ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

L'integrale di Lebesgue

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Matteo Frontini

Terza Sessione
Anno Accademico 2008-2009

Indice

Introduzione

Gli anni a cavallo dei secoli XIX e XX furono tra i più controversi della storia della matematica ed è proprio in questi anni che Lebesgue ricevette la sua formazione accademica e pubblicò i suoi primi lavori.

A fare da sfondo a questo periodo di notevoli progressi teorici vi era la disputa sui fondamenti della matematica tra formalisti e intuizionisti, gli uni sostenitori della sua natura formale, considerandola quasi come un "gioco" basato su degli assiomi e che si sviluppa secondo determinare regole formali, gli altri fautori della centralità del ruolo dell'intuizione, che rende evidenti concetti e deduzioni. Sebbene tale confronto avesse raggiunto a volte toni anche aspri, coinvolgendo alcuni dei nomi più noti dell'epoca, non si può affermare che ogni matematico appartenesse ad una delle due scuole di pensiero, anzi anche al loro interno non mancavano diverse correnti di pensiero.

Ci fu inoltre, a partire dalla seconda metà del XIX secolo, un notevole sviluppo della teoria degli insiemi e delle sue applicazioni all'analisi. Dopo i lavori di Cantor sulla misura di insiemi di punti, molti matematici si dedicarono allo studio delle connessioni tra teoria della misura e integrazione, primo tra tutti G.Peano. Il matematico italiano si occupò del problema della misura di una regione piana delimitata da curve, considerando le classi infinite di poligoni inscritti e circoscritti all'insieme dato. Le aree dei primi sono conseguentemente dotate di estremo superiore, mentre quelle dei secondi di estremo inferiore, se i due estremi coincidono il loro valore era la misura secondo Peano. Inoltre tale teoria si collegava direttamente con l'integrazione, infatti una funzione $f(x)$ risultava integrabile se e solo se il sottografico era misurabile secondo Peano.

A risultati analoghi arrivò Jordan, il quale osservò che nella teoria dell'integrazione di Riemann l'attenzione era focalizzata sulla funzione, senza mai soffermarsi sull'influenza del dominio di integrazione. Tutta la sua teoria, di conseguenza, si basava sul postulato: ogni dominio ha una particolare estensione e se scomposto in diverse parti, la somma delle estensioni di queste parti è uguale all'estensione totale.

Queste nozioni di misura date da Peano e Jordan non erano ancora soddisfacenti perchè alcuni degli insiemi di rilevante interesse per l'analisi (come l'insieme dei razionali compresi in un intervallo) risultavano ancora non misurabili e perchè queste misure erano soltanto finitamente additive. Un contributo importante alla teoria della misura venne dato da Émile Borel che, tra l'altro, introdusse per la prima volta il concetto di insieme di misura nulla. La sua teoria della misura si distaccava nettamente dalle nozioni fino ad allora adottate e partiva dal considerare sottoinsiemi A dell'intervallo $[0, 1]$, se A è unione numerabile di intervalli disgiunti la cui lunghezza complessiva è s, allora questa è anche la misura di A. In generale la misura dell'unione di una famiglia numerabile di insiemi disgiunti sarà la somma delle singole misure. Infine, se $A' \subset A$ la misura di $A \setminus A'$ sarà la differenza delle misure. In questo modo ogni insieme aperto limitato è misurabile così come tutti quelli ottenuti attraverso un'infinità numerabile di operazioni di unione, intersezione e differenze di insiemi.

È in questo contesto che si inserì il lavoro di Henri Lebesgue. Un periodo tumultuoso per la matematica, ma ricco di innovazioni, tra le quali si può sicuramente collocare la teoria dell'integrazione di Lebesgue.

Henri Lebesgue (1875-1941) si formò accademicamente all'École Normale Supérieure e inizialmente si dedicò allo studio delle superfici non rigate, ma il suo lavoro più importante fu indubbiamente la sua tesi di dottorato: «*Intégrale, longueur, aire.*» (1902), nella quale introduceva per la prima volta l'integrale che tuttora porta il suo nome. La teoria di Lebesgue si distaccava dalle nozioni comunemente accettate e per questo, come accadde, per esempio anche a Cantor, fu in un primo tempo duramente criticata e solo in seguito fu globalmente riconosciuta la validitá delle sue idee. Nonostante questo successo non continuò le sue ricerca nel campo da lui appena inaugurato, sebbene il suo integrale rappresentasse una notevole generalizzazione rispetto a quello di Riemann, poichè temeva che la matematica ridotta a teorie generali si sarebbe svuotata del suo contenuto.

Ispirandosi ai lavori di Borel e Jordan, Lebesgue proponeva di associare ad ogni insieme limitato un numero positivo o nullo, che rispettasse le seguenti proprietà: esistono insiemi di misura non nulla, insiemi uguali hanno misura uguale e la misura dell'unione di due insiemi disgiunti è la somma delle misure. Per ogni insieme A, quindi, considerava una misura interna definita come l'estremo superiore della misura degli insiemi chiusi contenuti in A e una misura esterna definita dall'estremo inferiore della misura degli aperti contenenti A, il quale risulta misurabile se queste due coincidono. Nel caso di funzioni limitate definite su un intorno, questa idea di misura definisce direttamente quella di integrale.

Lebesgue, che era un matematico che prediligeva lo studio di funzioni di carattere patologico, si accorse di come la definizione di integrale data da Riemann valesse solo in casi eccezionali, poichè era data solo per funzioni che presentano pochi punti di discontinuità, il che assicurava la convergenza delle somme inferiori e superiori. La vera innovazione di Lebesgue fu di suddividere l'insieme dei valori della funzione in intervalli, associare ad ognuno di questi un valore medio η_i e poi trovare la misura dell'insieme A_i degli x appartenenti al dominio per i quali $f(x)$ è vicino a η_i, quindi si ritrova una somma del tipo $S_n = \sum \eta_i \mu(A_i)$, facedono poi tendere a zero gli intervalli di suddivisione dei valori di f.

Al fine di dare un'idea intuitiva del suo integrale ed evidenziare la differenza concettuale con quelle di Rieman, lo stesso autore scriveva: « *Devo pagare una certa somma; mi frugo tra le tasche e ne estraggo monete e biglietti di diverso valore. Li verso al mio creditore nell'ordine in cui mi si presentano fino a raggiungere il totale del mio debito. È l'integrale di Rie-*

mann. Ma posso operare anche altrimenti. Avendo tratto tutto il mio denaro dalla tasca, riunisco insieme biglietti e monete che hanno lo stesso valore ed effettuo il pagamento versando insieme pezzi dello stesso valore. È il mio integrale » ([1], Capitolo XIX, Paragrafo 4, pag. 372).

La definizione di integrale data da Lebesgue era, quindi, sostanzialmente diversa da tutte quelle date fino a quel momento ed, oltre ad essere facilmente estendibile a funzioni con dominio in $\mathbb{R}^n$, rendeva integrabili molte di quelle funzioni che con Riemann non lo erano (si prenda ad esempio la funzione di Dirichlet: non è integrabile secondo Riemann, mentre ha integrale uguale a 1 secondo Lebesgue), anzi Lebesgue stesso nella sua tesi affermava « *Non conosco funzioni che non siano integrabili e non so se ne esistano. Tutte le funzioni che si possono definire per mezzo delle operazioni aritmetiche e di passaggio al limite sono integrabili* » , solo Vitali darà in seguito l'esempio di un insieme non misurabile secondo la definizione del francese; inoltre sarà proprio la relativa facilità, dei passaggi al limite sotto il segno di integrale un'altro punto di forza della teoria di Lebesgue.

Tutto quanto accennato in questa breve introduzione, riguardo alla teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue, verrà sviluppato nel seguito della trattazione in modo più approfondito.

Capitolo 1

Misura esterna e Misura secondo Lebesgue

1.1 Premesse

Prima di procedere con la definizione di misura esterna e quanto segue, si preferisce richiamare alcune nozioni utili nel prosieguo della trattazione. Verranno considerate note le strutture di spazio topologico e di spazio metrico euclideo su $\mathbb{R}^n$, le definizioni di insieme aperto e di insieme chiuso e le loro caratterizzazioni, così come quelle di $\liminf$ e $\limsup$.

Definizione 1.1. Un sottoinsieme H di $\mathbb{R}^n$ si dice di tipo G_δ se

$$H = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k \ , \qquad \text{con } G_k \text{ aperto per ogni k} \ .$$

Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ si dice, invece, di tipo F_σ se

$$K = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} F_h \ , \qquad \text{con } F_h \text{ chiuso per ogni h} \ .$$

Segue direttamente dalla definizione che il complementare di un insieme di tipo G_δ è un insieme di tipo F_σ e viceversa.

Teorema 1.1. *Ogni insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, può essere scritto come unione numerabile di cubi, chiusi con interni a due a due disgiunti.*

Dimostrazione. Si consideri il reticolo di punti a coordinate intere contenuto in $\mathbb{R}^n$ e il relativo insieme K_0 di cubi con vertici sul reticolo e lati di lunghezza unitaria. Dividendo in due parti il lato di ogni cubo di K_0, otteniamo da ognuno di essi 2^n cubi di lato $\frac{1}{2}$, si chiami K_1 questo secondo insieme di cubi, formato da tutti i "sottocubi" degli elementi di K_0. Continuando la bisezione si ottiene un insieme sempre più fine. Al passo j-esimo i cubi avranno lato 2^{-j}.

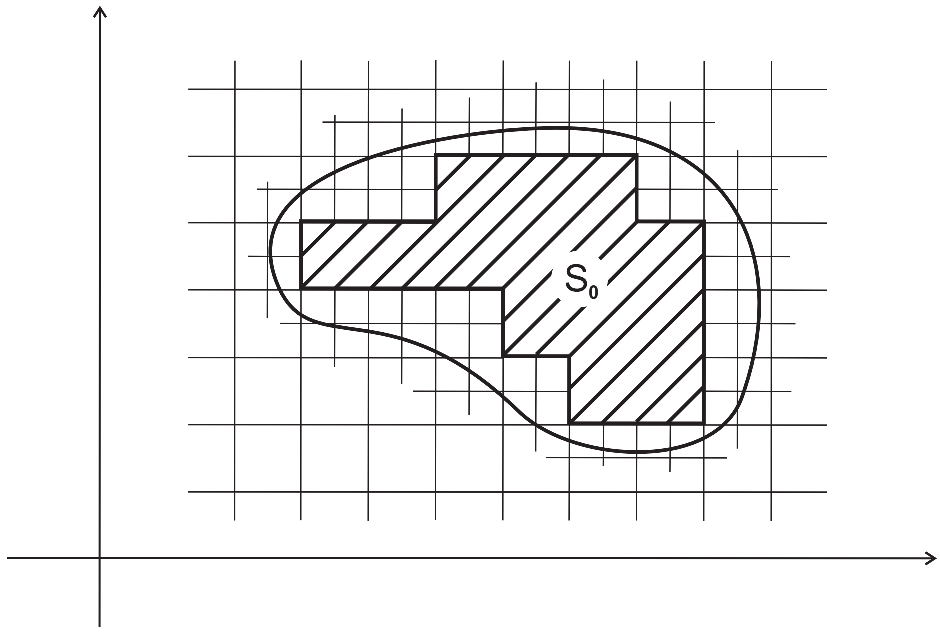

Figura 1.1: Esempio in $\mathbb{R}$ della scomposizione appena descritta

Sia ora G un generico aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia S_0 la collezione di cubi di K_0 interamente contenuti in G. Sia poi S_1 la famiglia di cubi di K_1 che giacciono completamente in G e che non sono "sottocubi" di un elemento di S_0. In modo del tutto analogo si denota S_j l'insieme dei cubi interamente contenuti in G e non contenuti in nessun cubo di $S_0, S_1, \ldots, S_{j-1}$. Si definisce poi

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \ ,$$

tale unione è numerabile, essendolo ogni K_j e tutti i cubi contenuti in esse hanno interno disgiunto, per costruzione.

Infine, i cubi in K_j, per come sono stati costruiti, hanno diametro infinitesimo quando $j \to \infty$, essendo poi G aperto, si ha che $\forall x \in G \ \exists h \in \mathbb{N}$ tale che x sia contenuto in un cubo di S_h. Segue direttamente da quest'ultima osservazione che $G = \bigcup Q$ con $Q \in S$. $\square$

1.2 Misura esterna secondo Lebesgue

La nozione di misura esterna servirà a definire quella di misura di un insieme, che è alla base di tutta la teoria dell'integrazione sviluppata in seguito, si vuole perciò sottolineare che, per quanto questi concetti possano sembrare semplici, rappresentano in realtà un risultato molto profondo.

Sia $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j \ , \ a_j, b_j \in \mathbb{R} \ , \ \forall j = 1, \dots, n\}$ un intervallo chiuso n-dimensionale e sia $v(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ il suo volume. Si pone anzitutto *misura esterna* di un generico insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$\sigma(S) = \sum_{I_k \in S} v(I_k)$$

con $S = \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ricoprimento di A, tale che $\forall k \in \mathbb{N}, \ I_k$ sia un intervallo chiuso.

Definizione 1.2. Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ la *misura esterna secondo Lebesgue* è definita

$$\mu^*(A) = \inf_S \sigma(S) \ ,$$

dove gli S rappresentano tutti i possibili ricoprimenti di A, composti da intervalli chiusi. Risulta immediato che $0 \leq \mu^*(A) \leq +\infty$.

Teorema 1.2 (*Proprietà della misura esterna*).
Per la misura esterna valgono le seguenti proprietà

(i) per ogni intervallo I, vale $\mu^*(I) = v(I)$.

(ii) se $A_1 \subseteq A_2$, *allora* $\mu^*(A_1) \le \mu^*(A_2)$. *(monotonia)*

(iii) se $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, *segue che* $\mu^*(A) \le \sum_k \mu^*(A_k)$. *(subadditività)*

Dimostrazione. Per la verifica di (i) si rimanda a [2], Capitolo 3, Paragrafo 1, Teorema 3.2, pag.33. La (ii) segue direttamente dal fatto che ogni ricoprimento di A_2 è anche un ricoprimento di A_1.
Si dimostra quindi la (iii):
Non è restrittivo supporre $\mu^*(A_k) \le +\infty$ $\forall k$. Sia quindi $\varepsilon > 0$ fissato, per ogni k sia $\{I_j^{(k)}\}$ una famiglia di intervalli tale che

$$A_k \subset \bigcup_j I_j^{(k)} \quad \text{e che} \quad \sum_j v(I_j^{(k)}) < \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \ .$$

Essendo poi $A \subset \bigcup_{j,k} I_j^{(k)}$, si ha che

$$\mu^*(A) \le \sum_k \sum_j v(I_j^{(k)}) \le \sum_k (\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \sum_k \mu^*(A_k)$$

□

Si osserva direttamente che la frontiera di un qualsiasi intervallo ha misura esterna nulla, ogni sottoinsieme di un insieme di misura esterna nulla ha misura esterna nulla, l'unione numerabile di insiemi di misura esterna nulla ha misura esterna nulla e ogni insieme costituito da un solo punto ha misura esterna nulla. Segue da quest'ultima che ogni insieme numerabile ha misura esterna nulla.

Teorema 1.3. *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(A) < +\infty$, *e sia* $\varepsilon > 0$. *Allora esiste un aperto* G *tale che* $A \subset G$ *e* $\mu^*(G) \le \mu^*(A) + \varepsilon$. *Ne segue che*

$$\mu^*(A) = \inf_{G \supset A} \mu^*(G) \ .$$

(cfr. per la dimostrazione [2], Capitolo 3, Paragrafo 1, Teorema 3.6, pag. 36)

Teorema 1.4. *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$, *esiste un insieme* H *di tipo* G_δ *tale che* $A \subset H$ *e che* $\mu^*(A) = \mu^*(H)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 1.3, per ogni intero positivo k, esiste un insieme aperto $G_k \supset A$ tale che $\mu^*(G_k) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{k}$. Sia quindi

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \ ,$$

segue che H è di tipo G_δ e $A \subset H$.

