

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

La base di Bernstein in
spazi polinomiali generalizzati

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giulio Casciola

Presentata da:
Giulia Sacchi

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Introduzione

La densità dell'insieme delle funzioni polinomiali in quello delle funzioni continue (teorema di Weierstrass) ci dice che possiamo utilizzare le prime per approssimare le seconde. Alcuni vantaggi di questa scelta sono il fatto che, a differenza di altre funzioni, per i polinomi e le loro derivate e primitive, si ha una rappresentazione semplice ed efficace attraverso i loro coefficienti, nonché l'esistenza di algoritmi rapidi e stabili per la valutazione. Inoltre, gli spazi polinomiali \mathbb{P}_n dei polinomi di grado minore o uguale a $n \in \mathbb{N}$ godono di importanti proprietà, come ad esempio il limite superiore al numero di zeri dei loro elementi, che vedremo meglio in seguito.

Perché allora spostarsi su altri spazi funzionali? Per un discorso di precisione. Quella che si ottiene con i polinomi è molte volte solo un'approssimazione, che può essere sufficiente se il risultato è fine a se stesso, ma inadeguata nel momento in cui il grafico ottenuto deve essere il punto di partenza per un nuovo studio. Curve classiche come archi di circonferenza, cicloidi, eliche, ecc., sono molto utilizzate, ad esempio, in ambito ingegneristico, dove sono la base di progetti edili o quant'altro. Ecco dunque la necessità di scegliere spazi di lavoro che contengano le parametrizzazioni delle curve menzionate, e in generale di curve non polinomiali, per ottenere rappresentazioni esatte.

Questo è possibile grazie alla maggiore potenza degli odierni calcolatori, che possono computare con la stessa efficienza anche cose più complesse dei calcoli necessari per utilizzare unicamente polinomi.

Tuttavia la sola potenza di calcolo non basta: un altro requisito fondamentale è il buon condizionamento dei problemi da trattare. Esso garantisce risultati attendibili, in cui gli inevitabili errori di arrotondamento dovuti alla discretizzazione del continuo dei numeri reali in aritmetica finita rimangono contenuti e non hanno un'influenza significativa. Negli spazi \mathbb{P}_n è la base di rappresentazione di Bernstein a fornire quanto detto. Dallo studio degli spazi non polinomiali è emerso che anche questi ultimi, sotto opportune ipotesi, ammettono una base di rappresentazione numericamente ottima [3].

In questa tesi verranno inizialmente date le definizioni e alcune prime proprietà della base di Bernstein e delle curve di Bézier negli spazi polinomiali.

Nel secondo capitolo si passerà all'introduzione di spazi polinomiali generalizzati, gli spazi di Chebyshev estesi (spazi EC), e verrà dato un metodo per costruirli a partire da opportuni sistemi di funzioni dette funzioni peso.

Il problema dell'esistenza di un analogo della base di Bernstein negli spazi di Chebyshev estesi sarà trattato nel terzo capitolo: dal legame tra la base di Bern-

stein polinomiale e le funzioni soluzione di particolari problemi di interpolazione alla Hermite, le funzioni di transizione, si dedurrà per analogia un metodo per costruire la base di Bernstein generalizzata agli spazi EC.

Infine, nel quarto capitolo, verrà studiato il problema delle lunghezze critiche di uno spazio EC: si tratta di determinare l'ampiezza dell'intervallo oltre la quale lo spazio considerato perde le proprietà di uno spazio EC, o non possiede più una base di Bernstein generalizzata; l'approccio adottato è di tipo sperimentale: saranno presentati i risultati ottenuti attraverso algoritmi di ricerca che analizzano le proprietà delle funzioni di transizione e ne traggono informazioni sullo spazio di studio.

Indice

Introduzione	3
1 Nozioni preliminari	7
1.1 La base di Bernstein per gli spazi \mathbb{P}_n	7
1.2 Le curve di Bézier	9
2 Spazi polinomiali generalizzati	11
2.1 Spazi di Chebyshev estesi e funzioni peso	12
2.2 Derivate generalizzate	14
3 Base di Bernstein generalizzata	17
3.1 Il concetto di B-base e alcune proprietà	17
3.2 Funzioni di transizione e base di Bernstein	22
3.3 Ottenere informazioni dalle funzioni di transizione	28
4 Lunghezza critica ed esempi	31
4.1 Un approccio sperimentale	32
4.1.1 Spazi polinomiali	32
4.1.2 Gli spazi misti trigonometrici-polinomiali Γ_n	33
4.1.3 Gli spazi iperbolici di dimensione 3 e 4	33
4.1.4 Spazi misti iperbolici-trigonometrici	37
4.2 Esempi di curve di Bézier su Γ_3	41
4.2.1 La cicloide come curva di Bézier nel piano	43
4.2.2 L'elica come curva di Bézier nello spazio	45
Lista delle figure	47
Bibliografia	49

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 La base di Bernstein per gli spazi \mathbb{P}_n

La base di Bernstein per gli spazi \mathbb{P}_n , con $n \in \mathbb{N}$, è famosa per le sue proprietà, che la rendono una base ottimale per il calcolo numerico [3] e per il disegno al calcolatore [4]. È definita come segue:

$$\mathcal{B} = (B_{0,n}, \dots, B_{n,n}), \quad \text{con}$$

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, \dots, n, \quad (1.1)$$

e si può facilmente trasportare in un intervallo generico $[a, b]$ chiuso e limitato attraverso una riparametrizzazione. In questa trattazione, salvo diversamente indicato, la base di Bernstein sarà considerata su $[0, 1]$.

Alcune proprietà:

- (i) **Totale positività.** La base \mathcal{B} è totalmente positiva, cioè presa una qualunque $(n+1)$ -upla ordinata di punti $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$, la matrice

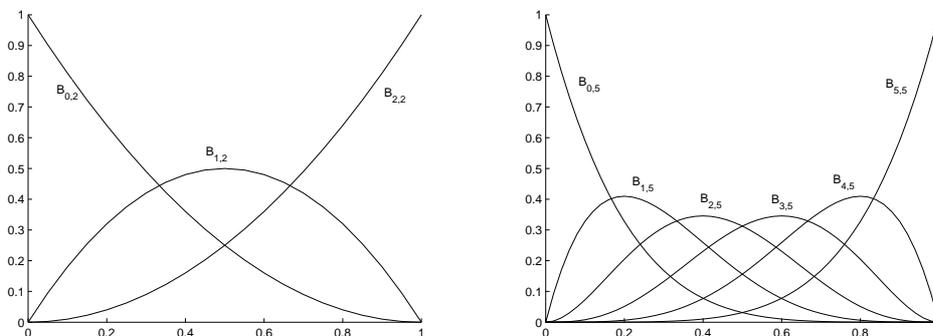


Figura 1.1: Grafici della base di Bernstein di \mathbb{P}_2 e \mathbb{P}_5 .

di collocazione,

$$\begin{pmatrix} B_{0,n}(t_0) & \dots & B_{n,n}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,n}(t_n) & \dots & B_{n,n}(t_n) \end{pmatrix}$$

ha tutti i minori non negativi.

In particolare, $B_{i,n}(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, per ogni $i = 0, \dots, n$.

Inoltre $B_{i,n}(t) > 0$ per ogni $t \in]0, 1[$, per ogni $i = 0, \dots, n$.

(ii) **Partizione dell'unità.** Per \mathcal{B} vale:

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Si dice anche che la base di Bernstein è normalizzata. Questa proprietà si verifica notando che i polinomi di base sono le componenti dell'espansione binomiale di $[(1-t) + t]^n$.

(iii) **Valori agli estremi.** Per un polinomio scritto in base di Bernstein

$$p(t) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(t),$$

vale $p(0) = c_0$ e $p(1) = c_n$.

(iv) **Diminuzione della variazione.** Da (i) e (ii) deriva la proprietà di diminuzione della variazione, cioè per un polinomio scritto in base di Bernstein il numero di radici in $]0, 1[$ non supera il numero delle variazioni di segno dei suoi coefficienti.

(v) **Ricorsività.** La base di grado n può essere generata dalla base di grado $n-1$ secondo la formula ricorsiva:

$$B_{i,n}(t) = tB_{i-1,n-1}(t) + (1-t)B_{i,n-1}(t) \quad i = 0, \dots, n, \quad (1.2)$$

dove $B_{i,n} \equiv 0$ se $i < 0$ o $i > n$, e $B_{0,0} \equiv 1$. Questa formula fornisce un algoritmo efficiente e stabile per la valutazione dei polinomi di base. Un altro importante algoritmo, che riguarda la valutazione di un polinomio scritto in base di Bernstein è l'algoritmo di de Casteljau.

(vi) **Espressione della derivata.** Per gli elementi della base di Bernstein vale:

$$B'_{i,n}(t) = n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)), \quad t \in [0, 1]; \quad (1.3)$$

Allora per la derivata di un polinomio scritto in base di Bernstein vale:

$$p'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1} - c_i) B_{i,n-1}(t), \quad (1.4)$$

e quindi, dalla condizione (iii) si ha: $p'(0) = n(c_1 - c_0)$ e $p'(1) = n(c_n - c_{n-1})$.

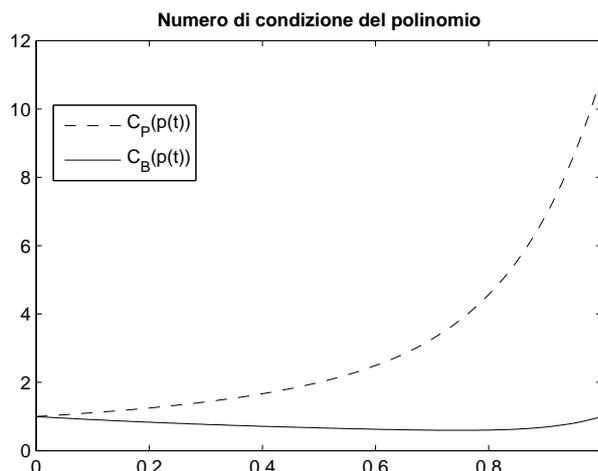


Figura 1.2: Numeri di condizione per la valutazione del polinomio $1 - t + t^2 - \dots + t^{10}$ in base monomiale ($C_P(p(t))$) e in base di Bernstein ($C_B(p(t))$) a confronto.

- (vii) **Condizionamento ottimale.** Il numero di condizione per la valutazione di un polinomio scritto in una base Φ :

$$p(t) = \sum_{i=0}^n c_i \Phi_i(t),$$

è dato da:

$$C_{\Phi}(p(t)) := \sum_{i=0}^n |c_i \Phi_i(t)|.$$

Il numero di condizione per la valutazione di un polinomio scritto in base di Bernstein è sempre minore del numero di condizione per la valutazione dello stesso polinomio scritto in una qualsiasi altra base ottenuta come combinazione lineare non negativa degli elementi della base di Bernstein, come la base monomiale. In figura (1.2) sono riportati come esempio i numeri di condizione per la valutazione di un polinomio di grado 10.

1.2 Le curve di Bézier

Una curva di Bézier è una curva piana (o nello spazio \mathbb{R}^3) della forma:

$$r(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,n}(t) \tag{1.5}$$

dove $p_i \in \mathbb{R}^2$ (rispettivamente \mathbb{R}^3) per ogni i , e sono detti punti di controllo. La poligonale individuata da p_0, \dots, p_n nell'ordine è detta poligonale di controllo. La definizione si può dare anche in \mathbb{R}^m con $m > 3$.

Le curve di Bézier ereditano dalle proprietà della base di Bernstein alcune importanti caratteristiche:

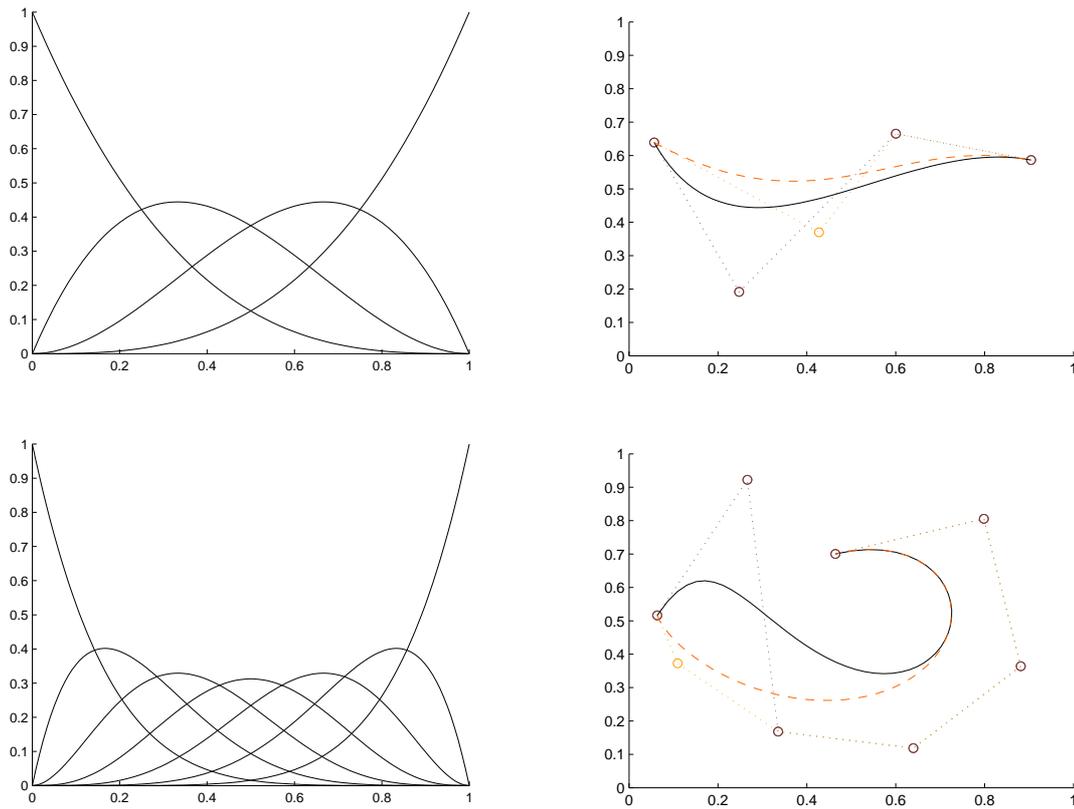


Figura 1.3: Esempi di curve piane di Bézier (a destra), in cui un punto di controllo è stato spostato, e relative basi di Bernstein (a sinistra) in \mathbb{P}_3 (sopra) e \mathbb{P}_6 (sotto).

