, è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$: $\|f\|_\infty = \sup_X |f(x)|$.

- Grazie all'osservazione 1.1.2, sappiamo che lo spazio $C(X) = C^0(X)$ delle funzioni a valori reali, continue e limitate su X è contenuto in $\mathfrak{L}^\infty(X)$; si può dimostrare che $C(X)$ è completo rispetto alla restrizione della norma $\|\cdot\|_\infty$ e risulta quindi uno spazio di Banach.

- Per ogni $k \geq 1$ e per ogni insieme Ω compatto in $\mathbb{R}$, lo spazio $C^k(\Omega)$ delle funzioni che hanno derivate parziali continue fino al k-esimo ordine in Ω è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|f^{(j)}\|_{C(\Omega)}$$

- Sia $1 \leq p < \infty$. Lo spazio $\mathfrak{L}^p(X)$ delle funzioni a valori reali, misurabili e tali che $\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty$ è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_p$: $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Spazi $\mathfrak{L}^p$

Nota. Tutti gli spazi $\mathfrak{L}^p$ sono formati da funzioni su X il cui comportamento è determinato esclusivamente attraverso la misura μ e la σ-algebra $\mathfrak{F}$. Formalmente, quindi, gli elementi di tali spazi sono classi di equivalenza di funzioni uguali *quasi ovunque*, ovvero funzioni che differiscono al più su insiemi di misura nulla. Con abuso di notazione, ogni classe di equivalenza si indica solitamente con un suo rappresentante.

Proposizione 1.3.1. *Sia S lo spazio delle funzioni f semplici (definizione 1.1.8) e misurabili su X tali che*

$$\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) < \infty$$

Se $1 \leq p < \infty$, allora S è denso in $\mathfrak{L}^p(X)$.

Definizione 1.3.5. Uno spazio di Banach X si dice *spazio di Hilbert* se la norma $\|\cdot\|$ rispetto alla quale è completo è indotta da un prodotto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$.

Osservazione 1.3.2. Tra tutti gli spazi $\mathfrak{L}^p(X)$, $\mathfrak{L}^2(X)$ è l'unico la cui norma è indotta dal *prodotto scalare* interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f(x)} g(x) dx$$

cioè $\mathfrak{L}^2(X)$ è l'unico spazio $\mathfrak{L}^p(X)$ che è anche uno spazio di Hilbert.

Proposizione 1.3.2. *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e supponiamo che la misura μ su X sia finita* [2]*. Allora valgono le seguenti:*

1. *(Disuguaglianza di Minkowski)*
   Se $f, g \in \mathfrak{L}^p(X)$, allora

   $$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

2. *(Disuguaglianza di Hölder)*
   Siano p e q due esponenti coniugati, cioè tali che $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ e $g \in \mathfrak{L}^q(X)$, allora $fg \in \mathfrak{L}^1(X)$ e vale

   $$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

3. *Lo spazio delle funzioni semplici e misurabili su X è denso in $\mathfrak{L}^p(X)$.*

4. *Se $p < q$, allora $\mathfrak{L}^p(X) \supset \mathfrak{L}^q(X)$. [28]*

Osservazione 1.3.3. In particolare, la disuguaglianza di Holder permette di definire, per ogni coppia di esponenti coniugati p e q, il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{L}^p(X) \times \mathfrak{L}^q(X) \to \mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle := \int_X fg d\mu$$

Come abbiamo visto nell'osservazione 1.3.2, nel caso $p = q = 2$ tale operatore definisce un prodotto interno su $\mathfrak{L}^2(X)$ che risulta completo rispetto alla norma indotta.

[2] Le prime due disuguaglianze valgono anche nel caso di misure infinite.

Funzioni a variazione limitata

Definizione 1.3.6. Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}\{x_0, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a, b]$. Se esiste un numero reale $M > 0$ tale che per ogni partizione $\mathcal{P}$

$$\sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \leq M$$

allora la funzione f si dice *a variazione limitata* su $[a, b]$.

Osservazione 1.3.4. Se f è una funzione lipschitziana su $[a, b]$, allora soddisfa banalmente la condizione sopra. In particolare, quindi, si ha che ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenziabile è una funzione a variazione limitata su $[a, b]$.

Definizione 1.3.7. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Si dice *variazione* di f su $[a, b]$ il numero

$$V_{[a,b]}f = \sup_{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \right\}$$

Teorema 1.3.3. *Sia f una funzione a variazione limitata su $[a, b]$ tale che $\|f\|_1 < \infty$, dove $\|\cdot\|_1$ indica la norma $\mathfrak{L}^1$ su $[a, b]$. Allora, per ogni $x \in [a, b]$, vale*

$$|f(x)| \leq V_{[a,b]}f + \frac{\|f\|_1}{b-a}$$

Definizione 1.3.8. Si indica con $BV([a, b])$ il seguente spazio:

$$BV([a, b]) = \{f \in \mathfrak{L}^1([a, b]) : \inf_{f_1 = f \text{ q.o.}} V_{[a,b]}f_1 < +\infty\}$$

Su tale spazio, è possibile definire una norma come segue:

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_1 + \inf_{f_1 = f \text{ q.o.}} V_{[a,b]}f_1$$

Osservazione 1.3.5. Per ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si può osservare che:

- Per definizione, $BV([a, b]) \subset \mathfrak{L}^1([a, b])$.
- Senza il termine in norma $\mathfrak{L}^1$, la funzione $\|\cdot\|_{BV}$ sopra definita non sarebbe una norma, poiché esistono funzioni $f \not\equiv 0$ tali che $V_{[a,b]}f = 0$.

Proposizione 1.3.4. *Lo spazio $BV([a, b])$ munito della norma $\|\cdot\|_{BV}$ è uno spazio di Banach.*

Teorema 1.3.5. *Lo spazio $BV([a, b])$ è denso in $\mathfrak{L}^1([a, b])$.*

1.3.2 Operatori su Spazi di Banach

Definizione 1.3.9. [17] Se T è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali X e Y definiti sullo stesso campo K, allora si definiscono:

1. *Kernel* (o nucleo) di T l'insieme: $\quad \mathrm{Ker}(T) := \{x \in X : f(x) = 0\}$
2. *Immagine* di T l'insieme: $\quad \mathrm{Im}(T) := \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tc } f(x) = y\}$

Teorema 1.3.6 (Teorema del Rango)**.** *[17] Sia T un'applicazione lineare tra i due spazi vettoriali X e Y. Allora vale*

$$\dim(X) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Osservazione 1.3.6. Dall'ultimo teorema segue in particolare che, se T è una mappa lineare dallo spazio X al campo K, allora $dim(\mathrm{Ker}(T)) \leq dim(X)-1$, cioè $\mathrm{Ker}(T)$ ha *codimensione* al più uguale a 1.

Definizione 1.3.10. Sia $T : X \to Y$ un'applicazione tra due spazi vettoriali normati $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ definiti sullo stesso campo K. T si dice un operatore

- *lineare* se $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in K$.
- *limitato* se esiste $C > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ per ogni $x \in X$.
- *continuo in x_0* se per ogni successione convergente $\{x_n\} \in X$ tale che $x_n \to x_0$, la successione $\{T(x_n)\}$ converge a $T(x_0)$ in Y.
- *continuo* se è continuo in ogni punto del suo dominio.

Teorema 1.3.7. *Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *T è continuo in x_0, per qualche $x_0 \in X$.*
2. *T è continuo.*
3. *T è limitato.*

Nota. Il teorema precedente afferma quindi che un operatore lineare tra due spazi normati è continuo se e soltanto se e limitato.
L'insieme degli operatori lineari e limitati da X a Y viene usualmente indicato con $\mathcal{B}(X, Y)$.

Osservazione 1.3.7. Si può dimostrare che

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_X \leq 1} \|Tv\|_Y$$

definisce una norma sullo spazio $\mathcal{B}(X, Y)$. Inoltre,

- la norma operatoriale $\|\cdot\|$ ha diverse definizioni equivalenti:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X} \|Tx\|_Y \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \\ &= \inf\{c > 0 : \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X\}\end{aligned}$$

- se Y è uno spazio di Banach, allora $\mathcal{B}(X, Y)$ munito della norma operatoriale $\|\cdot\|$ è uno spazio di Banach.

Definizione 1.3.11. Sia T un'applicazione tra due spazi normati X e Y. Il *grafico di* T, indicato con $\Gamma(T)$, è definito da

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = T(x)\}$$

Se $\Gamma(T)$ è un insieme chiuso in $X \times Y$, allora l'operatore T si dice *chiuso*.

Teorema 1.3.8 (Teorema del Grafico Chiuso)**.** *Se $T : X \to Y$ è un operatore lineare tra i due spazi di Banach X e Y, allora T è limitato se e soltanto se T è chiuso.*

Definizione 1.3.12. Sia X uno spazio di Banach, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$. Un operatore $P \in \mathcal{B}(X)$ si dice *proiezione* se $P^2 = P$.

Osservazione 1.3.8. Data una proiezione $P \in \mathcal{B}(X)$, si ha che:

- Lo spazio X si può decomporre come $X = M \oplus N$, dove $M = P(X)$ e $N = (1 - P)(X)$.
- Anche l'operatore $1 - P$ è una proiezione.
- $Px = x$ se e soltanto se $x \in M$, $\quad Px = 0$ se e soltanto se $x \in N$.

In particolare, si ottiene

$$M = \text{Im}(P) = \text{Ker}(1 - P), \quad N = \text{Im}(1 - P) = \text{Ker}(P)$$

1.3.3 Operatore Aggiunto

Definizione 1.3.13. Dato uno spazio normato X su un campo K, si dice *spazio aggiunto* di X lo spazio X^* delle applicazioni lineari e limitate da X in K.

Definizione 1.3.14. Siano X, Y due spazi di Banach, X^*, Y^* i rispettivi spazi aggiunti. Se $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ è un operatore lineare limitato da X a Y, si dice *operatore aggiunto* di T, e si indica T^*, l'operatore lineare e limitato da Y^* a X^* definito da

$$(T^*\phi)(x) = \phi(T(x))$$

per ogni $\phi \in Y^*$, $x \in X$.

Consideriamo gli spazi di Banach $\mathfrak{L}^p(X)$ e $C(X)$ definiti sullo spazio di misura $(X, \mathfrak{F}, \mu)$.

Teorema 1.3.9 (Teorema di rappresentazione di Riesz)**.** *Siano* $1 < p < \infty$ *e* q *due esponenti coniugati. Per* $g \in \mathfrak{L}^q(X)$*, sia* $F_g : \mathfrak{L}^p(X) \to \mathbb{R}$ *definita da:*

$$F_g(f) = \int fg d\mu$$

Allora $F_g \in \mathfrak{L}^p(X)^*$ *e la mappa* $g \mapsto F_g$ *definisce un isomorfismo isometrico di* $\mathfrak{L}^q(X)$ *su* $\mathfrak{L}^p(X)^*$*.*

Osservazione 1.3.9. Il teorema precedente dice pertanto che, dati due esponenti coniugati p e q, ogni funzionale su $\mathfrak{L}^p(X)$ può essere rappresentato come un elemento di $\mathfrak{L}^q(X)$. Inoltre, si può dimostrare che se la misura μ è finita tali risultati si possono estendere al caso $p = 1$ e $q = \infty$.

Definizione 1.3.15. [4] $\mathfrak{M}(X)$ denota lo spazio di tutte le misure μ su X. Su tale spazio, è possibile definire una norma, detta *variazione totale*, come segue:

$$\|\mu\|_{TV} = \sup_{A_1 \cup \dots \cup A_n = X} \{|\mu(A_1)| + \dots + |\mu(A_n)|\}$$

dove l'estremo superiore è calcolato su tutte le partizioni finite di X.

Teorema 1.3.10. *[4] Sia* X *uno spazio metrico compatto. Allora lo spazio aggiunto di* $C(X)$*,* $C^*(X)$*, coincide con* $\mathfrak{M}(X)$*.*

Teorema 1.3.11. *Sia* $T : X \to Y$ *un operatore lineare limitato tra gli spazi di Banach* X *e* Y*. Allora* $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \|T^*\|_{\mathcal{B}(Y^*,X^*)}$*.*

Definizione 1.3.16. [12] Siano $\varphi \in X^*$ e $x_0 \in X$. Allora si può definire il *prodotto tensoriale* fra φ e x_0 come l'operatore su X

$$(\varphi \otimes x_0)(x) = \langle \varphi, x \rangle x_0$$

Osservazione 1.3.10. [12] Se $\langle \varphi, x_0 \rangle = 1$, allora

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes x_0)^2(x) &= (\varphi \otimes x_0)(\langle \varphi, x \rangle x_0) = \\ &= \langle \varphi, \langle \varphi, x \rangle x_0 \rangle x_0 = \\ &= \langle \varphi, x \rangle \langle \varphi, x_0 \rangle x_0 = \\ &= \langle \varphi, x \rangle x_0 = (\varphi \otimes x_0)(x)\end{aligned}$$

cioè l'operatore $\varphi \otimes x_0$ è una proiezione.

1.3.4 Analisi spettrale

Sia X uno spazio di Banach. Come abbiamo visto nell'osservazione 1.3.7, anche lo spazio $\mathcal{B}(X)$ munito della norma operatoriale è di Banach. In particolare, si può dimostrare che tale spazio, rispetto all'operazione di composizione di funzioni, ha una struttura di algebra di Banach con elemento unitario dato dall'operatore identità $I : X \to X$ [3].

Definizione 1.3.17. Dato un operatore $T \in \mathcal{B}(X)$, si definisce *insieme risolvente* di T l'insieme $\rho(T)$ dei numeri complessi λ tali che l'operatore $\lambda I - T$ è invertibile in $\mathcal{B}(X)$, ovvero ha un inverso che è un operatore lineare e limitato. L'operatore $(\lambda I - T)^{-1}$ si dice *risolvente* di T.

Definizione 1.3.18. L'insieme $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ si definisce *spettro* di T. Lo spettro di T può essere suddiviso in 3 sottoinsiemi:

- lo *spettro puntuale*, formato dagli autovalori di T, cioè dai numeri complessi λ tali che $\;\exists\, x \in X, x \neq 0 \mid Tx = \lambda x$;
- lo *spettro continuo*, formato dai numeri complessi λ per cui $(\lambda I - T)^{-1}$ ha immagine densa in X ma non è limitato;
- lo *spettro residuo*, formato dai numeri complessi λ che non sono autovalori e tali che $(\lambda I - T)^{-1}$ non ha immagine densa in X.

Nota. In generale, quindi, dato un operatore lineare e limitato T tra due spazi di Banach X e Y, un numero λ appartiene a $\sigma(T)$ se e soltanto se l'operatore $\lambda I - T$ non è invertibile o ha inverso non limitato.

Teorema 1.3.12. *Per ogni operatore lineare e limitato $T \in \mathcal{B}(X)$, $\sigma(T)$ è un insieme chiuso in $\mathbb{C}$ e diverso dall'insieme vuoto. Inoltre, $\sigma(T)$ è contenuto nel disco $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|T\|\}$.*

Definizione 1.3.19. Se $T \in \mathcal{B}(X)$, si definisce *raggio spettrale* di T il numero reale positivo

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Osservazione 1.3.11. Dalla definizione di raggio spettrale e dal teorema 1.3.12 segue che, per ogni $T \in \mathcal{B}(X)$, $r(T) \leq \|T\|$.