Inoltre, per ogni k, si ha $\mu^*(A) \leq \mu^*(H) \leq \mu^*(G_k) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{k}$, e quindi $\mu^*(A) = \mu^*(H)$. □

Il significato essenziale di questo Teorema è che ogni insieme di $\mathbb{R}^n$, per quanto esso possa essere complicato, è sempre contenuto in un insieme sostanzialmente più semplice, di tipo G_δ, con la stessa misura esterna.

Nel definire la misura esterna sono stati considerati ricoprimenti costituiti da intervalli con i lati paralleli agli assi, a questo punto ci si potrebbe chiedere tutto quello detto finora dipende dalla posizione degli assi ortogonali. Si può facilmente dimostrare ([2] , Capitolo 3, Paragrafo 1, Teorema 3.10, pag. 36) che la misura esterna definita in precedenza è invariante per le rotazioni e che quindi tutto ciò che è stato dimostrato è assolutamente generale, nel senso che quanto visto riguardo alla misura non dipende dall'orientamento degli assi cartesiani.

1.3 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

Definizione 1.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, A si dice *misurabile secondo Lebesgue*, se, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un aperto $G \subset \mathbb{R}^n$ tale che $A \subset G$ e che $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. Se A è misurabile la sua misura esterna è chiamata, per definizione, *misura secondo Lebesgue*, o più semplicemente *misura*, e si denota con $\mu(A)$.
L'insieme degli insiemi misurabili secondo Lebesgue si denota $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Segue direttamente dalla Definizione che ogni insieme aperto è misurabile, così come che ogni insieme di misura esterna nulla è misurabile.

Teorema 1.5. *L'unione $A = \bigcup A_k$ numerabile di insiemi misurabili è anch'essa misurabile e vale $\mu(A) \leq \sum_k \mu(A_k)$ (subadditività).*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, per ogni $k = 1, 2, \ldots$ esiste un insieme aperto G_k, tale che $A_k \subset G_k$ e $\mu^*(G_k \setminus E_k) < \varepsilon 2^{-k}$. Allora $G = \bigcup_k G_k$ è aperto e contiene A. Si ha poi che $G \setminus A \subset \bigcup_k (G_k \setminus A_k)$, da cui segue, per la subadditività della misura esterna, che

$$\mu^*(G \setminus A) \leq \mu^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (G_k \setminus A_k)) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(G_k \setminus A_k) < \varepsilon \ .$$

Questo prova che A è misurabile e di conseguenza è anche verificata la disuguaglianza dell'enunciato. □

Corollario 1.6. *Ogni intervallo I è misurabile e $\mu(I) = v(I)$.*

Dimostrazione. I è l'unione del suo interno e della sua frontiera, che sono entrambi misurabili perchè il primo è aperto e il secondo ha misura esterna nulla. La seconda parte segue direttamente dalla prioprietà (i) della misura esterna. □

Teorema 1.7 (*Caratterizzazione di Carathéodory*).
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, A è misurabile se e solo se per ogni insieme $C \subset \mathbb{R}^n$, si ha

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A) \ .$$

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Si supponga A misurabile, fissato $C \subset \mathbb{R}^n$, sia H un insieme di tipo G_δ tale che $A \subset H$ e $\mu^*(A) = \mu(H)$. Allora $H = (H \cap A) \cup (H \setminus A)$, essendo poi $H \cap A$ e $H \setminus A$ misurabili e disgiunti, $\mu(H) = \mu(H \cap A) + \mu(H \setminus A)$. Perciò $\mu^*(C) = \mu(H \cap A) + \mu(H \setminus A) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \setminus A)$, ed essendo la disuguaglianza opposta sempre vera, vale l'uguglianza.
($\Longleftarrow$) Supponiamo ora che A soddisfi l'uguaglianza per ogni C. Si consideri il caso in cui $\mu^*(A) < +\infty$, sia poi H un insieme di tipo G_δ tale che $A \subset H$ e $\mu(H) = \mu^*(A)$. Allora $H = A \cup (H \setminus A)$ e, per le ipotesi,

$$\mu(H) = \mu^*(A) + \mu^*(H \setminus A) \Longrightarrow \mu^*(H \setminus A) = 0$$

quindi $H \setminus A$ è misurabile e di conseguenza lo è anche A.
Nel caso in cui, invece, $\mu^*(A) = +\infty$, sia B_k il disco di centro 0 e raggio k

($\in \mathbb{N}$) e sia $A_k = A \cap B_k$. Ogni A_k ha misura esterna finita e $A = \bigcup A_k$. Sia poi H_k un insieme di tipo G_δ contenente A_k tale che $\mu(H_k) = \mu^*(A_k)$, allora per ipotesi

$$\mu(H_k) = \mu^*(H_k \cap A) + \mu^*(H_k \setminus A) \geq \mu^*(A_k) + \mu^*(H_k \setminus A) \ .$$

Da quest'ultima relazione segue subito che $\mu(H_k \setminus A) = 0$.
Sia, infine, $H = \bigcup H_k$, H è misurabile, $A \subset H$ e $H \setminus A = \bigcup (H_k \setminus A)$,in particolare $H \setminus A$ ha misura nulla. Dal fatto che $A = H \setminus (H \setminus A)$ segue che A è misurabile. □

Corollario 1.8. *Il complementare di un insieme misurabile è misurabile.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dalla caratterizzazione di Carathéodory, dopo aver osservato che $C \setminus A = C \cap A'$. □

Corollario 1.9. *Ogni insieme chiuso è misurabile.*

Dimostrazione. Un insieme chiuso è sempre complementare di un aperto. □

Teorema 1.10. *Siano $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, allora si ha:*

(i) *$A \cap B$ e $A \setminus B$ sono misurabili.*

(ii) *Se $A \cap B = \emptyset$, allora $\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

(iii) *Se $B \subseteq A$, allora $\mu(A) = \mu(B) + \mu(B \setminus A)$ (che equivale a $\mu(B \setminus A) = \mu(A) - \mu(B) \Longleftrightarrow A$ e B hanno misura finita).*

Dimostrazione. (i) $A \cap B$ è misurabile se e solo se lo è il suo complementare, $(A \cap B)' = A' \cup B'$, ma A' e B' sono misurabili, allora lo è anche $(A \cap B)'$ e di conseguenza anche $A \cap B$.
Si ha poi $A \setminus B = A \cap B'$ e quindi questo caso si riconduce al precedente.
(ii) Se A è misurabile per la caratterizzazione di Carathéodory si ha

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A') \qquad \forall E \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Consideriamo quindi $E = A \cup B$, si ha

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A') = \mu^*(A) + \mu^*(B) \ .$$

Essendo poi A,B e $A \cup B$ misurabili, segue $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
(iii) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ e $A = B \cup (A \setminus B)$, allora per la (ii)

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$$

. □

Teorema 1.11 (*Completa additività della misura di Lebesgue*).
Sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, una successione di insiemi a due a due disgiunti e misurabili, vale*

(i) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$.

Dimostrazione. Si pongano

$$C_p := \bigcup_{k=1}^{p} A_k \quad e \quad C := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ ,$$

per quanto visto in precedenza C_p è misurabile, esiste quindi $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap C_p) + \mu^*(E \cap C'_p) \ .$$

Sia ora $A_p \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, allora vale

$$\mu^*(E \cap C_p) = \mu^*((E \cap C_p) \cap A_p) + \mu^*((E \cap C_p) \cap A'_p) \ .$$

Da cui segue immediatamente

$$\begin{aligned}\mu^*(E) =& \mu^*((E \cap C_p) \cap A_p) + \mu^*((E \cap C_p) \cap A'_p) + \mu^*(E \cap C'_p) \\ =& \mu^*(E \cap A_p) + \mu^*(E \cap C_{p-1}) + \mu^*(E \cap C'_p) = \text{(iterando il procedimento)} \\ =& \mu^*(E \cap A_p) + \mu^*(E \cap A_{p-1}) + \mu^*(E \cap C_{p-2}) + \mu^*(E \cap C'_p) \\ =& \ldots = \mu^*(E \cap A_p) + \ldots + \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap C'_p) \\ =& \sum_{k=1}^{p} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap C'_p) \geq \sum_{k=1}^{p} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap C')\end{aligned}$$

Ora, per $p \longrightarrow +\infty$, si ha

$$\begin{aligned}\mu^*(E) \geq & \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap C') \\ \geq & \text{(per la subadditività) } \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C') \\ \geq & \text{(sempre per la subadditività) } \mu^*(E)\end{aligned}$$

Allora C è misurabile.

Consideriamo ora l'uguaglianza

$$\mu^*(E) = \sum_{k=1}^{p} \mu^*(E \cap A_p) + \mu^*(E \cap C')$$

e si prenda $E = C$, allora

$$\mu^*(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(C \cap A_p) + \mu^*(C \cap C') = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_p)$$

essendo poi tutti gli A_k misurabili, $\mu(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. □

Corollario 1.12. *Sia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili, allora*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad e \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

sono misurabili.

Dimostrazione. Si ponga $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $\ldots$, $B_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j$. Sicuramente i B_k sono misurabili $\forall k \in \mathbb{N}$, inoltre $B_k \cap B_j = \emptyset \ \forall k \neq j$ e $\bigcup B_k = \bigcup A_k$, di conseguenza $\bigcup A_k$ è misurabile.

Ora $\bigcap A_k \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\left(\bigcup A_k\right)' \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, che equivale a $\bigcup A'_k \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Gli A_k sono misurabili, quindi anche i loro complementari lo sono e, per quanto dimostrato nella prima parte anche la loro unione lo è e quindi anche $\bigcap A_k$. □

Definizione 1.4 (*Successioni monotone di insiemi*).

Sia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi tale che $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Si dice che è monotona crescente se $A_k \subseteq A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ e si pone

$$\lim_{k \to \infty} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \ .$$

Si dice invece monotona decrescente se $A_k \supseteq A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ e si pone

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \ .$$

Teorema 1.13. *Sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione monotona crescente di insiemi misurabili, allora*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\lim_{k\to\infty} A_k) \ .$$

Dimostrazione. Per ipotesi si ha $A_k \subseteq A_{k+1} \implies \mu(A_k) \leq \mu(A_{k+1})$, allora $(\mu(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona crescente.
Si ponga quindi $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $\dots$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, si ha che tutti i B_k sono misurabili, a due a due disgiunti e $\bigcup B_k = \bigcup A_k$. Si supponga, per il momento, che gli A_k abbiano misura finita, allora

$$\begin{aligned}
\mu(\lim_{k\to\infty} A_k) &= \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \ldots + \mu(A_n \setminus A_{n-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ .
\end{aligned}$$

Si consideri ora il caso in cui $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_p) = +\infty$, allora $\mu(A_k) = +\infty, \forall k \geq p$ percui $\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = +\infty$. Inoltre $A_p \subseteq \bigcup A_k$ e quindi $\mu(\bigcup A_k) = +\infty$ e di conseguenza $\mu\big(\lim_{k\to+\infty} A_k\big) = +\infty$.
Da queste osservazioni segue direttamente che

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu\big(\lim_{k\to+\infty} A_k\big) \ .$$

□

Teorema 1.14. *Sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione monotona decrescente di insiemi misurabili tale che $\mu(A_k) < +\infty \ \ \forall k$, allora*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\lim_{k\to\infty} A_k) \ .$$

Dimostrazione. Si ponga

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

e si consideri la successione $(A_1 \setminus A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Tale successione è monotona crescente di insiemi misurabili, quindi per il teorema precedente vale

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu\big(\lim_{k\to+\infty} A_1 \setminus A_k\big) \Longleftrightarrow \text{(avendo tutti gli } A_k \text{ misura finita)}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \setminus A_k\big) = \mu\big(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_1) - \mu(A)$$

Da questa serie di uguaglianze segue direttamente che

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A) := \mu\big(\lim_{k\to+\infty} A_k\big)$$

□

Teorema 1.15. *Ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile può essere scritto come $A = H \setminus M$, con H insieme di tipo G_δ e $\mu(M) = 0$.*

Alla dimostrazione si antepone la seguente Proposizione.

Proposizione 1.16. *Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$. Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \Omega$ aperto tale, che $A \subseteq \Omega$ e $\mu(\Omega \setminus A) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Questa proposizione deriva direttamente dalla definizione della misurabilità secondo Lebesgue e dal fatto che se un insieme è misurabile allora misura esterna e misura coincidono. □

Dimostrazione del Teorema 1.15. Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato a piacere, per la Proposizione precedente esiste un aperto $\Omega_k \supseteq A$, tale che $\mu(\Omega_k \setminus A) < \frac{1}{k}$. Si ponga poi

$$H = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \quad \text{e} \quad M = H \setminus A \ .$$

Risulta evidente che $A = H \setminus M$ e che H è di tipo G_δ. Si ha infine che M è di misura nulla in quanto

$$\mu(M) = \mu(H \setminus A) \leq \mu(\Omega_k \setminus A) < \frac{1}{k} \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

□

1.4 Insieme non misurabile

Per la sua generalità la teoria della misura di Lebesgue può indurre a pensare che racchiuda in sé ogni insieme. Sebbene la classe degli insiemi misurabili sia assai vasta, essa non contiene tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. La dimostrazione di questo fatto si deve a Vitali e si darà ora una dimostrazione nel caso reale monodimensionale.

Prima di procedere con il Teorema di Vitali si enuncia il seguente Lemma.

Lemma 1.17. *Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$ con $\mu(A) > 0$. L'insieme $\{d \mid d = x - y,\ x, y \in A\}$ contiene un intervallo con centro nell'origine.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste un aperto G tale che $A \subset G$ e che $\mu(G) < (1+\varepsilon)\mu(A)$. Per il Teorema 1.1, G può essere scritto come unione di intervalli disgiunti, $G = \bigcup I_k$. Sia poi $A_k = A \cap I_k$, è immediato che $\bigcup A_k = A$, che gli A_k sono misurabili e che a due a due hanno al più un punto in comune.
Per quando detto segue che $\mu(G) = \sum I_k$ e $\mu(A) = \sum A_k$, ma si ricorda la disuguaglianza $\mu(G) < (1+\varepsilon)\mu(A)$, di conseguenza esiste k_0 tale che $\mu(I_{k_0}) < (1+\varepsilon)\mu(A_{k_0})$.
Si fissi ora $\varepsilon = \frac{1}{3}$, si ha $A_{k_0} \subset I_{k_0}$ e $\mu(A_{k_0}) > \frac{3}{4}\mu(I_{k_0})$. Si ipotizzi che, traslando A_{k_0} di un numero d tale che $|d| < \frac{1}{2}\mu(I_{k_0})$, il traslato $A^d_{k_0}$ abbia punti in comune con A_{k_0}. D'altro canto, poichè $A_{k_0} \cup A^d_{k_0}$ è contenuto in un intervallo di lunghezza $\mu(I_{k_0}) + |d|$, si dovrebbe avere che $\mu(A_{k_0}) + \mu(A^d_{k_0}) \leq \mu(I_{k_0}) + |d|$ oppure equivalentemente $2\mu(A_{k_0}) \leq \mu(I_{k_0}) + |d|$. L'ultima disuguaglianza è però falsa per $|d| < \frac{1}{2}\mu(I_{k_0})$ (in quanto $\mu(A_{k_0}) > \frac{3}{4}\mu(I_{k_0})$), questo prova che A_{k_0} e $A^d_{k_0}$ non possono essere disgiunti. Infatti, per come è stato definito $A^d_{k_0}$, $A_{k_0} \cap A^d_{k_0} = \{\ x = y + d \mid x, y \in A_{k_0}\} = \{d \mid d = x - y\ x, y \in A_{k_0}\}$, questo è un intervallo contenente l'origine, di conseguenza il Lemma risulta provato.