1. Dalla non negatività e dalla partizione dell'unità deriva il confinamento di $r(t)$ dentro la chiusura convessa della poligonale di controllo.
2. Dalla proprietà di diminuzione della variazione si ha che, data una retta qualsiasi in \mathbb{R}^2 (rispettivamente un piano in \mathbb{R}^3), il numero di intersezioni che questa ha con la curva è sempre minore o uguale al numero di intersezioni che ha con la poligonale di controllo.
3. Dalle condizioni al bordo si ottiene che $r(0) = p_0$ e $r(1) = p_n$, inoltre $r(t)$ è tangente alla poligonale di controllo in p_0 e p_n .

Capitolo 2

Spazi polinomiali generalizzati

In questo capitolo presentiamo una generalizzazione degli spazi polinomiali: gli spazi di Chebyshev estesi, o spazi EC. Si tratta di spazi vettoriali funzionali costruiti in modo che vengano rispettate tre proprietà fondamentali degli spazi polinomiali [9]:

- I polinomi di grado n , elementi dello spazio $(n+1)$ -dimensionale \mathbb{P}_n , hanno al più n radici reali (contate con molteplicità). Vorremo allora che gli elementi di uno spazio di Chebyshev esteso di dimensione $n + 1$, sia \mathbb{E} , abbiano al più n zeri nell'intervallo di definizione I (che in generale non sarà tutto \mathbb{R} , ma un suo intervallo chiuso e limitato).
- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo una catena di inclusioni strette di spazi polinomiali:

$$\mathbb{P}_n \supset \mathbb{P}_{n-1} \supset \dots \supset \mathbb{P}_1 \supset \mathbb{P}_0.$$

Analogamente chiederemo che dato uno spazio di Chebyshev esteso di dim $n + 1$, sia \mathbb{E}_n , esistano spazi (sempre di Chebyshev estesi) \mathbb{E}_i per $i = 0, 1, \dots, n - 1$, tali che

$$\mathbb{E}_n \supset \mathbb{E}_{n-1} \supset \dots \supset \mathbb{E}_1 \supset \mathbb{E}_0.$$

Questa proprietà è necessaria, ad esempio, per generalizzare il concetto di *differenze divise* e quindi l'interpolazione di Newton.

- Infine, indicato con \mathcal{D} l'operatore di derivazione classico si ha che

$$\mathcal{D}\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

cioè la classe degli spazi polinomiali è chiusa rispetto alla derivazione usuale, ovvero lo spazio ottenuto dalla derivazione di uno spazio polinomiale di dimensione $n + 1$ è ancora polinomiale, di dimensione n . Queste due proprietà non sono in generale verificate dagli spazi di Chebyshev estesi. Al fine di riottenerle definiremo in seguito nuovi operatori di derivazione. Casi particolarmente interessanti, sui quali ci focalizzeremo, si hanno quando alcune di queste derivate generalizzate coincidono con la derivazione usuale.

2.1 Spazi di Chebyshev estesi e funzioni peso

Definizione 2.1 (Spazio di Chebyshev esteso). Dato un intervallo reale chiuso e limitato I , sia $\mathbb{E} \subset C^n(I)$ uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$. Tale \mathbb{E} è uno *spazio di Chebyshev esteso* (o *spazio EC*) su I se ogni funzione $f \in \mathbb{E}$ non identicamente nulla ha al più n zeri su I , contati con molteplicità; equivalentemente questa condizione si esprime dicendo che ogni problema di interpolazione alla Hermite su $n + 1$ punti in I ammette un'unica soluzione in \mathbb{E} .

Osservazione 1. La classe di tutti gli spazi EC su un dato intervallo I è chiusa rispetto a integrazione e moltiplicazione per funzioni regolari positive.

Dimostrazione. Basta notare che se una funzione ha n zeri (contati con molteplicità), la funzione integrale associata ne ha al più $n + 1$. Se invece si moltiplica per una funzione regolare (almeno C^n perché uno spazio EC è contenuto in C^n per definizione) positiva non si aumenta il numero degli zeri. \square

Osservazione 2. La classe di tutti gli spazi EC su un dato intervallo I non è chiusa rispetto alla derivazione usuale.

Esempio. $\mathcal{T}_1 = \text{span}\{1, \sin(t), \cos(t)\}$ è spazio EC su $[a, b]$ se e solo se $b - a < 2\pi$; infatti, se per esempio $b - a \geq 2\pi$, $\sin(t)$ si annulla almeno tre volte, non solo due. Se si considera lo spazio $\mathcal{DT}_1 = \text{span}\{\sin(t), \cos(t)\}$ si ha che questo è spazio EC solo per $b - a < \pi$, infatti se $b - a = \pi$, $\sin(t)$ ha due zeri nell'intervallo, anziché uno solo.

Si dimostra che, lavorando su un intervallo chiuso e limitato, la proprietà relativa alle catene di spazi è verificata [9].

Per ottenere invece la chiusura della classe degli spazi EC rispetto alla derivazione procediamo nel seguente modo.

Definizione 2.2. Un *sistema di funzioni peso* $(\omega_0, \dots, \omega_n)$ su I è una $(n + 1)$ -upla di funzioni strettamente positive su I t.c. $\omega_i \in C^{n-i}(I)$, per ogni $i = 0, \dots, n$.

Definizione 2.3. Dato un sistema di funzioni peso $(\omega_0, \dots, \omega_n)$ su I , si dicono *monomi generalizzati* le funzioni definite come:

$$\begin{aligned} U_0(t) &:= \omega_0(t), \\ U_i(t) &:= \omega_0(t) \int_a^t \omega_1(\xi_1) \int_a^{\xi_1} \omega_2(\xi_2) \dots \int_a^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_1, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove a è un punto generico di I .

Osservazione 3. $U_i \in C^n(I)$ per ogni $i = 0, \dots, n$.

Proposizione 2.1. Lo spazio $\mathbb{E}_n = \text{span}(U_0, \dots, U_n)$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$, e U_0, \dots, U_n è base canonica.

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo $I = [0, 1]$ e $a = 0$. Sotto queste ipotesi tutte le U_i sono non negative.

• *Ogni U_i ha esattamente uno zero, di molteplicità i in 0 .* Infatti: $U_0(t) = \omega_0(t) > 0$ per ogni $t \in I$:

Fissiamo $i \in 1, \dots, n$;

$$U_i(t) = \omega_0(t) \int_0^t \omega_1(\xi_1) \int_0^{\xi_1} \omega_2(\xi_2) \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_1;$$

$U_i(t) = 0$ se $t = 0$, ed essendo crescente in I , non ammette altri zeri. Dimostriamo ora che $U_i^{(j)}(0) = 0$ per $j = 1, \dots, i - 1$ e $U_i^{(i)}(0) \neq 0$.

Per $j = 1$:

$$U_i'(t) = \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} U_i(t) + \omega_0(t) \omega_1(t) \int_0^t \omega_2(\xi_2) \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_2$$

si verifica facilmente che $U_i'(0) = 0$.

Per $j = 2$:

$$\begin{aligned} U_i''(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} \right) U_i(t) + \frac{\omega_0'(t)}{\omega_0(t)} U_i'(t) + \dots \\ &\dots + \frac{d}{dt} (\omega_0(t) \omega_1(t)) \int_0^t \omega_2(\xi_2) \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_2 + \dots \\ &\dots + \omega_0(t) \omega_1(t) \omega_2(t) \int_0^t \omega_3(\xi_3) \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_3 \end{aligned}$$

e anche in questo caso $U_i''(0) = 0$. Procedendo con le derivate successive si ottiene che $U_i^{(j)}(0) = 0$ per $j = 1, \dots, i - 1$.

Consideriamo ora $j = i$: calcolando le derivate si dimostra che

$$\begin{aligned} U_i^{(i)}(t) &= a_1(t) \int_0^t \omega_1(\xi_1) \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_1 + \\ &+ a_2(t) \int_0^t \omega_2(\xi_2) \dots \int_0^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_2 + \dots \\ &\dots + a_{i-1}(t) \int_0^t \omega_{i-1}(\xi_{i-1}) \int_0^{\xi_{i-1}} \omega_i(\xi_i) d\xi_i d\xi_{i-1} + \omega_0(t) \dots \omega_i(t), \end{aligned}$$

dove $a_1(t), \dots, a_{i-1}(t)$ sono combinazioni lineari delle derivate delle funzioni peso. Indipendentemente dal valore assunto dalle a_j in 0 , si ha

$$U_i^{(i)}(0) = \omega_0(0) \dots \omega_i(0) > 0,$$

allora ogni U_i ha esattamente i radici, tutte situate nel punto 0 , e quindi, se U_0, \dots, U_n è base, è proprio la base canonica.

• *Le U_i sono linearmente indipendenti.* Infatti mostriamo che, affinché una qualsiasi combinazione lineare a coefficienti $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{i=0}^n c_i U_i(t)$$

sia la funzione identicamente nulla, tutti i c_i devono essere nulli. Valutiamo f e le sue derivate successive in 0:

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= \sum_{i=0}^n c_i U_i(0) = c_0 U_0(0) \Rightarrow c_0 = 0 \\ 0 = f'(0) &= \sum_{i=1}^n c_i U_i'(0) = c_1 U_1'(0) \Rightarrow c_1 = 0 \\ &\dots \\ 0 = f^{(n)}(0) &= \sum_{i=n}^n c_i U_i^{(n)}(0) = c_n U_n^{(n)}(0) \Rightarrow c_n = 0 \end{aligned}$$

e quindi tutti i coefficienti sono nulli. \square

Vedremo nella prossima sezione che $\mathbb{E}_n = \text{span}(U_0, \dots, U_n)$ è spazio EC.

2.2 Derivate generalizzate

Fissato un sistema di funzioni peso $(\omega_0, \dots, \omega_n)$ le derivate generalizzate associate a tale sistema sono definite come segue:

$$\mathcal{L}_0 f := \frac{f}{\omega_0}, \quad \mathcal{L}_i f := \frac{\mathcal{D}\mathcal{L}_{i-1}f}{\omega_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Per ogni $i = 0, \dots, n$, \mathcal{L}_i è un operatore differenziale lineare di ordine i . Ora, poiché la classe degli spazi EC è chiusa rispetto a integrazione e prodotto per funzioni positive, l'insieme

$$EC(\omega_0, \dots, \omega_n) := \{f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \text{ t.c. } \mathcal{L}_n f \text{ è costante su } I\}$$

è uno spazio di Chebyshev generalizzato di dimensione $n + 1$ su I .

Proposizione 2.2. *Per ogni sistema di funzioni peso $(\omega_0, \dots, \omega_n)$*

$$EC(\omega_0, \dots, \omega_n) = \text{span}(U_0, \dots, U_n),$$

dove le U_i sono definite come in (2.1).

Dimostrazione. Poiché entrambi gli spazi considerati hanno dimensione $n + 1$ sarà sufficiente mostrare che ogni funzione $f \in EC(\omega_0, \dots, \omega_n)$ si scrive come combinazione lineare dei monomi generalizzati U_i con coefficienti univocamente determinati dalla f stessa.

Per definizione, se $f \in EC(\omega_0, \dots, \omega_n)$ si ha:

$$\mathcal{L}_n f = \alpha_n \text{ costante.}$$

Ora,

$$\mathcal{L}_n f := \frac{\mathcal{D}\mathcal{L}_{n-1}f}{\omega_n}$$

quindi

$$\mathcal{D}\mathcal{L}_{n-1}f = \alpha_n\omega_n.$$

Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, scelto a in I ,

$$\mathcal{L}_{n-1}f(t) = \alpha_{n-1} + \alpha_n \int_a^t \omega_n(\xi_n)d\xi_n, \quad \text{con } \alpha_{n-1} = \mathcal{L}_{n-1}f(a).$$

A questo punto consideriamo l' $(n-1)$ -esimo operatore di derivazione generalizzato:

$$\mathcal{L}_{n-1}f = \frac{\mathcal{D}\mathcal{L}_{n-2}f}{\omega_{n-1}}.$$

Abbiamo:

$$\mathcal{D}\mathcal{L}_{n-2}f = \omega_{n-1}\mathcal{L}_{n-1}f = \alpha_{n-1}\omega_{n-1} + \alpha_n\omega_{n-1} \int_a^t \omega_n(\xi_n)d\xi_n,$$

come prima applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-2}f(t) &= \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \int_a^t \omega_{n-1}(\xi_{n-1})d\xi_{n-1} + \dots \\ &\dots + \alpha_n \int_a^t \omega_{n-1}(\xi_{n-1}) \int_a^{\xi_{n-1}} \omega_n(\xi_n)d\xi_n d\xi_{n-1}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\alpha_{n-2} = \mathcal{L}_{n-2}f(a)$.