Teorema 1.3.13. *Dato un operatore T lineare e limitato su uno spazio di Banach X, il limite $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ esiste ed è uguale a $r(T)$.*

Teorema 1.3.14. *Supponiamo che lo spettro $\sigma(T)$ di un operatore $T \in \mathcal{B}(X)$ sia formato da due parti σ' e σ'', con σ' limitata. Supponiamo inoltre che una curva Γ chiusa, semplice e rettificabile racchiuda un aperto tale che il suo interno contiene σ' e il suo esterno σ''.*
Allora esiste una decomposizione $X = M \oplus N$ tale che:

- *$T_{|M}$ è la proiezione su M e $T_{|N}$ è la proiezione su N.*
- *$T_{|M} \in \mathcal{B}(M)$.*
- *Gli spettri di $T_{|M}$ e $T_{|N}$ coincidono con σ' e σ'', rispettivamente.*

Definizione 1.3.20. Siano M e N due varietà lineari chiuse sullo stesso spazio di Banach X. Allora, posto $S_M = \{u \in M : \|u\| = 1\}$ si definiscono:

$$\delta(M,N) = \sup_{u \in S_M} \operatorname{dist}(u,N)$$
$$\hat{\delta}(M,N) = \max[\delta(M,N), \delta(N,M)]$$

dove $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ rappresenta la distanza sullo spazio di Banach X e $\|\cdot\|$ è la norma indotta dalla distanza.

Definizione 1.3.21. Siano S e T due operatori chiusi (definizione 1.3.11) tra gli spazi di Banach X e Y. Allora, i loro grafici $G(T)$ e $G(S)$ sono varietà lineari chiuse nello spazio prodotto $X \times Y$. Si definiscono pertanto:

$$\delta(S,T) = \delta(G(T), G(S))$$
$$\hat{\delta}(S,T) = \max[\delta(S,T), \delta(T,S)]$$

Teorema 1.3.15. *Sia T un operatore chiuso su uno spazio di Banach tale che lo spettro $\sigma(T)$ è separato in due parti, $\sigma'(T)$ e $\sigma''(T)$, da una curva chiusa Γ come nel teorema 1.3.14. Sia $X = M'(T) \oplus M''(T)$ la corrispondente decomposizione di X. Allora esiste $\varepsilon > 0$, dipendente da T e da Γ, con le seguenti proprietà:*

- *Se S è un altro operatore chiuso su X tale che $\hat{\delta}(S,T) < \varepsilon$, allora anche lo spettro $\sigma(S)$ è separato da Γ in due parti $\sigma'(S)$ e $\sigma''(S)$ analogamente a $\sigma(T)$.*
- *Se $X = M'(S) \oplus M''(S)$ è la corrispondente decomposizione di X, $M'(S)$ e $M''(S)$ sono isomorfi a $M'(T)$ e $M''(T)$, rispettivamente. In particolare, $\dim M'(S) = \dim M'(T)$, $\dim M''(S) = \dim M''(T)$ e sia $\sigma'(S)$ che $\sigma''(S)$ sono non vuoti se questo è vero per T.*
- *La decomposizione $X = M'(S) \oplus M''(S)$ è continua in S nel senso che la proiezione Π'_S di X su $M'(S)$ tende in norma alla proiezione Π'_T di X su $M'(T)$ per $\hat{\delta}(S,T) \to 0$.*

Capitolo 2

Teoria Ergodica

Come anticipato nell'introduzione, la teoria ergodica studia le proprietà qualitative dell'azione di un gruppo di trasformazioni φ_t su un sistema dinamico, dove il parametro t rappresenta il tempo. A tal fine si considera un insieme X, detto spazio delle fasi, munito di una misura, solitamente finita. In particolare, se X è uno spazio di probabilità, si può interpretare l'azione di $\{\varphi_t\}$ su X come l'evoluzione nel tempo della distribuzione di probabilità per le configurazioni del sistema, passando così da un'analisi deterministica (cioè lo studio dell'andamento delle singole traiettorie) a una stocastica della dinamica.

Il riferimento principale per questo capitolo è il libro *Laws of Chaos* di A. Boyarsky e P.Góra [4].

2.1 Misure invarianti

Sia $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ uno spazio di probabilità. Ricordiamo (definizione 1.1.6) che una trasformazione $\tau : X \to X$ si dice misurabile se $\tau^{-1}(B) \in \mathfrak{B}$ per ogni $B \in \mathfrak{B}$.

Definizione 2.1.1. Si dice che una trasformazione misurabile $\tau : X \to X$ *preserva la misura* μ o che μ è τ-invariante se $\mu(\tau^{-1}(B)) = \mu(B)$ per ogni $B \in \mathfrak{B}$.

Osservazione 2.1.1. Siano $A \in \mathfrak{B}$ un insieme misurabile, $\mathbf{1}_A$ la funzione indicatrice di A e τ una trasformazione misurabile su X. Allora

$$\mathbf{1}_A \circ \tau(x) = \mathbf{1}_A(\tau(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau(x) \in A \iff x \in \tau^{-1}(A) \\ 0 & \text{se } \tau(x) \notin A \iff x \notin \tau^{-1}(A) \end{cases}$$

Tale funzione coincide con

$$\mathbf{1}_{\tau^{-1}(A)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \tau^{-1}(A) \\ 0 & \text{se } x \notin \tau^{-1}(A) \end{cases}$$

Pertanto, per ogni insieme misurabile A risulta

$$\mathbf{1}_A \circ \tau = \mathbf{1}_{\tau^{-1}(A)}$$

Definizione 2.1.2. Se $\tau : X \to X$ è una trasformazione che preserva la misura μ, allora la quadrupla $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ si dice *sistema dinamico*.

Teorema 2.1.1. *Sia $\tau : X \to X$ una trasformazione misurabile su $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Allora τ preserva la misura μ se e soltanto se*

$$\int_X f(x) d\mu = \int_X f(\tau(x)) d\mu$$

per ogni $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$. Se X è uno spazio compatto e la proprietà precedente vale per ogni funzione continua su X, allora τ preserva μ.

Esempio. Siano $I = [0, 1]$, $\mathfrak{B}$ la σ-algebra dei Boreliani e m la misura di Lebesgue su I. Allora la trasformazione $\tau : I \to I$, $\tau(x) = 2x \pmod 1$, detta *Doubling Map*, preserva la misura m.

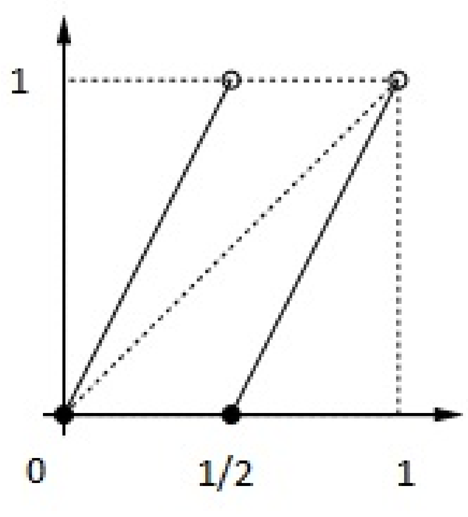

Figura 2.1: Doubling Map definita sull'intervallo $[0, 1]$

Dimostrazione. Sia $[a,b] \subset [0,1]$. Allora $\tau^{-1}([a,b])$ è formato dai due intervalli disgiunti $I_1 = [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$, $I_2 = [\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}]$ tali che $m(I_1) = m(I_2) = \frac{1}{2}(b-a)$. Pertanto risulta

$$m(\tau^{-1}[a,b]) = m([a,b])$$

e poiché la famiglia $\mathcal{P} = \{[a,b] \subset [0,1]\}$ è un π-sistema che genera la σ-algebra dei Boreliani su $[0,1]$, segue dal teorema 1.1.2 che m è τ-invariante. $\square$

Il teorema seguente stabilisce l'esistenza di misure invarianti per un'importante classe di trasformazioni.

Teorema 2.1.2 (Teorema di Krylov-Bogoliubov)**.** *Siano X uno spazio metrico compatto e $\tau : X \to X$ una trasformazione continua. Allora esiste una misura di probabilità τ-invariante su X.*

2.2 Ergodicità

Data una trasformazione $\tau : X \to X$, sia τ^n l'n-esima iterata di τ:

$$\tau^n(x) = \underbrace{\tau \circ \cdots \circ \tau}_{n \text{ volte}}(x)$$

Definizione 2.2.1. Sia $\tau : X \to X$ una trasformazione sullo spazio di misura $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Allora, per ogni punto $x \in X$, l'insieme $\{\tau^n(x)\}_{n\geq 0}$ si dice *orbita di x*.

Teorema 2.2.1 (Teorema di Ricorrenza di Poincaré)**.** [1] *Sia τ una trasformazione che preserva la misura su uno spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Sia inoltre $E \in \mathfrak{B}$ tale che $\mu(E) > 0$. Allora quasi ogni punto di E ritorna in E un numero infinite di volte.*

[1] Per molto tempo il teorema di ricorrenza di Poincaré è stato contestato da fisici e matematici che ritenevano fosse in contraddizione con i principi classici di meccanica statistica. Intuitivamente, dato un sistema con molti gradi di libertà (come un gas libero di muoversi all'interno di un contenitore) sembrava assurdo pensare che, partendo da una qualsiasi configurazione, il sistema tornerà ad essa naturalmente, senza l'applicazione di forze esterne. In realtà il teorema di Poincarè non accenna al tempo di primo ritorno, che infatti risulta per molti problemi fisici eccezionalmente grande. Per un approfondimento sul paradosso di Zermelo si veda [27]

Dimostrazione. Sia B l'insieme dei punti che non ritornano mai in E, cioè

$$B = \{x \in E : \tau^k(x) \notin E \ \ \forall k \geq 1\}$$

e supponiamo per assurdo che esista un elemento $x \in \tau^{-i}(B) \cap \tau^{-j}(B)$, per qualche $i > j \geq 0$. Allora $\tau^j(x) \in B$ e $\tau^{i-j}(\tau^j(x)) = \tau^i(x) \in B$, il che è assurdo per definizione di B. Abbiamo cioè dimostrato che

$$\tau^{-i}(B) \cap \tau^{-j}(B) = \varnothing$$

per ogni $i > j \geq 0$. Pertanto,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(\tau^{-i}(B)) = \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^{-i}(B)\Big) \leq \mu(X) = 1$$

poiché μ è τ-invariante, ciò implica che $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(B) \leq 1$, e quindi deve essere $\mu(B) = 0$. □

Definizione 2.2.2. [2] Una trasformazione $\tau : X \to X$ che preserva la misura μ si dice *ergodica* se, per ogni $B \in \mathfrak{B}$ tale che $\tau^{-1}(B) = B$, $\mu(B) = 0$ oppure $\mu(X \setminus B) = 0$.

Nota. Poiché l'ergodicità di τ è una proprietà che dipende dalla trasformazione τ e dalla misura μ, spesso ci si riferisce ad essa dicendo che la coppia (τ, μ) è ergodica.

Esempio. (τ, m), dove τ indica la Doubling Map sull'intervallo unitario I, definisce un sistema dinamico ergodico.

Dimostrazione. Supponiamo che $A = \tau^{-1}(A)$ sia un insieme invariante e definiamo $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$. poiché τ preserva m e $\tau(I_1) = \tau(I_2) = I$, risulta

$$m(A) = 2 \cdot m(A \cap I_1) = \frac{m(A \cap I_1)}{m(I_1)}$$

cioè

$$m(A \cap I_1) = m(A) \cdot m(I_1)$$

Analogamente si ottiene che $m(A \cap I_2) = m(A) \cdot m(I_2)$. Ora, per ogni $B \in \mathfrak{B}$ definiamo $B_1 = \tau^{-1}(B) \cap I_1$ e $B_2 = \tau^{-1}(B) \cap I_2$. Allora

[2] Per sistemi dinamici ergodici una stima del tempo di primo ritorno è data dal Lemma di Kac. Si veda [4].

$$m(A \cap \tau^{-1}(B)) = 2 \cdot m(A \cap B_1) = 2 \cdot m(A \cap B_2)$$

Per induzione si dimostra che vale

$$m(A \cap E) = m(A) \cdot m(E)$$

per ogni intervallo diadico E e quindi per ogni unione di intervalli simili. poiché ogni $A \subset [0,1]$ si può approssimare bene a piacere con tali insiemi [3], per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scrivere

$$\Big| m(A \cap A) - m(A) \cdot m(A) \Big| < \varepsilon$$

cioè deve essere, per l'arbitrarietà di ε, $m(A) = m(A)^2$. Ma allora $m(A) = 0$ oppure $m(A) = 1$, cioè (τ, m) è ergodico. □

Indichiamo con $A \triangle B$ la *differenza simmetrica* tra gli insiemi A e B, cioè: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definizione 2.2.3. Sia $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ un sistema dinamico. Allora un insieme $B \in \mathfrak{B}$ si dice *τ-invariante* se $\tau^{-1}(B) = B$ e *quasi τ-invariante* se $\mu(\tau^{-1}(B) \triangle B) = 0$. Analogamente, una funzione misurabile su X si dice *τ-invariante* se $f \circ \tau = f$ e *quasi τ-invariante* se $f \circ \tau = f$ q.o.

A partire dalle definizioni di ergodicità e di insieme invariante, si possono dimostrare i seguenti risultati:

Lemma 2.2.2. *Se (τ, μ) è ergodico, allora*

- *Per ogni insieme B tale che $\tau^{-1}(B) \subset B$, $\mu(B) = 0$ oppure $\mu(B) = 1$.*
- *Per ogni insieme B tale che $\mu(B) > 0$, $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tau^{-k}(B)\big) = 1$.*

A loro volta le proprietà precedenti permettono di ricavare delle condizioni necessarie e sufficienti per l'ergodicità di un sistema dinamico.

Teorema 2.2.3. *Sia τ una trasformazione che preserva la misura sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Allora sono equivalenti:*

1. *τ è ergodica.*
2. *Se $B \in \mathfrak{B}$ e $\mu\big(\tau^{-1}(B) \triangle B\big) = 0$, allora $\mu(B) = 0$ oppure $\mu(B) = 1$*
3. *Per ogni $A, B \in \mathfrak{B}$ tali che $\mu(A) > 0$ e $\mu(B) > 0$, esiste $n > 0$ tale che $\mu\big(\tau^{-n} A \cap B\big) > 0$.*

[3] Per i dettagli sui razionali diadici e le loro proprietà si veda [10]

Infine, l'ergodicità di una trasformazione può essere caratterizzata anche tramite funzioni.

Teorema 2.2.4. *Sia τ una trasformazione che preserva la misura sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Allora sono equivalenti:*

1. *τ è ergodica.*
2. *Se f è una funzione misurabile definita su X e $(f \circ \tau)(x) = f(x)$ q.o., allora f è costante q.o.*
3. *Se $f \in \mathfrak{L}^2(X)$ e $(f \circ \tau)(x) = f(x)$ q.o., allora f è costante q.o.*

Proposizione 2.2.5. *Siano X uno spazio metrico compatto e μ una misura di probabilità definita sulla σ-algebra dei Boreliani di X che assegna una misura positiva a ogni insieme diverso dal vuoto. Se $\tau : X \to X$ è una trasformazione continua e ergodica rispetto a μ, allora*

$$\mu\{x : \{\tau^n x : n \geq 0\} \text{ è denso in } X\}\} = 1$$

Dimostrazione. Fissiamo una base $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ per la topologia di X. Allora $Y_n = \cup_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} U_n$ è l'insieme dei punti la cui orbita entra in U_n dopo k iterazioni, per qualche $k \geq 0$. Pertanto,

$$\{\tau^n(x) : n \geq 0\} \text{ è denso in } X \iff x \in \cap_{n=1}^{\infty} Y_n$$

poiché per densità il punto x deve visitare ogni U_n. Osserviamo inoltre che $\tau^{-1}(Y_n) \subset Y_n$. Allora, per il lemma 2.2.2, $\mu(Y_n) = 0$ oppure $\mu(Y_n) = 1$. Ma poiché Y_n è un insieme non vuoto e aperto (per la continuità di τ), deve essere $\mu(Y_n) = 1$. Pertanto $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} Y_n) = 1$. □

Teorema 2.2.6 (Teorema di Birkhoff)**.** *Siano $\tau : (X, \mathfrak{B}, \mu) \to (X, \mathfrak{B}, \mu)$, μ una misura finita su X e τ-invariante e $f \in \mathfrak{L}^1(X)$. Allora esiste una funzione $f^* \in \mathfrak{L}^1(X)$ tale che*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) \to f^* \quad q.o.$$

Inoltre, f^* è tale che:

- *$f^* \circ \tau = f^*$ q.o., cioè f^* è una funzione τ-invariante.*
- *$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$.*

Corollario 2.2.7. *Se τ è una trasformazione ergodica sullo spazio di misura $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ e $\mu(X) < \infty$, allora f^* è costante q.o. e risulta*

$$f^* = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad q.o.$$

Osservazione 2.2.1. Ovviamente, un punto $x \in X$ appartiene a un insieme misurabile E se e soltanto se $\mathbf{1}_E(x) = 1$. Allora, il numero di elementi dell'insieme $\{x, \tau(x), \ldots, \tau^{n-1}(x)\}$ che appartengono ad E è uguale a $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_E(\tau^k(x))$, e conseguentemente la frequenza delle occorrenze di tale insieme in E è uguale a $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_E(\tau^k(x))$.
Applicando quindi il corollario 2.2.7 si ottiene in particolare che, se μ è una misura di probabilità su X, per ogni insieme misurabile E vale

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_E(\tau^i(x)) \to \mu(E)$$

cioè la frequenza con cui l'orbita di un punto di X occorre nell'insieme E tende a $\mu(E)$.