□

Teorema 1.18 (*di Vitali*).
Esistono insiemi non misurabili.

Dimostrazione. Sia su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} \ .$$

Le classi di equivalenza hanno, quindi, la forma $A_x = \{x + r \mid r \in \mathbb{Q}\}$; due classi A_x e A_y o sono la stessa oppure sono disgiunte. Di conseguenza una classe di equivalenza è l'insieme dei razionali, mentre le altre sono classi disgiunte di elementi di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Nonostante ogni classe di equivalenza sia numerabile, il loro numero non lo è e la loro unione consiste in tutta la retta reale. Grazie all'assioma della scelta di Zermelo si può considerare l'insieme A costituito dall'unione di esattamente un elemento di ognuna delle classi di equivalenza.
Per come è stato costruito A ogni suo elemento differisce da ogni altro di un numero irrazionale, quindi l'insieme $\{d \mid d = x - y \ , \ x \in A, \ y \in A \ \}$ non può contenere un intervallo. Ma, per il Lemma 1.17, segue immediatamente che o A è non misurabile oppure $\mu(A) = 0$.
Essendo poi l'unione di tutti gli $A + q$, con $q \in \mathbb{Q}$ tutto $\mathbb{R}$, risulterebbe $\mu(\mathbb{R}) = 0$ nel caso in cui la misura di A fosse nulla. Risulta quindi che A è non misurabile. □

Capitolo 2

Funzioni misurabili secondo Lebesgue

Definizione 2.1. Sia f una funzione a valori reali estesi definita su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, misurabile, tale che $-\infty \leq f(x) \leq +\infty \quad \forall x \in A$. Si dirà che f è *misurabile secondo Lebesgue*, o semplicemente *misurabile*, su A se per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$[1] l'insieme $\{x \in A \mid f(x) > c\} \ \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 2.1. Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con A misurabile e f contininua. Allora segue direttamente che f è misurabile, infatti

$$\{x \in A \mid f(x) > c\} = f^{-1}(\ ]c, +\infty]\ ) = f^{-1}(\ ]c, +\infty[\ ) = A \cap \Omega\ ,$$

con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, quest'ultimo è poi misurabile perchè intersezione di misurabili.

Al variare di $c \in \mathbb{R}$, il comportamento degli insiemi $\{f > c\}$ [2] descrive la distribuzione dei valori di f, intuitivamente più una funzione è regolare meno la famiglia costituita dagli insiemi di questo tipo sarà varia.

Proposizione 2.1. *Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, con $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

[1] Ricordando che la scrittura $\overline{\mathbb{R}}$ indica l'insieme $\mathbb{R}^n \cup \{-\infty, +\infty\}$

[2] D'ora in poi si abbrevierà in questo modo l'insieme $\{x \in A \mid f(x) > c\}$

(i) $\{f > c\}$ *è misurabile*

(ii) $\{f \geq c\}$ *è misurabile*

(iii) $\{f < c\}$ *è misurabile*

(iv) $\{f \leq c\}$ *è misurabile*

Dimostrazione. $(i) \iff (iv)$ e $(ii) \iff (iii)$ derivano dal fatto che un insieme è misurabile se e solo se lo è il suo complementare.

Si consideri ora l'implicazione $(i) \Longrightarrow (ii)$ e sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$:

- se $c = -\infty$ allora $\{f \geq c\} = A$ che è misurabile per ipotesi;

- se $c = +\infty$, segue che

$$\{f \geq +\infty\} = \{f = +\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f > k\}$$

  che è intersezione di insiemi misurabili, quindi è misurabile;

- se, infine, $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\{f \geq c\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f > c - \frac{1}{k}\}$$

  che è intersezione di insiemi misurabili, per la validità della (i).

La dimostrazione dell'implicazione $(ii) \Longrightarrow (iv)$ è analoga a quella appena mostrata. □

Teorema 2.2. *Una funzione f è misurabile se e solo se per ogni aperto $G \in \mathbb{R}$, la retroimmagine $f^{-1}(G)$ è misurabile in $\mathbb{R}^n$.*

[La dimostrazione segue direttamente dalla definizione di retroimmagine e dalla struttura degli aperti in $\mathbb{R}$, ad ogni modo per una dimostrazione dettagliata si rimanda a [2], Capitolo 4, Paragrafo 1, Teorema 4.3, pag. 51]

Definizione 2.2. Una proposizione si dice vera *quasi dappertutto* in A, se l'insieme in cui non vale ha misura nulla.

Esempio 2.2. Siano $f, g : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = g(x)$ quasi dappertutto $\Longleftrightarrow$ $\{x \in A | f(x) \neq g(x)\}$ ha misura nulla.

Teorema 2.3. *Sia f una funzione misurabile e $g = f$ quasi dappertutto, segue che g è misurabile e che $\mu(\{g > c\}) = \mu(\{f > c\})$, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Dimostrazione. Sia $Z = \{f \neq g\}$, allora $\{g > c\} \cup Z = \{f > c\} \cup Z$. Essendo poi f misurabile e Z di misura nulla, l'insieme $\{g > c\} \cup Z$ risulta misurabile e di conseguenza anche $\{g > c\}$, poichè differisce dal precedente per un insieme di misura nulla. In conclusione

$$\mu(\{g > c\}) = \mu(\{g > c\} \cup Z) = \mu(\{f > c\} \cup Z) = \mu(\{f > c\}) \ .$$

□

Alla luce di quest'ultimo teorema risulta naturale estendere la definizione di misurabilità anche a funzioni definite quasi dappertutto su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$, semplicemente dicendo che f è misurabile su A se lo è sul sottoinsieme sui cui è definita.

Teorema 2.4. *Sia ϕ una funzione continua su $\mathbb{R}$ e sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione finita quasi dappertutto. Allora $\phi(f)$ è misurabile se lo è f.*

[cfr. per la dimostrazione [2], Capitolo 4, Paragrafo 1, Teorema 4.6, pag. 52]

Teorema 2.5. *Siano f e g due funzioni misurabili, allora l'insieme $\{f > g\}$ è misurabile.*

Dimostrazione. Sia $\{r_k\}$ una famiglia di numeri razionali, si può sempre scrivere:

$$\{f > g\} = \bigcup_k \{f > r_k > g\} = \bigcup_k \left(\{f > r_k\} \cap \{g < r_k\}\right) \ ,$$

essendo poi f e g misurabili l'ultimo termine dell'uguaglianza è anch'esso misurabile. □

Teorema 2.6. *Siano f e g due funzioni misurabili, allora:*

(i) $f + \lambda$ *e* λf *sono misurabili per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

(ii) $f + g$ *è misurabile.*

(iii) fg *è misurabile.*

(iv) se $g \neq 0$ *quasi dappertutto,* $\frac{f}{g}$ *è misurabile*

Dimostrazione. La (i) risulta ovvia e prima di procedere con la dimostrazione delle affermazioni successive esplicitiamo alcune convenzioni usate sia in questa dimostrazione che nel resto della trattazione:

- $\pm\infty + l = \pm\infty \quad \forall l \in \mathbb{R}$, in particolare $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$;

- $+\infty + (-\infty) = +\infty - \infty = 0$;

- $\pm\infty \cdot l = \pm\infty \quad \forall l \in]0, +\infty]$ e $\pm\infty \cdot l = \mp\infty \quad \forall l \in [-\infty, 0[$;

- $\pm\infty \cdot 0 = 0$;

- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$ e di conseguenza $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = +\infty \cdot \frac{1}{\pm\infty} = +\infty \cdot 0 = 0$.

(ii) Essendo g una funzione misurabile, anche $c-g$ lo è $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}$, di coseguenza, poichè $\{f + g > c\} = \{f < c - g\}$ l'affermazione segue direttamente dal Teorema 2.5.
(iii) Grazie al Teorema 2.4 e alla scrittura $fg = [(f + g)^2 - (f - g)^2]/4$, la misurabilità di f e di g implica quella di fg.
La (iv) deriva direttamente dalla (iii) una volta provato che se g è misurabile anche $\frac{1}{g}$ lo è, ma questo si vede semplicemente dalla definizione, infatti $\{\frac{1}{g} > c\} = \{g < \frac{1}{c}\}$ se $g(x) > 0$, mentre $\{\frac{1}{g} > c\} = \{g > \frac{1}{c}\}$ se $g(x) < 0$, in ogni caso gli insiemi sono misurabili poichè g è misurabile per ipotesi. □

Teorema 2.7. *Sia* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni, con* $f_k : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *misurabili* $\forall k \in \mathbb{N}$*, allora sono misurabili anche*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \qquad e \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)\ .$$

Dimostrazione. Si osserva anzitutto che $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) = -\sup_{k\in\mathbb{N}}(-f_k(x))$, è quindi sufficiente provare il teorema per il $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$. Sia ora $c \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha

$$\begin{aligned}\left\{\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \leq c\right\} &= \left\{x \in A \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \leq c\right\} = \{x \in A \mid f_k(x) \leq c \ \forall k \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \leq c\} \ ,\end{aligned}$$

ma intersezione di insiemi misurabili è misurabile, quindi $\left\{\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \leq c\right\}$ è misurabile. □

Teorema 2.8. *Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, una successione di funzioni misurabili, allora sono misurabili anche:*

$$\limsup_{k\to+\infty} f_k \qquad e \qquad \liminf_{k\to+\infty} f_k$$

Dimostrazione. Il teorema segue direttamente da quello precedente osservando che

$$\limsup_{k\to+\infty} f_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} f_k\right)$$

$$\liminf_{k\to+\infty} f_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} f_k\right)$$

□

In particolare, se il limite $\lim_{k\to\infty} f$ esiste quasi dappertutto, allora é misurabile.

Proposizione 2.9. *Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, con $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e A_1,A_2 misurabili, allora f è misurabile su A se e solo se lo è sia su A_1 che su A_2.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) $\{x \in A_i \mid f(x) \leq c\} = A_i \cap \{x \in A \mid f(x) \leq c\}$ che è misurabile per ogni $i = 1, 2$.
($\Longleftarrow$) $\{x \in A \mid f(x) \leq c\} = \{x \in A_1 \mid f(x) \leq c\} \cup \{x \in A_2 \mid f(x) \leq c\}$ che è unione di misurabili quindi misurabile. □

Proposizione 2.10. *Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, A misurabile con $\mu(A) = 0$ allora f è misurabile.*

Dimostrazione. Per definizione $\{f \leq c\} \subseteq A$, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}$, di conseguenza si ha $\mu(\{f \leq c\}) = 0$, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}$ e quindi $\{f \leq c\}$ è misurabile per ogni c. $\square$

Prima di procedere con la definizione di integrale data da Lebesgue consideriamo alcune definizioni e proposizioni che potrebbero essere utili anche nel capitolo successivo.

Definizione 2.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si chiama *funzione caratteristica* dell'insieme A la funzione $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Proposizione 2.11. *La funzione caratteristica χ_A è misurabile se e solo se A è misurabile*

Dimostrazione. χ_a è misurabile $\Longleftrightarrow$ $\{\chi_A \leq c\} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n\}$, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Ora

$$\{\chi_A(x) \leq c\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{se } c \geq 1 \\ \mathbb{R}^n \setminus A & \text{se } 0 \leq c < 1 \\ \emptyset & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n \setminus A$ è misurabile se e solo se A è misurabile, mentre gli insiemi degli altri due casi sono misurabili per definizione. $\square$

Definizione 2.4 (*Funzione semplice*)**.**
Si dice *funzione semplice* un'applicazione che assume solo un numero finito di valori distinti e questi valori sono anch'essi finiti.
Sia f una funzione semplice che assume i valori $a_1, \ldots, a_n$ rispettivamente sugli insiemi disgiunti $A_1, \ldots, A_n$, allora si può scrivere

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x) \ .$$

Teorema 2.12. *Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) Ogni funzione f può essere scritta come limite di una successione $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici.

(ii) *Se f è non negativa allora esiste una successione monotona crescente $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici tale che $f_k \longrightarrow f$.*

(iii) *In entrambi i casi precedenti se f è misurabile allora anche le f_k possono essere scelte misurabili.*

[per la dimostrazione si rimanda a [2], Capitolo 4, Paragrafo 1, Teorema 4.13, pag. 54]

Capitolo 3

Integrale secondo Lebesgue

3.1 Definizione di Integrale per funzioni non negative

Ci sono diversi modi equivalenti per definire l'integrale di Lebesgue, quello che si illustrerà in questo paragrafo rispecchia il metodo adottato da R.L. Wheeden e si discosta da quello più classico in cui si utilizza il limite comune delle somme inferiori e superiori.

Tale definizione si basa sull'osservazione che l'integrale di una funzione non negativa dovrebbe rappresentare il "volume" della regione sottostante il grafico di tale funzione.

Sia quindi $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una funzione *non negativa*, cioè tale che per ogni $x \in A$ $0 \leq f(x) \leq +\infty$. Siano quindi

$$\Gamma(f, A) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A,\ f(x) < +\infty\}\ ,$$

$$R(f, A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A\ ,\ 0 \leq y \leq f(x) \text{ se } f(x) < +\infty$$
$$\text{e } 0 \leq y < +\infty \text{ se } f(x) = +\infty\}\ .$$

Se $R(f, A)$ è misurabile come insieme di $\mathbb{R}^n$, la sua misura, $\mu(R(f, A))$, é detta l'*integrale di Lebesgue di f su A* e si scriverà

$$\mu(R(f, A)) = \int_A f(x)dx\ .$$

Le seguenti notazioni sono tutte equivalenti:

$$\int_A f(x)dx = \underbrace{\int \dots \int}_{n \text{ volte}} f(x_1, \dots, x_2)dx_1 \dots dx_2 = \int_A f \; d\mu \;,$$

nel caso in cui si integri su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ la notazione sarà equivalentemente:

$$\int \int_A f(x,y)dxdy = \int_A f(x,y)dxdy \;.$$

Teorema 3.1. *Sia f una funzione non negativa definita su un insieme misurabile A. $\int_A f d\mu$ esiste se solo se f è misurabile.*

Si mostrerà per il momento che se f è misurabile allora l'integrale esiste, rimandando la prova dell'implicazione inversa all'ultima parte di questo capitolo (Teorema 3.18). Tuttavia, prima di procedere con la dimostrazione, è necessario enunciare alcuni lemmi.

Lemma 3.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sia poi $0 \leq a \leq +\infty$, si definisce $A_a = \{(x,y) \mid x \in A,\ 0 \leq y \leq a\}$ nel caso in cui a sia finito e $A_\infty = \{(x,y) \mid x \in A,\ 0 \leq y < +\infty\}$ altrimenti. Se A è misurabile, come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, allora A_a è misurabile, come sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\mu_{n+1}(A_a) = a\mu_n(A)$*[1].

Dimostrazione. Si assuma inizialmente che a sia finito, se $\mu(A) = 0$ o se A é un intervallo aperto, sia aperto che chiuso o chiuso, il lemma é ovvio. Se, invece, A é un insieme aperto, per il Teorema 1.1, può sempre essere scritto come unione disgiunta di intervalli sia aperti che chiusi, sia quindi $A = \bigcup I_k$. Di conseguenza anche A_a si potrà scrivere nello stesso modo: $A_a = \bigcup I_{k,a}$, con $I_{k,a}$ misurabili e disgiunti, segue che A_a è misurabile e che $\mu(A_a) = \sum \mu(I_{k,a}) = \sum a\mu(I_k) = a\mu(A)$.