Procedendo analogamente per moltiplicazioni e integrazioni successive e ponendo $\alpha_i = \mathcal{L}_i f(a)$, per $i = n-3, \dots, 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha_0\omega_0(t) + \alpha_1\omega_0(t) \int_0^t \omega_1(\xi_1)d\xi_1 + \dots \\ &\dots + \alpha_n\omega_0(t) \int_a^t \omega_1(\xi_1) \int_a^{\xi_1} \omega_2(\xi_2) \dots \int_a^{\xi_{n-1}} \omega_n(\xi_n)d\xi_n \dots d\xi_1 = \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i U_i(t). \end{aligned}$$

Allora poiché ogni $f \in EC(\omega_0, \dots, \omega_n)$ si scrive in modo univoco come combinazione lineare degli elementi di una base di $\text{span}(U_0, \dots, U_n)$, gli spazi $EC(\omega_0, \dots, \omega_n)$ e $\text{span}(U_0, \dots, U_n)$ coincidono. \square

Osservazione 4. $\mathbb{E}_n = \text{span}(U_0, \dots, U_n)$ è spazio EC (perché lo è $EC(\omega_0, \dots, \omega_n)$).

Osservazione 5. È chiaro che con questa definizione di derivazione si ha

$$\mathcal{L}_i EC(\omega_0, \dots, \omega_n) = EC(\omega_i, \dots, \omega_n).$$

Osservazione 6. Si riconosce facilmente che, se $(\omega_0, \dots, \omega_n) = (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})$, dove $\mathbf{1}$ è la funzione costante 1, gli operatori di derivazione generalizzati non sono altro che la derivazione classica e

$$EC(\underbrace{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}_{n+1}) = \mathbb{P}_n.$$

Ritroviamo così gli spazi polinomiali come caso particolare degli spazi EC.

Infine si dimostra che per ogni spazio EC di dimensione $n + 1$ \mathbb{E} esiste un sistema di funzioni peso $(\omega_0, \dots, \omega_n)$ tale che $\mathbb{E} = EC(\omega_0, \dots, \omega_n)$ [8].

Capitolo 3

Base di Bernstein generalizzata

3.1 Il concetto di B-base e alcune proprietà

Ora che abbiamo un metodo per costruire spazi polinomiali generalizzati è utile chiedersi se questi ammettono basi “privilegiate” dal punto di vista numerico e del design, e sotto quali condizioni.

In questa sezione consideriamo uno spazio funzionale U $(n + 1)$ -dimensionale qualunque, su un intervallo reale chiuso e limitato $I = [a, b]$.

Definizione 3.1. Una base totalmente positiva di U , sia (u_0, \dots, u_n) , è detta *B-base* se per ogni $i, j = 0, \dots, n$, $i \neq j$ vale:

$$\inf_{\substack{t \in I \\ u_j(t) \neq 0}} \frac{u_i(t)}{u_j(t)} = 0.$$

Definizione 3.2. Una base (u_0, \dots, u_n) di U è normalizzata quando:

$$\sum_{i=0}^n u_i(t) = 1, \quad \forall t \in I.$$

Osservazione 7. La base di Bernstein per \mathbb{P}_n su $[0, 1]$ è B-base normalizzata (vale anche se si considera \mathbb{P}_n su un intervallo $[a, b]$ qualsiasi).

Dimostrazione. È una semplice verifica. Come già detto nel capitolo 1, la base di Bernstein è totalmente positiva e normalizzata. Inoltre si ha che, presi i, j arbitrari in $\{0, \dots, n\}$, con $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{t \in [0,1] \\ B_{j,n}(t) \neq 0}} \frac{B_{i,n}(t)}{B_{j,n}(t)} &= \inf_{t \in]0,1[} \frac{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}{\binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j} = \\ (se \ i < \ j) &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{j}} \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1-t)^{j-i}}{t^{j-i}} = 0; \\ (se \ i > \ j) &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{j}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{i-j}}{(1-t)^{i-j}} = 0. \end{aligned}$$

□

Si noti che per le B-basi normalizzate valgono le proprietà (i), (ii) e analogo di (iv) della base di Bernstein enunciate nel capitolo 1. Quindi possiamo pensare alle B-basi normalizzate come ad una generalizzazione della base di Bernstein in spazi non polinomiali.

Sulle B-basi sono stati dimostrati i seguenti risultati [7]:

Proposizione 3.1. (Esistenza di una B-base)

Se uno spazio vettoriale funzionale ammette una base totalmente positiva (rispettivamente totalmente positiva e normalizzata) allora ammette una B-base (rispettivamente una B-base normalizzata).

Proposizione 3.2. (Unicità della B-base normalizzata)

Sia (u_0, \dots, u_n) una B-base di U . Ogni altra B-base di U è della forma $(a_0 u_0, \dots, a_n u_n)$, con $a_i > 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$.

Se (u_0, \dots, u_n) è normalizzata allora $(a_0 u_0, \dots, a_n u_n)$ è normalizzata se e solo se $a_i = 1$ per ogni $i = 0, \dots, n$; cioè la B-base normalizzata se esiste è unica.

Proposizione 3.3. *Sia U uno spazio vettoriale $(n+1)$ -dimensionale di funzioni definite su $[a, b]$ e di classe C^n su $[a, b]$. Se (u_0, \dots, u_n) è un sistema di funzioni di U tali che, per ogni $i = 0, \dots, n$:*

$$u_i^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, \dots, i-1, \quad (3.1)$$

$$u_i^{(i)}(a) \neq 0, \quad (3.2)$$

oppure

$$u_i^{(j)}(b) = 0, \quad j = 0, \dots, n-i-1, \quad (3.3)$$

$$u_i^{(n-i)}(b) \neq 0, \quad (3.4)$$

allora (u_0, \dots, u_n) è una base di U .

Dimostrazione. (u_0, \dots, u_n) è un sistema di $n+1$ vettori, quindi per provare che è una base basterà mostrare che sono linearmente indipendenti. Poniamo allora:

$$\sum_{i=0}^n c_i u_i \equiv 0$$

e vediamo che, affinché l'uguaglianza sia verificata, tutti i coefficienti c_i devono essere nulli.

Supponiamo valgano le prime due condizioni in ipotesi. Valutiamo in a :

$$0 = \sum_{i=0}^n c_i u_i(a) = c_0 u_0(a).$$

Poiché $u_0(a) \neq 0$ per ipotesi, $c_0 = 0$.

Derivando l'identità iniziale,

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i' \equiv 0$$

e valutando nuovamente in a si ottiene:

$$0 = \sum_{i=1}^n c_i u'_i(a) = c_1 u'_1(a);$$

come prima si conclude che $c_1 = 0$. Iterando il ragionamento per le derivate successive si ricava che $c_i = 0$ per ogni $i = 2, \dots, n$, da cui la tesi.

Nel caso valgano le condizioni su b la dimostrazione è analoga. \square

Teorema 3.1. (Condizioni sufficienti per avere una B-base)

Sia U uno spazio vettoriale $(n+1)$ -dimensionale di funzioni definite su $[a, b]$ e di classe C^n su $[a, b]$. Se (u_0, \dots, u_n) è un sistema di funzioni di U tali che, per ogni $i = 0, \dots, n$:

$$u_i^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, \dots, i-1, \quad (3.5)$$

$$u_i^{(i)}(a) > 0, \quad (3.6)$$

$$u_i^{(j)}(b) = 0, \quad j = 0, \dots, n-i-1, \quad (3.7)$$

$$u_i^{(n-i)}(b) \neq 0, \quad (3.8)$$

allora:

- (i) Se U ammette una base totalmente positiva allora (u_0, \dots, u_n) è B-base di U .
- (ii) Se U ammette una base totalmente positiva e normalizzata allora esistono $\alpha_0, \dots, \alpha_n > 0$ tali che $(\alpha_0 u_0, \dots, \alpha_n u_n)$ è la B-base normalizzata di U .

Prima della dimostrazione enunciamo il seguente lemma:

Lemma 3.2. Per una base totalmente positiva (b_0, \dots, b_n) di uno spazio funzionale $U \subset C^n([a, b])$ vale che, per ogni $i, j = 0, \dots, n$, $i \neq j$, la funzione

$$\frac{b_i(t)}{b_j(t)}$$

definita su $\{t \in [a, b] / b_j(t) \neq 0\}$ è crescente se $i > j$ e decrescente se $i < j$.

Dimostrazione. Per definizione di base totalmente positiva, ogni matrice di collocazione:

$$\begin{pmatrix} b_0(t_0) & b_1(t_0) & \dots & b_n(t_0) \\ b_0(t_1) & b_1(t_1) & \dots & b_n(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0(t_n) & b_1(t_n) & \dots & b_n(t_n) \end{pmatrix} \quad (\text{dove } a \leq t_0 < \dots < t_n \leq b),$$

ha tutti i minori non negativi.

Se $i > j$, considero i minori 2×2 relativi a b_i e b_j :

$$\begin{vmatrix} b_j(t_{k_1}) & b_i(t_{k_1}) \\ b_j(t_{k_2}) & b_i(t_{k_2}) \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{con } t_{k_1} < t_{k_2}, b_j(t_{k_1}), b_j(t_{k_2}) \neq 0.$$

Allora

$$\begin{aligned} b_j(t_{k_1})b_i(t_{k_2}) - b_j(t_{k_2})b_i(t_{k_1}) &\geq 0 \\ b_j(t_{k_1})b_i(t_{k_2}) &\geq b_j(t_{k_2})b_i(t_{k_1}) \\ \frac{b_i(t_{k_1})}{b_j(t_{k_1})} &\leq \frac{b_i(t_{k_2})}{b_j(t_{k_2})}. \end{aligned}$$

Poiché t_{k_1} e t_{k_2} sono arbitrari, $\frac{b_i(t)}{b_j(t)}$ è crescente.

Se $i < j$ si procede analogamente. □

Dimostrazione. (del teorema 3.1).

(i). Innanzitutto si noti che per ogni funzione non nulla $v \in U$, i valori $v(a)$, $v'(a)$, \dots , $v^{(n)}(a)$ non sono contemporaneamente nulli. Infatti, poiché dalla proposizione 3.3 sappiamo che (u_0, \dots, u_n) è base di U , esistono coefficienti c_0, \dots, c_n tali che

$$v = c_0u_0 + c_1u_1 + \dots + c_nu_n.$$

Se per assurdo $v(a) = v'(a) = \dots = v^{(n)}(a) = 0$ si avrebbe:

$$0 = v(a) = c_0u_0(a) + \dots + c_nu_n(a) = c_0u_0(a) \Rightarrow c_0 = 0 \quad (\text{perché } u_0(a) \neq 0),$$

$$0 = v'(a) = c_1u_1'(a) + \dots + c_nu_n'(a) = c_1u_1'(a) \Rightarrow c_1 = 0 \quad (\text{perché } u_1'(a) \neq 0),$$

...

$$0 = v^{(n)}(a) = c_nu_n^{(n)}(a) \Rightarrow c_n = 0 \quad (\text{perché } u_n^{(n)}(a) \neq 0);$$

cioè v sarebbe la funzione nulla.

Allora considerando il polinomio di Taylor di una tale funzione $v \in U$ non nulla si deduce che $v(t) \neq 0$ in un intorno destro di a e in un intorno sinistro di b . In particolare, poiché per ipotesi $u_i^{(i)}(a) > 0$ le u_i sono strettamente positive in un intorno destro di a .

Ora, dalla proposizione 3.1, siccome U ammette una base totalmente positiva, ammette anche una B-base, sia (b_0, \dots, b_n) . Questa, essendo a sua volta totalmente positiva è tale che, per ogni $i \neq j$ (lemma precedente):

$$0 = \inf_{\substack{t \in [a, b] \\ b_j(t) \neq 0}} \frac{b_i(t)}{b_j(t)} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{b_i(t)}{b_j(t)} & \text{se } i > j \\ \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{b_i(t)}{b_j(t)} & \text{se } i < j. \end{cases}$$

Si noti che questi limiti sono ben posti, infatti, per quanto osservato precedentemente, i punti a e b sono punti di accumulazione per l'insieme $\{t \in [a, b] \text{ t.c. } b_j(t) \neq 0\}$.

Inoltre, dalla proposizione 3.3 (u_0, \dots, u_n) è base di U , quindi esisteranno coefficienti $a_{kj} \in \mathbb{R}$, $k, j = 0, \dots, n$, tali che:

$$b_j = \sum_{k=0}^n a_{kj}u_k \quad \text{e la matrice } A = (a_{kj})_{kj} \text{ è invertibile.}$$

Consideriamo allora $\frac{b_i}{b_j}$.

Se $i > j$ (e quindi $i > 0$)

$$0 = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{b_i(t)}{b_j(t)} = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{\sum_{k=0}^n a_{ki}u_k(t)}{\sum_{k=0}^n a_{kj}u_k(t)} =$$

ricordando che a è zero di molteplicità k per u_k

$$= \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{a_{0i}u_0(t) + a_{1i}(t-a) + \dots + a_{ni}(t-a)^n}{a_{0j}u_0(t) + a_{1j}(t-a) + \dots + a_{nj}(t-a)^n}.$$

Numeratore e denominatore sono limitati, inoltre $u_0(a) \neq 0$; allora, affinché il limite sia 0, deve necessariamente essere $a_{0i} = 0$ (dove i è arbitrario maggiore di 0).

Allora per $i > j > 1$ il limite precedente è:

$$= \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{a_{1i}(t-a) + \dots + a_{ni}(t-a)^n}{a_{1j}(t-a) + \dots + a_{nj}(t-a)^n}.$$

Come prima si deduce che $a_{1i} = 0$ (dove i è arbitrario maggiore di 1).