Definizione 2.2.4. Siano $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ un sistema dinamico, con $\mu(X) < \infty$, e $f \in \mathfrak{L}^1(X)$. Allora si definiscono

- *media temporale* di f

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau^i(x))$$

- *media spaziale* di f

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$$

Osservazione 2.2.2. Applicando le ultime definizioni, il corollario 2.2.7 dice che se la trasformazione τ è ergodica, allora la media temporale di f coincide con quella spaziale. Si può dimostrare che vale anche il viceversa, cioè se la media temporale e quella spaziale di una funzione $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ sono uguali, allora la trasformazione τ è ergodica.

Osservazione 2.2.3. Osservando che $\int_X f d\mu = \int_X \mathbb{E}(f|\mathfrak{B}) d\mu$ (definizione 1.2.6), si può dimostrare che per sistemi dinamici ergodici l'asserto del teorema di Birkhoff 2.2.6 è equivalente alla legge forte dei grandi numeri. Per i dettagli si veda [13].

Corollario 2.2.8. *Se τ preserva la misura sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, allora τ è ergodica se e soltanto se, per ogni $A, B \in \mathfrak{B}$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(\tau^{-k}A \cap B\big) \to \mu(A)\mu(B)$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che la condizione 2.2.8 è necessaria. Siano A e B due insiemi misurabili. Ovviamente le funzioni indicatrici $\mathbf{1}_A$ e $\mathbf{1}_B$ risultano integrabili, poiché $\int \mathbf{1}_A = \mu(A) \leq \mu(X) = 1$. Applichiamo allora il teorema di Birkhoff 2.2.6 alla funzione $\mathbf{1}_A$ e otteniamo

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(\tau^k(x)) = \int \mathbf{1}_A d\mu = \mu(A) \\ \Longrightarrow \quad &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A(\tau^k(x))\mathbf{1}_B(x) = \mu(A)\mathbf{1}_B(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

per quasi ogni x. Osserviamo che, poiché $\mathbf{1}_A \circ \tau = \mathbf{1}_{\tau^{-1}(A)}$ (per l'osservazione 2.1.1), risulta $\mathbf{1}_A \circ \tau^k = \mathbf{1}_{\tau^{-k}(A)}$ per ogni k. Inoltre, è facile vedere che $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$. Pertanto

$$\mathbf{1}_A \circ \tau^k \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{\tau^{-k}(A)}\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{\tau^{-k}(A)\cap B}$$

da cui segue che l'equazione 2.1 può essere riscritta come

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\tau^{-k}(A)\cap B} = \mu(A)\mathbf{1}_B(x)$$

per quasi ogni $x \in X$. Allora, si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(\tau^{-k}A \cap B) &= \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\tau^{-k}(A)\cap B} d\mu \\ &= \int \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\tau^{-k}(A)\cap B} \right) d\mu \\ &= \int \mu(A)\mathbf{1}_B d\mu \\ &= \mu(A)\mu(B) \end{aligned}$$

dove il passaggio del limite dentro il segno di integrale vale grazie al teorema di convergenza dominata 1.1.3.

Dimostriamo ora che la condizione 2.2.8 è anche sufficiente.
Sia $A \in \mathfrak{B}$ un insieme invariante. Scegliendo $B = A$, per ipotesi deve valere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(\tau^{-k}(A) \cap A\big) = \mu(A)^2$$

Ma poiché A è invariante, si ha che $A = \tau^{-1}(A) = \tau^{-k}(A)$ per ogni k. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(\tau^{-k}(A) \cap A\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A) = \mu(A)$$

da cui segue che $\mu(A) = \mu(A)^2$. Allora $\mu(A) = 0$ oppure $\mu(A) = 1$ e quindi τ è una trasformazione ergodica. □

2.2.1 Mixing

Sia $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ uno spazio di probabilità.

Definizione 2.2.5. Una trasformazione $\tau : (X, \mathfrak{B}, \mu) \to (X, \mathfrak{B}, \mu)$ che preserva la misura si dice

- ◇ *weakly mixing* se, per ogni $A, B \in \mathfrak{B}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big|\mu(\tau^{-i} A \cap B) - \mu(A)\mu(B)\big| \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

- ◇ *strongly mixing* (o semplicemente mixing) se, per ogni $A, B \in \mathfrak{B}$,

$$\mu(\tau^{-n} A \cap B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B) \quad \text{per } n \to +\infty$$

- ◇ *esatta* se per ogni $A \in \mathfrak{B}$, $\tau(A) \in \mathfrak{B}$ e per ogni $A \in \mathfrak{B}$ di misura $\mu(A) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\tau^n A) = 1$$

Osservazione 2.2.4. Dalle precedenti definizioni e dal corollario 2.2.8 segue che:

- τ esatta $\implies$ τ strongly mixing $\implies$ τ weakly mixing $\implies$ τ ergodica.
- Se τ è mixing sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ e $B \in \mathfrak{B}$ è un evento con probabilità positiva, allora per ogni $A \in \mathfrak{B}$ vale

$$\frac{\mu(\tau^{-n}A \cap B)}{\mu(B)} \to \mu(A) \quad \text{per } n \to +\infty \tag{2.2}$$

  Ma, poiché μ è una misura di probabilità, $\frac{\mu(\tau^{-n}A\cap B)}{\mu(B)} = \mu(\tau^{-n}A|B)$ è la probabilità dell'evento A condizionato a B (definizione 1.2.3). Pertanto, la condizione 2.2 dice che se τ è mixing, comunque presi due eventi A e B tale che $\mu(B) > 0$, essi diventano asintoticamente indipendenti.
- Analogamente, si può vedere che se τ è weakly mixing due eventi A e B diventano indipendenti se non si considerano un numero finito di iterazioni iniziali; se τ è ergodica A e B diventano indipendenti in media.

2.3 Operatore di Koopman

Gli enunciati e le dimostrazioni dei risultati contenuti in questo paragrafo fanno riferimento alle lezioni del corso di *Sistemi Dinamici e Applicazioni* [19]. Maggiori dettagli si possono trovare nel libro *An Introduction to Ergodic Theory* di P. Walters [29].

Definizione 2.3.1. Sia $\tau : (X, \mathfrak{B}, \mu) \to (X, \mathfrak{B}, \mu)$ una trasformazione misurabile. Si dice *operatore di Koopman* l'operatore U_τ definito da:

$$U_\tau f = f \circ \tau$$

Osservazione 2.3.1. L'operatore di Koopman può essere definito su diversi spazi di funzioni. In particolare, U_τ risulta ben definito sugli spazi $\mathfrak{L}^p(X)$ [29] e su $C(X)$. Inoltre, U_τ è un operatore positivo e vale $\|U_\tau f\|_p = \|f\|_p$ per ogni $f \in \mathfrak{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, cioè U_τ è un'isometria.

Indichiamo con $\{\mathbf{1}\}^\perp$ il sottospazio di X *ortogonale* alle costanti, cioè:

$$\{\mathbf{1}\}^\perp := \{f \in \mathfrak{L}^2(X) \mid \langle \mathbf{1}, f\rangle = 0\} = \left\{f \in \mathfrak{L}^2(X) \mid \int_X f d\mu = 0\right\} \tag{2.3}$$

Teorema 2.3.1. *Sia $\tau : X \to X$ una trasformazione che preserva la misura sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$.*

i. Le seguenti sono equivalenti:

(a) τ è ergodica.

(b) Per ogni $f, g \in \mathfrak{L}^2(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle U_\tau^i f, g\rangle = \langle f, \mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}, g\rangle$.

(c) Per ogni $f \in \mathfrak{L}^2(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle U_\tau^i f, f\rangle = \big|\langle f, \mathbf{1}\rangle\big|^2$.

(d) Per ogni $f, g \in \{\mathbf{1}\}^\perp$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle U_\tau^i f, g\rangle = 0$.

ii. Le seguenti sono equivalenti:

(a) τ è weakly mixing.

(b) Per ogni $f, g \in \mathfrak{L}^2(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big|\langle U_\tau^i f, g\rangle - \langle f, \mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}, g\rangle\big| = 0$.

(c) Per ogni $f \in \mathfrak{L}^2(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big|\langle U_\tau^i f, f\rangle - |\langle f, \mathbf{1}\rangle|^2\big| = 0$.

(d) Per ogni $f, g \in \{\mathbf{1}\}^\perp$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \big|\langle U_\tau^i f, g\rangle\big| = 0$.

iii. Le seguenti sono equivalenti:

(a) τ è mixing.

(b) Per ogni $f, g \in \mathfrak{L}^2(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle U_\tau^n f, g\rangle = \langle f, \mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}, g\rangle$.

(c) Per ogni $f \in \mathfrak{L}^2(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle U_\tau^n f, f\rangle = \big|\langle f, \mathbf{1}\rangle\big|^2$.

(d) Per ogni $f, g \in \{\mathbf{1}\}^\perp$, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle U_\tau^n f, g\rangle = 0$.

Poiché i tre gruppi di equivalenze del teorema si verificano in modo simile, riporteremo soltanto la dimostrazione delle condizioni equivalenti al mixing. Prima però enunciamo un lemma che risulterà funzionale alla dimostrazione stessa:

Lemma 2.3.2. *Siano $\tau : X \to X$ una trasformazione che preserva la misura sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ e Y un sottospazio denso in $\mathfrak{L}^2(X)$. Se per ogni $f, g \in Y$ risulta $\lim_{n\to\infty} \langle U_\tau^n f, g\rangle = \langle f, \mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}, g\rangle$, allora tale limite vale per ogni $f, g \in \mathfrak{L}^2(X)$, cioè τ è mixing.*

Dimostrazione (Teorema 2.3.1). Vogliamo dimostrare che la proprietà (b) è equivalente a tutte le altre. Innanzitutto verifichiamo che è una condizione sufficiente.

$(b) \Rightarrow (a)$ Siano A e B due insiemi misurabili e consideriamo $f = \mathbf{1}_A$, $g = \mathbf{1}_B$. Allora

$$\begin{aligned}\langle U_\tau^n \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\rangle &= \langle \mathbf{1}_A \circ \tau^n, \mathbf{1}_B\rangle = \\ &= \langle \mathbf{1}_{\tau^{-n}(A)}, \mathbf{1}_B\rangle = \\ &= \int \mathbf{1}_{\tau^{-n}(A)} \mathbf{1}_B d\mu \ \longrightarrow \ \int \mathbf{1}_A d\mu \int \mathbf{1}_B d\mu\end{aligned}$$

cioè $\mu(\tau^{-n}(A) \cap B) \longrightarrow \mu(A)\mu(B)$ e quindi τ è mixing.

$(b) \Rightarrow (c)$ E' sufficiente prendere $g = f$.

$(b) \Rightarrow (d)$ Segue dalla definizione di $\{\mathbf{1}\}^\perp$.

Dimostriamo ora che (b) è anche una condizione necessaria per tutte le altre.

$(a) \Rightarrow (b)$ Dalla definizione di mixing segue che la proprietà (b) vale per funzioni indicatrici, e quindi per funzioni semplici. Ma allora, ricordando che lo spazio delle funzioni semplici su X è denso in $\mathfrak{L}^2(X)$ (teorema 1.3.1), possiamo applicare il lemma 2.3.2 e concludere che il limite in (b) vale per ogni $f, g \in \mathfrak{L}^2(X)$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Fissata $f \in \mathfrak{L}^2(X)$, definiamo:

- H_f il più piccolo sottospazio chiuso di $\mathfrak{L}^2(X)$ che contiene le funzioni $\mathbf{1}$, f e tale che $U_\tau H_f \subseteq H_f$.
- $F_f = \big\{g \in \mathfrak{L}^2(X) \mid \langle U_\tau^n f, g\rangle \longrightarrow \langle f, \mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}, g\rangle\big\}$.

Vogliamo dimostrare che, per ogni $f \in \mathfrak{L}^2(X)$, $F_f = \mathfrak{L}^2(X)$. E' facile vedere che F_f è uno spazio chiuso e che $\mathbf{1}$ e f appartengono a F_f. Inoltre, $U_\tau F_f \subseteq F_f$: infatti, se $g \in F_f$,

$$\langle U_\tau^n f, U_\tau g\rangle = \langle U_\tau^{n-1} f, g\rangle \longrightarrow \langle f, \mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}, g\rangle = \langle f, \mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}, U_\tau g\rangle$$

cioè anche $U_\tau g \in F_f$. Ma allora vale $H_f \subseteq F_f$ per definizione dello spazio H_f.
Osserviamo ora che ogni funzione appartenente allo spazio $H_f^\perp$ deve essere ortogonale alle funzioni f, $\mathbf{1}$ e $U_\tau^n f$, per ogni $n \geq 1$. Ma allora $g \in F_f$, cioè abbiamo dimostrato che $H_f^\perp \subseteq F_f$. Risulta quindi $F_f = \mathfrak{L}^2(X)$.

$(d) \Rightarrow (b)$ Date $f, g \in \mathfrak{L}^2(X)$, poniamo $\tilde{f} := f - \langle \mathbf{1}, f\rangle \mathbf{1}$, $\tilde{g} := g - \langle \mathbf{1}, g\rangle \mathbf{1}$. Allora $\tilde{f}, \tilde{g} \in \{\mathbf{1}\}^{\perp}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
&\langle U_\tau^n \tilde{f}, \tilde{g}\rangle \\
&= \left\langle U_\tau^n f - \langle \mathbf{1}, f\rangle \mathbf{1}, g - \langle \mathbf{1}, g\rangle \mathbf{1} \right\rangle \\
&= \langle U_\tau^n f, g\rangle - \langle \mathbf{1}, g\rangle \langle U_\tau^n f, \mathbf{1}\rangle - \langle \mathbf{1}, f\rangle \langle \mathbf{1}, g\rangle + \langle \mathbf{1}, f\rangle \langle \mathbf{1}, g\rangle \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle \\
&= \langle U_\tau^n f, g\rangle - \langle f, \mathbf{1}\rangle \langle \mathbf{1}, g\rangle
\end{aligned}$$

e poiché il primo prodotto scalare tende a 0 per ipotesi, anche l'ultima espressione deve avere lo stesso limite, cioè abbiamo dimostrato (b).

□

Si può dimostrare che un risultato analogo a quello del lemma 2.3.2 vale anche per la proprietà (d) del teorema precedente:

Lemma 2.3.3. *Siano $\tau : X \to X$ una trasformazione che preserva la misura sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ e Y un sottospazio denso in $\{\mathbf{1}\}^{\perp}$. Se per ogni $f, g \in Y$ risulta $\lim_{n\to\infty} \langle U_\tau^n f, g\rangle = 0$, allora tale limite vale per ogni $f, g \in \{\mathbf{1}\}^{\perp}$, cioè τ è mixing.*

Esempio. [15] La Doubling Map su I definisce un sistema dinamico mixing.