Se A è un insieme di tipo G_δ, $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} G_k$, con $\mu(G_1) < +\infty$. Si può considerare che $G_k \searrow A$ riscrivendo l'intersenzione: $A = G_1 \cap (G_1 \cap G_2) \cap (G_1 \cap G_2 \cap G_3) \cap \dots$, quindi per il Teorema 1.14, $\mu(G_k) \longrightarrow \mu(A)$

[1] μ_{n+1} indica la misura in $\mathbb{R}^{n+1}$ e μ_n quella in $\mathbb{R}^n$

per $k \longrightarrow +\infty$. Per quanto provato nel caso precedente $G_{k,a}$ risulta quindi misurabile, $\mu(G_{k,a}) = a\mu(G_k)$ e $G_{k,a} \searrow A_a$. Di conseguenza A_a è misurabile e si ha

$$\mu(A_a) = \lim_{k\to+\infty} \mu(G_{k,a}) = a \lim_{k\to+\infty} \mu(G_k) = a\mu(A) \ .$$

Se ora A è un generico insieme misurabile con $\mu(A) < +\infty$, per il Teorema 1.15 si può scrivere $A = H \setminus M$, con $\mu(M) = 0$ e H di tipo G_δ, $H = \bigcap_{k=1}^{+\infty} G_k$, $\mu(G_1) < +\infty$; perciò $A_a = H_a \setminus M_a$,per quanto detto finora A_a è quindi misurabile e vale $\mu(A_a) = \mu(H_a) = a\mu(H) = a\mu(A)$.
Se $\mu(A) = +\infty$ il lemma segue dal fatto che si può scrivere A come unione numerabile di insiemi disgiunti e misurabili, con misura finita.

Se, infine, $a = +\infty$, é possibile scegliere una successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ che tenda a $+\infty$, allora il lemma segue dal fatto che $A_{a_k} \nearrow A_\infty$. □

Lemma 3.3. *Sia f una funzione non negativa definita su A, allora* $\Gamma(f, A)$ *ha misura nulla.*

Dimostrazione. Siano $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e $k = 0, 1, \dots$, sia poi $A_k = \{k\varepsilon \le f < (k + 1)\varepsilon\}$. Gli insiemi A_k sono disgiunti e misurabili e la loro unione da il sottoinsieme di A in cui f è finita, quindi $\Gamma(f, A) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(f, A_k)$.

Si osserva che, per il lemma precedente, $\mu^*(\Gamma(f, A)) \le \varepsilon\mu(A)$, da cui segue

$$\mu^*(\Gamma(f, A)) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(\Gamma(f, A)) \le \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \le \varepsilon\mu(A) \ .$$

Se $\mu(A) < +\infty$ da quest'ultima disuguaglianza segue direttamente il lemma. Se, invece, $\mu(A) = +\infty$ allora è possibile scrivere A come unione disgiunta di insiemi di misura finita per i quali vale quanto appena detto e di conseguenza il lemma è provato anche per insiemi di misura infinita. □

Dimostrazione della prima parte del Teorema 3.1. Sia f *non negativa* e misurabile in A, per il Teorema 2.12 esiste una successione di funzioni semplici $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che f_k è misurabile $\forall k \in \mathbb{N}$ e $f_k \nearrow f$. Di conseguenza, $R(f_k, A) \cup \Gamma(f, A) \nearrow R(f, A)$ e, poichè $\Gamma(f, A)$ ha misura nulla, questo è sufficiente per provare che ognuno degli $R(f_k, A)$ è misurabile. Ora, fissato k, si supponga che f_k assuma i valori $a_1, \ldots, a_n$ rispettivamente sugli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ contenuti e disgiunti in A. Allora $R(f_k, A) = \bigcup_{j=1}^n A_{j,a_j}$. Per il Lemma 3.2, $R(f_k, A)$ è misurabile per ogni k fissato. □

Corollario 3.4. *Sia f un funzione non negativa e misurabile che prende i valori $a_1, \ldots, a_n$ rispettivamente sugli insiemi disgiunti $A_1, \ldots, A_n$, sia poi $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, allora*

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^n a_j \mu(A_j) \ .$$

Dimostrazione. Dalla definizione si ha $R(f, A) = \bigcup_{j=1}^n A_{j,a_j}$ e gli A_{j,a_j} sono misurabili perche lo sono gli A_j. Perciò $\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_{j,a_j})$ e il corollario segue direttamente dal fatto che $\mu(A_{j,a_j} = a_j \mu(A_j)$. □

3.2 Definizione di Integrale per una qualsiasi funzione misurabile

Sia f una generica funzione misurabile, $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, si può sempre scrivere $f = f^+ - f^-$, dove

$$f^+ : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \ , \quad f^+ = \max_A \{f, 0\}$$

$$f^- : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \ , \quad f^- = \max_A \{-f, 0\} \ .$$

Queste due funzioni sono entrambe misurabili, poichè lo è f, e *non negative* per definizione, quindi, per quando detto nel paragrafo precedente esistono gli integrali:

$$\int_A f^+ d\mu \quad \text{e} \quad \int_A f^- d\mu \ .$$

Si dirà che f è *integrablie secondo Lebesgue* se almeno uno di questi due integrali è finito e si definirà

$$\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \ .$$

Ovviamente questa definizione, così come quella precedente, vale anche per funzioni definite *quasi dappertutto* su A.

Si osserva che se f è *non negativa* $f = f^+$ e si ritrova la definizione di integrale data in precedenza.

Una funzione f si dice *sommabile* su A se f è integrabile e $\int_A f d\mu \in \mathbb{R}$, in altre parole f è *sommabile* se e solo se $\int_A f^+ d\mu$ e $\int_A f^- d\mu$ sono entrambi finiti e questo vale se e solo se $\int_A |f| d\mu \in \mathbb{R}$. Si indicherà con $\mathscr{L}(A)$ l'insieme delle funzioni sommabili su A.

Se $\int_A f d\mu$ esiste, segue direttamente dalla definizione la seguente disuguaglianza:

$$\Big| \int_A f d\mu \Big| \leq \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu = \int_A (f^+ + f^-) d\mu = \int_A |f| d\mu$$

3.3 Proprietà delle funzioni integrabili

Teorema 3.5. *Siano f e g due funzioni misurabili, $f, g : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, allora:*

(i) se $f, g \in \mathscr{L}(A)$ anche $f + g \in \mathscr{L}(A)$ e $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A f d\mu$;

(ii) se f è integrabile e λ è un numero reale anche λf è integrabile e $\int_A \lambda f d\mu = \lambda \int_A f d\mu$;

(iii) se $f, g \in \mathscr{L}(A)$ e $f \leq g$ allora $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.

Dimostrazione. La dimostrazione di tali affermazioni è abbastanza immediata, ma se si vuole una prova dettagliata si può fare riferimento a [2], Capitolo 5, Paragrafi 2 e 3, Teoremi 5.10, 5.13, 5.14, 5.23(i), 5.27, 5.28, pag. 68-73. □

Proposizione 3.6. *Siano f e g due funzioni misurabili tali che $0 \leq g \leq f$ su A, allora $\int_A g \leq \int_A f$.*

Dimostrazione. La proposizione segue direttamente dalla relazione $R(g, A) \subset R(f, A)$. □

Teorema 3.7. *Sia f una funzione non negativa e misurabile, oppure sommabile, su un insieme A. Allora*

$$\int_A f d\mu = \sup_{\Omega_A} \Big(\sum_{j \in J} \inf_{x \in A_j} f(x) \ \mu(A_j) \Big) \ ,$$

dove Ω_A è l'insieme di tutte le scomposizioni di A del tipo $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, con I finito e gli A_i a due a due disgiunti.

Dimostrazione. Si proverà il teorema nel caso in cui f sia non negativa e misurabile, l'altro caso è facilmente riconducibile a quello considerato.

Si consideri la scomposizione $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ e si definisca la g che prende valori $a_j = \inf_{x\in A_j} f(x)$ in A_j, $j = 1, 2, \dots, n$. Essendo quindi $0 \le g \le f$, per il Corollario 3.4 e la Proposizione 3.6 si ha che $\sum_{j=1}^{n} a_j\mu(A_j) \le \int_A f d\mu$ e perciò

$$\sup \sum_{j=1}^{n} \big(\inf_{A_j} f\big)\mu(A_j) \le \int_A f d\mu \ .$$

Per provare la disuguaglianza opposta si considerino gli insiemi $A_j^{(k)}$, per $k = 1, 2, \dots$ e $j = 0, 1, \dots, k2^k$ definiti da

$$A_j^{(k)} = \left\{\frac{j-1}{2^k} \le f < \frac{j}{2^k}\right\},\ \forall j \ne 0 \quad e \quad A_0^{(k)} = \{f \ge k\} \ .$$

Siano poi le corrispondenti funzioni misurabili

$$f_k = \sum_j \inf_{A_j^{(k)}} f \ \chi_{A_j^{(k)}} \ ,$$

si ha $0 \le f_k \nearrow f$ e $\int_A f_k d\mu = \sum_j \inf_{A_j^{(k)}} \mu(A_j^{(k)})$. Come si vedrà in seguito (Teorema 3.11) $\int_A f_k d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu$ e perciò mandano al limite l'uguaglianza precedente

$$\int_A f d\mu = \sum_j \inf_{A_j} \mu(A_j)$$

da cui

$$\int_A f d\mu \le \sup \sum_j \inf_{A_j} \mu(A_j)$$

e questa disuguaglianza completa la dimostrazione. □

Corollario 3.8. *Sia f una funzione non negativa oppure sommabile su A. Se $\mu(A) = 0$ allora $\int_A f d\mu = 0$.*

Teorema 3.9 (*Additività dell'integrale*).
Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A = \bigcup_{k \in I} A_i$ *con* $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \; i \neq j$ *e* $A_k \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n) \; \forall k \in I$, *se* f *è non negativa oppure se* f *è sommabile allora:*

$$\int_A f d\mu = \sum_{k \in I} \int_{A_k} f d\mu \; .$$

Dimostrazione. Si osserva anzitutto che è sufficiente provare il teorema nel caso in cui f sia *non negativa*, poichè nel caso in cui f sia *sommabile* ci si riconduce al primo caso per mezzo delle funzioni f^+ e f^-.

Sia quindi $f \geq 0$, gli insiemi $R(f, A_k)$ sono disgiunti e misurabili, si ha poi che $R(f, A) = \bigcup_{k \in I} R(f A_k)$ e il teorema segue direttamente dall'additività della misura di Lebesgue (Teorema 1.11). □

Corollario 3.10 (*Monotonia dell'integrale*).
Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, *f misurabile e non negativa. Sia poi* $B \subseteq A$, *con* $B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, *allora*

$$\int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu \; .$$

Dimostrazione. Si consideri

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A \setminus B} f d\mu \; ,$$

$\int_{A \setminus B} f d\mu$ è sicuramente positivo, poichè $f \geq 0$, allora

$$\int_A f d\mu \geq \int_B f d\mu$$

□

Osservazione 1. Siano $f, g : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, f integrabile e $g(x) = f(x)$ quasi dappertutto, allora g è integrabile e

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu \; .$$

Dimostrazione. Si supponga in un primo momento $f, g \geq 0$ e si ponga

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \quad e \quad A_2 = \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\} \; .$$

Per ipotesi $\mu(A_2) = 0$, quindi A_2 è misurabile e di conseguenza lo è anche A_1, poichè complementare di un misurabile, inoltre $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A = A_1 \cup A_2$ e g è misurabile perchè lo è f, allora

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu = &\int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu = (\text{poichè } \mu(A_2) = 0) \int_{A_1} f d\mu \\ =&(\text{su } A_1\ f = g) \int_{A_1} g d\mu = \int_{A_1} g d\mu + \int_{A_2} g d\mu = \int_A g d\mu\ .\end{aligned}$$

□

Osservazione 2. Sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione *misurabile* e *non negativa*, con $\int_A f d\mu = 0$. Allora $f = 0$ quasi dappertutto.

Dimostrazione. Si ponga $A_0 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ e $A \backslash A_0 = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$. Si osserva poi che

$$A_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{f > \frac{1}{k}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\ .$$

Ora

$$0 = \int_A f d\mu \geq (A_k \subset A) \int_{A_k} f d\mu \geq \int_{A_k} \frac{1}{k} d\mu = \frac{1}{k} \int_{A_k} d\mu = \frac{1}{k} \mu(A_k) \geq 0$$

e perciò $\mu(A_k) = 0$. Seguirà che anche $\mu(A_0) = 0$ e quindi $f = 0$ quasi dappertutto. □

Osservazione 3. Sia A un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, $\mu(A) = \int_A d\mu$.

Dimostrazione. Se si considera $\int_A f d\mu$ con $f(x) = 1$, $\forall x \in A$ l'osservazione segue direttamente dal Corollario 3.4. □

3.4 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Teorema 3.11 (*di Beppo Levi o di convergenza monotona*).
Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione monotona crescente di funzioni misurabili e non

negative, $f_k : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. *Allora*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \lim_{k\to+\infty} f_k d\mu \ .$$

Dimostrazione. Per il Teorema 2.8, $f := \lim_{k\to+\infty} f_k$ è una funzione misurabile, inoltre $R(f_k, A) \cup \Gamma(f, A) \nearrow R(f, A)$ e $\Gamma(f, A)$ ha misura nulla. Di conseguenza il risultato segue direttamente dal Teorema 1.13. □

Teorema 3.12 (*di Fatou*)**.**
Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *un successione di funzioni misurabili e non negative,* $f_k : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. *Allora*

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_A f_k d\mu \geq \int_A \liminf_{k\to+\infty} f_k d\mu \ .$$

Dimostrazione. Ricordando che

$$\liminf_{k\to+\infty} f_k = \lim_{p\to+\infty} \left(\inf_{k\geq p} f_k \right) ,$$

si pone $g_p = \inf_{k\geq p} f_k$. Tale funzione risulta quindi non negativa e misurabile e la successione delle g_p monotona crescente con limite $g := \liminf_{k\to+\infty} f_k$. Per il Teorema di Beppo Levi si ha:

$$\int_A \liminf_{k\to+\infty} f_k d\mu = \int_A g d\mu = \lim_{p\to+\infty} \int_A g_p d\mu \ .$$

D'altra parte $g_p \leq f_k$, $\forall k \geq p$ e di consegueza $\int_A g_p d\mu \leq \int_A f_k d\mu$, $\forall k \geq p$ e segue che $\int_A g_p d\mu \leq \inf \int_A f_k d\mu$. Allora

$$\int_A \liminf_{k\to+\infty} f_k d\mu \leq \lim_{p\to+\infty} \left(\inf_{k\geq p} \int_A f_k d\mu \right) = \liminf_{k\to+\infty} \int_A f_k d\mu \ .$$

□

Teorema 3.13 (*della convergenza dominata di Lebesgue*)**.**
Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni in* $\mathscr{L}(A)$, *supponendo:*

(i) $f_k \longrightarrow f$ *in* A;

(ii) che esista $g \in \mathscr{L}(A)$ *tale che* $|f_k| \leq g$, $\forall k \in \mathbb{N}$;

allora $f \in \mathscr{L}(A)$ *e*

$$\int_A f d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_A f_k d\mu \ .$$

Dimostrazione. Siccome $f_k \in \mathscr{L}(A)$ e $f_k \longrightarrow f$, allora f è misurabile. Inoltre dal fatto che $|f_k| \leq g$ segue che anche $|f| \leq g$ e che $\int_A |f| d\mu \leq \int_A g d\mu < +\infty$ e quindi anche f risulta sommabile.