Iterando il ragionamento si ottiene che $a_{ki} = 0$ quando $i > k$, cioè la matrice A di cambio di base è triangolare:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Analogamente osservando che per $i < j$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{b_i(t)}{b_j(t)} = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{\sum_{k=0}^n a_{ki}u_k(t)}{\sum_{k=0}^n a_{kj}u_k(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{a_{0i}(t-b)^n + \dots + a_{n-1i}(t-b) + a_{ni}u_n(t)}{a_{0j}(t-b)^n + \dots + a_{n-1j}(t-b) + a_{nj}u_n(t)}, \end{aligned}$$

si ha che $a_{jk} = 0$ quando $j > k$.

Allora A è matrice diagonale e per ogni i :

$$b_i = a_{ii}u_i.$$

Ora, $u_i(t) > 0$ in un intorno destro di a e $b_i(t) > 0$ in $[a, b]$, allora $a_{ii} > 0$ per ogni i , e quindi (u_0, \dots, u_n) è B-base di U dalla proposizione 3.2.

(ii). Se U ammette una base totalmente positiva e normalizzata, dalla proposizione 3.1 ammette B-base normalizzata. Dal punto (i) sappiamo che (u_0, \dots, u_n) è B-base di U , quindi dalla proposizione 3.2 esistono coefficienti positivi $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tali che $(\alpha_0 u_0, \dots, \alpha_n u_n)$ è B-base normalizzata di U . \square

Osservazione 8. Nel caso valga il punto (ii) del teorema 3.1, i coefficienti α_i si ricavano attraverso la condizione di normalizzazione:

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i u_i(t) = 1, \quad (3.9)$$

e le condizioni agli estremi delle sue derivate successive:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i u_i^{(k)}(a) = 0, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n-i} u_{n-i}^{(k)}(b) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

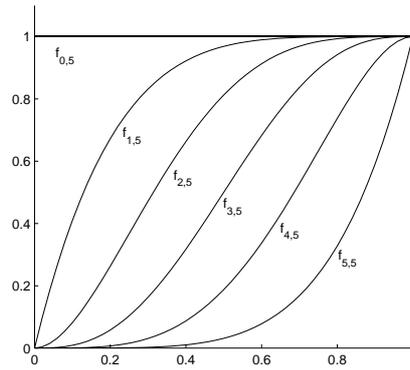


Figura 3.1: Funzioni di transizione di \mathbb{P}_5 .

3.2 Funzioni di transizione e base di Bernstein

In questa sezione è presentato il legame tra la base di Bernstein polinomiale e le funzioni che furono inizialmente utilizzate nella definizione di curva di Bézier, dette funzioni di transizione. In seguito, ricalcando la teoria del caso polinomiale, vengono definite le funzioni di transizione per uno spazio EC e si mostrano alcuni importanti risultati che le legano alla base di Bernstein generalizzata.

Nell'idea originale di Pierre Etienne Bézier [2][10] veniva presentata una base $(f_{0,n}, \dots, f_{n,n})$ dello spazio \mathbb{P}_n , definita per $t \in [0, 1]$ dalle condizioni:

- $f_{0,n}(t) = 1$.
- per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} f_{i,n}^{(j)}(0) &= 0 & \forall j = 0, \dots, i-1, \\ f_{i,n}(1) &= 1, \\ f_{i,n}^{(j)}(1) &= 0 & \forall j = 1, \dots, n-i. \end{aligned}$$

Le $f_{i,n}$ sono dette *funzioni di transizione* e in base monomiale si scrivono come:

$$f_{i,n}(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j+i} \binom{n}{j} \binom{j-1}{i-1} t^j. \quad (3.11)$$

Osservazione 9. Si noti che, per definizione, ogni $f_{i,n}$ è univocamente determinata dalla risoluzione di un problema di interpolazione alla Hermite.

Osservazione 10. Il punto 0 è radice di $f_{i,n}$ di molteplicità i per $i = 0, \dots, n$ ed è l'unica radice di $f_{i,n}$.

Proposizione 3.4. Indicate con $B_{i,n}$ le funzioni della base di Bernstein e posta $f_{n+1,n}$ la funzione nulla, vale:

$$B_{i,n}(t) = f_{i,n}(t) - f_{i+1,n}(t), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (3.12)$$

Dimostrazione. Sia $i \in 1, \dots, n$, e sia

$$f_{i,n}(t) = \sum_{j=0}^n b_j B_{j,n}(t)$$

la i -esima funzione di transizione scritta in base di Bernstein. Dalle proprietà agli estremi della base di Bernstein si ricava che:

$$b_0 = f_{i,n}(0) = 0 \quad e \quad b_n = f_{i,n}(1) = 1;$$

Considerando la derivata prima (formula (1.4))

$$f'_{i,n}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_{j,n-1}(t)$$

e le condizioni agli estremi di $f_{i,n}$ si ha:

$$\begin{aligned} 0 = f'_{i,n}(0) &= \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_{j,n-1}(0) = n(b_1 - b_0) \Rightarrow b_1 = b_0 = 0; \\ 0 = f'_{i,n}(1) &= \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_{j,n-1}(1) = n(b_1 - b_0) \Rightarrow b_{n-1} = b_n = 1; \end{aligned}$$

inoltre dalla formula per la derivata h -esima per una funzione scritta in base di Bernstein (ottenuta applicando successivamente la (1.4)):

$$f_{i,n}^{(h)}(t) = \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n}{h} \left(\sum_{k=0}^h (-1)^k \binom{h}{k} b_{j+h-k} \right) B_{j,n-h} \quad (3.13)$$

e sfruttando le condizioni agli estremi delle derivate di $f_{i,n}$ si ricava che, :

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 1, \dots, i-1 \\ 1 & \text{se } j = i, \dots, n. \end{cases}$$

E quindi

$$f_{i,n}(t) = \sum_{j=i}^n B_{j,n}(t). \quad (3.14)$$

La tesi segue direttamente. \square

Osservazione 11. Dalla proprietà di diminuzione della variazione, poiché nessuna $f_{i,n}$ presenta cambi di segno nei propri coefficienti in base di Bernstein, esse non si annullano in $]0, 1[$. Inoltre, dalla derivata di (3.14), per $i = 1, \dots, n-1$, si ottiene

$$f'_{i,n}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_{j,n-1}(t) = n B_{i,n-1}(t) > 0 \quad \text{per } t \in]0, 1[,$$

e $f_{n,n}(t) = B_{n,n}(t)$, che è strettamente crescente su $[0, 1]$. Quindi le $f_{1,n}, \dots, f_{n,n}$ sono strettamente crescenti in $[0, 1]$ (e dunque strettamente positive su $]0, 1[$). Infine, dalla (3.12) si deduce che $f_{i,n}(t) > f_{i+1,n}(t)$ per $t \in]0, 1[$.

Si consideri ora uno spazio EC $(n + 1)$ -dimensionale, sull'intervallo $I = [a, b]$, sia \mathbb{E} . Per definizione \mathbb{E} è uno spazio in cui ogni problema di interpolazione alla Hermite in $n + 1$ punti ha una e una sola soluzione. Questo significa che è possibile definire le funzioni di transizione $f_{i,n}$ su \mathbb{E} risolvendo gli n problemi di interpolazione così posti:

si sceglie come $f_{0,n}$ una funzione di \mathbb{E} strettamente positiva su $[a, b]$ (si noti che una tale funzione esiste, ad esempio può essere una delle funzioni peso di \mathbb{E} [8][9]), e per $i = 1, \dots, n$, $f_{i,n}$ è determinata da:

$$\begin{cases} f_{i,n}^{(j)}(a) = 0 & \forall j = 0, \dots, i - 1, \\ f_{i,n}^{(j)}(b) = f_{0,n}^{(j)}(b) & \forall j = 0, \dots, n - i. \end{cases} \quad (3.15)$$

In particolare, se \mathbb{E} contiene funzioni costanti, si pone $f_{0,n} \equiv 1$; pertanto le funzioni di transizione saranno date da:

$$\begin{cases} f_{i,n}^{(j)}(a) = 0 & \forall j = 0, \dots, i - 1, \\ f_{i,n}(b) = 1, \\ f_{i,n}^{(j)}(b) = 0 & \forall j = 1, \dots, n - i. \end{cases} \quad (3.16)$$

Osservazione 12. Per controllare se lo spazio \mathbb{E} contiene costanti è sufficiente, una volta trovata una qualsiasi base (v_0, \dots, v_n) , vedere se l'equazione

$$\sum_{i=0}^n c_i v_i(t) \equiv 1,$$

nelle incognite c_0, \dots, c_n ammette soluzione (in tal caso questa è unica perché (v_0, \dots, v_n) è base).

In questa tesi ci concentreremo su spazi EC che contengono funzioni costanti.

Analogamente al caso polinomiale, si pone $f_{n+1,n}$ la funzione identicamente nulla (che appartiene ad \mathbb{E} in quanto spazio vettoriale) e si definiscono, per $i = 0, \dots, n$:

$$u_{i,n}(t) = f_{i,n}(t) - f_{i+1,n}(t). \quad (3.17)$$

Osservazione 13. Si noti che, poiché \mathbb{E} è spazio EC, se una delle $u_{i,n}$ ha più di n zeri in $]a, b[$ è necessariamente la funzione nulla. Allora due funzioni di transizione consecutive o sono tali che $f_{i,n}(t) - f_{i+1,n}(t) \neq 0$ per ogni $t \in]a, b[$, oppure coincidono.

Il conteggio degli zeri delle $u_{i,n}$ viene svolto più nel dettaglio nella dimostrazione della proposizione 3.5.

Per ora consideriamo il caso in cui le funzioni di transizione sono tutte distinte.

A questo punto è naturale chiedersi quali proprietà ha il sistema $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$: è una base di \mathbb{E} ? Se sì, può essere la B-base normalizzata? Sotto quali ipotesi?

Proposizione 3.5. *I sistemi $(f_{0,n}, \dots, f_{n,n})$ e $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ sono basi per \mathbb{E} .*

Dimostrazione. Vogliamo applicare la proposizione 3.3. Verifichiamo allora che per ogni i vale:

$$\begin{aligned} u_{i,n}^{(j)}(a) &= 0, & j = 0, \dots, i-1, \\ u_{i,n}^{(i)}(a) &\neq 0, \end{aligned}$$

ne verrà che il sistema $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ è base di \mathbb{E} .

Consideriamo

$$u_{i,n}(t) = f_{i,n}(t) - f_{i+1,n}(t).$$

• Se $i = 0$:

$$u_{0,n}(a) = f_{0,n}(a) - f_{1,n}(a) = 1 \neq 0,$$

• Se $i = 1, \dots, n-1$:

$$u_{i,n}^{(j)}(a) = f_{i,n}^{(j)}(a) - f_{i+1,n}^{(j)}(a) = 0, \quad \text{se } j = 0, \dots, i-1,$$

Inoltre $u_{i,n}^{(j)}(b) = f_{i,n}^{(j)}(b) - f_{i+1,n}^{(j)}(b) = 0$, se $j = 0, \dots, n-i-1$. Quindi $u_{i,n}$ ha un totale di $i + (n-i) = n$ zeri in $[a, b]$. Allora, poiché in quanto elemento non nullo di uno spazio EC di dimensione $n+1$ non può averne altri, $u_{i,n}^{(i)}(a) \neq 0$.

• Se $i = n$:

Come nei casi precedenti si dimostra che

$$u_{n,n}^{(j)}(a) = 0, \quad \text{se } j = 0, \dots, n-1$$

$$u_{n,n}^{(n)}(a) \neq 0.$$

Allora $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ è base di \mathbb{E} .

Infine, scrivendo le $f_{i,n}$ in funzione delle $u_{i,n}$:

$$f_{i,n} = \sum_{j=i}^n u_{j,n}, \tag{3.18}$$

si vede subito che per ogni $i = 0, \dots, n$ si ha:

$$f_{i,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ u_{1,n} \\ \vdots \\ u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice è invertibile, anche $(f_{0,n}, \dots, f_{n,n})$ è base di \mathbb{E} . \square

Sugli spazi EC sono stati dimostrati due importanti teoremi di caratterizzazione [9]:

Teorema 3.3. *Sia \mathbb{E} uno spazio vettoriale $(n+1)$ -dimensionale di funzioni definite su $I = [a, b]$. Sono equivalenti:*

(i) \mathbb{E} è spazio EC su I ;

(ii) per ogni $c, d \in I$, $c < d$, \mathbb{E} ammette una B -base (B_0, \dots, B_n) tale che, per ogni $i = 0, \dots, n$, B_i si annulla esattamente i volte in c ed esattamente $n-i$ volte in d , ed è positiva su $]c, d[$.

Teorema 3.4. *Dato uno spazio EC \mathbb{E} di dimensione $n + 1$ su $I = [a, b]$, sono equivalenti:*

- (i) *Per ogni $c, d \in I$, $c < d$, \mathbb{E} ammette una B-base normalizzata su $[c, d]$;*
- (ii) *\mathbb{E} contiene funzioni costanti (diverse dalla funzione identicamente nulla) e lo spazio \mathcal{DE} (n -dimensionale) è uno spazio EC su I .*

Ora, lo spazio \mathbb{E} è spazio EC, quindi in particolare ammette una B-base su I . Vediamo quando le funzioni $u_{i,n}$, definite a partire dalle funzioni di transizione, soddisfano le condizioni del teorema 3.1.

Osservazione 14. Si noti che, per ogni $i = 0, \dots, n - 1$, i grafici di $f_{i,n}$ e $f_{i+1,n}$ non si intersecano in $]a, b[$. Infatti, se esistesse $t_0 \in]a, b[$ tale che $f_{i,n}(t_0) = f_{i+1,n}(t_0)$, si avrebbe che la funzione $u_{i,n}$ avrebbe il suo $(n + 1)$ -esimo zero in t_0 , quindi non sarebbe un elemento di \mathbb{E} . Ma questo è assurdo perché $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ è base di \mathbb{E} (proposizione 3.5). Quindi ciascuna delle $u_{i,n}$ o è strettamente positiva o è strettamente negativa in $]a, b[$.