2.3.1 Analisi spettrale

Proposizione 2.3.4. *Una trasformazione $\tau : X \to X$ che preserva la misura sullo spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ è ergodica se e soltanto se $\lambda = 1$ è un autovalore semplice dell'operatore di Koopman U_τ associato a τ.*

Dimostrazione. Dalla definizione di U_τ, risulta evidente che $U_\tau \mathbf{1} = \mathbf{1}$, cioè che $\lambda = 1$ è un autovalore di U_τ. Inoltre, grazie al teorema 2.2.4 sappiamo che τ è una trasformazione ergodica se e soltanto se la condizione $f \circ \tau = f$ implica che f sia costante, cioè

$$U_\tau f = f \implies f = c \cdot \mathbf{1}$$

da cui segue che τ è ergodica se e soltanto se l'autovalore $\lambda = 1$ è semplice. □

Proposizione 2.3.5. *Sia $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ un sistema dinamico che preserva la misura μ e ergodico. Allora:*

1. *Se $U_\tau f = \lambda f$, allora $|f|$ è una costante $\not\equiv 0$ e $|\lambda| = 1$.*
2. *Autofunzioni di U_τ relative ad autovalori distinti sono ortogonali.*
3. *Ogni autovalore di U_τ è semplice.*
4. *Gli autovalori di U_τ costituiscono un sottogruppo di $(S^1, \cdot)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo le prime tre proprietà.

(1)
$$U_\tau f = \lambda f \implies |U_\tau f| = |\lambda f| \implies U_\tau |f| = |\lambda||f|$$
cioè $|f|$ è un'autofunzione d U_τ relativa all'autovalore $|\lambda|$. D'altra parte
$$\int |f| = \int |f \circ \tau| = |\lambda| \int |f|$$
da cui segue che $|\lambda| = 1$ e $|f|$ è costante $\not\equiv 0$ per la proposizione 2.3.4.

(2) Siano f, g due autofunzioni relative a autovalori distinti, cioè tali che $U_\tau f = \lambda_1 f$, $U_\tau g = \lambda_2 g$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora
$$\langle f, g \rangle = \langle U_\tau f, U_\tau g \rangle = \overline{\lambda_1} \lambda_2 \langle f, g \rangle$$
e poiché $\overline{\lambda_1} \lambda_2 \neq 1$, risulta $\langle f, g \rangle = 0$.

(3) Siano f e g due autofunzioni relative allo stesso autovalore λ, cioè $U_\tau f = \lambda f$, $U_\tau g = \lambda g$. Per quasi ogni x, $g(x) \neq 0$ per il punto (1) e quindi la funzione $\frac{f}{g}$ è ben definita. Allora
$$U_\tau \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f \circ \tau}{g \circ \tau} = \frac{U_\tau f}{U_\tau g} = \frac{\lambda f}{\lambda g} = \frac{f}{g}$$
e poiché $\lambda = 1$ è un autovalore semplice, otteniamo $\frac{f}{g} = c \cdot \mathbf{1}$, cioè $f = c \cdot g$.

□

Teorema 2.3.6. *Sia $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ un sistema dinamico che preserva la misura. Allora τ è weakly mixing se e soltanto se $\sigma_p(U_\tau) = \{1\}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima implicazione.
Supponiamo per assurdo che esista $f \in \mathfrak{L}^2(X)$, $f \neq 0$, tale che $U_\tau f = \lambda f$ con $\lambda \neq 1$. Allora, per la proprietà (2) della proposizione 2.3.5 f deve essere ortogonale a $\mathbf{1}$, cioè $f \in \{\mathbf{1}\}^\perp$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\langle U_\tau^n f, f\rangle| &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\overline{\lambda}|^n \langle f, f\rangle = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|f\|^2 = \|f\|^2 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $|\overline{\lambda}| = |\lambda| = 1$, per il punto (1) della proposizione 2.3.5. Allora, grazie al teorema 2.3.1, risulta $\|f\|^2 \longrightarrow 0$, da cui $\|f\| = 0 \Longrightarrow f = 0$, che è assurdo. $\square$

Capitolo 3

Operatore di Perron-Frobenius

Dato uno spazio di probabilità $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, l'operatore di Perron-Frobenius descrive l'effetto di una trasformazione $\tau : X \to X$ su una funzione di densità di probabilità. Tale operatore permette di studiare le misure invarianti e assolutamente continue rispetto alla misura μ, la loro esistenza e le loro proprietà.

Il riferimento principale per questo capitolo è il libro *Laws of Chaos* di A. Boyarsky e P. Góra [4].

3.1 Definizione

Supponiamo che $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ sia uno spazio di probabilità e $\mathcal{X}$ una variabile aleatoria su X con densità di probabilità f (paragrafo 1.2). Allora, per ogni $A \in \mathfrak{B}$, si ha che

$$\Pr\{\mathcal{X} \in A\} = \int_A f d\mu$$

Sappiamo che, se τ è una trasformazione su X, anche $\tau(\mathcal{X})$ risulta una variabile aleatoria 1.2.2. Ci chiediamo pertanto se esiste, e in tal caso che forma ha, la densità di probabilità di $\tau(\mathcal{X})$, cioè una funzione ϕ tale che

$$\Pr\{\tau(\mathcal{X}) \in A\} = \int_A \phi \, d\mu$$

Innanzitutto si può scrivere

$$\Pr\{\tau(\mathcal{X}) \in A\} = \Pr\{\mathcal{X} \in \tau^{-1}(A)\} = \int_{\tau^{-1}A} f d\mu$$

Definiamo ora la misura

$$\nu(A) = \int_{\tau^{-1}A} f d\mu$$

Se τ è una trasformazione non singolare, $\mu(A) = 0$ implica $\mu(\tau^{-1}A) = 0$, il che a sua volta implica $\nu(A) = 0$, per definizione di ν. Ma allora $\nu \ll \mu$: si può quindi applicare il teorema di Radon-Nikodym 1.1.5 e concludere che esiste un'unica funzione $\phi \in \mathfrak{L}^1(X)$, dipendente da τ e da f, tale che per ogni insieme misurabile A

$$\nu(A) = \int_A \phi \, d\mu$$

ϕ è quindi la densità di probabilità della variabile aleatoria $\tau(\mathcal{X})$.

Definizione 3.1.1. Dato un sistema dinamico $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$, si dice *operatore di Perron-Frobenius* associato a τ l'unico operatore $P_\tau : \mathfrak{L}^1(X) \to \mathfrak{L}^1(X)$ tale che

$$\int_A P_\tau(f) d\mu = \int_{\tau^{-1}A} f d\mu$$

per ogni $A \in \mathfrak{B}$.

Nota. Come abbiamo visto, per ogni f l'esistenza e l'unicità della funzione $P_\tau f$ sono garantite dal teorema di Radon-Nikodym. Pertanto, $P_\tau f$ risulta ben definita su $\mathfrak{L}^1(X)$, cioè a meno di funzioni uguali quasi ovunque.

3.2 Proprietà

Riportiamo in questo paragrafo alcune importanti proprietà dell'operatore di Perron-Frobenius.

Supponiamo che $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ sia un sistema dinamico e indichiamo con P_τ l'operatore di Perron-Frobenius associato a τ.

Proposizione 3.2.1 (Linearità). *$P_\tau : \mathfrak{L}^1(X) \to \mathfrak{L}^1(X)$ è un operatore lineare.*

Dimostrazione. Siano $A \subset X$ un insieme misurabile e α e β due costanti. Allora, per ogni $f, g \in \mathfrak{L}^1(X)$, risulta

$$\begin{aligned}\int_A P_\tau(\alpha f + \beta g) d\mu &= \int_{\tau^{-1}A} (\alpha f + \beta g) d\mu = \\ &= \alpha \int_{\tau^{-1}A} f d\mu + \beta \int_{\tau^{-1}A} g d\mu = \\ &= \alpha \int_A P_\tau f d\mu + \beta \int_A P_\tau g d\mu = \\ &= \int_A (\alpha P_\tau f + \beta P_\tau g) d\mu\end{aligned}$$

e poiché tale risultato vale per ogni insieme misurabile A, otteniamo che

$$P_\tau(\alpha f + \beta g) = \alpha P_\tau f + \beta P_\tau g \qquad \text{q.o.}$$

□

Proposizione 3.2.2 (Positività)**.** *Sia $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ tale che $f \geq 0$. Allora $P_\tau f \geq 0$.*

Dimostrazione. Per ogni $A \in \mathfrak{B}$ si ha

$$\int_A P_\tau f d\mu = \int_{\tau^{-1}A} f d\mu \geq 0$$

e data l'arbitrarietà di A, risulta $P_\tau f \geq 0$. □

Proposizione 3.2.3. *Per ogni $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ si ha*

$$\int_X P_\tau f d\mu = \int_X f d\mu$$

cioè P_τ preserva gli integrali.

Dimostrazione. Per definizione di operatore di Perron-Frobenius, si ha

$$\int_X P_\tau f d\mu = \int_{\tau^{-1}X} f d\mu = \int_X f d\mu$$

□

Proposizione 3.2.4. *L'operatore* $P_\tau : \mathfrak{L}^1(X) \to \mathfrak{L}^1(X)$ *è una contrazione, cioè* $\|P_\tau f\|_1 \leq \|f\|_1$ *per ogni* $f \in \mathfrak{L}^1(X)$.

Dimostrazione. Siano $f \in \mathfrak{L}^1(X)$, $f^+ = \max(f,0)$ e $f^- = -\min(0,f)$ la parte positiva e negativa di f, rispettivamente. Allora $f^+, f^- \in \mathfrak{L}^1(X)$, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Pertanto, dalla linearità di P_τ segue

$$P_\tau f = P_\tau(f^+ - f^-) = P_\tau f^+ - P_\tau f^-$$

e quindi

$$|P_\tau f| \leq |P_\tau f^+| + |P_\tau f^-| = P_\tau f^+ + P_\tau f^- = P_\tau |f|$$

Usando allora la proposizione 3.2.3 otteniamo

$$\|P_\tau f\|_1 = \int_X |P_\tau f| d\mu \leq \int_X P_\tau |f| d\mu = \int_X |f| d\mu = \|f\|_1$$

□

Osservazione 3.2.1. Dall'ultima proposizione segue che P_τ è un operatore continuo rispetto alla topologia indotta dalla norma. Infatti:

$$\|P_\tau f - P_\tau g\|_1 = \|P_\tau(f-g)\|_1 \leq \|f-g\|_1$$

Proposizione 3.2.5. *Se* $\tau : X \to X$ *e* $\sigma : X \to X$ *sono due trasformazioni non singolari, allora* $P_{\tau\circ\sigma} f = P_\tau \circ P_\sigma f$. *In particolare, per ogni* n *risulta* $P_{\tau^n} f = P_\tau^n f$.

Dimostrazione. Sia $f \in \mathfrak{L}^1(X)$. Definiamo la misura

$$\lambda(A) = \int_{(\tau\circ\sigma)^{-1}(A)} f d\mu = \int_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}A)} f d\mu$$

Poiché sia τ che σ sono non singolari per ipotesi, λ è assolutamente continua rispetto a μ ed esiste quindi una funzione $P_{\tau\circ\sigma} f$ tale che

$$\lambda(A) = \int_A P_{\tau\circ\sigma} f d\mu$$

Inoltre

$$\int_A P_\tau(P_\sigma f) d\mu = \int_{\tau^{-1}A} P_\sigma f d\mu = \int_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}A)} f d\mu$$

per cui risulta $P_{\tau\circ\sigma} f = P_\tau P_\sigma f$ quasi ovunque. Per induzione, segue che $P_{\tau^n} f = P_\tau^n f$ quasi ovunque.

□

Ricordiamo ora la definizione dell'operatore di Koopman 2.3.1 e che per $f \in \mathfrak{L}^1(X)$, $g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ è definito il prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu$ (osservazione 1.3.3).

Proposizione 3.2.6. *Siano* $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ *e* $g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$. *Allora risulta* $\langle P\tau f, g \rangle = \langle f, U_\tau g \rangle$, *cioè*

$$\int_X (P_\tau f) \cdot g d\mu = \int_X f \cdot (U_\tau g) d\mu \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Siano $A \subset X$ un insieme misurabile e $g = \mathbf{1}_A$. Allora il primo membro di 3.1 diventa

$$\int_X (P_\tau f) g d\mu = \int_A P_\tau f d\mu = \int_{\tau^{-1}A} f d\mu$$

e il secondo

$$\int_X f \cdot (\mathbf{1}_A \circ \tau) d\mu = \int_X f \cdot \mathbf{1}_{\tau^{-1}A} d\mu = \int_{\tau^{-1}A} f d\mu$$

cioè l'equazione 3.1 vale per funzioni indicatrici e quindi anche per funzioni semplici. Allora, poiché l'insieme delle funzioni semplici è denso in ogni $\mathfrak{L}^p(X)$ (proposizione 1.3.1), il teorema è verificato per ogni $f \in \mathfrak{L}^1(X)$. $\square$

Proposizione 3.2.7. *Sia* τ *una trasformazione non singolare su* X. *Allora* $P_\tau f^* = f^*$ *quasi ovunque se e soltanto se la misura* $d\nu = f^* \cdot d\mu$, *definita da* $\mu(A) = \int_A f^* d\mu$, *è* τ*-invariante, cioè se e soltanto se* $\nu(\tau^{-1}A) = \nu(A)$ *per ogni* $A \in \mathfrak{B}$, *dove* $f^* \in \mathfrak{L}^1(X)$, $f^* \geq 0$ *e* $\|f^*\|_1 = 1$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\nu(\tau^{-1}A) = \nu(A)$ per ogni $A \in \mathfrak{B}$. Allora

$$\int_{\tau^{-1}A} f^* d\mu = \int_A f^* d\mu$$

e quindi

$$\int_A P_\tau f^* d\mu = \int_A f^* d\mu$$

Per l'arbitrarietà di A, segue che $P_\tau f^* = f^*$ quasi ovunque.

Viceversa, supponiamo che $P_\tau f^* = f^*$ quasi ovunque. Allora

$$\int_A P_\tau f^* d\mu = \int_A f^* d\mu = \nu(A)$$

Ora, per definizione di P_τ si ha

$$\int_A P_\tau f^* d\mu = \int_{\tau^{-1}A} f^* d\mu = \nu(\tau^{-1}A)$$

da cui segue $\nu(\tau^{-1}A) = \nu(A)$. $\square$

Nota. L'ultima proposizione dice che una funzione non negativa $f^* \in \mathfrak{L}^1(X)$ è un punto fisso per l'operatore P_τ se e soltanto se è la densità di una misura ν τ-invariante e assolutamente continua rispetto a μ.

3.3 Trasformazioni monotone a tratti

In questo paragrafo analizziamo alcuni risultati sull'esistenza e le proprietà di misure invarianti e assolutamente continue per un'importante classe di trasformazioni. Le dimostrazioni di questi teoremi sono piuttosto tecniche e non verranno quindi riportate, ma si possono trovare sul libro di riferimento *Laws of Chaos* di A. Boyarski e P. Góra [4].

3.3.1 Rappresentazione di P_τ

Consideriamo il caso particolare di $X = [a, b]$.

Definizione 3.3.1. Una trasformazione $\tau : [a, b] \to [a, b]$ si dice *monotona a tratti* se esistono una partizione di $[a, b]$, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_q = b$ e un numero $r \geq 1$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, q$:

1. $\tau_{|(a_{i-1}, a_i)}$ è una funzione di classe C^r che può essere estesa a una funzione di classe C^r su $[a_{i-1}, a_i]$.
2. $|\tau'(x)| > 0$ su (a_{i-1}, a_i).