Ora, si osserva che

$$|f_k - f| \leq |f_k| + f \leq 2g \implies 2g - |f_k - f| \geq 0 \ ,$$

applicando il Teorema di Fatou:

$$\liminf_{k \to +\infty} \int_A (2g - |f_k - f|) d\mu \geq \int_A \liminf_{k \to +\infty} (2g - |f_k - f|) = \int_A 2g d\mu \ ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_A 2g d\mu &\leq \liminf_{k \to +\infty} \Big(\int_A 2g d\mu - \int_A |f_k - f| d\mu \Big) = \int_A 2g d\mu + \liminf_{k \to +\infty} \Big(- \int_A |f_k - f| \Big) \\ &= \int_A 2g d\mu - \limsup_{k \to +\infty} \Big(\int_A |f_k - f| \Big) \ , \end{aligned}$$

da cui segue

$$\limsup_{k \to +\infty} \int_A |f_k - f| d\mu \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \limsup_{k \to +\infty} \int_A |f_k - f| d\mu = 0 \ .$$

Se il $\limsup$ è uguale a zero allora anche il $\liminf$ lo sarà, poiche $0 \leq \liminf \leq \limsup$, di conseguenza esiste il limite ed è anch'esso uguale a zero, cioè

$$\lim_{k \to +\infty} \int_A |f_k - f| d\mu = 0$$

e questo implica

$$\lim_{k \to +\infty} \int_A (f_k - f) d\mu = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{k \to +\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu \ .$$

□

Osservazione 4. Quest'ultimo teorema continua a valere anche nelle ipotesi in cui $f_k \longrightarrow f$ quasi dappertutto e $|f_k| \leq g$ quasi dappertutto.

Dimostrazione. Sia A^* l'insieme in cui valgono le due ipotesi, allora il Teorema di Lebesgue vale, quindi $f \in \mathscr{L}(A)$ e

$$\int_{A^*} f d\mu = \lim_{k\to+\infty} f_k d\mu \ .$$

Ora, sommando al membro di sinistra $\int_{A\setminus A^*} f d\mu$ e al membro di destra $\int_{A\setminus A^*} f_k d\mu$ si ottiene il risultato cercato. Questa somma la posso sempre fare poichè per ipotesi $A \setminus A^*$ ha misura nulla e il relativo integrale è anch'esso nullo. □

Esempio 3.1. Sia $f_k :]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = (\sin x)^k$, allora $f_k \longrightarrow f$ in $]0,\pi[$ con

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Si ha poi $|f_k| \leq 1$, quindi si può utilizzare il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue:

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu$$

Allora

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^\pi (\sin x)^k dx = \int_0^\pi f(x)dx = 0 \ ,$$

perchè f è nulla quasi dappertutto.

Controesempio 3.1. Sia $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2}$, le f_k sono *non negative* e *misurabili*, inoltre

$$f_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \ .$$

Ora,

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = \sqrt{k}\int_{\mathbb{R}} e^{-kx^2}$$

posto $\sqrt{k}x = y$ risulta:

$$\sqrt{k}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \ ,$$

mentre
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$$
perchè f è nulla quasi dappertutto.
Allora
$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k d\mu \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} f_k d\mu \ ,$$
segue che non esiste una funzione sommabile che domini f_k, $\forall k$.

Teorema 3.14. *Sia data la serie di funzioni misurabili* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$*, con* $f_k : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$*, allora:*

(i) se $f_k \geq 0$*, si ha* $\int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k d\mu$*;*

(ii) se $f_k \in \mathscr{L}(A)$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A |f_k| d\mu < +\infty$*, si ha* $\int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k d\mu$*.*

Dimostrazione. La (i) deriva direttamente dal Teorema di Beppo Levi, considerando la successione delle somme parziali.

Per dimostrare la (ii) si pone
$$g := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \ ,$$
allora $g \leq 0$ ed è misurabile, quindi per la (i) vale
$$\int_A g = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A |f_k| \ ,$$
che è finito per ipotesi. Allora $g \in \mathscr{L}(A)$ e $g < +\infty$ quasi dappertutto, quindi $\sum f_k$ converge quasi dappertutto.
Risulta poi
$$\Big| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = g \in \mathscr{L}(A)$$
inoltre $\sum_{k=1}^{n} f_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ quasi dappertutto.
Allora per il Teorema di Lebesgue
$$\int_A \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_A \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k d\mu \ .$$
□

3.5 Confronto in $\mathbb{R}$ tra l'integrale di Riemann e l'integrale di Lebesgue

Teorema 3.15. *Sia f una funzione Riemann-integrabile, allora è integrabile anche secondo Lebesgue e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx \ ,$$

dove $\int_a^b f(x)dx$ indica l'integrale di Riemann della funzione e $\int_{[a,b]} f(x)dx$ quello di Lebesgue.

Dimostrazione. Sia f *non negativa*, sia $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq [a, b]$, e siano $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ gli intervalli corrispondenti. Se poi si considerano gli insiemi $J_1 = [x_0, x_1]$, $J_2 =]x_1, x_2]$, $\ldots$, $J_n =]x_{n-1}, x_n]$, questi sono a due a due disgiunti, sono una partizione di $[a, b]$ e $\mu(J_k) = \mu(I_k), \forall k$. Siano ora le seguenti funzioni semplici

$$f_\sigma(x) = \inf_{J_k} f \quad \text{se } x \in I_n \ ,$$

$$g_\sigma(x) = \sup_{J_k} f \quad \text{se } x \in I_n \ .$$

Si osserva immediatamente che $f_\sigma \leq f \leq g_\sigma$. Avendo poi supposto f Riemann-integrabile, per il Teorema di Riemann ([3],Capitolo 5, Paragrafo 9, Teorema 9.9, pag. 169) esiste una successione di scomposizioni $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\sigma_n \subseteq \sigma_{n+1}$ tale che

$$\int_a^b g_{\sigma_n}(x)dx - \int_a^b f_{\sigma_n}(x)dx \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty \ ,$$

osservando che

$$S(f, \sigma_n) = \int_a^b g_{\sigma_n}(x)dx \quad \text{e} \quad s(f, \sigma_n) = \int_a^b f_{\sigma_n}(x)dx \ .$$

Le (f_{σ_n}) e le (g_{σ_n}) sono due successioni di funzioni semplici *non negative* e *misurabili* perciò convergeranno a due funzioni anch'esse *non negative* e

misurabili, $f_{\sigma_n} \nearrow f^*$ e $g_{\sigma_n} \searrow g^*$.
Passando al limite sotto il segno di integrale risulta

$$\int_a^b g^*(x) - f^*(x)dx = 0 \ ,$$

quindi $g^* - f^* = 0$ quasi dappertutto $\Longleftrightarrow f^* = g^*$ quasi dappertutto. Inoltre la disuguaglianza precedente continua a valere passando al limite, perciò $f^* \leq f \leq g^*$, di conseguenza $f = f^* = g^*$, cioè f è uguale ad una funzione *non negativa* e *misurabile* quasi dappertutto, quindi f è integrabile secondo Lebesgue.
Nel caso generico f non è *non negativa*, si considera quindi $f = f^+ - f^-$, con

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{|f| + f}{2} \ \in R_{[a,b]} \ ,$$
$$f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{|f| - f}{2} \ \in R_{[a,b]} \ ,$$

entrambe funzioni non negative e si ripete il ragionamento precedente. □

Controesempio 3.2. Sia $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \forall x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

La funzione così definita non è integrabile secondo Riemann, poichè in ogni intorno di ogni punto le somme inferiori e superiori sono diverse, però f è misurabile perchè $f(x) = 1$ quasi dappertutto, $f \in \mathscr{L}([0,1])$ e vale

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = 1 \ .$$

Quindi non è vero che l'integrabilità secondo Lebesgue implica quella secondo Riemann, anzi l'insieme delle funzioni integrabili secondo Lebesgue contiene strettamente quello delle funzioni Riemann-integrabili.

3.6 Teoremi di riduzione

In questo paragrafo si enunceranno alcuni teoremi fondamentali della teoria dell'integrazione di Lebesgue, tuttavia non se ne darà una dimostrazione, poichè la trattazione richiederebbe un approfondimento ulteriore.

Si consideri $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e un punto di $\mathbb{R}^n$ come una coppia (x, y) con $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.
Sia poi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ anch'essa misurabile.

Teorema 3.16 (*di Tonelli*).
Se f è non negativa, allora

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{P_x} (\int_{A_x} f(x,y)dy)dx = \int_{P_y} (\int_{A_y} f(x,y)dx)dy \ ,$$

con $A_x = \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x,y) \in A\}$ *e* $P_x = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \mu_p^*(A_x) > 0\}$ *e analogamente* $A_y = \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x,y) \in A\}$ *e* $P_y = \{y \in \mathbb{R}^q \mid \mu_q^*(A_y) > 0\}$*, dove* $\mu_p^*(A)$ *indica la misura esterna di A in* $\mathbb{R}^p$ *e* $\mu_p^*(A)$ *quella in* $\mathbb{R}^q$.

[cfr. per la dimostrazione [2], Capitolo 6, Paragrafo 2, Teorema 6.10, pag. 92, oppure [4], Capitolo 5, Paragrafo 5, Teorema 5.1, pag. 227]

Teorema 3.17 (*di Fubini*).
Il Teorema di Tonelli vale anche per funzioni sommabili.

[cfr. per la dimostrazione [2], Capitolo 6, Paragrafo 1, Teorema 6.1, pag. 87, oppure [4], Capitolo 5, Paragrafo 5, Teorema 5.4, pag. 238]

Esempio 3.2 (Volume del cono).
Sia $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \ , 0 \leq z \leq h\}$ il cono generico di altezza h, allora

$$\mu(A) = \int_A dxdydz \ .$$

Ora

$$\int_A dxdydz = \int_0^h (\int_{A_z} dxdy)dz \ ,$$

con $A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}$, quindi A_z è il cerchio di raggio z e centro l'origine e $\mu(A_x) = \pi z^2$, segue che

$$\int_A dxdydz = \int_0^h \pi z^2 dz = \pi \Big[\frac{z^3}{3}\Big]_{z=0}^{z=h} = \pi \frac{h^3}{3} \ .$$

Il seguente teorema, corollario al Teorema di Fubini, proverà la parte mancante del Teorema 3.1.

Teorema 3.18. *Sia f una funzione non negativa definita su un insieme misurabile $A \in \mathbb{R}^n$. Se $R(f, A)$ è misurabile come insieme di $\mathbb{R}^{n+1}$, allora f è misurabile.*

Alla dimostrazione si antepone il seguente lemma.

Lemma 3.19. *Se A è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^{p+q}$, l'insieme $A_x = \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x, y) \in A\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^q$ per quasi tutti gli $x \in \mathbb{R}^p$.*

[per la dimostrazione si rimanda a [2], Capitolo 6, Paragrafo 1, Teorema 6.7, pag. 90]

Dimostrazione. Per $0 \leq y < +\infty$, si ha $\{x \in A \mid f(x) \geq y\} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y) \in R(f, A)\}$. Poichè $R(f, A)$ è misurabile, segue dal Lemma precedente che $\{x \in A \mid f(x) \geq y\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^n$ per quasi tutti gli $y \in \mathbb{R}^q$. Se y è negativo $\{x \in A \mid f(x) \geq y\} = A$ che è misurabile, quindi si conclude che f è misurabile. $\square$

Capitolo 4

Cambiamento di Variabile

4.1 Teorema del cambiamento di variabile

Definizione 4.1 (*Diffeomorfismo*).
Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, si dirà diffeomorfismo di classe C^k, con $k \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 0$, se:

(i) $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$

(ii) F è iniettiva e l'insieme O:= $F(\Omega)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$

(iii) $F^{-1} \in C^k(O, \mathbb{R}^n)$

Se F è un diffeomorfismo di classe C^k in particolare F è anche un diffeomorfismo locale di classe C^k. Segue quindi, direttamente dal *Teorema dello Jacobiano*, che:

$$\det \mathscr{J}_F(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Teorema 4.1 (*Cambiamento di Variabile*).
Siano Ω e O due aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia poi $F : \Omega \xrightarrow[\text{su}]{1-1} O$ un diffeomorfismo di classe C^k, con $k \in \mathbb{Z}$ e $k \geq 0$; infine sia $f : O \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

(i) f è misurabile se e solo se $f \circ F|\det \mathscr{J}_F|$ è misurabile su Ω

(ii) *f è integrabile se e solo se $f \circ F|\det \mathscr{J}_F|$ è integrabile su Ω. In questo caso risulta:*

$$\int_O f(x)dx = \int_\Omega f(F(y))|\det \mathscr{J}_F(y)|dy \tag{4.1}$$

Dimostrazione.
Per dimostrare il teorema si procederà per tappe, al fine di semplificare la trattazione e di ricondurre il contenuto del teorema ad affermazioni via via più semplici.

(I) Osservazioni preliminari.
Per definizione consideriamo cubo di $\mathbb{R}^n$ di centro $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e semilato $r > 0$ l'intervallo compatto

$$C(\alpha, r) := [\alpha_1 - r; \alpha_1 + r] \times \ldots \times [\alpha_n - r; \alpha_n + r] \tag{4.2}$$

Risulta quindi

$$\mu(C(\alpha, r)) = (2r)^n = \mu(C(0,1))r^n$$

$$D(\alpha, r) \subseteq C(\alpha, r) \subseteq D(\alpha, \sqrt{n}r)$$

dove $D(\alpha, r)$ è il disco di $\mathbb{R}^n$ di centro α e raggio r. Ricordando che per ogni disco di $\mathbb{R}^n$ esiste una costante ω_n tale che $\mu_n(D(\alpha, r)) = \omega_n r^n$ [1], risulta:

$$\mu(D(\alpha, r)) = \omega_n r^n = \frac{\omega_n}{2^n}\, \mu(C(\alpha, r)) = \alpha_n\, \mu(C(\alpha, r)) \tag{4.3}$$

e

$$\begin{aligned} \mu(C(\alpha, r)) =&(2r)^n = 2^n \frac{\mu(D(\alpha, \sqrt{n}r)}{\omega_n(\sqrt{n})^n} = \Big(\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)^n \frac{1}{\omega_n}\mu(D(\alpha, \sqrt{n}r) \\ =&\beta_n \mu(D(\alpha, \sqrt{n}r)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

[1]Si deduce immediatamente che $\omega_n = \mu_n(D(0,1))$

Si può vedere facilmente che $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$, inoltre si osserva che, essendo $diam(C(\alpha,r)) = 2\sqrt{n}r$, per la (4.3) e la (4.4) si può scrivere

$$\mu(C(\alpha,r)) = \gamma_n(diam(C(\alpha,r)))^n \qquad con\ \gamma_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \tag{4.5}$$

Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con diametro δ, si ha che $A \subseteq \overline{D(\alpha,r)}$, dove α è un punto arbitrario di A. Allora

$$\mu^*(A) \leq \mu(\overline{D(\alpha,\delta)}) = \mu(D(\alpha,\delta)) \tag{4.6}$$

quindi

$$\mu^*(A) \leq \omega_n\ \delta^n = \omega_n(diam(A))^n \tag{4.7}$$

La (4.6) segue dal fatto che $\mu(\overline{D(\alpha,r)}) = \mu(D(\alpha,r)\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^n\ ,\ \forall\, r > 0$. Questa uguaglianza si può dimostrare osservando che, $\forall \varepsilon \in]0,r[$, si ha

$$D(\alpha,r-\varepsilon) \subseteq \overline{D(\alpha,r)} \subseteq D(\alpha,r+\varepsilon);$$

quindi

$$\omega_n(r-\varepsilon)^n \leq \mu(\overline{D(\alpha,r)}) \leq \omega_n(r+\varepsilon)^n.$$

Ora passando al limite per $\varepsilon \to 0$, si ottiene:

$$\mu(\overline{D(\alpha,r)}) = \omega_n\ r^n$$

che è esattamente l'uguaglianza da cui si è partiti.