Utilizzando le funzioni di transizione, ritroviamo un'implicazione del teorema 3.3 (in forma più debole):

Proposizione 3.6. *Uno spazio EC \mathbb{E} su $[a, b]$ di dimensione $(n + 1)$ ammette come B-base il sistema $(\bar{u}_{0,n}, \dots, \bar{u}_{n,n})$, dove:*

$$\bar{u}_{i,n} = \begin{cases} u_{i,n} & \text{se } u_{i,n} \text{ è positiva,} \\ -u_{i,n} & \text{se } u_{i,n} \text{ è negativa.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione (3.5) sappiamo che $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ è base di \mathbb{E} , e, dalla relativa dimostrazione, sappiamo anche che per ogni $i = 0, \dots, n$ vale:

$$u_{i,n}^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, \dots, i - 1, \quad (3.19)$$

$$u_{i,n}^{(i)}(a) \neq 0, \quad (3.20)$$

$$u_{i,n}^{(j)}(b) = 0, \quad j = 0, \dots, n - i - 1, \quad (3.21)$$

quindi anche $(\bar{u}_{0,n}, \dots, \bar{u}_{n,n})$ è base e verifica le condizioni appena citate. Vediamo che per ogni i si ha anche

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,n}^{(i)}(a) &> 0 \\ \bar{u}_{i,n}^{(i)}(b) &\neq 0. \end{aligned}$$

•Per $i = 0$:

Poiché per costruzione $f_{0,n}(a) > 0$ e $f_{1,n}(a) = 0$, dall'osservazione precedente deve essere $f_{0,n} > f_{1,n}$ su $]a, b[$. Allora $\bar{u}_{0,n} = u_{0,n}$.

$$\bar{u}_{0,n}(a) = u_{0,n}(a) = f_{0,n}(a) - f_{1,n}(a) = 1 > 0.$$

$$\bar{u}_{0,n}^{(n)}(b) = u_{0,n}^{(n)}(b) \neq 0$$

perché $u_{0,n}$ è elemento di uno spazio EC di dimensione $n + 1$ e ha già n zeri in $]a, b[$.

• Per $i = 1, \dots, n - 1$:

sappiamo già che $\bar{u}_{i,n}^{(i)}(a) \neq 0$ e $\bar{u}_{i,n}^{(j)}(a) = 0$ per $j = 0, \dots, i - 1$. Osserviamo che, poiché $\bar{u}_{i,n}(t) > 0$ su $]a, b[$ e $\bar{u}_{i,n}(a) = 0$, a è punto di minimo locale forte di $\bar{u}_{i,n}$. Allora necessariamente

$$\bar{u}_{i,n}^{(i)}(a) > 0,$$

perché se fosse strettamente negativa, dai risultati sugli estremanti relativi seguirebbe che a è punto di massimo locale forte per $\bar{u}_{i,n}$.

Come prima, per quanto riguarda il punto b , poiché $\bar{u}_{i,n}$ ha già n zeri in $]a, b[$,

$$\bar{u}_{i,n}^{(n-1)}(b) \neq 0$$

.

• Per $i = n$:

Si noti che, siccome $f_{n,n}$ si annulla n volte in a per costruzione, essa è strettamente positiva su $]a, b[$. Quindi $u_{n,n} = f_{n,n} > 0$ su $]a, b[$ e $\bar{u}_{n,n} = u_{n,n}$. Ripetendo il ragionamento precedente si dimostra che

$$u_{n,n}^{(n)}(a) > 0$$

$$u_{n,n}(b) = f_{n,n}(b) = 1 \neq 0.$$

Allora dal punto (i) del teorema 3.1 segue che $(\bar{u}_{0,n}, \dots, \bar{u}_{n,n})$ è B-base di \mathbb{E} . \square

Osservazione 15. Se $f_{i,n}$ è strettamente crescente su $]a, b[$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora $f_i(t) > f_{i+1}(t)$ su $]a, b[$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Per costruzione si ha che esistono un intorno destro di a , $[a, a + \epsilon[$ e un intorno sinistro di b , $]b - \delta, b[$ opportuni, su cui $f_{i,n}$ si comporta rispettivamente come x^i e $1 - (-x)^{n-i}$. Poiché le $f_{i,n}$ sono in numero finito possiamo supporre che tali intorni siano gli stessi per ogni i . Si ha che, per ogni i , $f_i(t) > f_{i+1}(t)$ per $t \in [a, a + \epsilon[$ e per $t \in]b - \delta, b[$, e siccome $f_i(t) \neq f_{i+1}(t)$ su $]a, b[$, allora $f_i(t) > f_{i+1}(t)$ su $]a, b[$. \square

Proposizione 3.7. Se $f_{i,n}$ è strettamente crescente su $]a, b[$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ è B-base di \mathbb{E} .

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dalla proposizione 3.6, basta notare che dall'osservazione precedente si deduce che $u_{i,n} = \bar{u}_{i,n}$ per ogni i . \square

Osservazione 16. Siccome $f_{0,n}$ è funzione costante ($f_{0,n} \equiv 1$) allora $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ è base normalizzata.

Infatti, dalla (3.18), si ha direttamente che $1 \equiv f_{0,n} = \sum_{j=1}^n u_{j,n}$.

Riassumiamo quanto detto nella seguente proposizione:

Proposizione 3.8. *Sia \mathbb{E} uno spazio EC di dimensione $n + 1$. Se le funzioni di transizione $f_{i,n}$ sono crescenti per ogni $i = 1, \dots, n$, il sistema $(u_{0,n}, \dots, u_{n,n})$ è B-base di \mathbb{E} . Inoltre, poiché $f_{0,n}$ è funzione costante ($f_{0,n} \equiv 1$), tale sistema è la B-base normalizzata di \mathbb{E} .*

3.3 Ottenere informazioni dalle funzioni di transizione

In questa sezione si seguirà un percorso a ritroso rispetto alla sezione precedente. Partendo senza nessuna particolare ipotesi sugli zeri degli elementi dello spazio funzionale considerato si cercano le funzioni di transizione. Se queste sono ben poste, in base alle loro proprietà, si ottengono informazioni sullo spazio di partenza e sull'esistenza di una B-base, possibilmente normalizzata.

Sia allora \mathcal{V} uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ contenente funzioni costanti, di cui si conosca una base; chiediamo inoltre che gli elementi di \mathcal{V} siano almeno C^n sull'intervallo di definizione $[a, b]$. Si impostino i problemi di interpolazione alla Hermite come in (3.16); è chiaro che se alcuni di questi non hanno soluzione o alcune soluzioni non sono uniche non è possibile trovare una B-base a partire da queste; in particolare, poiché in \mathcal{V} ci sono problemi di interpolazione alla Hermite su $n + 1$ punti che non ammettono soluzione (oppure che ammettono soluzione non univoca) \mathcal{V} non può essere uno spazio EC.

Nel caso in cui le soluzioni siano ben poste, siano $(f_{0,n}, \dots, f_{n,n})$, se ce ne sono due o più coincidenti, sicuramente il sistema non è una base di \mathcal{V} , quindi non è possibile trovare una B-base per differenza delle $f_{i,n}$ come in (3.17). Inoltre, per come sono definite, le funzioni di transizione variano con continuità rispetto agli estremi dell'intervallo su cui sono calcolate (si veda come esempio la figura (4.1)). Questo significa che, se le funzioni di transizione sono distinte se calcolate su $[a, b - \epsilon]$, con $\epsilon > 0$ arbitrario, ma non se calcolate su $[a, b]$, siccome su $[a, b - \epsilon]$ ogni B-base si scrive come $(\alpha_0 u_{0,n}, \dots, \alpha_n u_{n,n})$ con $\alpha_i > 0$ per ogni i (proposizione 3.2), mandando ϵ a 0^+ almeno un elemento di base si annulla, e quindi su $[a, b]$ non c'è B-base, tantomeno normalizzata. Allora dalla caratterizzazione data dal teorema 3.4 si conclude che, se \mathcal{V} è spazio EC, sicuramente non lo è \mathcal{DV} (queste ultime osservazioni sono legate al concetto di lunghezza critica per uno spazio EC, che verrà trattato nel prossimo capitolo).

Mettiamoci infine nelle ipotesi che le $f_{i,n}$ siano tutte distinte. Ricordiamo che, nel caso polinomiale, le funzioni di transizione sono crescenti strettamente sull'intervallo di definizione (eccetto la 0-esima, che è costante) e sono strettamente decrescenti in i , per $t \in]0, 1[$ (osservazione 11), quindi in particolare due funzioni di transizione consecutive non assumono mai lo stesso valore sui punti interni all'intervallo di definizione. Vediamo cosa succede se le $f_{i,n}$ trovate in \mathcal{V} non verificano queste proprietà:

- Se esiste un $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tale che $f_{i_0,n}$ non è strettamente crescente in t : consideriamo $f'_{i_0,n}$. Per costruzione essa ha uno zero di molteplicità almeno $i - 1$ in a e uno zero di molteplicità almeno $n - i$ in b . Inoltre, poiché $f_{i_0,n}$

non è strettamente crescente la sua derivata ha almeno un altro zero. Come conseguenza \mathcal{DV} non può essere spazio EC.

- Se esiste un $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ tale che esiste un $t_0 \in]a, b[$ per cui $f_{i_0, n}(t_0) = f_{i_0+1, n}(t_0)$:
 $u_{i_0, n}$ è non nulla e ha più di n zeri in $[a, b]$ e quindi lo spazio non può essere EC.

Tornando agli spazi EC, alla luce di quanto detto in questa sezione e nelle precedenti, enunciamo il seguente teorema, che sarà fondamentale nel prossimo capitolo, dove daremo esempi di B-basi normalizzate trovate numericamente e ci occuperemo del problema di determinare l'intervallo massimale su cui queste sono ammesse.

Teorema 3.5. *Per uno spazio EC \mathbb{E} di dimensione $n + 1$ sono equivalenti:*

- (i) \mathbb{E} ammette una B-base normalizzata $(u_{0, n}, \dots, u_{n, n})$ tale che, per ogni $i = 0, \dots, n$, $u_{i, n}$ si annulla esattamente i volte in a e $n - i$ volte in b .
- (ii) Le funzioni di transizione $(f_{0, n}, \dots, f_{n, n})$ sono tali che:
 1. $f_{0, n} \equiv 1$,
 2. $f_{i, n}$ è strettamente crescente su $[a, b]$, per ogni $i = 1, \dots, n$,

Dimostrazione. ((ii) \rightarrow (i)): vero dalla proposizione 3.8; la B-base normalizzata è data da $u_{i, n} = f_{i, n} - f_{i+1, n}$, $i = 0, \dots, n$.

((i) \rightarrow (ii)): dimostriamo la contronominale. Abbiamo già visto che, se $f_{0, n}$ non è la funzione costante 1 lo spazio \mathbb{E} non può contenere costanti e quindi non può ammettere una base normalizzata. Inoltre abbiamo anche già detto che, se anche una sola delle funzioni di transizione non è strettamente crescente, lo spazio $\mathcal{D}\mathbb{E}$ non può essere spazio EC. Allora dal teorema 3.4 si ha che esiste un intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ su cui \mathbb{E} non ammette B-base normalizzata. Ma questo implica che non è possibile normalizzare una B-base su tutto $[a, b]$. \square

Capitolo 4

Ricerca della lunghezza critica per uno spazio EC

Nel capitolo precedente abbiamo visto come le funzioni di transizione, attraverso le loro proprietà, forniscano informazioni sulla natura dello spazio in cui sono state cercate. In particolare, dal teorema 3.5 abbiamo che, nel caso di uno spazio EC contenente funzioni costanti e definito su un dato intervallo chiuso, limitato e non banale $[a, b]$, l'esistenza della B-base normalizzata è caratterizzata dalla monotonia stretta delle funzioni di transizione. Inoltre, per un qualunque spazio funzionale di dimensione finita contenuto in $C^m([a, b])$, si ha che, qualora le funzioni di transizione siano ben poste, cioè se i relativi problemi di interpolazione alla hermite ammettono una e una sola soluzione, lo spazio è EC se e solo se ogni funzione di transizione, valutata in un arbitrario punto interno ad $[a, b]$ non assume lo stesso valore della sua successiva (cioè se i loro grafici non si intersecano). Come visto nel capitolo 2, ci sono spazi che sono EC sull'intervallo $[a, b]$ solo quando questo ha lunghezza minore di un certo valore. La stessa cosa si ha in generale per l'esistenza della B-base normalizzata [1].

Definizione 4.1. Per uno spazio vettoriale funzionale \mathbb{E} si pone

$$\begin{aligned}\ell_1(\mathbb{E}) &:= \sup \{h \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \mathbb{E} \text{ è spazio EC su } [0, h]\}, \\ \ell_2(\mathbb{E}) &:= \sup \{h \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } \text{ sia } \mathbb{E} \text{ che } \mathcal{D}\mathbb{E} \text{ sono spazi EC su } [0, h]\}.\end{aligned}$$

$\ell_1(\mathbb{E})$ e $\ell_2(\mathbb{E})$ sono detti rispettivamente *prima* e *seconda lunghezza critica* di \mathbb{E} .

Risulta chiaro che la conoscenza di tali lunghezze critiche è fondamentale per poter utilizzare questi spazi, sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo.

Questo problema è stato affrontato e risolto a livello teorico per alcune particolari classi di spazi in letteratura, attraverso lo studio di opportuni operatori differenziali, caratteristici degli spazi considerati [1][8][9]. Questo approccio presenta però una limitazione: ogni spazio va trattato singolarmente, o al più come oggetto di una famiglia “ristretta”. Inoltre tale studio si rivela spesso molto difficoltoso al crescere della dimensione dello spazio.