In particolare, se τ è tale che $|\tau'(x)| \geq \alpha > 1$ per ogni punto x in cui la derivata è definita, allora τ si dice monotona a tratti e *uniformemente espandente* (figura 3.1).

Consideriamo ora un insieme misurabile A e una trasformazione monotona a tratti $\tau : [a, b] \to [a, b]$. Allora, su ogni intervallo (a_{i-1}, a_i) è ben definita l'inversa di τ. Pertanto, posto $B_i := \tau([a_{i-1}, a_i])$, definiamo

$$\phi_i = \tau^{-1}{}_{|B_i}$$

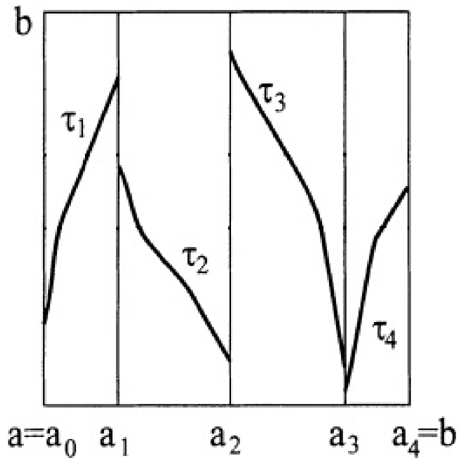

Figura 3.1: Una mappa espandente a tratti sull'intervallo $[0, 1]$

Le funzioni $\phi_i : B_i \to [a_{i-1}, a_i]$ sono tali che

$$\tau^{-1}(A) = \cup_{i=1}^{q} \phi_i(B_i \cap A)$$

e gli insiemi $\phi_i(B_i \cap A)$, $i = 1, \ldots, q$, sono a due a due disgiunti. Allora, per ogni $f \in \mathfrak{L}^1([a, b])$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\int_A P_\tau f d\mu &= \int_{\tau^{-1}A} f d\mu = \\
&= \sum_{i=1}^{q} \int_{\phi_i(B_i \cap A)} f d\mu = \\
&= \sum_{i=1}^{q} \int_{B_i \cap A} f(\phi_i(x)) |\phi_i'(x)| d\mu = \\
&= \sum_{i=1}^{q} \int_A f(\phi_i(x)) |\phi_i'(x)| \, \mathbf{1}_{B_i} d\mu = \\
&= \int_A \sum_{i=1}^{q} \frac{f(\tau_i^{-1}(x))}{|\tau'(\tau_i^{-1}(x))|} \mathbf{1}_{\tau(a_{i-1}, a_i)}(x) d\mu
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato prima la formula di cambiamento di variabile e poi la definizione di ϕ_i.

Data l'arbitrarietà di A, abbiamo dimostrato che per trasformazioni monotone a tratti vale la seguente rappresentazione esplicita per l'operatore di Perron-Frobenius:

$$P_\tau f(x) = \sum_{i=1}^{q} \frac{f(\tau_i^{-1}(x))}{|\tau'(\tau_i^{-1}(x))|} \mathbf{1}_{\tau(a_{i-1},a_i)}(x)$$

per ogni $f \in \mathfrak{L}^1([a,b])$. In forma più compatta, l'ultima espressione può essere riscritta come

$$P_\tau f(x) = \sum_{z \in \{\tau^{-1}(x)\}} \frac{f(z)}{|\tau'(z)|}$$

3.3.2 Esistenza di misure invarianti assolutamente continue

Le misure invarianti assolutamente continue (abbreviate spesso in a.c.i.m.) sono importanti perché permettono di descrivere e studiare adeguatamente diversi problemi fisici. In particolare, per lo studio delle proprietà ergodiche e l'analisi (anche numerica) di molti sistemi dinamici risulta che le misure invarianti assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue sono quelle fisicamente più significative.

Definizione 3.3.2. Sia $I = [a,b]$ un intervallo. Denotiamo con $\mathcal{T}(I)$ la classe delle trasformazioni $\tau : I \to I$ che soddisfano le seguenti proprietà:

i. τ è espandente a tratti, cioè esiste $\mathcal{P} = \{I_i = [a_{i-1}, a_i], i = 1, \dots, q\}$ partizione di I tale che le restrizioni $\tau_i = \tau_{|I_i}$ sono funzioni di classe C^1 e $|\tau_i'(x)| \geq \alpha > 1$ per ogni i e per ogni $x \in (a_{i-1}, a_i)$.

ii. $g(x) = \dfrac{1}{|\tau'(x)|}$ è una funzione a variazione limitata (nei nodi della partizione $\tau'(x)$ indica la derivata destra o sinistra di τ).

Proposizione 3.3.1 (Disuguaglianza di Lasota-Yorke)**.** *Sia $\tau \in \mathcal{T}(I)$. Allora esistono tre costanti $0 < r < 1$, $C > 0$ e $R > 0$ tali che per ogni $f \in BV(I)$ e per ogni $n \geq 1$:*

$$\|P_\tau^n f\|_{BV} \leq C r^n \|f\|_{BV} + R\|f\|_1$$

Teorema 3.3.2. *Sia $\tau \in \mathcal{T}(I)$. Allora il sistema dinamico $(I, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ ammette una misura invariante e assolutamente continua rispetto a μ, la cui densità è una funzione a variazione limitata.*

3.3.3 Operatori quasi-compatti

Se un sistema dinamico ammette una misura invariante e assolutamente continua ν, allora per la proposizione 3.2.7 la sua densità è un punto fisso per l'operatore P_τ , cioè può essere vista come un'autofunzione relativa all'autovalore $\lambda = 1$ dell'operatore di Perron-Frobenius associato a τ.
In questa sezione riportiamo un importante risultato di analisi funzionale che sarà utile per studiare le proprietà spettrali dell'operatore P_τ.

Teorema 3.3.3 (Teorema di Ionescu-Tulcea Marinescu). *Siano* $(V, |||\cdot|||)$ *e* $(W, \|\cdot\|)$ *due spazi di Banach, con* $V \subset W$ *e sia* $P : V \longrightarrow V$ *un operatore lineare e limitato in entrambe le norme* $|||\cdot|||$ *e* $\|\cdot\|_V$ *(quest'ultima è la restrizione di* $\|\cdot\|$ *a* V*).*
Supponiamo che:

(a) Se $f_n \in V$*,* $f \in W$*,* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ *e* $|||f_n||| \leq C$ *per ogni* n*, allora* $f \in V$ *e* $|||f||| \leq C$*.*

(b) $H = \sup\limits_{n\geq 0} \|P^n\|_V < \infty$*.*

(c) Esistono $k \geq 1$*,* $0 < r < 1$ *e* $R < \infty$ *tali che* $\forall f \in V$*.*

$$|||P^k f||| \leq r|||f||| + R\|f\|$$

(d) Se V_1 *è un sottoinsieme limitato di* $(V, |||\cdot|||)$*, allora la chiusura di* $P^k V_1$ *è un sottoinsieme compatto di* $(W, \|\cdot\|)$*.*

Definito, per ogni $\eta \in \mathbb{C}$*,* $\mathcal{D}(\eta) := \{f \in V : Pf = \eta f, f \neq 0\}$*, valgono i seguenti risultati:*
lo spettro di P *contiene al più un numero finito di autovalori* $\{\eta_1, \dots, \eta_q\}$ *tali che* $\forall i = 1, \dots, q$ $|\eta_i| = \rho(P)$ *e l'autospazio* $\mathcal{D}(\eta_i)$ *relativo a* η_i *ha dimensione finita. Inoltre, esistono* S *e* Q_{η_i} *operatori lineari e limitati su* V *tali che:*

- $$\forall n, \quad P^n = \sum_{i=1}^{q} \eta_i^n Q_{\eta_i} + S^n$$
- $$Q_{\eta_i} Q_{\eta_j} = 0 \;\; se \;\; i \neq j, \quad Q_{\eta_i}^2 = Q_{\eta_i} \quad \forall i$$
- $$Q_{\eta_i} S = S Q_{\eta_i} = 0 \quad \forall i$$
- $$Q_{\eta_i} V = \mathcal{D}(\eta_i) \quad \forall i$$
- $$\rho(S) < \rho(P)$$

Osservazione 3.3.1. Gli operatori che soddisfano le ultime 5 proprietà del teorema di Ionescu-Tulcea Marinescu si dicono operatori *quasi-compatti*. Tale teorema costituisce pertanto una condizione sufficiente affinché l'operatore P sia quasi-compatto.

Definizione 3.3.3. Siano $I = [0,1]$ e $d\mu = \varphi \cdot dm$ una misura assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m su I. Definiamo il *supporto* di μ come segue:

$$\mathrm{supp}(\mu) = \mathrm{supp}(\varphi) = \{x \in I : \varphi(x) > 0\}$$

Nota. Nel contesto delle misure invarianti e assolutamente continue, la definizione precedente è equivalente alla definizione 1.1.14. Infatti, i supporti di μ in queste due accezioni differiscono al più su un insieme di misura m nulla.

Teorema 3.3.4. *Siano $\tau \in \mathcal{T}(I)$ (definizione 3.3.2) una trasformazione espandente a tratti, $(V, |||\cdot|||) = (BV(I), \|\cdot\|_{BV})$, $(W, \|\cdot\|) = (\mathcal{L}^1(I), \|\cdot\|_1)$ e $P_\tau : BV(I) \to BV(I)$ l'operatore di Perron-Frobenius associato a τ. Allora tutte le ipotesi del teorema di Ionescu-Tulcea Marinescu (3.3.3) sono soddisfatte. In particolare, P_τ è un operatore quasi-compatto tale che:*

1. *τ ha un numero finito di misure invarianti, ergodiche e assolutamente continue rispetto a m: $d\mu_1 = \varphi_1 dm, \ldots, d\mu_n = \varphi_n dm$, le cui densità $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in BV(I)$.*

2. *Per ogni $1 \leq i \leq n$, esiste una famiglia finita di insiemi disgiunti $\{A_j^{(i)}\}_{j=1}^{n(i)}$ tali che*

$$\mathrm{supp}\,\mu_i = A_1^{(i)} \cup \cdots \cup A_{n(i)}^{(i)}$$

e tali che per ogni $\varphi_j^{(i)} = \varphi_i \mathbf{1}_{A_j^{(i)}}$, $j = 1, 2, \ldots, n(i)$,

$$P_\tau \varphi_j^{(i)} = \varphi_{j+1}^{(i)} \qquad (n(i) + 1 = 1)$$

e il sistema dinamico $(A_j^{(i)}, \tau^{n(i)}, \varphi_j^{(i)} m)$ è esatto (definizione 2.2.5).

Capitolo 4

Tasso di fuga per sistemi aperti

Dopo aver enunciato un teorema astratto contenuto nell'articolo *"Rare Events, Escape Rates and Quasistationarity: Some Exact Formulae"* di G. Keller e C. Liverani [16], dimostriamo che la famiglia di operatori $\{P_\varepsilon\}$, perturbazioni dell'operatore di Perron-Frobenius associato a una mappa $\tau : I \longrightarrow I$ espandente a tratti, soddisfa le ipotesi di tale teorema. Questo ci permetterà di ottenere, al variare del parametro ε in un insieme opportuno, una stima al prim'ordine del tasso di fuga per il sistema aperto.

I riferimenti bibliografici per questo capitolo sono molteplici e saranno indicati per i singoli paragrafi, o risultati.

4.1 Risultati preliminari

Introduciamo di seguito il contesto dei sistemi dinamici aperti e quindi le definizioni di tasso di fuga e di misure condizionalmente invarianti. Il riferimento principale per questa sezione è l'articolo *Escape Rates and Conditionally Invariant Measures* di M. Demers e L. Young [9].

4.1.1 Sistemi dinamici aperti

Consideriamo un sistema dinamico $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ e sia H un sottoinsieme di X. Se l'orbita di un punto finisce in H, non ne consideriamo più la dinamica. H può essere interpretato come un buco per il sistema o, equivalentemente, si può vedere X come un dominio non invariante rispetto alla dinamica, cioè tale che $\tau^{-1}X \not\subset X$. In entrambi i casi, a ogni iterazione della mappa τ le orbite di un insieme non vuoto di punti escono dal sistema dinamico.

Si definiscono allora

- *sistema chiuso* il sistema dinamico $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$.
- *sistema aperto* il sistema dinamico $(X \setminus H, \mathfrak{B}, \mu, \tau_{|X\setminus H})$.
- *tempo di fuga* il numero $E(x) = \inf\{n \geq 0 : \tau^n(x) \in H\}$, per ogni $x \in X$.

Inoltre, per ogni $n \geq 0$ poniamo $X^n := \{x \in X : E(X) > n\}$, cioè X^n è l'insieme dei punti che non sono ancora usciti dal sistema dopo n iterazioni di τ. Segue pertanto

$$X = X^0 \supset X^1 \supset X^2 \supset \cdots \supset X^\infty := \cap_{n\geq 0} X^n$$

Ora, definiamo

$$\log \overline{\lambda} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(X^n), \qquad \log \underline{\lambda} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(X^n)$$

Se $\overline{\lambda} = \underline{\lambda} =: \lambda$, allora il *tasso di fuga* di μ è ben definito ed è uguale a $-\log \lambda$. Si osservi che più questo valore è grande, maggiore sarà il numero di punti che escono dal sistema a ogni iterazione.

Definizione 4.1.1. Siano $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ un sistema dinamico e $\tau_*\mu$ il pushforward di μ (definizione 1.1). μ si dice *condizionalmente invariante* rispetto a τ se

$$\frac{\tau_*\mu(A)}{\tau_*\mu(X)} = \mu(A) \tag{4.1}$$

per ogni $A \in \mathfrak{B}$.

Osservazione 4.1.1. Se μ è una misura condizionalmente invariante, poniamo $\lambda := \tau_*\mu(X) = \mu(X^1)$. Allora, iterando l'equazione 4.1 otteniamo

$$\tau_*^n\mu(A) = \lambda^n\mu(A)$$

per ogni $A \in \mathfrak{B}$. In particolare, $\mu(X^n) = \tau_*^n(X) = \lambda^n\mu(X)$, cioè $-\log \lambda$ è il tasso di fuga.

4.1.2 Gap spettrale

In questa sezione dimostriamo che per l'operatore di Perron-Frobenius associato a mappe espandenti a tratti vale un'importante proprietà spettrale, che useremo ampiamente nei prossimi paragrafi.

Definizione 4.1.2. [26] Si dice che un operatore $P : V \longrightarrow V$ ha un *gap spettrale* se ammette una decomposizione della forma $P = \lambda Q + S$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dove:

1. Q è una proiezione (i.e. $Q^2 = Q$) e $\dim(\mathrm{Im}(Q)) = 1$.
2. S è un operatore limitato tale che $\rho(S) < |\lambda|$.
3. $QS = SQ = 0$.

Osservazione 4.1.2. [6] Equivalentemente, l'operatore P ha un gap spettrale se il suo spettro $\sigma(P)$ ha un solo autovalore semplice e di modulo pari a $\rho(P)$, e il resto dello spettro è contenuto in un disco di raggio minore di $\rho(P)$.

Teorema 4.1.1. *[26] Se un operatore $P : V \longrightarrow V$ è quasi-compatto, ha un unico autovalore su $\{z : |z| = \rho(P)\}$ e tale autovalore è semplice, allora P ha un gap spettrale.*

Corollario 4.1.2. *Sia $\tau \in \mathcal{T}(I)$ (definizione 3.3.2) una mappa espandente a tratti su I. Allora l'operatore di Perron-Frobenius $P : BV(I) \to BV(I)$ associato a τ ha un gap spettrale. In particolare, la decomposizione spettrale di P è della forma $P = Q + S$.*

Nota. Per semplicità notazionale, d'ora in avanti indicheremo l'operatore $P_\tau : \mathfrak{L}^1(X) \to \mathfrak{L}^1(X)$ con P, omettendo il riferimento esplicito alla mappa τ.