(II) Si mostrerà ora che la misura esterna dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ può essere definita utilizzando ricoprimenti lebesguiani costistuiti da cubi invece dei generici intervalli compatti.

Proposizione 4.2. *Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce:*

$$\mu_c^*(A) := \inf\left\{ \sum_{k\in\mathscr{A}} \mu(C_k)\ \middle|\ A \subseteq \bigcup_{k\in\mathscr{A}} C_k,\ \mathscr{A} \subseteq \mathbb{N},\ C_k\ \ cubo\ \ di\ \ \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathscr{A} \right\};$$

Allora si ha che:

$$\mu^*(A) = \mu_c^*(A) \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Per prima cosa si osservi che, per come è stata definita $\mu_c^*(A)$, si ha:

$$\mu^*(A) \leq \mu_c^*(A). \tag{4.9}$$

Si osservi poi che non è restrittivo supporre $\mu^*(A) < +\infty$, poichè nel caso in cui $\mu^*(A) = +\infty$ risulterebbe che anche $\mu_c^*(A) = \infty$ e di conseguenza la proposizione sarebbe verificata.
Si consideri quindi il caso $\mu^*(A) < +\infty$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $A \subseteq \Omega$ e che

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \mu(\Omega).$$

D'altro canto, per il Teorema 1.1, si può sempre scrivere

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

con $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ famiglia di cubi di $\mathbb{R}^n$, tali che $\mathring{C}_k \cap \mathring{C}_h = \emptyset,\ \forall k \neq h$. Da questa affermazione segue che $\mu(C_k \cap C_h) = 0$ per $k \neq h$ e quindi si ha:

$$\mu(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k),$$

da cui poi si ottiene:

$$\mu^*(A) + \varepsilon > \mu(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) \geq \mu_c^*(A).$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ questa implica

$$\mu^*(A) \geq \mu_c^*(A)$$

quest'ultima disuguaglianza insieme alla (4.9) prova la proposizione. $\square$

(III) Di seguito si mostrerà che ogni diffeomorfismo porta insiemi misurabili in insiemi misurabili e porta insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.

Proposizione 4.3. *Se* $F : \Omega \xrightarrow[\text{su}]{1-1} O$ *è un diffeomorfismo di classe* $C^k, k \geq 1$*, allora*

$$F(A) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall A \subseteq \Omega \text{ } misurabile \text{ } in \text{ } \mathbb{R}^n \text{ } .$$

Si ha anche

$$H \subseteq \Omega, \qquad \mu^*(H) = 0 \Longrightarrow \mu^*(F(H)) = 0 \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Si supponga dapprima che A sia un insieme di tipo G_δ. Allora A si può scrivere

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \ ,$$

con Ω_k aperto $\forall k \in \mathbb{N}$; di conseguenza anche $F(A)$ è di tipo G_δ infatti, essendo F aperta ogni $F(\Omega_k)$ è aperto, si ha, essendo F iniettiva:

$$F\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k\Big) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F(\Omega_k).$$

Si supponga ora che A sia un generico insieme misurabile. Esistono, per il Teorema 1.15 , due insieme B e H tali che B sia di tipo G_δ e H di misura nulla e che $A = B \setminus H$, allora

$$F(A) = F(B) \setminus F(H)$$

per quanto detto prima, essendo B di tipo G_δ, anche F(B) è di tipo G_δ ed è quindi misurabile. Sarà quindi sufficiente provare che F(H) ha misura nulla. Per questo motivo, per concludere la dimostrazione, si dimostra il seguente lemma.

Lemma 4.4. *Sia* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *un cubo contenuto in* Ω *e sia* $A \subseteq Q$*, allora:*

$$\mu^*(F(A)) \leq \frac{\omega_n}{\gamma_n}\Big(\sup_Q \parallel \mathscr{J}_F \parallel\Big)^n \ \mu^*(A) \ .$$

In particolare se $\mu^*(A) = 0$

$$\mu^*(F(A)) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $(C_k)_{k\in\mathscr{A}}$ una famiglia finita o numerabile di cubi di $\mathbb{R}^n$ che ricopre A. Allora

$$A \subseteq \bigcup_{k\in\mathscr{A}} (C_k \cap Q)$$

e quindi

$$\mu^*(F(A)) \leq \sum_{k\in\mathscr{A}} \mu^*(F(C_k \cap Q)). \tag{4.11}$$

Ora, per ogni $x, y \in C_k \cap Q$ esiste $z \in [x, y] \subseteq C_k \cap Q$ tale che

$$|F(x) - F(y)| \leq \parallel \mathscr{J}_F(z) \parallel |x - y| \;;$$

allora, assumendo che $\sup\limits_{C_k\cap Q} |x - y| \leq \sup\limits_{C_k} |x - y| = diam(C_k)$, si ha

$$|F(x) - F(y)| \leq \sup_{Q} \parallel \mathscr{J}_F(z) \parallel diam(C_k)$$

e quindi:

$$diam(F(C_k \cap Q)) \leq \sup_{Q} \parallel \mathscr{J}_F(z) \parallel diam(C_k). \tag{4.12}$$

Ricordando quanto visto nelle osservazioni preliminari, in particolare nella (4.7), dalle (4.11) e (4.12) si ottiene:

$$\begin{aligned} \mu^*(F(A)) \leq& \omega_n \Big(\sup_{Q} \parallel \mathscr{J} \parallel \Big)^n \sum_{k\in\mathscr{A}} (diam(C_k))^n \\ \leq& (per\ la\ (4.5)) \quad \frac{\omega_n}{\gamma_n} \Big(\sup_{Q} \parallel \mathscr{J} \parallel \Big)^n \sum_{k\in\mathscr{A}} \mu(C_k). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Poichè $(C_k)_{k\in\mathscr{A}}$ è una famiglia di cubi di $\mathbb{R}^n$ che ricopre A, da questa disuguaglianza si ottiene l'asserto. □

Grazie al lemma appena dimostrato possiamo concludere rapidamente la dimostrazione della Proposizione 4.3 : sia $H \subset \Omega$ di misura nulla, sia poi $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una famiglia di cubi che ricopre Ω. Allora, $\forall k \in \mathbb{N}$, $H \cap Q_k$ ha misura nulla, segue quindi dal lemma precedente che

$$\mu^*(F(H \cap Q_k)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

questa implica direttamente $\mu^*(F(H)) = 0$, poichè

$$F(H) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F(H \cap Q_k).$$

$\square$

(IV) Con quanto mostrato finora si è in grado di dimostrare la prima affermazione del Teorema 4.1.
Sia $F : \Omega \xrightarrow[\text{su}]{1-1} O$ *un diffeomorfismo di classe* $C^k, k \geq 1$, *sia poi* $f : O \to \overline{\mathbb{R}}$. *Allora* f *è misurabile su* O *se e solo se* $f \circ F|\det \mathscr{J}_F|$ *é misurabile su* Ω.

Dimostrazione. Essendo la funzione $y \longmapsto |\det \mathscr{J}_F(y)|$ continua e positiva in tutto Ω, sarà sufficiente provare che

$$f \in \mathscr{M}(O) \Longleftrightarrow f \circ F \in \mathscr{M}(\Omega).$$

Sia quindi $c \in \overline{\mathbb{R}}$ fissato ad arbitrio. Per la Proposizione 4.3 l'insieme $\{f < c\}$ è misurabile su O se e solo se $F^{-1}(\{f < c\})$ è misurabile su Ω, d'altra parte

$$\begin{aligned} F^{-1}(\{f < c\}) =& \{y \in \Omega \mid F(y) \in \{f < c\}\} = \\ =& \{y \in \Omega \mid f(F(Y)) < c\} = \{f \circ F < c\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Questo prova che f è misurabile se e solo se lo è $f \circ F$. $\square$

(V) Si procederà ora con la dimostrazione della seconda parte del Teorema, la (4.1), la quale è incentrata sulla seguente proposizione.

Proposizione 4.5. *Siano* Ω *e* O *due aperti di* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $F : \Omega \xrightarrow[\text{su}]{1-1} O$ *un diffeomorfismo di classe* $C^k, k \geq 1$. *Allora per ogni* $A \subseteq O$, $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, *vale:*

$$\mu(A) = \int_{F^{-1}(A)} |\det \mathscr{J}_F| dy. \tag{4.15}$$

Prima di procedere con la dimostrazione di quest'ultima Proposizione si mostrerà che questa implica la (4.1).

Lemma 4.6. *Se vale la (4.15) allora vale anche la (4.1).*

Dimostrazione. È sufficiente provare la (4.1) per le funzioni $f : O \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabili e non negative. Sia quindi $\lambda > 1$ fissato a piacere, si definisce

$$A_{-\infty} = \{x \in O \mid f(x) = 0\},$$

$$A_{+\infty} = \{x \in O \mid f(x) = +\infty\} \quad \text{e}$$

$$A_k = \{x \in O \mid \lambda^k < f(x) < \lambda^{k+1}\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Essendo f non negativa e misurabile, la famiglia $\sigma = \{A_{-\infty}, A_{+\infty}\} \cup \{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ è una scomposizione di Ω. Si supponga $\mu(A_{+\infty}) > 0$, sotto tale ipotesi si avrebbe

$$\int_O f(x)dx = \int_{A_{-\infty}} f(x)dx + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{A_k} f(x)dx \Big) + \int_{A_{+\infty}} f(x)dx$$

siccome le tre quantità alla destra dell'uguale sono positive, segue

$$\int_O f(x)dx \geq \int_{A_{+\infty}} f(x)dx = +\infty\mu(A_{+\infty}) = +\infty$$

di coseguenza

$$\int_O f(x)dx = +\infty.$$

In modo analogo calcoliamo, nell'ipotesi $\mu(A_{+\infty} > 0$, la (4.1) risulta:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \circ F |\det \mathscr{J}_F| dy \geq & \int_{F^{-1}(A_{+\infty})} f \circ F |\det \mathscr{J}_F| dy = \\ =&(+\infty) \int_{F^{-1}(A_{+\infty})} |\det \mathscr{J}_F| dy\end{aligned}$$

avendo ipotizzato che la Proposizione 4.5 valga, si ha

$$\int_\Omega f \circ F |\det \mathscr{J}_F| dy \geq (+\infty)\mu(A_{+\infty}) = +\infty.$$

perciò

$$\int_\Omega f \circ F |\det \mathscr{J}_F| dy = +\infty \ .$$

Si supponga ora $\mu(A_{+\infty}) = 0$. Poichè $f = 0$ su $A_{-\infty}$ e $\mu(A_{+\infty}) = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_O f(x)dx =& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{A_k} f(x)dx \Big) \leq \text{(per come sono stati definiti gli } A_k)\\
\leq& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^{k+1}\mu(A_k) = \text{(per la (4.15))} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^{k+1} \int_{F^{-1}(A_k)} |\det \mathscr{J}_F| dy\\
\leq& \lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F^{-1}(A_k)} f\circ F |\det \mathscr{J}_F| dy\\
=& \lambda \int_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} F^{-1}(A_k)} f\circ F |\det \mathscr{J}_F| dy \ .
\end{aligned}$$

essendo $f \circ F = 0$ su $F^{-1}(A_{-\infty})$ e $\mu(F^{-1}(A_{+\infty})) = 0$ [2], vale la disuguaglianza

$$\int_O f dx \leq \lambda \int_\Omega f\circ F |\det \mathscr{J}_F| dy \qquad \forall \lambda > 1,$$

quindi vale

$$\int_O f dx \leq \int_\Omega f\circ F |\det \mathscr{J}_F| dy. \tag{4.16}$$

Procedendo in modo del tutto analogo si ha:

$$\begin{aligned}
\int_O f(x)dx =& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\int_{A_k} f(x)dx \Big) \geq \text{(per come sono stati definiti gli } A_k)\\
\geq& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^{k}\mu(A_k) = \text{(per la (4.15))} \quad \frac{1}{\lambda} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^{k+1} \int_{F^{-1}(A_k)} |\det \mathscr{J}_F| dy\\
\geq& \lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F^{-1}(A_k)} f\circ F |\det \mathscr{J}_F| dy\\
=& \frac{1}{\lambda} \int_\Omega f\circ F |\det \mathscr{J}_F| dy
\end{aligned}$$

quindi per l'arbitrarietà di $\lambda > 1$

$$\int_O f dx \geq \int_\Omega f\circ F |\det \mathscr{J}_F| dy.$$

questa insieme alla (4.16) fornisce la dimostrazione del Lemma. □

[2] $A_{+\infty}$ ha misura nulla e F è un diffeomorfismo

(VI) Al passo precedente si è ricondotta la validità del Teorema 4.1 alla validità della Proposizione 4.5. Si mostrerà ora che tale proposizione vale per ogni generico sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, nel momento in cui valga per i cubi di $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.7. *Sia F un diffeomorfismo come nella Proposizione 4.5. Se per ogni $C \subseteq O$ cubo di $\mathbb{R}^n$ si ha*

$$\mu(C) = \int_{F^{-1}(C)} |\det \mathscr{J}_F| dy, \tag{4.17}$$

allora per ogni $A \subseteq O$, $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$

$$\mu(A) = \int_{F^{-1}(A)} |\det \mathscr{J}_F| dy, \tag{4.18}$$

Dimostrazione. Nel caso in cui A sia un sottoinsieme aperto di O, esiste una famiglia $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di cubi di $\mathbb{R}^n$ tali che $\overset{\circ}{C}_k \cap \overset{\circ}{C}_h = \emptyset$, $\forall k \neq h$ (di conseguenza $\mu(C_k \cap C_h) = 0$ per $k \neq h$) e che

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$$

allora

$$\begin{aligned}\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \text{per la (4.17)} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F^{-1}(C_k} |\det \mathscr{J}_F| dy \\ = \int_{F^{-1}(A)} |\det \mathscr{J}_F| dy & \end{aligned}$$

Sia ora, invece, il caso in cui $A \subseteq O$ è di tipo G_δ e limitato. Allora esiste una successione di insiemi aperti limitati $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \ .$$

Si ponga

$$A_k = \bigcap_{j=1}^{k} B_j, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

risulta allora che A_k è una successione monotona decrescente di insiemi aperti e limitati, che converge ad A. Perciò

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \lim_{k\to+\infty}\mu(A_k) = \text{(per quanto provato nella prima parte)}\\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_{F^{-1}(A_k)}|\det \mathscr{J}_F|dy\end{aligned}$$

inoltre, essendo $A_k \searrow A$, anche $F^{-1}(A_k) \searrow F^{-1}(A)$ e, sempre per quanto dimostrato precedentemente,

$$\int_{F^{-1}(A_1)}|\det \mathscr{J}_F|dy = \mu(A_1) < +\infty \ .$$

da queste ultime osservazioni segue che

$$\mu(A) = \int_{F^{-1}(A)}|\det \mathscr{J}_F|dy \ .$$

Sia A un generico sottoinsieme limitato e misurabile di O, esistono un insieme $B \subseteq O$ limitato di tipo G_δ e un insieme $H \subseteq O$ di misura nulla tali che $A = B \setminus H$. Segue, per quanto già dimostrato che

$$\begin{aligned}\mu(A) =&\mu(B) - \mu(H) = \mu(B) = \int_{F^{-1}(B)}|\det \mathscr{J}_F|dy =\\ &=\text{(essendo } F^{-1}(H) \text{ di misura nulla)} \quad \int_{F^{-1}(B\setminus H)}|\det \mathscr{J}_F|dy =\\ &= \int_{F^{-1}(A)}|\det \mathscr{J}_F|dy\end{aligned}$$

Infine sia A un sottoinsieme misurabile e non limitato di O, posto $A_k = A \cap D(0,k)$ si ottiene una successione di insiemi misurabili tale che $A_k \nearrow A$. Di conseguenza

$$\begin{aligned}\mu(A) = \lim_{k\to+\infty}\mu(A_k) &= \text{(essendo } A_k \text{ limitato)} \quad \lim_{k\to+\infty}\int_{F^{-1}(A_k)}|\det \mathscr{J}_F|dy =\\ &= \int_{F^{-1}(A)}|\det \mathscr{J}_F|dy \ .\end{aligned}$$

Con quest'ultima uguaglianza la dimostrazione del lemma può dirsi conclusa. $\square$

(VII) Si provvederà ora a dimostrare che la (4.17) è vera se è verificata asintoticamente; si procederà in seguito alla dimostrazione della Proposizione 4.5.