4.1 Un approccio sperimentale

In questa sezione verranno riportati alcuni esempi di spazi EC di interesse, per i quali i valori di lunghezza critica sono stati ricercati numericamente, mediante l'utilizzo del software Matlab. Un approccio sperimentale di questo tipo permette di svincolarsi dagli svantaggi sopracitati in quanto non è legato a particolari proprietà degli spazi testati, ma guarda solo le funzioni di transizione.

In particolare sono stati utilizzati due algoritmi: un algoritmo che procede “in avanti”, testando intervalli $[0, h]$ con valori di h sempre maggiori (calcolati in base ad un passo fissato) per avere una stima indicativa della lunghezza critica, e un algoritmo di bisezione sull'ampiezza dell'intervallo testato, per ottenere un risultato più preciso. Si noti che, poiché gli spazi EC considerati sono invariati per traslazione [1][9], non è restrittivo considerare solo gli intervalli del tipo $[0, h]$. Entrambi gli algoritmi risolvono al calcolatore i problemi di interpolazione alla Hermite per ottenere le funzioni di transizione su $[0, h]$ e verificano se valgono le condizioni descritte precedentemente. Per essere più precisi, per la ricerca della seconda lunghezza critica, dapprima controllano che le funzioni $f_{i,n} - f_{i+1,n}$ non ammettano zeri su $]0, h[$, per assicurarsi che h sia minore o uguale alla prima lunghezza critica, cioè che lo spazio considerato sia EC su $[0, h]$; successivamente guardano il segno di tali funzioni: se è negativo per almeno una $i \in \{0, \dots, n\}$ lo spazio non ammette B-base normalizzata su $[0, h]$ (per rafforzare il secondo test, gli algoritmi controllano anche se le $f_{i,n}$ sono crescenti, verificando se le loro derivate sono positive). Il primo algoritmo si ferma non appena il secondo test risulta negativo e viene lanciato quello di bisezione: in base al risultato dei test il calcolo delle $f_{i,n}$ viene ripetuto su un intervallo più o meno ampio. Trattandosi di un algoritmo di bisezione, ad ogni passo la differenza tra le lunghezze di un intervallo e del precedente è dimezzata, quindi al passo k :

$$|h_k - \ell_2| < \frac{h}{2^k},$$

dove h_k è la misura dell'intervallo testato al k -esimo passo e ℓ_2 è la seconda lunghezza critica; si ha quindi convergenza del metodo per $k \rightarrow \infty$.

Si osservi che dal teorema 3.4 si deduce che la prima lunghezza critica di uno spazio \mathbb{E} coincide con la seconda lunghezza critica dello spazio integrato di \mathbb{E} . Per questo motivo è sufficiente calcolare numericamente ℓ_2 per ottenere ℓ_1 dello spazio integrato.

Presentiamo ora i risultati:

4.1.1 Spazi polinomiali

Come prima classe di spazi abbiamo scelto gli spazi \mathbb{P}_n , per i quali è noto che la B-base normalizzata, cioè la base di Bernstein, è ben definita su $[0, h]$ con h arbitrario in \mathbb{R}^+ . I dati sperimentali rispecchiano la teoria, infatti le funzioni di transizione danno luogo alla base di Bernstein per ogni valore di h scelto.

4.1.2 Gli spazi misti trigonometrici-polinomiali Γ_n

Lo spazio $\Gamma_n = \text{span}\{1, t, \dots, t^{n-2}, \cos(t), \sin(t)\}$, $n \geq 2$, è un esempio di spazio EC di dimensione $n+1$ su $[0, h]$, con $h < \pi$, in quanto è ottenuto per integrazioni successive dello spazio $\text{span}\{1, \cos(t), \sin(t)\}$, che abbiamo già visto essere EC su $[0, h]$, per $h < \pi$. Inoltre, dal teorema 3.4, la seconda lunghezza critica ℓ_2 di Γ_n , per $n \geq 3$, è sicuramente maggiore o uguale di π , in quanto lo spazio contiene costanti non nulle e il suo spazio derivato $\mathcal{D}\Gamma_n = \Gamma_{n-1}$ è ancora uno spazio EC, di dimensione n .

L'algoritmo è stato testato per $n = 3, 4, 5, 6$. In tabella sono riportati i valori ottenuti per la seconda lunghezza critica, con precisione fino alla sesta cifra decimale. Nell'ultima colonna presentiamo i valori della prima lunghezza critica dedotti:

Spazio (generatori)	2 ^a lunghezza critica	1 ^a lunghezza critica
$\{1, \cos(t), \sin(t)\}$	3.141592	6.283185
$\{1, t, \cos(t), \sin(t)\}$	6.283185	↗ 6.283185
$\{1, t, t^2, \cos(t), \sin(t)\}$	6.283185	↗ 8.986819
$\{1, t, t^2, t^3, \cos(t), \sin(t)\}$	8.986819	↗ —

Si osservi che i dati rispettano quanto detto a livello teorico. Si noti inoltre l'andamento crescente di $\ell_2(\Gamma_n)$ (e quindi di $\ell_1(\Gamma_n)$) al crescere della dimensione dello spazio. Da questi dati possiamo anche dedurre che lo spazio $\text{span}\{\cos(t), \sin(t)\} = \mathcal{D}\Gamma_2$ è EC su $[0, \pi]$.

La figura (4.1) mostra come esempio la variazione delle funzioni di transizione e della candidata B-base normalizzata all'aumentare dell'ampiezza dell'intervallo testata, h , in Γ_4 . Si noti che il cambiamento avviene con continuità: per $h < \ell_2(\Gamma_4)$ le funzioni di transizione $f_{i,4}$ sono tutte strettamente crescenti e distinte e le $u_{i,4}$ sono proprio la B-base normalizzata; per $h = \ell_2(\Gamma_4) = 2\pi$ due delle $f_{i,4}$ coincidono e le $u_{i,4}$ non sono più la B-base normalizzata, infatti una di esse è diventata la funzione nulla; le funzioni di transizione che si erano avvicinate fino a coincidere, per $\ell_2(\Gamma_4) < h < \ell_1(\Gamma_4)$ si scambiano di posto: non si intersecano, ma non sono più crescenti strettamente. Dalla proposizione 3.6 sappiamo che le $u_{i,4}$, a meno del segno, sono una B-base, non normalizzata. All'avvicinarsi di h a $\ell_1(\Gamma_4)$ le funzioni $u_{1,4}$ e $u_{3,4}$ tendono a diventare la stessa funzione.

4.1.3 Gli spazi iperbolici di dimensione 3 e 4

Consideriamo le famiglie di spazi iperbolici $\{H_2^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$ e $\{H_3^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$, con $H_2^\alpha = \text{span}\{1, \cosh(\alpha t), \sinh(\alpha t)\}$, $H_3^\alpha = \text{span}\{1, t, \cosh(\alpha t), \sinh(\alpha t)\}$. Questa classe di spazi è famosa per l'effetto di tensione generato (visibile in figura (4.2)), utilizzato per evitare oscillazioni in alcuni casi di interpolazione.

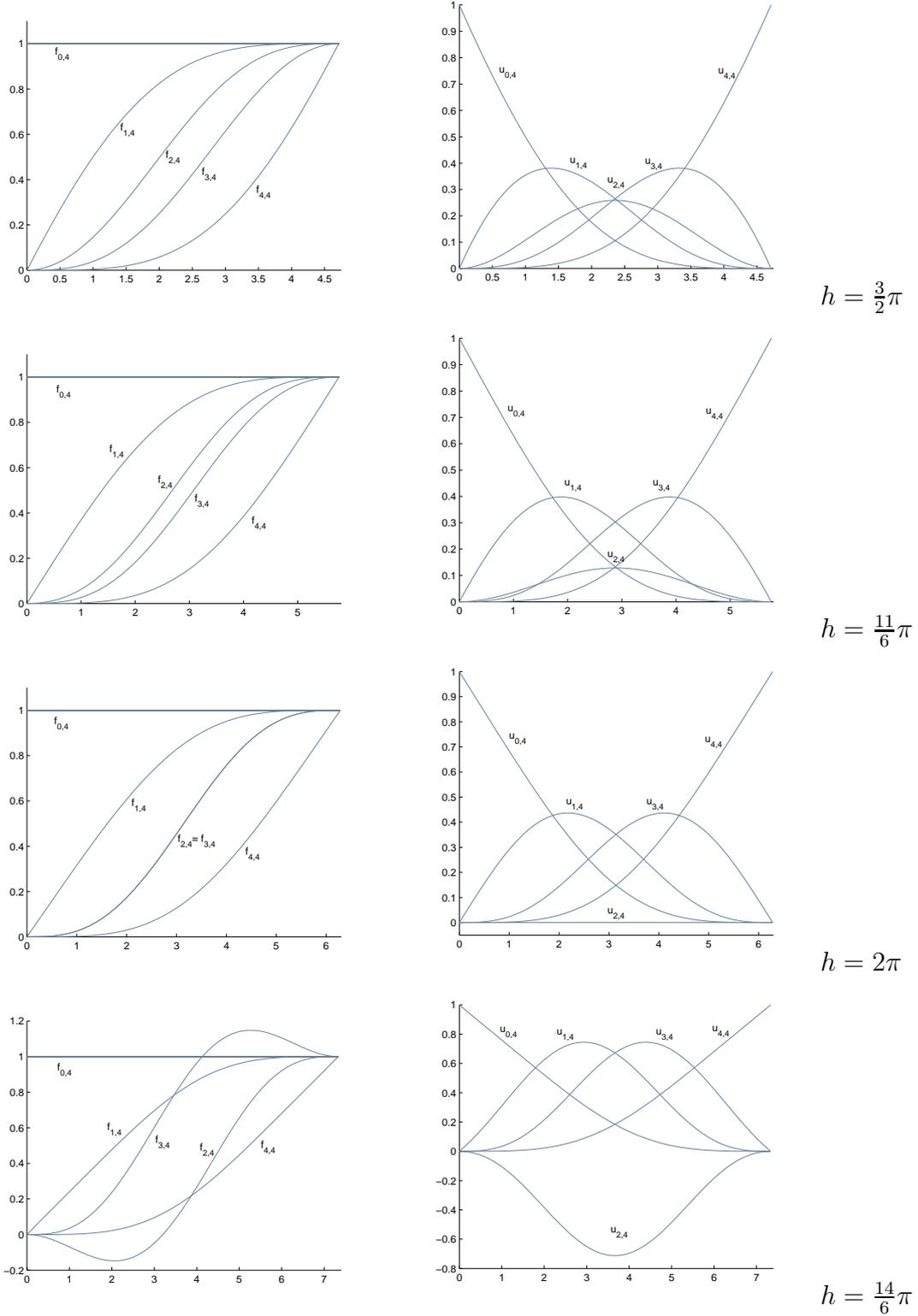


Figura 4.1: Risultati sperimentali per Γ_4 : funzioni di transizione (sinistra) e candidata B-base (destra).

A livello teorico si dimostra facilmente che questi sono spazi EC su ogni intervallo $[0, h]$, con $h \in \mathbb{R}^+$; presentiamo la dimostrazione per $\alpha = 1$ (per α generico si procede esattamente nello stesso modo):

Fissiamo $[0, h]$ con $h \in \mathbb{R}^+$ e consideriamo lo spazio $\text{span}\{\cosh(t), \sinh(t)\}$. Dimostriamo che questo è EC; ne verrà che tutti gli spazi ottenuti per integrazione sono EC su $[0, h]$ (in particolare lo saranno H_2^1 e H_3^1) e, poiché h è arbitrario positivo, le loro lunghezze critiche sono entrambe $+\infty$.

Sia allora

$$f(t) = c_1 \cosh(t) + c_2 \sinh(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

una generica funzione di $\text{span}\{\cosh(t), \sinh(t)\}$ in $[0, h]$. Mostriamo che se f ha due zeri (contati con molteplicità) in $[0, h]$ allora è la funzione nulla. Siano $t_1, t_2 \in [0, h]$, $t_1 \leq t_2$.

Se $t_1 < t_2$, impostiamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} f(t_1) = 0 \\ f(t_2) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c_1 \cosh(t_1) + c_2 \sinh(t_1) = 0 \\ c_1 \cosh(t_2) + c_2 \sinh(t_2) = 0 \end{cases}$$

e consideriamo la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(t_1) & \sinh(t_1) \\ \cosh(t_2) & \sinh(t_2) \end{pmatrix};$$

si ha

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sinh(t_1)}{\cosh(t_1)} = \frac{\sinh(t_2)}{\cosh(t_2)} \Leftrightarrow \tanh(t_1) = \tanh(t_2),$$

il che non è possibile perché $t_1 \neq t_2$ e la tangente iperbolica è iniettiva. Quindi il sistema ammette come unica soluzione quella banale $c_1 = c_2 = 0$ e quindi f è la funzione nulla.

Se $t_1 = t_2$ consideriamo invece il sistema:

$$\begin{cases} f(t_1) = 0 \\ f'(t_1) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} c_1 \cosh(t_1) + c_2 \sinh(t_1) = 0 \\ c_1 \sinh(t_1) + c_2 \cosh(t_1) = 0; \end{cases}$$

questa volta abbiamo:

$$\det \begin{pmatrix} \cosh(t_1) & \sinh(t_1) \\ \sinh(t_1) & \cosh(t_1) \end{pmatrix} = \cosh^2(t_1) - \sinh^2(t_1) = 1 \neq 0,$$

quindi anche in questo caso f è la funzione nulla.

Abbiamo allora provato che gli spazi iperbolici sono spazi EC su domini di ampiezza arbitraria.