Per dimostrare il corollario 4.1.2 premettiamo alcuni risultati.

Osservazione 4.1.3. Nel capitolo 3 abbiamo visto che:

1. Se $\tau \in \mathcal{T}(I)$, l'operatore di Perron-Frobenius associato soddisfa la disuguaglianza di Lasota-Yorke 3.3.1: esistono cioè $0 < r < 1$ e $R > 0$ tali che $\forall f \in BV(I)$, $\forall n \geq 1$

$$\|P^n f\|_{BV} \leq Cr^n \|f\|_{BV} + R\|f\|_1$$

Grazie a questa disuguaglianza è possibile dimostrare che τ ammette una misura invariante $d\mu_0 = \varphi_0 dm$ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m e con densità $\varphi_0 \in BV(I)$ (teorema 3.3.2). Per la proprietà 3.2.7 dell'operatore di Perron-Frobenius, tale densità risulta un punto fisso di P e, conseguentemente, $\{1\} \in \sigma(P)$. Inoltre, grazie alla disuguaglianza di Lasota-Yorke si può anche applicare il teorema di Ionescu-Tulcea-Marinescu 3.3.3 e concludere che l'operatore P è quasi compatto (teorema 3.3.4).

2. Abbiamo già visto (proposizione 3.2.4) che l'operatore P definito su $\mathfrak{L}^1$ è una contrazione, cioè

$$
\begin{aligned}
&\|Pf\|_1 \leq \|f\|_1 \qquad \forall f \in \mathfrak{L}^1 \\
\Longrightarrow &\|P\|_1 \leq 1
\end{aligned}
$$

Pertanto, si ha che $\rho(P) \leq \|P\|_1 \leq 1$, e poiché $\lambda = 1$ è un autovalore di P per l'osservazione precedente, possiamo concludere che $\rho(P) = 1$. Sia ora $P_{|BV}$ la restrizione di P allo spazio $BV(I)$ delle funzioni a variazione limitata (definizione 1.3.8) e supponiamo per assurdo che $\rho(P_{|BV}) > 1$. Allora esiste $\lambda, |\lambda| > 1$, che non appartiene all'insieme risolvente di $P_{|BV}$, cioè tale che l'operatore $P_{|BV} - \lambda I$ o non è invertibile, o ha inverso non limitato (osservazione 1.3.4). poiché però $BV(I) \subset \mathfrak{L}^1(I)$, tale λ non appartiene nemmeno all'insieme risolvente di P: infatti se $P_{|BV} - \lambda I$ non è invertibile non lo è neanche $P - \lambda I$; analogamente, se entrambi gli operatori sono invertibili ma $(P_{|BV} - \lambda I)^{-1}$ non è limitato, non può essere limitato nemmeno $(P - \lambda I)^{-1}$. Allora $\lambda \in \sigma(P)$, il che è assurdo. Si ha così che, anche considerando la restrizione dell'operatore di Perron-Frobenius a $BV(I)$, vale $\rho(P_{|BV}) \leq 1$ e poiché la densità invariante $\varphi_0 \in BV(I)$, $\{1\} \in \sigma(P_{|BV}) \implies \rho(P_{|BV}) = 1$.

D'ora in avanti, denoteremo $P \equiv P_{|BV}$.

Lemma 4.1.3. *Se $\tau : I \to I$ è una mappa espandente a tratti, allora il sistema dinamico $(I, \mathfrak{B}, m, \tau)$ è mixing.*

Come abbiamo visto nell'osservazione 2.2.4, se una trasformazione è esatta allora è anche mixing. Ma grazie al teorema 3.3.4, per ottenere l'esattezza del sistema dinamico $(I, \mathfrak{B}, m, \tau)$ è sufficiente dimostrare che ogni potenza di τ è ergodica e questo risultato segue dalle tecniche classiche per mappe espandenti. Per dettagli e approfondimenti si veda [23] e [18].

Dimostrazione (Corollario 4.1.2). Vogliamo verificare le ipotesi del teorema 4.1.1. Grazie alle osservazioni 4.1.3, sappiamo che P è un operatore quasi compatto con un autovalore ($\lambda = 1$) di modulo uguale al raggio spettrale. Inoltre, per il lemma 4.1.3, il sistema dinamico $(I, \mathfrak{B}, m, \tau)$ è mixing, e quindi segue dai teoremi 2.3.5, 2.3.6 che $\lambda = 1$ è un autovalore semplice ed è l'unico tale che $|\lambda| = \rho(P) = 1$. □

Osservazione 4.1.4. Abbiamo dimostrato che l'operatore di Perron-Frobenius associato a mappe espandenti a tratti ha un gap spettrale e ammette quindi una decomposizione della forma

$$P = Q + S$$

poiché $\lambda = 1$. Osserviamo inoltre che lo spazio delle densità invarianti, che coincide con l'immagine della proiezione Q, ha dimensione 1. Allora esiste un'unica densità invariante φ_0. Definiamo quindi la misura

$$d\mu_0 = \varphi_0 dm$$

e osserviamo che

$$\mu_0(I) = \int_I \varphi_0 m = \langle m, \varphi_0 \rangle = 1$$

Pertanto, grazie all'osservazione 1.3.10, possiamo concludere che l'operatore $\varphi_0 \otimes m$ è una proiezione.

4.2 Teorema di perturbazione

Riportiamo ora il teorema di analisi funzionale enunciato in *"Rare Events, Escape Rates and Quasistationarity: Some Exact Formulae"* di G. Keller e C. Liverani [16] e i risultati fondamentali che questo teorema ci permetterà di dimostrare.

Teorema 4.2.1. *[16] Siano:*

- $(V, \|\cdot\|)$ *uno spazio vettoriale normato (reale o complesso) e* $(V', \|\cdot\|)$ *il suo duale, con abuso di notazione sulla norma di* V'.
- $P_\varepsilon : V \longrightarrow V$ *una famiglia di operatori lineari e uniformemente limitati, definiti al variare di* $\varepsilon \in E$, *dove* $E \subseteq \mathbb{R}$ *è un insieme chiuso di parametri che ha* $\varepsilon = 0$ *come punto di accumulazione.*

Supponiamo inoltre che per ogni operatore P_ε esistano $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varphi_\varepsilon \in V$, $\nu_\varepsilon \in V'$ e un operatore lineare $S_\varepsilon : V \longrightarrow V$ tali che:

(A1)
$$\lambda_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon + S_\varepsilon$$

(A2)
$$P_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon, \quad \nu_\varepsilon P_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \nu_\varepsilon, \quad S_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = 0, \quad \nu_\varepsilon S_\varepsilon = 0$$

(A3)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\varepsilon \in E} \|S_\varepsilon^n\| =: C_1 < \infty$$

(A4)
$$\nu_0(\varphi_\varepsilon) = 1, \qquad \sup_{\varepsilon \in E} \|\varphi_\varepsilon\| =: C_2 < \infty$$

Infine, definiamo $\forall \varepsilon \in E$:

$$\Delta_\varepsilon := \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))$$

$$\eta_\varepsilon := \|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\|$$

e supponiamo che valgano:

(A5)
$$\eta_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \textit{per} \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

(A6)
$$\eta_\varepsilon \cdot \|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| \leq C_3 \, |\Delta_\varepsilon|$$

Allora:

- $\exists \varepsilon_0 > 0$ *tale che: se* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *e* $\Delta_\varepsilon = 0$, *allora* $\lambda_\varepsilon = \lambda_0$.
- *Se* $\Delta_\varepsilon \neq 0 \ \ \forall \varepsilon \in E$ *sufficientemente piccolo e se*

$$q_k := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} q_{k,\varepsilon} := \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\nu_0((P_0 - P_\varepsilon) P_\varepsilon^k (P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))}{\Delta_\varepsilon}$$

  esiste $\forall k \geq 0$, *allora:*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\lambda_0 - \lambda_\varepsilon}{\Delta_\varepsilon} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} q_k$$

4.2.1 Applicazioni

Consideriamo ora il sistema dinamico $(I, \mathfrak{B}, m, \tau)$, dove $I = [0,1]$, $\mathfrak{B}$ è la σ-algebra dei Boreliani, m è la misura di Lebesgue su I e $\tau \in \mathcal{T}(I)$.
Indichiamo con $P_0 : BV(I) \longrightarrow BV(I)$ l'operatore di Perron-Frobenius associato alla mappa τ. Siano inoltre $I_0 = \{z\}$, $z \in I$ e $(I_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ con $E = [0, \varepsilon_1]$ una famiglia di sottointervalli compatti di I tali che $\varepsilon \leq \overline{\varepsilon} \Longrightarrow I_\varepsilon \subseteq I_{\overline{\varepsilon}}$.
Definiamo allora:

$$P_\varepsilon(f) = P_0(f \cdot \mathbf{1}_{I \setminus I_\varepsilon}) \tag{4.2}$$

Nota. [11] L'operatore P_ε così definito è l'operatore di Perron-Frobenius per il sistema dinamico aperto $(I \setminus I_\varepsilon, \mathfrak{B}, m, \tau_\varepsilon)$, dove $\tau_\varepsilon := \tau_{|(I \setminus I_\varepsilon)}$. Infatti, per ogni $B \in \mathfrak{B}$ e per ogni $f \in \mathfrak{L}^1(I)$ vale

$$\int_B P_\varepsilon f dm = \int_{\tau_\varepsilon^{-1}(B)} f dm$$

P_ε soddisfa cioè la definizione 3.3.1 per ogni insieme misurabile in $I \setminus I_\varepsilon$. Inoltre, risulta che $P_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon$ se e soltanto se la misura assolutamente continua $d\mu_\varepsilon = \varphi_\varepsilon dm$ è condizionalmente invariante (definizione 4.1.1).

Nei prossimi paragrafi dimostreremo che esiste $\varepsilon_1 > 0$ per cui la famiglia di operatori $\{P_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ soddisfa le ipotesi del teorema 4.2.1.

Poniamo allora, per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ e per ogni $k \geq 1$,

$$U_{k,\varepsilon} := \tau^{-1}(I \setminus I_\varepsilon) \cap \cdots \cap \tau^{-k}(I \setminus I_\varepsilon) \cap \tau^{-(k+1)} I_\varepsilon$$

e osserviamo che, grazie al lemma 4.1.3, τ ammette un'unica misura invariante e assolutamente continua $d\mu_0 = \varphi_0 \cdot dm$. Pertanto

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon = m((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) &= m(P_0(\varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0})) \\ &= m(\varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0}) = \mu_0(I_\varepsilon \setminus I_0) = \mu_0(I_\varepsilon)\end{aligned}$$

per le proprietà del teorema 4.3.5 e per le definizioni di P_ε e μ_0. Allora, se $\inf \varphi_{0|I_\varepsilon} > 0$ per ε sufficientemente piccolo, risulta $\Delta_\varepsilon = \mu_0(I_\varepsilon) > 0$.

In tal caso, poiché

$$q_{k,\varepsilon} := \frac{m((P_0 - P_\varepsilon)P_\varepsilon^k(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0))}{\Delta_\varepsilon} = \frac{\mu_0(I_\varepsilon \cap U_{k,\varepsilon})}{\mu_0(I_\varepsilon)}$$

sono possibili due casi:

- z non è un punto periodico per τ. Allora $U_{k,\varepsilon} = \varnothing$ per ε sufficientemente piccolo, da cui segue $q_k = \lim_{\varepsilon\to 0} q_{k,\varepsilon} = 0$ per ogni k. Pertanto, applicando i risultati del teorema 4.2.1, si ottiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\mu_0(I_\varepsilon)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{m(I_\varepsilon)} = \varphi_0(z) \tag{4.3}$$

- z è un punto periodico per τ di periodo p. Allora $U_{k,\varepsilon} = \varnothing$ per ε sufficientemente piccolo tranne che per $k = p-1$, da cui segue

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{\mu_0(I_\varepsilon)} &= 1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu_0(I_\varepsilon \cap \tau^{-p} I_\varepsilon)}{\mu_0(I_\varepsilon)} = 1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|} \\ \Longrightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{m(I_\varepsilon)} &= \varphi_0(z)\left(1 - \frac{1}{|(\tau^p)'(z)|}\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Osservazione 4.2.1. Le equazioni 4.3 e 4.4 implicano che la funzione $\varepsilon \mapsto \lambda_\varepsilon$ è differenziabile in $\varepsilon = 0$. Si noti, tuttavia, che questo risultato non è vero in generale per altri valori di ε.

Esempio. Siano $\tau = 2x \pmod 1$ la Doubling Map sull'intervallo unitario I e m la misura di Lebesgue. Se z è un punto periodico di periodo p per τ e $I_0 = \{z\}$, dall'equazione 4.3 risulta

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\lambda_\varepsilon}{m(I_\varepsilon)} = 1 - 2^{-p}$$

cioè vale la seguente espansione al prim'ordine per il tasso di fuga del sistema aperto, con buco I_ε, in $\varepsilon = 0$:

$$\lambda_\varepsilon = 1 - \varepsilon \cdot (1 - 2^{-p}) + o(\varepsilon)$$

4.3 Operatori di Perron-Frobenius per sistemi aperti

Vogliamo mostrare che esiste $\varepsilon_1 > 0$ per cui tale famiglia di operatori soddisfa le ipotesi del teorema di perturbazione.

4.3.1 Osservazioni preliminari

Consideriamo lo spazio vettoriale:

$$(V, \|\cdot\|) : \quad (BV(I), \|\cdot\|_{BV})$$

dove

$$\|f\|_{BV} := Var(f) + \|f\|_1$$

Studieremo il caso in cui il buco I_0 è costituito da un solo punto: $I_0 = \{z\}$. In questo caso, l'operatore P_0 corrispondente coincide con l'operatore di Perron-Frobenius $P_0 : BV(I) \longrightarrow BV(I)$ perché $\forall z \in I,\ f$ e $f \cdot \mathbf{1}_{I\setminus z}$ sono due rappresentanti dello stesso elemento in $BV(I)$.

Teorema 4.3.1. *[4] Sia $f \in BV(I)$. Allora, per ogni $x \in [0,1]$ vale la seguente:*

$$|f(x)| \leq Var_{[0,1]}f + \|f\|_1$$

Osservazione 4.3.1. Ogni misura finita (e quindi ogni misura di probabilità) μ su I definisce un funzionale lineare limitato su $\mathfrak{L}^1(I) \supset BV(I)$

$$F_\mu : f \mapsto \int f d\mu$$

Infatti, sia μ misura su I, $\mu(I) =: C$. Allora F_μ è lineare per linearità di μ. Inoltre, per ogni $f \in BV(I)$, vale che

$$\int f d\mu \leq \int |f| d\mu \leq \sup_I |f| \cdot \mu([0,1]) \leq C \left(Var_{[0,1]}|f| + \|f\|_1\right) = C\|f\|_{BV}$$

grazie al teorema 4.3.1. Pertanto, F_μ è anche limitato ed è quindi in particolare un elemento dello spazio duale $BV^*(I)$, per ogni μ.

Osservazione 4.3.2. Grazie al corollario 4.1.2 sappiamo inoltre che l'operatore P_0 ha un gap spettrale e ammette una decomposizione della forma

$$P_0 = Q + S$$

4.3.2 L'operatore P_0

Poniamo quindi:

- $P_0 = P : BV(I) \longrightarrow BV(I)$
- $\lambda_0 = 1$
- $\nu_0 = m$ misura di Lebesgue su I
- $\varphi_0 =$ densità della misura invariante e assolutamente continua μ_0 (osservazione 4.1.4)

e verifichiamo tutte le ipotesi del teorema di perturbazione 4.2.1 per il valore $\varepsilon = 0$.