Lemma 4.8. *Sia F un diffeormorfismo con le proprietà richieste nella Proposizione 4.5. Se per $x \in O$ si ha*

$$\lim_{C \to \{x\}} \frac{\int_{F^{-1}(C)} |\det \mathscr{J}_F| dy}{\mu(C)} = 1 \tag{4.19}$$

allora vale la (4.17).

Dimostrazione. Ragionando per assurdo si supponga che (4.17) non sia verificata; esiste quindi un cubo $C \subseteq O$ tale che

$$\int_{F^{-1}(C)} |\det \mathscr{J}_F| dy \neq \mu(C). \tag{4.20}$$

Allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, tale che

$$\int_{F^{-1}(C)} |\det \mathscr{J}_F| dy = \alpha\mu(C). \tag{4.21}$$

Supponiamo poi per fissare le idee $\alpha > 1$. Ora si scomponga il cubo C in 2^n cubi $Q_1, \ldots, Q_{2^n}$, con interni a due a due disgiunti e tali che $diam(Q_j) = \frac{1}{2} diam(C)$, $\forall j$ [3]. Segue

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^n} \int_{F^{-1}(Q_j)} |\det \mathscr{J}_F| dy = \int_{F^{-1}(C)} |\det \mathscr{J}_F| dy = \alpha\mu(C) = \\ = \alpha \sum_{j=1}^{2^n} \mu(Q_j). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Esiste perciò almeno un indice $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tale che

$$\int_{F^{-1}(Q_j)} |\det \mathscr{J}_F| dy \geq \alpha\mu(Q_j) \tag{4.23}$$

[3]infatti $\mu(C(\alpha, r)) = (2r)^n = 2^n r^n$, mentre $\mu(C(x, \frac{1}{2}r)) = r^n$, con $x \in C(\alpha, r)$, segue che, se tali cubi hanno interno disgiunto, allora $C(\alpha, r)$ contiene 2^n cubi del tipo $C(x, \frac{1}{2}r)$

Se fosse vero il contrario si avrebbe

$$\sum_{j=1}^{2^n} \int_{F^{-1}(Q_j)} |\det \mathscr{J}_F| dy \geq \alpha \sum_{j=1}^{2^n} \mu(Q_j)$$

contrariamente all'ipotesi (4.22).
Sia quindi indicato con C_1 uno dei cubi Q_j che verificano la (4.23). Si costruisce ora, a partire da C_1, una successione di cubi (C_k) nel modo seguente:

$$\begin{gathered} C_{k+1} \subseteq C_k \ , \qquad diam(C_{k+1}) = \frac{1}{2} diam(C_k), \\ \int_{F^{-1}(C_{k+1})} |\det \mathscr{J}_F| dy \geq \alpha\mu(C_{k+1}) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{4.24}$$

Per il Teorema di Cantor esiste un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x \in C_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Segue che $x \in O$ e, poichè $diam(C_k) \longrightarrow 0$ per $k \to +\infty$, per l'ipotesi (4.19) si ottiene che

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\int_{F^{-1}(C_k)} |\det \mathscr{J}_F|}{\mu(C_k)} = 1 \ .$$

Però si osserva subito che per la costruzione (4.24) della successione dei cubi (C_k)

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\int_{F^{-1}(C_k)} |\det \mathscr{J}_F|}{\mu(C_k)} \geq \alpha > 1 \ .$$

Questa contraddizione prova che il Lemma che si voleva dimostrare è vero. □

(VIII) A questo punto si completerà la dimostrazione della Proposizione 4.5; da questa, per mezzo del Lemma 4.6, seguirà la (4.1) e di conseguenza la seconda parte del Teorema 4.1.

Dimostrazione della Proposizione 4.5. È sufficiente provare che valga la (4.19): per il Lemma precedente la (4.19) implica la (4.17), da quest'ultima, grazie al Lemma 4.7, segue direttamente la (4.15). Essendo poi $y \longmapsto |\det \mathscr{J}_F(y)|$ una funzione continua, per dimostrare la (4.19) è sufficiente mostrare che

$$\lim_{C \to \{x\}} \frac{\mu(F^{-1}(C))}{\mu(C)} |\det \mathscr{J}_F(y)| = 1 \tag{4.25}$$

con $y \in \Omega$ tale che $F(y) = x$. Si ricorda che la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni, di conseguenza non è restrittivo supporre $x = 0$ e $y = 0$, si indichi quindi con T il differenziale di F in $y = 0$: $T = dF(0)$, T è una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in sé; inoltre

$$\det T = \det \mathscr{J}_F(0) \neq 0.$$

Si osserva poi che per ogni cubo di $\mathbb{R}^n$ se $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tale che $\det T \neq 0$ allora

$$\mu(T(C)) = |\det(T)|\mu(C) \ . \tag{4.26}$$

Quest'uguaglianza è tutt'altro che banale e rappresenta uno dei punti centrali sia del Teorema di cambiamento di variabile che della sua dimostrazione; per una trattazione approfondita di tale risultato si rimanda all'Appendice.

Dalla (4.26) precedente segue direttamente

$$\mu((T \circ F^{-1})(C)) = |\det T|\mu(F^{-1}(C)) \ .$$

Dopo queste premesse la (4.25) è equivalente a:

$$\lim_{C \to \{0\}} \frac{\mu((T \circ F^{-1})(C))}{\mu(C)} = 1 \tag{4.27}$$

Si pone poi, al fine di semplificare la notazione:

$$G = T \circ F^{-1} \quad \text{e} \quad G^{-1} = F_1 \ .$$

Essendo $x = y = 0$, le funzioni G e F_1 sono definite in un intorno di 0, $G(0) = F_1(0) = 0$, infine $dG(0) = T \circ (dF(0))^{-1} = I_n, \quad dF_1(0) = I_n$. Allora G e F_1 hanno il seguente sviluppo asintotico:

$$G(x) = x + \omega(x)|x|, \qquad F_1(y) = y + \omega_1(y)|y|$$

con $\omega(x) \to 0$ per $x \to 0$ e $\omega_1(y) \to 0$ per $y \to 0$.
Sia ora $\varepsilon > 0$ fissato a piacere e sia poi $\delta > 0$ tale che

$$|\omega(x)| < \varepsilon \ , \qquad |\omega_1(x)| < \varepsilon$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $|x|, |y| < \delta$.
Si consideri poi un generico cubo di $\mathbb{R}^n$ $C = [\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times [\alpha_n, \beta_n]$, che contiene il punto 0, contenuto in O (di conseguenza anche in Ω), e tale che:

$$\beta_j - \alpha_j = \ell < \delta \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Si ponga $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ e $\gamma = \frac{\beta+\alpha}{2}$, risulta quindi $C = C(\gamma, \frac{\ell}{2})$.
Indichiamo infine con G_j e ω_j le componenti j-esime di G e ω, per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C$ si ha

$$-\frac{\ell}{2} - \varepsilon\sqrt{n}\ell < G_j(x) - \gamma_j = (x_j - \gamma_j) + \omega_j(x)|x| < \frac{\ell}{2} + \varepsilon\sqrt{n}\ell \ .$$

Perciò segue

$$G(C) \subseteq C\Big(\gamma, \frac{\ell}{2}(1 + \varepsilon\sqrt{n})\Big) \ .$$

Essendo lo sviluppo asintotico di F_1 analogo a quello di G, risulta

$$F_1(C) \subseteq C\Big(\gamma, \frac{\ell}{2}(1 + \varepsilon\sqrt{n})\Big) \ .$$

oppure

$$C \subseteq G\Big(C(\gamma, \frac{\ell}{2}(1 + 2\varepsilon\sqrt{n}))\Big).$$

Da queste inclusione si può dedurre:

$$\mu(G(C)) \leq \ell^n(1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n = \mu(C)(1 + 2\varepsilon\sqrt{n})^n \tag{4.28}$$

e

$$\mu(C) \leq \mu\Big(G\Big(C(\gamma, \frac{\ell}{2}(1 + 2\varepsilon\sqrt{n}))\Big)\Big). \tag{4.29}$$

Inoltre vale

$$C \subseteq C\Big(\gamma, \frac{\ell}{2}(1 + 2\varepsilon\sqrt{n})\Big),$$

sia

$$C_\varepsilon = C\Big(\gamma, \frac{\ell}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})\Big) \setminus C \tag{4.30}$$

risulta

$$C\Big(\gamma, \frac{\ell}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})\Big) = C \cup C_\varepsilon \ .$$

Si ha quindi, per la (4.29)

$$\begin{aligned}\mu(C) \leq & \mu(G(C)) + \mu(G(C_\varepsilon)) \\ & \leq \text{(per il Lemma 4.4) } \mu(G(C)) + M_\varepsilon \mu(C_\varepsilon)\end{aligned}$$

con

$$M_\varepsilon = \frac{\omega_n}{\gamma_n}\Big(\sup_{C\cup C_\varepsilon} ||\mathscr{J}_G||\Big)^n \ .$$

da quest'ultima disuguaglianza e dalla (4.28) si ottiene

$$\mu(C) \leq \mu(G(C)) + \mu(G(C_\varepsilon)) \leq \mu(C)(1+2\varepsilon\sqrt{n})^n + M_\varepsilon\mu(C_\varepsilon)$$

$$\mu(C) - M_\varepsilon\mu(C_\varepsilon) \leq \mu(G(C)) + \mu(G(C_\varepsilon)) - M_\varepsilon\mu(C_\varepsilon) \leq \mu(C)(1+2\varepsilon\sqrt{n})^n \ ,$$

ricordando che $\mu(G(C_\varepsilon)) = M_\varepsilon\mu(C_\varepsilon)$, si ha

$$1 - \frac{M_\varepsilon\mu(C_\varepsilon)}{\mu(C)} \leq \frac{\mu(G(C))}{\mu(C)} \leq (1+2\varepsilon\sqrt{n})^n \ . \tag{4.31}$$

Ma

$$\begin{aligned}\frac{\mu(C_\varepsilon)}{\mu(C)} =& \frac{C\Big(\gamma, \frac{\ell}{2}(1+2\varepsilon\sqrt{n})\Big) - \mu(C)}{\mu(C)} = \frac{\mu(C)(1+2\varepsilon\sqrt{n})^n - \mu(C)}{\mu(C)} \\ =& (1+2\varepsilon\sqrt{n})^n - 1 \ ,\end{aligned}$$

inoltre, fissato $\varepsilon_0 > 0$ tale che $C \cup C_{\varepsilon_0} \subset O$, $C \cup C_{\varepsilon_0} \subseteq \Omega$, risulta $M_\varepsilon \leq M_{\varepsilon_0}$, $\forall \varepsilon \in \,]0, \ \varepsilon_0[$. Allora

$$M_\varepsilon \frac{\mu(C_\varepsilon)}{\mu(C)} \longrightarrow 0 \qquad \textit{per } \varepsilon \to 0 \ ,$$

e quindi per la (4.31), si ottiene

$$\lim_{C\to\{0\}} \frac{\mu(G(C))}{\mu(C)} = 1 \ .$$

essendo poi $G = (T \circ F^{-1})$, questo prova la (4.27), da cui segue la (4.25) e in conclusione la proposizione. □

Con la dimostrazione della Proposizione 4.5 resta dimostrato anche il Teorema 4.1. $\square$

4.2 Applicazioni

Esempio 4.1. Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$.
Nel caso bidimensionale si consideri il cambiamento di variabile:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

e il relativo diffeomorfismo $F(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, definito sull'insieme $]0, +\infty[\times] - \pi, +\pi[$ e a valori in $\mathbb{R}^2 \backslash X_0$, con $X_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y = 0\}$, per il quale vale

$$\mathscr{I}_F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det \mathscr{I}_F = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho\ .$$

Si consideri ora una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, allora, per il Teorema di Cambiamento di Variabile, segue

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{F^{-1}(A)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\mathscr{I}_F|d\rho d\theta = \int_{F^{-1}(A)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\rho|d\rho d\theta$$

questa relazione però, per come è stato definito il diffeomorfismo F, vale se e solo se $F^{-1}(A) \subseteq\ ]0, +\infty[\times] - \pi, +\pi[$, cioè se e solo se $A \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus X_0$.
Si osservi ora che si può sempre scrivere $A = A_1 \cup A_2$, con

$$A_1 = A \cap \mathbb{R}^2 \setminus X_0 \quad e \quad A_2 = A \setminus A_1\ ,$$

segue che $A_2 \subseteq X_0$ e che $\mu(A_2) = 0$, in quanto $\mu(X_0) = 0$. La relazione scritta in precedenza sicuramente vale per A_1:

$$\int_{A_1} f(x,y)dxdy = \int_{F^{-1}(A_1)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\rho|d\rho d\theta\ ,$$

inoltre, poichè A_2 ha misura nulla, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\int_{A_1} f(x,y)dxdy = \int_A f(x,y)dxdy$$

e $$\int_{F^{-1}(A_1)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\rho|d\rho d\theta = \int_{F^{-1}(A)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\rho|d\rho d\theta\ .$$

Quindi il cambiamento di variabile in coordinate polari si può scrivere per qualsiasi $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{F^{-1}(A)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|\rho|d\rho d\theta\ .$$

Nel caso tridimensionale si consideri il cambiamento di variabile:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta \\ y = \rho\cos\varphi\sin\theta \qquad \text{con} \quad (\rho,\theta,\varphi) \in \Omega =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\ . \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Le coordinate polari coprono tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ tranne quelli appartenenti a $A_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0\}$, che è un piano e quindi ha misura nulla in $\mathbb{R}^3$. Per quanto osservato nel caso bidimensionale allora il cambiamento di variabile in coordinate polari può essere effettuato per qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

Sia ora $F : \Omega \longrightarrow F(\Omega)$ il diffeomorfismo relativo a tale cambiamento di variabile $F(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi)$, per il quale vale

$$\mathscr{I}_F = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det\mathscr{I}_F =& \rho^2\cos^3\varphi\cos^2\theta + \rho^2\cos\varphi\sin^2\varphi\sin^2\theta + 0 - \rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \rho^2\cos^3\varphi\sin^2\theta \\ =& \rho^2(\cos^3\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\varphi\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ =& \rho^2(\cos\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho^2\cos\varphi \quad (> 0) \end{aligned}$$

Allora, considerata una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$, per il Teorema di Cambiamento di Variabile, vale

$$\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_{F^{-1}(A)} f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi)\rho^2\cos\varphi \; d\rho d\theta d\varphi$$

Esempio 4.2 (Integrale di Gauss in $\mathbb{R}$)**.**

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$$

Questo risultato è ben noto ed ora si mostrerà un modo esplicito per calcolarlo. Si consideri anzitutto l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy$$

risulta:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}\ dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\ dy\big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\big(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\ dy\big)dx = \int_{\mathbb{R}} I\ e^{-x^2}\ dx = I\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx = I^2\end{aligned}$$

D'altra parte, utilizzando il cambiamento di variabile in coordinate polari, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy = \int_{F^{-1}(\mathbb{R}^2)} e^{-\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\rho\ d\rho d\theta\ ,$$

ricordando che $F^{-1}(\mathbb{R}^2) = \,]\,0, +\infty\,[\, \times \,]-\pi, \pi\,[$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy &= \int_0^{+\infty} \big(\int_{-\pi}^{\pi} \rho\ e^{-\rho^2}d\theta\big)d\rho = 2\pi\int_0^{+\infty} \rho\ e^{-\rho^2}\ d\rho = \pi\int_0^{+\infty} 2\rho\ e^{-\rho^2}\ d\rho \\ &= \pi\big[-e^{-\rho^2}\big]_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \pi\ .\end{aligned}$$

Da questo risultato, osservando che $I > 0$, segue direttamente che $I = \sqrt{\pi}$.