Tuttavia dalle prove sperimentali sembrano esserci dei valori limite. Utilizzando il primo algoritmo, si ottengono i risultati in tabella (4.1) e in figura (4.3): l'algoritmo si ferma e produce questi valori a causa dell'approssimazione dovuta all'utilizzo dei numeri finiti: come si può osservare anche dal grafico in figura (4.2) le funzioni di transizione successive, all'aumentare dell'ampiezza dell'intervallo, assumono valori molto vicini. In aritmetica finita, se la differenza relativa di due

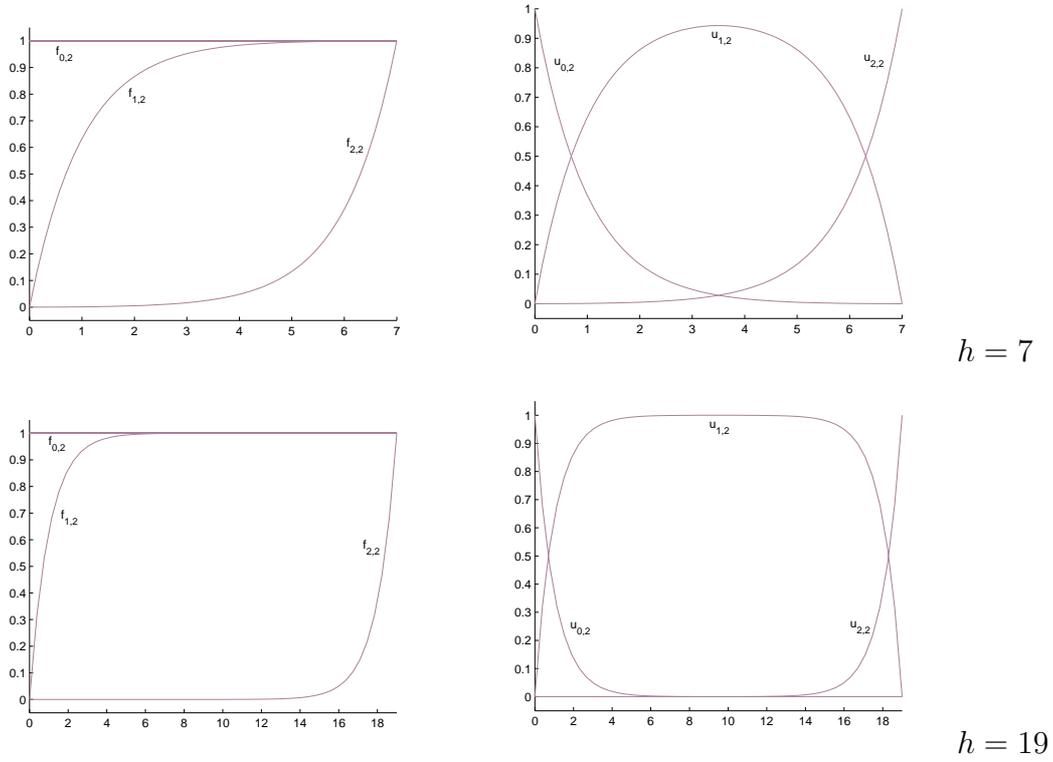


Figura 4.2: Risultati sperimentali per H_2^1 : funzioni di transizione (sinistra) e B -base normalizzata (destra).

	2 ^a lunghezza critica calcolata in H_2^α	2 ^a lunghezza critica calcolata in H_3^α
$\alpha = 0.50$	36.70	34.80
$\alpha = 0.75$	24.39	23.20
$\alpha = 1.00$	18.25	17.39
$\alpha = 1.25$	14.55	13.92
$\alpha = 1.50$	12.24	11.50
$\alpha = 1.75$	10.50	9.94
$\alpha = 2.00$	9.19	8.71
$\alpha = 2.25$	8.16	7.73
$\alpha = 2.50$	7.29	6.97

Tabella 4.1: Seconda lunghezza critica calcolata sperimentalmente per gli spazi $\text{span}\{1, \cosh(\alpha t), \sinh(\alpha t)\}$ e $\text{span}\{1, t, \cosh(\alpha t), \sinh(\alpha t)\}$.

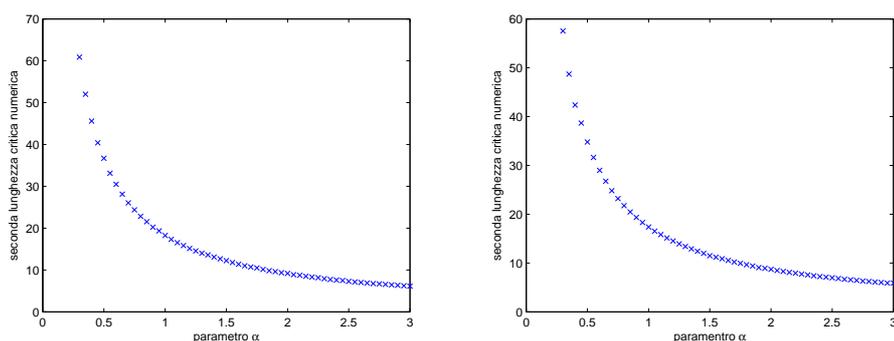


Figura 4.3: Seconda lunghezza critica numerica per gli spazi iperbolici H_2^α (sinistra) e H_3^α (destra) al variare del parametro α .

valori è minore della precisione di macchina, questi sono salvati come lo stesso numero. Matlab lavora con lo standard IEEE basic double, ciò significa che la precisione di macchina è $\sim 10^{-16}$, quindi ad esempio il numero $1 - 10^{-17}$ viene salvato come 1. Questo è ciò che accade per alcuni valori assunti dalle funzioni di transizione degli spazi considerati. Quindi i valori in tabella rappresentano la seconda lunghezza critica numerica, cioè l'ampiezza che è consigliabile non superare per ottenere risultati attendibili nel momento in cui si lavora su H_2^α e H_3^α al calcolatore.

4.1.4 Spazi misti iperbolici-trigonometrici

Presentiamo due famiglie di spazi misti iperbolici e trigonometrici di dimensione 5, $\{\Phi^{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+}$ e $\{\Psi^{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+}$, con

$$\Phi^{\alpha,\beta} = \text{span}\{1, \cosh(\alpha t), \sinh(\alpha t), \cos(\beta t), \sin(\beta t)\},$$

$$\Psi^{\alpha,\beta} = \text{span}\{1, \cosh(\alpha t) \cos(\beta t), \cosh(\alpha t) \sin(\beta t), \sinh(\alpha t) \cos(\beta t), \sinh(\alpha t) \sin(\beta t)\}.$$

La peculiarità di questi spazi sta nel fatto che, al variare dei parametri, gli effetti grafici prodotti dalle componenti iperboliche e da quelle trigonometriche sono complementari: mentre le prime danno un effetto di tensione, le seconde producono una sorta di rilassamento [1](figura (4.4)).

Gli spazi $\Phi^{\alpha,\beta}$

Per questa famiglia di spazi si hanno risultati noti dalla letteratura [1]; più precisamente si ha che la seconda lunghezza critica di $\Phi^{\alpha,\beta}$ è la soluzione (unica) dell'equazione:

$$(\beta^2 - \alpha^2) \sinh(\alpha x) \sin(\beta x) = 2\alpha\beta(1 - \cosh(\alpha x) \cos(\beta x)), \quad x \in \left] \frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta} \right[. \quad (4.1)$$

Riportiamo in tabella i dati ricavati con l'algoritmo di bisezione e i valori teorici a confronto:

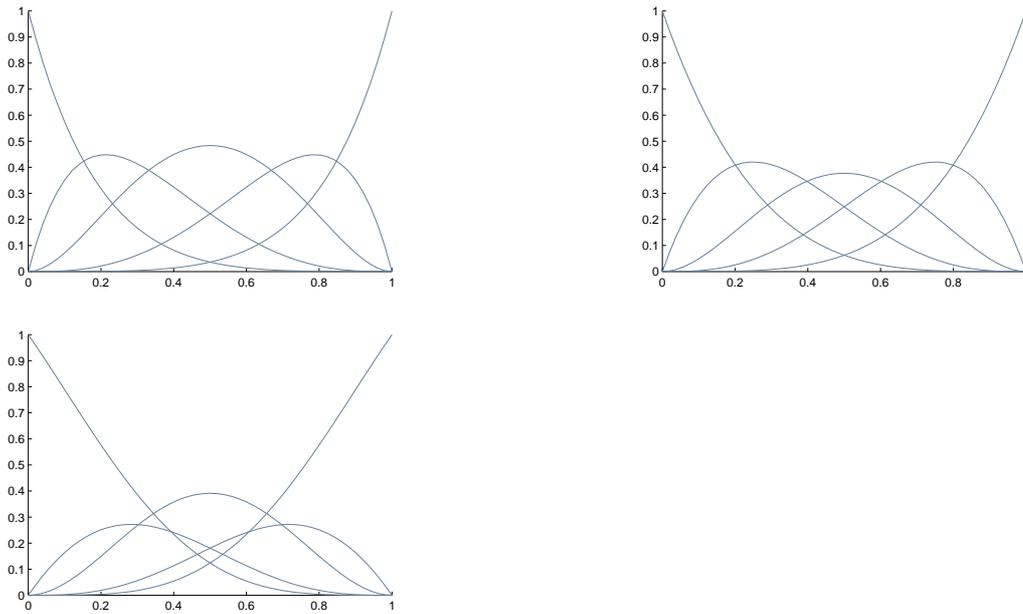


Figura 4.4: B -base normalizzata dello spazio $\Psi^{\alpha,\beta}$: $\alpha = 3.5$, $\beta = 0.5$ (in alto a sinistra); $\alpha = \beta = 1$ (in alto a destra); $\alpha = 0.5$, $\beta = 3.5$ (in basso a sinistra).

Spazio misto $\Phi^{\alpha,\beta}$	Seconda lunghezza critica sperimentale	Seconda lunghezza critica teorica
$\beta = 1, \alpha = 0.50$	5.456401	5.456401
$\alpha = 0.75$	5.039726	5.039726
$\alpha = 1.00$	4.730041	4.730041
$\alpha = 1.25$	4.498134	4.498134
$\alpha = 1.50$	4.320429	4.320429
$\alpha = 1.75$	4.181030	4.181030
$\alpha = 2.00$	4.069355	4.069355
$\alpha = 2.25$	3.978234	3.978234
$\alpha = 2.50$	3.902685	3.902685
$\alpha = 1, \beta = 0.50$	8.138710	8.138710
$\beta = 0.75$	5.911730	5.911730
$\beta = 1.00$	4.730041	4.730041
$\beta = 1.25$	3.976121	3.976121
$\beta = 1.50$	3.443620	3.443620
$\beta = 1.75$	3.042909	3.042909
$\beta = 2.00$	2.728200	2.728200
$\beta = 2.25$	2.473358	2.473358
$\beta = 2.50$	2.262208	2.262208

Per alleggerire la lettura abbiamo fornito solo le prime sei cifre decimali, in realtà i dati combaciano fino alla decima.

Presentiamo anche i grafici dell'andamento della seconda lunghezza critica al variare dei parametri α e β , in figura (4.5) e (4.6). Si noti la dipendenza continua della seconda lunghezza critica rispetto ad α e β . La discrepanza tra le super-

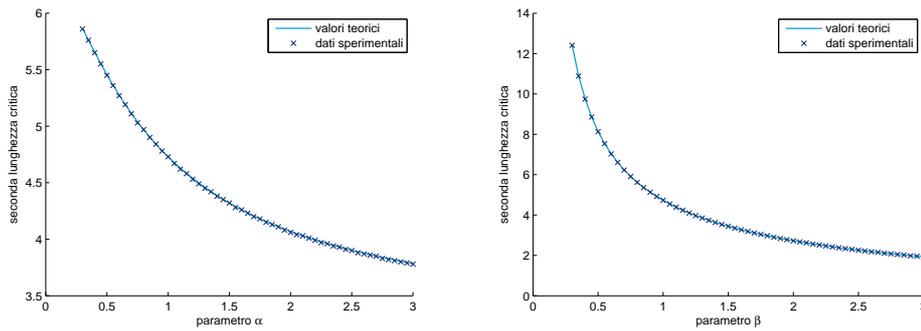


Figura 4.5: Andamento della seconda lunghezza critica di $\Phi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β ; a sinistra $\beta = 1$ fissato, a destra $\alpha = 1$ fissato.

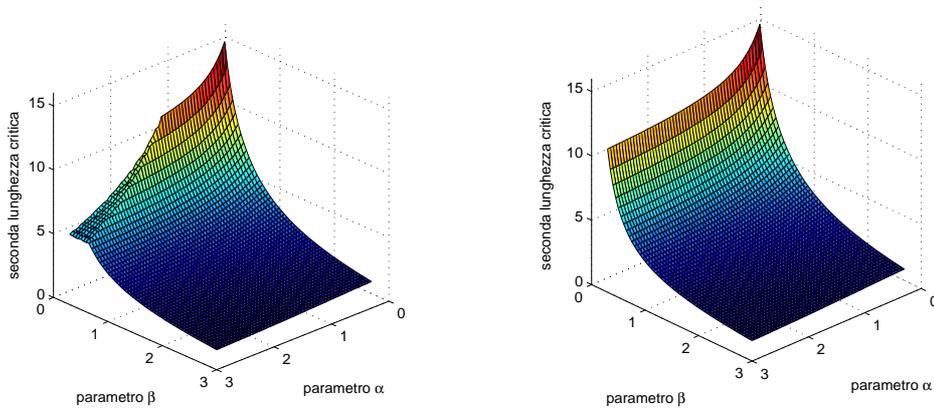


Figura 4.6: Andamento della seconda lunghezza critica di $\Phi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β : a sinistra i dati sperimentali, a destra i valori teorici.

fici in figura (4.6) è dovuta allo stesso problema riscontrato nel caso degli spazi iperbolici: i parametri α e β sono un indice del peso relativo delle due componenti dello spazio, quella iperbolica e quella trigonometrica rispettivamente. Al diminuire di β e all'aumentare di α il peso relativo delle funzioni iperboliche è maggiore ed emergono i problemi numerici spiegati in precedenza. Quindi anche in questo caso l'algoritmo non rileva la lunghezza critica teorica, ma valori di interesse numerico.