Proprietà (A1)

Grazie al corollario 4.1.2 sappiamo che l'operatore P_0 ha un gap spettrale: pertanto, il suo spettro si può decomporre come segue:

$$\sigma(P_0) = \sigma' \oplus \sigma'' = \{\lambda\} \oplus \sigma''$$

dove $\lambda = 1$ è l'autovalore principale e la parte di spettro σ'' è contenuta in un disco di raggio $r < 1$. Gli operatori Q e S della decomposizione spettrale di P_0 sono le proiezioni relative a σ' e σ'', rispettivamente. Allora si può applicare il teorema 1.3.14 all'operatore P_0: otteniamo così che ogni funzione f a variazione limitata su I può essere scritta come $f = f_1 + f_2$, con f_1 autofunzione relativa a $\lambda = 1$ e f_2 funzione relativa alla parte di spettro $\sigma'' = \sigma(P_0) \setminus \{\lambda\}$.

Risulta allora:

$$P_0^n f = 1^n f_1 + P_0^n f_2 = f_1 + P_0^n f_2$$

Inoltre, posto $\lambda = \rho(S) < 1$, si ha che

$$\|P_0^n f_2\|_{BV} \leq \lambda^n \|f_2\|_{BV}$$

Ricordando infine che P_0 preserva gli integrali su I (proposizione 3.2.3), otteniamo:

$$|m(f_2)| = |m(P_0^n f_2)| \leq \int |P_0^n f_2| dm = \|P_0^n f_2\|_1 \leq \|P_0^n f_2\|_{BV} \to 0$$

cioè $f_2 \in \mathrm{Ker}(m) = \mathrm{Ker}(\varphi_0 \otimes m)$.

Quanto abbiamo appena visto vale per ogni $f \in BV(I)$ e, conseguentemente, per ogni f_2 appartenente allo spazio relativo alla parte di spettro σ''; abbiamo cioè dimostrato che, indicati con M e N i sottospazi della decomposizione definita nel teorema 1.3.14, $N \subseteq \mathrm{Ker}(m)$. Osserviamo che sia N che $\mathrm{Ker}(m)$ sono sottospazi di $BV(I)$ di codimensione 1: infatti M è l'autospazio relativo a un autovalore semplice, mentre m è un funzionale su $\mathbb{R}$. Pertanto tale inclusione è sufficiente per concludere che $N = \mathrm{Ker}(m) = \mathrm{Ker}(\varphi_0 \otimes m)$. Grazie all'osservazione 1.3.8, otteniamo così che $M = \mathrm{Im}(\varphi_0 \otimes m)$ e la proiezione Q coincide proprio con l'operatore $\varphi_0 \otimes m$.

Abbiamo quindi dimostrato che P_0 soddisfa la condizione (A1):

$$P_0 = \varphi_0 \otimes m + S$$

Proprietà (A2)

Ora, ricordando le proprietà 3.2 dell'operatore di Perron-Frobenius osserviamo che

1. poiché φ_0 è una densità invariante, vale

$$P_0(\varphi_0) = \varphi_0$$

2. P_0 preserva gli integrali, cioè, $\forall f \in BV(I)$

$$\int P_0(f) dm = \int f dm \quad \Longleftrightarrow \quad mP_0 = m$$

Allora

3. per la proprietà 1

$$\begin{aligned} & P_0 = \varphi_0 \otimes m + S \\ \Longrightarrow \quad & P_0(\varphi_0) = (\varphi_0 \otimes m)(\varphi_0) + S(\varphi_0) \\ \Longrightarrow \quad & \varphi_0 = \varphi_0 + S(\varphi_0) \\ \Longrightarrow \quad & S(\varphi_0) = 0 \end{aligned}$$

4. per la proprietà 2

$$\begin{aligned} & P_0 = \varphi_0 \otimes m + S \\ \Longrightarrow \quad & mP_0 = m(\varphi_0 \otimes m) + mS \\ \Longrightarrow \quad & m = m(\varphi_0 \otimes m) + mS \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ma, per ogni $f \in BV(I)$,

$$\begin{aligned} m(\varphi_0 \otimes m)(f) &= \int (\varphi_0 \otimes m)(f) dm = \\ &= \int \langle m, f \rangle \varphi_0 dm = \\ &= \langle m, f \rangle \int \varphi_0 dm = \langle m, f \rangle = m(f) \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione 4.5 si ottiene

$$m = m + mS \quad \Longrightarrow \quad mS = 0$$

Pertanto, anche la proprietà (A2) risulta soddisfatta.

Proprietà (A3)

Dal teorema di Ionescu-Tulcea-Marinescu 3.3.3 sappiamo che $\rho(S) < 1$, cioè $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|S^n\|^{1/n} < 1$. Allora, grazie al criterio della radice possiamo concludere che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \|S^n\|$ risulta convergente, cioè vale la proprietà (A3).

Proprietà (A4)-(A6)

Le condizioni (A4)-(A6) risultano infine banalmente verificate, osservando che $m(\varphi_0) = 1$, $\|\varphi_0\|_{BV} < \infty$, $\Delta_0 = 0$ e $\eta_0 = 0$.

4.3.3 Gli operatori P_ε

Risultati preliminari

In questo paragrafo introdurremo la definizioni di potenziale contrattivo e di partizione generante che ci consentiranno di applicare alcuni importanti risultati nelle prossime sezioni.

Definizione 4.3.1. [20] Si definisce *potenziale* associato a un operatore P_0 la funzione $g^0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (se esiste) tale che

$$P_0 f(x) = \sum_{y \in \tau^{-1} x} f(y) g^0(y)$$

Definizione 4.3.2. [20] Siano τ una mappa monotona a tratti (definizione 3.3.1) e g^0 il potenziale per l'operatore di Perron-Frobenius P_0 associato a τ. Siano inoltre $\mathcal{Z}$ la partizione di monotonicità per τ e $\mathcal{Z}^{(n)}$ la partizione di monotonicità per τ^n. Si definiscono:

- $g_n^0(x) := g^0(x) \cdot g^0(\tau(x)) \cdots g^0(\tau^{n-1}(x))$ per ogni n
- $P(g^0) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{Z \in \mathcal{Z}^{(n)}} \sup_Z g_n^0$
- $\Theta(g^0)$ tale che $\log \Theta(g^0) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sup_I g_n^0$
- g^0 si dice *contrattivo* se $\Theta(g^0) < e^{P(g^0)}$
- Una misura m si dice g^0-*conforme* se soddisfa

$$P_0^* m = cm, \quad \text{dove } c := e^{P(g^0)}$$

Definizione 4.3.3. [21] Se α e β sono due partizioni di I, si dice il *prodotto wedge* tra α e β

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha,\ B \in \beta\}$$

Definizione 4.3.4. [21] Sia $(I, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ un sistema dinamico. Una partizione α di I si dice *generante* se

$$\sigma\left(\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \tau^{-k}(\alpha)\right) = \mathfrak{B} \qquad \bmod \mu$$

Nota. L'espressione $\bmod \mu$ nella definizione precedente significa che le due σ-algebre hanno lo stesso completamento rispetto alla misura μ, cioè per ogni $A \in \sigma\left(\bigvee_{k=-\infty}^{\infty} \tau^{-k}(\alpha)\right)$ esiste $B \in \mathfrak{B}$ tale che B differisce da A al più su un insieme di misura nulla di punti (e viceversa).

Teorema 4.3.2. *[1] Siano $\tau : I \to I$ una mappa monotona a tratti rispetto alla partizione $\mathcal{Z}$ e P_0 l'operatore di Perron-Frobenius associato a τ. Se P_0 ammette un potenziale g^0 tale che $g^0_{|Z}$ è continuo per ogni $Z \in \mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}$ è una partizione generante e* $\inf g^0 \geq 0$*, allora risulta $e^{P(g^0)} = \rho(P_0)$.*

Osservazione 4.3.3. [20][Condizione 0] Per applicare i risultati del prossimo paragrafo è necessario dimostrare che il potenziale g^0 soddisfa le seguenti proprietà:

- $\inf g^0 > 0$
- g^0 è contrattivo
- $g^0 \in BV(I)$
- g^0 ammette una misura di probabilità m g^0-conforme

Lemma 4.3.3. *[25] Se $\tau : I \to I$ è una mappa espandente a tratti rispetto alla partizione $\mathcal{Z}$, allora $\mathcal{Z}$ è generante.*

Proposizione 4.3.4. *Se $\tau \in \mathcal{T}(I)$ è una mappa espandente a tratti su I, allora ammette un potenziale g^0 che soddisfa la condizione 0.*

Dimostrazione. Dalla definizione 3.3.2 sappiamo che il potenziale g^0 di una trasformazione $\tau \in \mathcal{T}(I)$ esiste, appartiene a $BV(I)$ e ha la seguente forma esplicita

$$g^0(x) = \frac{1}{|\tau'(x)|}$$

In particolare, quindi, è una funzione strettamente positiva su I. Inoltre, sempre dalla definizione 3.3.2 segue che per ogni elemento Z della partizione di I, $\tau_{|Z}$ è di classe C^1 e conseguentemente $g^0_{|Z}$ risulta continua $\forall Z$. Allora, grazie al lemma 4.3.3 risultano soddisfatte tutte le ipotesi del teorema 4.3.2 e otteniamo così che $e^{P(g^0)} = \rho(P_0) = 1$. Affinché g^0 risulti un potenziale contrattivo è sufficiente quindi dimostrare che $\Theta(g^0) < 1$. Osserviamo che, poiché τ è espandente, vale

$$|\tau'(x)| \geq \alpha > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{|\tau'(x)|} \leq \frac{1}{\alpha} < 1$$

per ogni x tale che $\tau'(x)$ sia definita. Pertanto

$$\begin{aligned} & g^0 \leq \frac{1}{\alpha} \\ \Longrightarrow\quad & g^0_n \leq \frac{1}{\alpha^n} \\ \Longrightarrow\quad & \sup_I g^0_n \leq \frac{1}{\alpha^n} \\ \Longrightarrow\quad & \log \sup_I g^0_n \leq n \log \frac{1}{\alpha} \\ \Longrightarrow\quad & \log \Theta(g^0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sup_I g^0_n \leq \log \frac{1}{\alpha} \\ \Longrightarrow\quad & \Theta(g^0) \leq \frac{1}{\alpha} < 1 \end{aligned}$$

e quindi g^0 è un potenziale contrattivo. Infine, notiamo che per l'osservazione 4.3.1, la misura di Lebesgue m su I appartiene a $BV^*(I)$. Allora, affinché m risulti una misura g^0-conforme, deve valere:

$$(P_0^* m)(f) = m(P_0 f) = m(f) = cm(f) \qquad \forall f \in BV(I)$$

per definizione di operatore aggiunto e perché $c = e^P(g^0) = 1$ (teorema 4.3.2). Ma dalla proprietà (A2) dimostrata in precedenza per l'operatore P_0 sappiamo che $mP_0 = m$ e quindi m è una misura g^0-conforme. □

Misure di probabilità per sistemi aperti

Riportiamo di seguito alcuni risultati degli articoli *"Lasota-Yorke maps with holes: conditionally invariant probability measures and invariant probability measures on the survivor set"* di C. Liverani e V. Maume-Deschamps [20], grazie ai quali dimostreremo le proprietà (A1)-(A6) per gli operatori

$$\begin{aligned} P_\varepsilon : BV(I) &\longrightarrow BV(I) \\ f &\longmapsto P_0(f \cdot \mathbf{1}_{I \setminus I_\varepsilon}) \end{aligned}$$

dove P_0 è l'operatore di Perron-Frobenius associato a una mappa espandente a tratti e ε varia in un opportuno intervallo (si veda la definizione 4.2).

Teorema 4.3.5. *[20] Siano $\tau \in \mathcal{T}(I)$ tale che il potenziale g^0 associato soddisfi la condizione 0, m una misura g^0-conforme. Supponiamo inoltre che τ ammetta un'unica misura invariante μ_0 assolutamente continua rispetto a m e che il sistema dinamico $(I, \mathfrak{B}, \mu_0, \tau)$ sia mixing. Allora, esiste $\varepsilon_1 > 0$ tale che, per ogni buco I_ε per cui $m(I_\varepsilon) = \varepsilon \leq \varepsilon_1$, se P_ε è l'operatore di Perron-Frobenius relativo al sistema dinamico aperto definito da 4.2, esiste un'unica misura di probabilità ν tale che:*

- $\mathrm{supp}(\nu) \subset X_\infty$
- $\exists\, \rho \leq c$ *tale che* $\nu(P_\varepsilon f) = \rho \nu(f) \quad \forall f \in BV(I)$

Definizione 4.3.5. [20] Per ogni operatore $P : BV(I) \longrightarrow \mathfrak{L}^1(I)$, definiamo la norma

$$|||P||| := \sup_{\|f\|_{BV} \leq 1} |Pf|_1$$

Lemma 4.3.6. *[20] Siano P_0 l'operatore di Perron-Frobenius associato a una mappa $\tau \in \mathcal{T}(I)$ e P_ε gli operatori definiti in precedenza. Allora*

$$|||P_0 - P_\varepsilon||| \leq e^{P(g^0)} m(I_\varepsilon) = \varepsilon$$

Dimostrazione. Per ogni $f \in BV(I)$ si ha che

$$\begin{aligned} |P_0(f) - P_\varepsilon(f)|_1 = |P_0(\mathbf{1}_{I_\varepsilon} f)|_1 &\leq e^{P(g^0)} |\mathbf{1}_{I_\varepsilon} f|_1 \\ &\leq e^{P(g^0)} |f|_\infty m(I_\varepsilon) \leq e^{P(g^0)} \|f\|_{BV} m(I_\varepsilon) \end{aligned}$$

da cui segue il risultato del lemma. □

Lemma 4.3.7. *[20] Per ogni $\theta \in (\Theta(g^0), e^{P(g^0)})$ esistono A, B indipendenti da ε tali che, per ogni $f \in BV(I)$,*

$$\|P_0^n f\|_{BV} \leq A\theta^n \|f\|_{BV} + B|f|_1$$
$$\|P_\varepsilon^n f\|_{BV} \leq A\theta^n \|f\|_{BV} + B|f|_1$$

Teorema 4.3.8. *[20] Consideriamo $\theta \in (\Theta(g^0), e^{P(g^0)})$ fissato. Allora, per ogni $\theta_1 \in (\theta, 1)$ e per ogni $\delta \in (0, 1-\theta_1)$ esiste un $\varepsilon_1 > 0$ tale che se $|||P_0 - P_\varepsilon||| < \varepsilon_1$, allora lo spettro di P_ε al di fuori del disco $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| \leq \theta_1\}$ è δ-vicino, con molteplicità, a quello di P_0.*

Vogliamo ora dimostrare, usando i risultati precedenti, che ogni operatore P_ε con $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ ha un gap spettrale.
Abbiamo già visto che, se il sistema dinamico $(I, \mathfrak{B}, \mu_0, \tau)$ è mixing, l'operatore di Perron-Frobenius P_0 ha un gap spettrale (corollario 4.1.2): in particolare, $\lambda_0 = 1$ è l'unico autovalore di modulo 1 per P_0 e il resto dello spettro è interamente contenuto in un disco di raggio strettamente minore di 1. Sia quindi λ_1 l'autovalore di modulo più grande in $\sigma(P_0) \setminus \{1\}$ e scegliamo θ_1 tale che $\max\{\theta, \lambda_1\} \leq \theta_1 < 1$, $\delta = \dfrac{1-\theta_1}{2}$.

Il teorema 4.3.8 implica allora che, per ε sufficientemente piccoli, lo spettro di P_ε al di fuori del disco $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| \leq \theta_1\}$ consiste di un solo autovalore λ_ε di molteplicità 1 e di modulo maggiore di $1-\delta$ e conseguentemente anche l'operatore P_ε ha un gap spettrale.