Esempio 4.3 (Volume della sfera in coordinate polari).
L'insieme $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2, r \geq 0\}$ è la rappresentazione cartesiana di una sfera di raggio r in $\mathbb{R}^3$, per cui per trovarne il volume basta calcolare

$$\mu(A) = \int_A dxdydz \ .$$

Utilizzando il cambiamento di variabile in coordinate polari e osservando che $F^{-1}(A) =]\,0,r\,[\, \times\,]0,2\pi[\, \times\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, l'integrale precedente si può riscrivere:

$$\begin{aligned}\int_A dxdydz &= \int_{F^{-1}(A)} \rho^2\cos\varphi\ d\rho d\theta d\varphi = \int_{]0,r[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \Big(\int_0^{2\pi} \rho^2\cos\varphi\ d\theta\Big) d\rho d\varphi \\ &= \int_0^r 2\pi\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\cos\varphi\ d\varphi\Big)d\rho = \int_0^r 2\pi\ \rho^2\big[\sin\varphi\big]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\ d\rho \\ &=4\pi\int_0^r \rho^2 d\rho = 4\pi\Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

Esempio 4.4 (Volume dell'ellissoide).
L'ellissoide in $\mathbb{R}^3$ è rappresentato dall'insieme

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1,\ a,b,c \in \mathbb{R}^+\}\ ,$$

perciò il suo volume è dato dalla formula

$$\mu(A) = \int_A dxdydz \ .$$

Si consideri ora il seguente cambiamento di variabile

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

e il relativo diffeomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u,v,w) = (au,bv,cw)$, per cui vale

$$\mathscr{I}_F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det\mathscr{I}_F = abc \ \ (>0)\ ,$$

infine $F^{-1}(A) = \{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 \leq 1\}$, quindi l'integrale diventa

$$\int_A dxdydz = \int_{F^{-1}(A)} abc\ dudvdw = \text{(per quanto visto nell'esempio precedente)}$$
$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

Esempio 4.5 (Teorema di Guldino)**.**
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile, di misura finita. Considerando questo insieme come parte del semipiano xz di $\mathbb{R}^3$, con $x \geq 0$, il solido di rotazione generato da A intorno all'asse z si può scrivere come l'insieme

$$A_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in A \} .$$

Tale scrittura suggerisce immediatamente di effettuare il seguente cambiamento di varibile

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

che è associato al diffeomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$, per cui vale

$$\mathscr{I}_F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } \det\mathscr{I}_F = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho .$$

Il solido di rotazione generato da A si può quindi riscrivere nel modo seguente

$$A_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in]0, 2\pi[\ ,\ (\rho, z) \in A \} .$$

Prima di procedere con il calcolo del volume di A_1 si ricorda che le coordinate del baricentro B dell'insieme A si esprimono

$$B = (x_B, z_B) = \frac{1}{\mu_2(A)}\Big(\int_A x\ dxdz, \int_A z\ dxdx\Big) ,$$

dove $\mu_2(A)$ indica la misura in $\mathbb{R}^2$ dell'insieme A.

Ora, indicata con $\mu_3(A_1)$ la misura in $\mathbb{R}^3$,

$$\mu_3(A_1) = \int_{A_1} dxdydz = \int_{A_1} \rho \; d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} \big(\int_A \rho \; d\rho dz \big) d\theta = \int_0^{2\pi} \mu(A) x_B \; d\theta$$
$$= 2\pi \; x_B \; \mu(A) \; .$$

In questo esempio si è fatto riferimento ad un solido generato da una rotazione completa intorno all'asse z, il caso in cui si faccia ruotare l'insieme A di un generico angolo α, positivo e minore di 2π, è del tutto analogo a questo, sia nel risultato che nella dimostrazione, e si ottiene sostituendo α a 2π.

Appendice A

In questa Appendice si darà una dimostrazione dell'uguaglianza

$$\mu(T(C)) = |\det(T)|\mu(C)$$

utilizzata nelle fasi conclusive della dimostrazione del Teorema di cambiamento di variabile per l'integrale di Lebesgue.

Proposizione A.1. *Sia $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ tale che $\lambda_j > 0$ $\forall j = 1, 2, \ldots, n$. Sia poi Δ_λ la trasformazione lineare, $\Delta_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tale che $\Delta_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$.*
Δ_λ è invertibile e si ha

$$\Delta_\lambda^{-1} = \Delta_{\lambda^{-1}} \quad con \quad \lambda^{-1} = (\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}) \ , \quad e \quad |\det \Delta_\lambda| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \ .$$

Allora $\mu(\Delta_\eta(A)) = \det \Delta_\eta \ \mu(A)$, per ogni A misurabile in $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ con $\eta_j > 0$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$.

Dimostrazione. Sia C un cubo di $\mathbb{R}^n$:

$$C = [\alpha_1 - r \ , \ \alpha_1 + r] \times \ldots \times [\alpha_n - r \ , \ \alpha_n + r] \ .$$

Allora

$$\Delta_\lambda^{-1}(C) = \left[\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - \frac{r}{\lambda_1} \ , \ \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{r}{\lambda_1}\right] \times \ldots \times \left[\frac{\alpha_n}{\lambda_n} - \frac{r}{\lambda_n} \ , \ \frac{\alpha_n}{\lambda_n} + \frac{r}{\lambda_n}\right] \ .$$

Quindi

$$\int_{\Delta_\lambda^{-1}(C)} |\det \mathscr{J}_{\Delta_\lambda}| dy = \lambda_1 \ldots \lambda_n \ \mu(\Delta_\lambda^{-1}(C)) = \mu(C) \ ,$$

per il Lemma (4.7) questo implica

$$\mu(A) = \int_{\Delta_\lambda^{-1}(A)} |\det \mathscr{J}_\lambda| dy = \lambda_1 \dots \lambda_n \ \mu(\Delta_\lambda^{-1}(A))$$

per ogni insieme A misurabile in $\mathbb{R}^n$, oppure

$$\mu(\Delta_{(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n})}(A)) = \frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_n} \ \mu(\Delta_\lambda^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Se si indica con η il vettore $(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})$ si può scrivere:

$$\mu(\Delta_\eta(A)) = \det \Delta_\eta \ \mu(A)$$

$\forall A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n),\ \eta_j > 0\ \forall j$. □

Si ricorda che $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale se $T^{-1} = T^t$. Se T è ortogonale anche T^{-1} lo è, infatti $(T^{-1})^{-1} = T = (T^t)^t = (T^{-1})^t$, inoltre se T è ortogonale si ha, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$< Tx, Ty >=< TT^t x, y >=< x, y >$$

e nel caso in cui $y = x$ si ha $|Tx| = |x|$.

Proposizione A.2. *La misura di Lebesgue è invariante per le trasformazioni ortognonali.*

Dimostrazione. Si dimosterà prima la proposizione per i dischi di $\mathbb{R}^n$, successivamente si vedrà che ogni cubo è ricopribile attraverso una famiglia di dischi disgiunti e un insieme di misura nulla. Sia quindi $D(\alpha, r)$ il disco di centro α e raggio r, se T è una trasformazione ortogonale, segue che:

$$\begin{aligned} T(D(\alpha, r) =& \{T(x) \mid |x - \alpha| < r\} = \{y \mid |T^{-1}(y) - \alpha| < r\} \\ =& \{y \mid |T^{-1}(y - T(\alpha)| < r\} = \text{essendo } T^{-1} \text{ ortogonale} \\ & \{y \mid |y - T(\alpha)| < r\} = D(T(\alpha), r) \ , \end{aligned}$$

perciò

$$\mu(T(D(\alpha, r)) = \mu(D(T(\alpha), r)) = \omega_n \ r^n = \mu(D(\alpha, r)) \tag{A.1}$$

questo $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\forall r > 0$.

Per dimostrare la seconda parte della proposizione, si utilizza il seguente Teorema:

Teorema A.3 (*di ricoprimento di Besicovitch*).
Sia Ω un aperto non vuoto di misura finita di $\mathbb{R}^n$, esiste una famiglia $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di dischi aperti, $D_k \subseteq \Omega$ $\forall k \in \mathbb{N}$, tali che

(i) $D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$,

(ii) $\Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ *ha misura nulla.*

Dimostrazione. Anzitutto ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e tale che $\mu(\Omega) < +\infty$, si può scrivere come $\Omega = \Omega_1 \cap \Sigma_1 \cap M_1$, dove $\mu(M_1) = 0$, Ω_1 aperto e Σ_1 è unione numerabile di dischi aperti a due a due disgiunti. Inoltre $\Omega_1 \cap \Sigma_1 = \emptyset$, $\mu(\Omega_1) = (1 - a_n)\mu(\Omega)$, con $a_n = \frac{\omega_n}{2^n}$.

Sia $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di cubi con interni a due a due disgiunti tali che $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Se $C_k = C(\alpha_k, r_k)$ con $\alpha_k \in \mathbb{R}^n$ e $r_k > 0$, si pongono:

$$B_k = D(\alpha_k, r_k) \quad , \quad N_k = \partial C_k \cup \partial B_k \;\; e \;\; O_k = \overset{\circ}{C_k} \setminus \overline{B_k}$$

e si definiscono poi:

$$\Omega_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k \ , \quad \Sigma_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \;\; e \;\; M_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \ .$$

Definiti in questo modo questi insiemi rispettano le condizioni richieste inizialmente. Quindi la scomposizione ipotizzata è effettivamente possibile.
Ora, Ω_1 è aperto allora può essere scomposto nello stesso modo, esistono quindi Ω_2, Σ_2, M_2, con le caratteristiche precedenti, tali che $\Omega_1 = \Omega_2 \cup \Sigma_2 \cup M_2$, $\Omega_2 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ e $\mu(\Omega_2) = (1 - \alpha_n)\mu(\Omega_1)$. Allora

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 \cup \Sigma_1 \cup M_1 = \Omega_2 \cup \Sigma_2 \cup M_2 \cup \Sigma_1 \cup M_1 \\ &= \Omega_2 \cup (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cup (M_1 \cup M_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{con } \Omega_2 \cap \Sigma_1 = \emptyset = \Omega_2 \cap \Sigma_2 \ , \ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset \ , \ \mu(\Omega_2) = (1 - \alpha_n)^2 \\ &\text{e } \mu(M_1) = \mu(M_2) = 0 \ . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Iterando il procedimento si ottengono tre successioni di insiemi:

$$(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad , \quad (\Sigma_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\; e \;\; (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

$$\text{tali che} \qquad \Omega = \Omega_p \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{p}\Sigma_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{p} M_k\Big) \tag{A.3}$$

inoltre Ω_k è aperto e $\Omega_k \supseteq \Omega_{k+1}$ e valgono tutte le condizioni (A.2) generalizzate ad ogni k.
Sia ora, per definizione,

$$\Sigma^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Sigma_k \quad e \quad M^* = \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\Big) \cup \Big(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \Omega_p\Big)\ ,$$

si vede subito che Σ^* è unione di dischi aperti a due a due disgiunti e contenuti in Ω. Inoltre

$$\begin{aligned}\mu(M^*) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k) + \mu\Big(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \Omega_p\Big) &= \mu\Big(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \Omega_p\Big)\\ \leq \mu(\Omega_q) = (1-\alpha_n)^q \mu(\Omega) &\qquad \forall q \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

essendo poi $0 < 1 - \alpha_n < 1$ si ha $(1-\alpha_n)^q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\mu(M^*) = 0$; infine, per la (A.3) si ha

$$\Omega = \Sigma^* \cup M^*$$

e il teorema risulta dimostrato. $\square$

Corollario A.4. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $\mu(A) < +\infty$, $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ *e* $\mu(\partial A) = 0$. *Allora esiste* $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *famiglia di dischi, tale che* $D_h \cap D_j = \emptyset \quad \forall h \neq j$, $D_k \subseteq A \quad \forall k \in \mathbb{N}$ *e che*

$$\mu\Big(A \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k\Big) = 0\ .$$

Dimostrazione. Si applica i teorema precedente a $\Omega := \overset{\circ}{A}$ dopo aver osservato che $A \setminus \Omega \subseteq \partial A$ e che quindi $\mu(A \setminus \Omega) = 0$. $\square$

Sia quindi C un cubo di $\mathbb{R}^n$ esiste allora una famiglia di dischi $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$, a due a due disgiunti, e un insieme H di misura nulla tale che

$$C = \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k\Big) \cup H$$

Allora se $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ed è ortogonale, in particolare è un diffeomorfismo, allora per la (4.10) $\mu(T(H)) = 0$ e per (A.1) $\mu(T(D_k)) = \mu(D_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Segue quindi che

$$\mu(T(C)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(T(D_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k) = \mu(C) \tag{A.4}$$

si osservi ora che per ogni matrice ortogonale T

$$(\det T)^2 = (\det T)(\det T^t) = \det(TT^t) = \det(TT^{-1}) = \det(I_n) = 1 \ ,$$

perciò

$$\int_{T^{-1}(C)} |\det \mathscr{J}|dy = \mu(T^{-1}(C)) = (\text{per quanto appena dimostrato}) \ \mu(C)$$

per ogni C cubo di $\mathbb{R}^n$. Per il Lemma 4.7 queso implica che $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$, per ogni T^{-1} ortogonale, che, proprio perchè T^{-1} è ortogonale se e solo se T lo è, è equivalente a:

$$\mu(A) = \mu(T(A)) \qquad \forall A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n) \ .$$

□

Teorema A.5 (*di Beltrami*)**.** *Sia T una trasformazione in* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *tale che* $\det T \neq 0$. *Esistono due trasformazioni ortogonali V e W e una trasformazione diagonale* Δ_λ *che ha per valori il vettore* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *tali che*

$$T = W \circ \Delta_\lambda \circ V$$

Ogni trasformazione $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ si può quindi esprimere come composizione di due trasformazioni ortogonali e di una diagonale. Segue direttamente da questo fatto la seguente Proposizione:

Proposizione A.6 (*cambiamento di variabile lineare*)**.** *Sia* $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *con* $\det T \neq 0$. *Allora*

$$\mu(T(C)) = |\det T|\mu(C) \tag{A.5}$$

per ogni C cubo di $\mathbb{R}^n$ *e quindi, per il Lemma 4.7, per ogni insieme misurabile di* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia C un cubo di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned}\mu(T(C)) &= \text{(per il Teorema di Beltrami) } \mu((W \circ \Delta_\lambda \circ V)(C)) = \mu((\Delta_\lambda \circ V)(C)) \\ &= \det \Delta_\lambda \ \mu(V(C)) = \det \Delta_\lambda \mu(C) \ .\end{aligned}$$

questo prova la proposizione in quanto

$$|\det T| = |\det W \det \Delta_\lambda \det V| = \det \Delta_\lambda \ .$$

□

Bibliografia

[1] U.Bottazzini, *Il flauto di Hilbert: storia della matematica*, Utet Libreiria , 2003.

[2] R. L. Wheeden, *Measure and integral, an introduction to Real analysis*, Marcel Dekker, Inc. , 1977.

[3] E. Lanconelli *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 1*, Pitagora Editrice Bologna, 1998.

[4] E. Lanconelli *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 2, Prima Parte*, Pitagora Editrice Bologna, 2000.