Proprietà (A1)

Siano allora φ_ε un'autofunzione associata all'autovalore λ_ε e, applicato il teorema 4.3.5, indichiamo con ν_ε l'unica misura di probabilità definita su X_∞ tale che

$$\nu_\varepsilon(P_\varepsilon f) = \rho_\varepsilon \nu_\varepsilon(f) \qquad \forall f \in BV(I)$$

In particolare deve valere

$$\nu_\varepsilon(P_\varepsilon \varphi_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \nu_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = \rho_\varepsilon \nu_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) \tag{4.6}$$

e quindi $\rho_\varepsilon = \lambda_\varepsilon$.

Consideriamo ora la decomposizione spettrale di P_ε. Come abbiamo visto per l'operatore P_0, questa permette di decomporre anche lo spazio $BV(I)$ e di scrivere ogni suo elemento come $f = f_1 + f_2$. Osserviamo che per ogni $f \in BV(I)$

$$\nu_\varepsilon(P_\varepsilon^n f) = \lambda_\varepsilon^n \nu_\varepsilon(f)$$

grazie all'equazione 4.6. D'altra parte, se $f \in \mathrm{Dom}(S_\varepsilon)$, si ha che

$$\begin{aligned}
|\nu_\varepsilon(P_\varepsilon^n f_2)| &= \left| \int (P_\varepsilon^n f_2) d\nu_\varepsilon \right| \\
&\leq \int |P_\varepsilon^n f_2| d\nu_\varepsilon \\
&= \|P_\varepsilon^n f_2\|_1 \\
&\leq \|P_\varepsilon^n f_2\|_{BV} \leq \gamma_\varepsilon^n \|f_2\|_{BV}
\end{aligned}$$

dove $\gamma_\varepsilon = \rho(S_\varepsilon) < \lambda_\varepsilon$. Allora, le ultime due condizioni sono compatibili se e soltanto se $\nu_\varepsilon(f) = 0$ per ogni $f \in \mathrm{Dom}(S_\varepsilon)$.
Abbiamo pertanto dimostrato che ogni funzione in $\mathrm{Dom}(S_\varepsilon)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(\varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon) = \mathrm{Ker}(\nu_\varepsilon)$. Ma poiché tali spazi hanno entrambi codimensione 1, deve valere $Q_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon$. Si ottiene così la seguente decomposizione spettrale per l'operatore P_ε:

$$P_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon + S'_\varepsilon$$

Ponendo quindi

$$S_\varepsilon = \frac{1}{\lambda_\varepsilon} S'_\varepsilon$$

si ottiene la proprietà (A1): $\lambda_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon + S_\varepsilon$.

Proprietà (A2)

Per definizione di φ_ε e grazie all'equazione 4.6 sappiamo che

$$P_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon, \qquad \nu_\varepsilon P_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \nu_\varepsilon$$

Inoltre, analogamente a quanto visto per P_0 si ha che ogni autofunzione relativa all'autovalore principale λ_ε deve appartenere a $\mathrm{Ker}(S_\varepsilon)$, e quindi in particolare: $S_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) = 0$. Infine, per dimostrare la proprietà (A1) abbiamo ricavato che $\mathrm{Dom}(S_\varepsilon) = \mathrm{Ker}(\nu_\varepsilon)$, da cui segue $\nu_\varepsilon(S_\varepsilon) = 0$.

Risultano pertanto soddisfatte tutte le equazioni della proprietà (A2).

Proprietà (A3)

Abbiamo visto che S'_ε è l'operatore relativo alla parte di spettro $\sigma(P_\varepsilon)\setminus\{\lambda_\varepsilon\}$, da cui segue

$$\|S'_\varepsilon\| < \rho(S'_\varepsilon) < \lambda_\varepsilon$$

Ma allora vale

$$\begin{aligned}
\|S_\varepsilon\| = \left\|\frac{S'_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon}\right\| &= \gamma \leq 1 \\
\Longrightarrow \quad & \|S^n_\varepsilon\| \leq \gamma^n < 1 \\
\Longrightarrow \quad & \sup_{\varepsilon\in E} \|S^n_\varepsilon\| \leq \gamma^n < 1 \\
\Longrightarrow \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\varepsilon\in E} \|S^n_\varepsilon\| \leq \frac{1}{1-\gamma} < 1
\end{aligned}$$

per cui risulta soddisfatta anche la proprietà (A3).

Proprietà (A4)

Sia $\varphi_0 > 0$ l'unica autofunzione di P_0 tale che $\|\varphi_0\|_{BV} = 1$. Indichiamo con $\Pi_\varepsilon : BV(I) \to M_\varepsilon$ la proiezione sull'autospazio relativo all'autovalore λ_ε per l'operatore P_ε: grazie ai risultati precedenti, sappiamo che $\Pi_\varepsilon = \phi_\varepsilon \otimes \nu_\varepsilon$ e l'autospazio M_ε ha dimensione 1, cioè $M_\varepsilon = \mathrm{span}\{\phi_\varepsilon\}$. Si ha quindi che $\Pi_\varepsilon\phi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\phi_\varepsilon$ e, in particolare, $\Pi_0\varphi_0 = \varphi_0$.
Risulta inoltre che, per ε sufficientemente piccolo, $\varphi_0 \notin \ker \Pi_\varepsilon$ per cui possiamo definire l'autofunzione

$$\phi_\varepsilon = \frac{\Pi_\varepsilon\varphi_0}{\|\Pi_\varepsilon\varphi_0\|} \tag{4.7}$$

Vogliamo dimostrare che per ε piccoli l'autofunzione ϕ_ε rimane vicina (in norma) alla densità invariante φ_0.

Lemma 4.3.9. $\|\phi_\varepsilon - \varphi_0\| \longrightarrow 0$ *per* $\varepsilon \to 0$.

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\|\phi_\varepsilon - \varphi_0\| &= \left\| \frac{\Pi_\varepsilon \varphi_0}{\|\Pi_\varepsilon \varphi_0\|} - \frac{\varphi_0}{\|\Pi_\varepsilon \varphi_0\|} + \frac{\varphi_0}{\|\Pi_\varepsilon \varphi_0\|} - \varphi_0 \right\| \\ &\le \frac{\|\Pi_\varepsilon - \Pi_0\| \cdot \|\varphi_0\|}{\|\Pi_\varepsilon \varphi_0\|} + \left(\frac{1}{\|\Pi_\varepsilon \varphi_0\|} - 1 \right) \|\varphi_0\| \end{aligned} \tag{4.8}$$

Inoltre, per $\varepsilon \to 0$ il grafico (definizione 1.3.11) dell'operatore perturbato $P_\varepsilon : f \mapsto P_0(f \cdot \mathbf{1}_{I \setminus I_\varepsilon})$ tende a quello di P_0. Possiamo quindi applicare il teorema 1.3.15 perché $\hat{\delta}(P_\varepsilon, P_0) \to 0$. In particolare otteniamo che la proiezione $\Pi_\varepsilon \to \Pi_0$ per $\varepsilon \to 0$ e quindi, poiché $\|\Pi_0 \varphi_0\| = \|\varphi_0\| = 1$, l'espressione 4.8 tende a 0. □

Osservazione 4.3.4. Se ϕ_ε è l'autofunzione di P_ε relativa all'autovalore λ_ε definita dall'espressione 4.7, tutti i passaggi precedenti possono essere ripetuti con qualunque funzione $\varphi_\varepsilon = k\phi_\varepsilon$, ottenendo così gli stessi risultati.

In particolare, quindi, scegliamo $\varphi_\varepsilon = c_\varepsilon \phi_\varepsilon$, con $c_\varepsilon = \frac{1}{\int \phi_\varepsilon dm}$. Risulta allora

$$\int \varphi_\varepsilon dm = \frac{\int \phi_\varepsilon dm}{\int \phi_\varepsilon dm} = 1$$

Grazie a questa scelta dell'autofunzione φ_ε vale $\nu_0(\varphi_\varepsilon) = 1$ per ogni ε. Inoltre, $\|\varphi_\varepsilon\|_{BV} = |c_\varepsilon| \cdot \|\phi_\varepsilon\|_{BV} = |c_\varepsilon|$ e poiché c_ε dipende in modo continuo dalla norma $\mathfrak{L}^1$ di ϕ_ε, segue dal lemma 4.3.9 che le densità φ_ε sono uniformemente limitate per ε_1 sufficientemente piccolo. Risulta pertanto soddisfatta la proprietà (A4).

Proprietà (A5)

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon := \|\nu_0(P_0 - P_\varepsilon)\| &= \sup_{\|\psi\| \le 1} \left| \nu_0(P_0(\psi \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0})) \right| = \\ &= \sup_{\|\psi\| \le 1} \left| \int P_0(\psi \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0}) d\nu_0 \right| = \\ &= \sup_{\|\psi\| \le 1} \left| \int_{I_\varepsilon \setminus I_0} \psi d\nu_0 \right| \le \nu_0(I_\varepsilon \setminus I_0) \longrightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \to 0^+\end{aligned}$$

cioè vale la proprietà (A5).

Proprietà (A6)

Inoltre

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon :&= \nu_0((P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)) = \\ &= \nu_0(P_0(\varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0})) = \\ &= \int P_0(\varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0}) d\nu_0 = \\ &= \int \varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0} d\nu_0 = \\ &= \int_{I_\varepsilon \setminus I_0} d\mu_0 = \mu_0(I_\varepsilon \setminus I_0)\end{aligned}$$

e

$$\|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| = \|P_0(\varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0})\| \leq \|\varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0}\|$$

poiché P_0 è una contrazione.

Allora, sotto l'ipotesi che $\inf \varphi_0|_{I_{\varepsilon_1}} > 0$, si ha che

$$\forall \varepsilon \quad \int_{I_\varepsilon \setminus I_0} \varphi_0 d\nu_0 = \mu_0(I_\varepsilon \setminus I_0) > 0$$

e quindi si può sempre trovare una costante C tale che:

$$C \geq \frac{1}{\mu_0(I_\varepsilon \setminus I_0)} \cdot \nu_0(I_\varepsilon \setminus I_0) \cdot \|\varphi_0 \cdot \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0}\|_{BV}$$

Per tale C risulta

$$\eta_\varepsilon \|(P_0 - P_\varepsilon)(\varphi_0)\| \leq \nu_0(I_\varepsilon \setminus I_0) \cdot \|\varphi_0 \mathbf{1}_{I_\varepsilon \setminus I_0}\| \leq C \cdot \mu_0(I_\varepsilon \setminus I_0) = C|\Delta_\varepsilon|$$

cioè è soddisfatta la condizione (A6).

Conclusioni

Nell'ultimo capitolo abbiamo dimostrato alcuni importanti risultati, validi per qualunque sistema dinamico definito da una trasformazione $\tau \in \mathcal{T}(I)$. Sia quindi $(I, \mathfrak{B}, m, \tau)$ un sistema dinamico determinato da una mappa espandente a tratti sull'intervallo unitario.

Innanzitutto, abbiamo visto che $(I, \mathfrak{B}, m, \tau)$ è mixing: ammette pertanto un unico autovalore $\lambda_0 = 1$ e un'unica misura μ_0 invariante e assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue m, con $\dfrac{d\mu_0}{dm} = \varphi_0$.
Indicato con P_0 l'operatore di Perron-Frobenius associato a τ, il mixing implica inoltre un gap spettrale per P_0 e la relativa decomposizione $P_0 = Q + S$.

Successivamente abbiamo considerato gli operatori perturbati P_ε, cioè gli operatori di Perron-Frobenius associati al sistema dinamico aperto con buco I_ε. Grazie ai teoremi di un articolo di C. Liverani e V. Maume-Deschamps [20], esiste $\varepsilon_1 > 0$ sufficientemente piccolo tale che per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ anche gli operatori P_ε hanno un gap spettrale e quindi una decomposizione della forma $P_\varepsilon = \lambda_\varepsilon Q_\varepsilon + S'_\varepsilon$, dove l'autovalore principale λ_ε (cioè il tasso di fuga per il sistema aperto) è tale che $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \lambda_0 = 1$.

Nel caso in cui $I_0 = \{z\}$ con $z \in I$, e se I_ε sono intervalli di lunghezza ε e tali che $z \ni I_\varepsilon$, abbiamo quindi verificato le ipotesi del teorema 4.2.1, prima per l'operatore P_0 e poi per P_ε, al variare di $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.
Conseguentemente, applicando i risultati del teorema 4.2.1, abbiamo ottenuto che la funzione $\varepsilon \mapsto \lambda_\varepsilon$ è differenziabile in $\varepsilon = 0$, a prescindere dalla posizione del buco I_0 (cioè dal punto z e quindi dalle sue proprietà: periodico o non periodico). In particolare, le formule usate forniscono un'espansione al prim'ordine di λ_ε, che consente così di calcolare esplicitamente un'approssimazione del tasso di fuga conoscendo soltanto $\varphi_0(z)$ se z non è un punto periodico, o $\varphi_0(z)$ e $(\tau^p)'(z)$ se z è un punto periodico di periodo p.

Bibliografia

[1] Viviane Baladi, Gerhard Keller, *Zeta Functions and Transfer Operators for Piecewise Monotone Transformations*, Springer-Verlag, 1990

[2] Patrick Billingsley, *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, 1985

[3] Frank F. Bonsall, John Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, 1973

[4] Abraham Boyarsky, Paweł Góra, *Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*, Birkhäuser, 1997

[5] Liliana Blanco Castaneda, Viswanathan Arunachalam, Selvamuthu Dharmaraja, *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*, Wiley, 2012

[6] Vaughn Climenhaga, *Spectral methods in dynamics*, 2013

[7] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1990

[8] James Davidson, *Stochastic Limit Theory*, Oxford University Press, 1994

[9] Mark F. Demers, Lai-Sang Young, *Escape Rates and Conditionally Invariant Measures*, Nonlinearity 19 (2006), 377-397, 2005

[10] Richard Mansfield Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, 2002

[11] Gary Froyland, Ognjen Stancevic, *Escape Rates and Perron-Frobenius Operators: Open and Closed Dynamical Systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Volume 14, Issue 2, American Institute of Mathematical Sciences, 2010

[12] Hubert Hennion, Loïc Hervé, *Limit Theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systems by Quasi-Compactness* Springer-Verlag, 2001

[13] Steven Kalikow, Randall McCutcheonn *An Outline of Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 2010

[14] Tosio Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1980

[15] Viviane Baladi, *Decay of Correlation*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, Volume 69: Smooth Ergodic Theory and Its Application, American Mathematical Society, 1999

[16] Gerhard Keller, Carlangelo Liverani, *Rare Events, Escape Rates and Quasistationarity: Some Exact Formulae*, Springer-Verlag, 2008

[17] Serge Lang, *Algebra Lineare*, Boringhieri Editore, 1984

[18] Marco Lenci, *A Simple Proof of the Exactness of Expanding Maps of the Interval with an Indifferent Fixed Point*, Preprint, 2014

[19] Marco Lenci, Giampaolo Cristadoro, *Appunti del corso di Sistemi Dinamici e Applicazioni*, 2014

[20] Carlangelo Liverani, Véronique Maume-Deschamps, *Lasota-Yorke Maps with Holes: Conditionally Invariant Probability Measures and Invariant Probability Measures on the Survivor Set*, Annales de l'Institute Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques, 2002

[21] William Parry, *Topics in Ergodic Theory*, Cambridge University Press, 1981

[22] Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis* Academic Press, 1980

[23] Vladimir Abramovich Rohlin, *Exact Endomorphisms of a Lebesge Space*, American Mathematical Society Translation, Series 2, Volume 39, 1963

[24] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987

[25] David Ruelle, *Dynamical Zeta Functions for Piecewise Monotone Maps of the Interval*, American Mathematical Society, 1994

[26] Omri Sarig, *Introduction to the transfer operator method*, Second Brazilian School on Dynamical Systems, 2012

[27] I͡akov Grigor'evich Sinaĭ, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton University Press, 1935

[28] Alfonso Villani, *Another Note on the Inclusion* $\mathfrak{L}^p(\mu) \subset \mathfrak{L}^q(\mu)$, The American Mathematical Monthly, 1985

[29] Peter Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1982