Gli spazi $\Psi^{\alpha,\beta}$

Come nel caso precedente anche per questa famiglia di spazi sono noti risultati teorici [1] che forniscono la seconda lunghezza critica di $\Psi^{\alpha,\beta}$ come soluzione di un'equazione:

$$\beta \tanh(\alpha x) = \alpha \tan(\beta x), \quad x \in \left] \frac{\pi}{\beta}, \frac{3\pi}{2\beta} \right[. \quad (4.2)$$

Anche in questo caso i dati ricavati sperimentalmente sono coerenti con i valori teorici, come riportato nella seguente tabella e in figura (4.7); tuttavia, al diminuire del rapporto β/α si osserva una discrepanza (figura (4.8)).

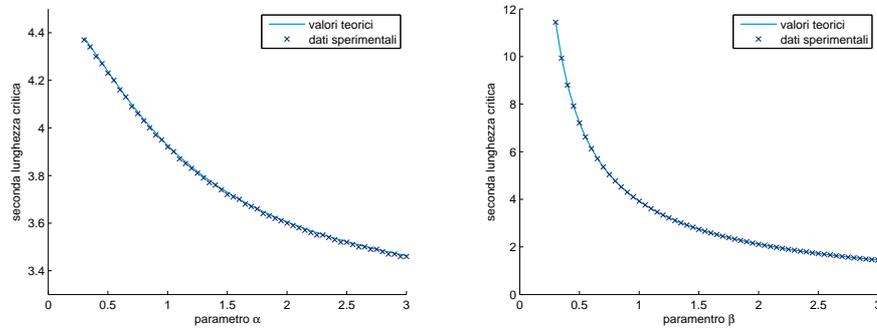


Figura 4.7: Andamento della seconda lunghezza critica di $\Psi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β ; a sinistra $\beta = 1$ fissato, a destra $\alpha = 1$ fissato.

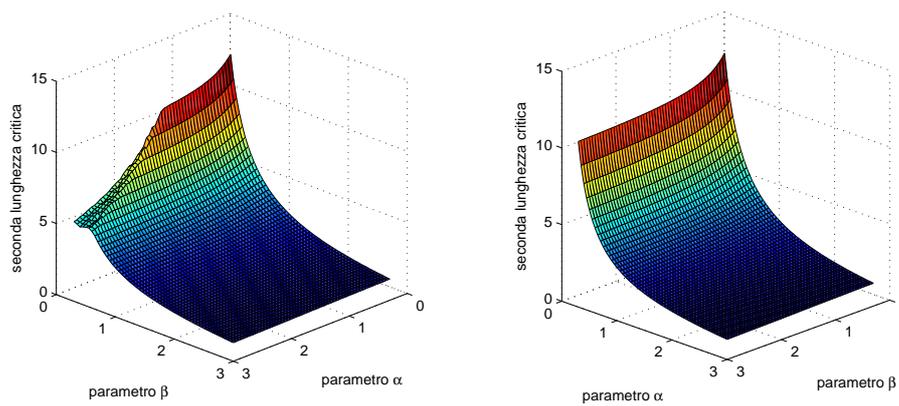


Figura 4.8: Andamento della seconda lunghezza critica di $\Psi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β : a sinistra i dati sperimentali, a destra i valori teorici.

Spazio misto $\Psi^{\alpha,\beta}$		Seconda lunghezza critica sperimentale	Seconda lunghezza critica teorica
$\beta = 1,$	$\alpha = 0.50$	4.237081	4.237081
	$\alpha = 0.75$	4.066734	4.066734
	$\alpha = 1.00$	3.926602	3.926602
	$\alpha = 1.25$	3.816263	3.816263
	$\alpha = 1.50$	3.729582	3.729582
	$\alpha = 1.75$	3.660736	3.660736
	$\alpha = 2.00$	3.605240	3.605240
	$\alpha = 2.25$	3.559817	3.559817
	$\alpha = 2.50$	3.522099	3.522099
$\alpha = 1,$	$\beta = 0.50$	7.210480	7.210480
	$\beta = 0.75$	5.046739	5.046739
	$\beta = 1.00$	3.926602	3.926602
	$\beta = 1.25$	3.228894	3.228894
	$\beta = 1.50$	2.747057	2.747057
	$\beta = 1.75$	2.392004	2.392004
	$\beta = 2.00$	2.118541	2.118541
	$\beta = 2.25$	1.901042	1.901042
	$\beta = 2.50$	1.723768	1.723768

4.2 Esempi di curve di Bézier su Γ_3

In quest'ultima sezione verranno forniti alcuni esempi di curve di Bézier generalizzate, per la riproduzione della cicloide e dell'elica, e sarà fatto un confronto con le curve di Bézier (classiche) polinomiali (per approfondire vedere [5][7][8][11]). Consideriamo lo spazio Γ_3 ; abbiamo visto che è spazio EC sull'intervallo $[0, \alpha]$, α fissato in $]0, 2\pi[$.

Presentiamo esplicitamente il procedimento per ricavare la B-base normalizzata a partire dalle funzioni di transizione.

$\Gamma_3 = \text{span}\{1, t, \cos(t), \sin(t)\}$; poiché contiene costanti porremo $f_{0,3} \equiv 1$. Per determinare $f_{1,3}$, $f_{2,3}$ e $f_{3,3}$ impostiamo i problemi di interpolazione alla Hermite come in (3.16).

Scriviamo $f_{i,3}$, $i = 1, 2, 3$ rispetto alla base $(1, t, \cos(t), \sin(t))$:

$$f_{i,3} = c_{i,0} + c_{i,1}t + c_{i,2} \cos(t) + c_{i,3} \sin(t); \quad (4.3)$$

e imponiamo le condizioni (3.16) in 0 e α . Otteniamo i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} f_{1,3}(0) = 0 \\ f_{1,3}(\alpha) = 1 \\ f'_{1,3}(\alpha) = 0 \\ f''_{1,3}(\alpha) = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} 0 = c_{1,0} + c_{1,2} \\ 1 = c_{1,0} + \alpha c_{1,1} + C c_{1,2} + S c_{1,3} \\ 0 = c_{1,1} - S c_{1,2} + C c_{1,3} \\ 0 = -C c_{1,2} - S c_{1,3} \end{cases}$$

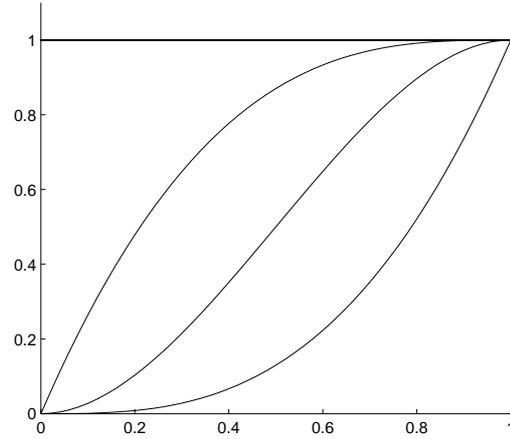


Figura 4.9: Funzioni di transizione per Γ_3 su $[0, \frac{3}{4}\pi]$.

$$\begin{cases} f_{2,3}(0) = 0 \\ f'_{2,3}(0) = 0 \\ f_{2,3}(\alpha) = 1 \\ f'_{2,3}(\alpha) = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} 0 = c_{2,0} + c_{2,2} \\ 0 = c_{2,1} + c_{2,3} \\ 1 = c_{2,0} + \alpha c_{2,1} + C c_{2,2} + S c_{2,3} \\ 0 = c_{2,1} - S c_{2,2} + C c_{2,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{3,3}(0) = 0 \\ f'_{3,3}(0) = 0 \\ f''_{3,3}(0) = 0 \\ f_{3,3}(\alpha) = 1 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} 0 = c_{3,0} + c_{3,2} \\ 0 = c_{3,1} + c_{3,3} \\ 0 = -c_{3,2} \\ 1 = c_{3,0} + \alpha c_{3,1} + C c_{3,2} + S c_{3,3} \end{cases}$$

dove abbiamo posto $C = \cos(\alpha)$, e $S = \sin(\alpha)$; se $\alpha \neq \pi$, si ricavano le espressioni:

$$\begin{aligned} f_{1,3}(t) &= -\frac{S}{\alpha - S} + \frac{1}{\alpha - S}t + \frac{S}{\alpha - S} \cos(t) - \frac{C}{\alpha - S} \sin(t), \\ f_{2,3}(t) &= \frac{1 - C}{2(1 - C) - \alpha S} - \frac{S}{2(1 - C) - \alpha S}t - \frac{1 - C}{2(1 - C) - \alpha S} \cos(t) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{S}{2(1 - C) - \alpha S} \sin(t), \\ f_{3,3}(t) &= \frac{1}{\alpha - S}t - \frac{1}{\alpha - S} \sin(t). \end{aligned}$$

Si verifica che queste funzioni sono strettamente crescenti, come si può vedere anche dai loro grafici in figura 4.9. Allora dal teorema 3.5 sappiamo che le funzioni ricavate per differenza dalle funzioni di transizione costituiscono la B-base

normalizzata di Γ_3 (riportiamo solo il risultato finale):

$$\begin{aligned}
u_{0,3}(t) &= f_{0,3}(t) - f_{1,3}(t) = \\
&= \frac{\alpha}{\alpha - S} - \frac{1}{\alpha - S}t - \frac{S}{\alpha - S} \cos(t) + \frac{C}{\alpha - S} \sin(t), \\
u_{1,3}(t) &= f_{1,3}(t) - f_{2,3}(t) = \\
&= \frac{-(\alpha - K)M}{\alpha - S} + \frac{M}{\alpha - S} + \frac{(\alpha - K)M}{\alpha - S} \cos(t) + \frac{1 - C - M}{\alpha - S} \sin(t), \\
u_{2,3}(t) &= f_{2,3}(t) - f_{3,3}(t) = \\
&= \frac{KM}{\alpha - S} - \frac{M}{\alpha - S} - \frac{KM}{\alpha - S} \cos(t) + \frac{M}{\alpha - S} \sin(t), \\
u_{2,3}(t) &= f_{3,3}(t) = \\
&= \frac{1}{\alpha - S}t - \frac{1}{\alpha - S} \sin(t).
\end{aligned}$$

dove $K := \frac{\alpha - S}{1 - C}$, $M := \frac{S(1 - C)}{2S - \alpha - \alpha C}$.

La B-base normalizzata si trova anche per $\alpha = \pi$, in tal caso:

$$\begin{aligned}
u_{0,3}(t) &= \frac{\pi - 1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin(t), \\
u_{1,3}(t) &= \frac{2 - \pi}{2\pi} + \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{\pi} \sin(t), \\
u_{2,3}(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}t - \frac{1}{2} \cos(t) + \frac{1}{\pi} \sin(t), \\
u_{3,3}(t) &= \frac{1}{\pi}t - \frac{1}{\pi} \sin(t).
\end{aligned}$$

4.2.1 La cicloide come curva di Bézier nel piano

La forma parametrica della cicloide è data da:

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

e queste sono funzioni appartenenti a Γ_3 . In figura (4.10) sono riportate le curve di Bézier in \mathbb{P}_3 e Γ_3 , i cui punti di controllo sono stati determinati attraverso una interpolazione alla Lagrange sulle due componenti, x e y , partendo da una campionamento dei valori reali delle coordinate della cicloide, per $t \in [0, \frac{3}{4}\pi]$.

In figura (4.11) sono riportati i grafici degli errori di approssimazione delle curve di Bézier nella riproduzione della curva esatta; l'errore è calcolato secondo la norma euclidea di \mathbb{R}^2 . Si osservi che, in Γ_3 , esso è dell'ordine di 10^{-16} , cioè dell'ordine della precisione di macchina, quindi si può assumere che la curva sia riprodotta in modo esatto, mentre l'errore relativo al caso polinomiale è molto più elevato.

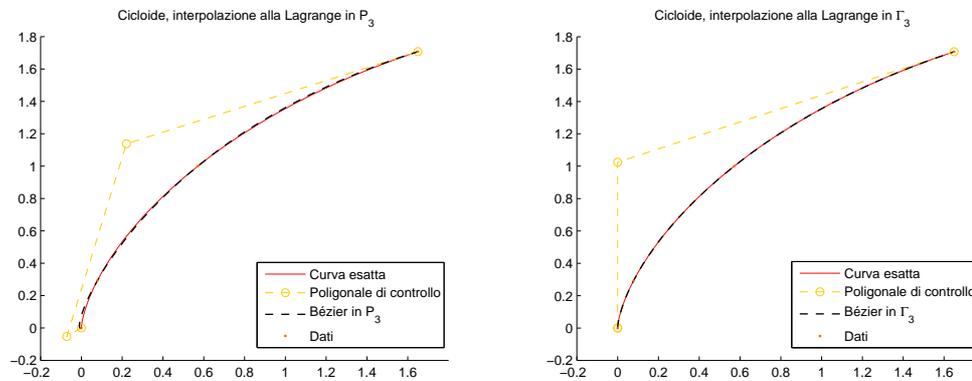


Figura 4.10: Ramo di cicloide: curve di Bézier polinomiale e trigonometrica a confronto.

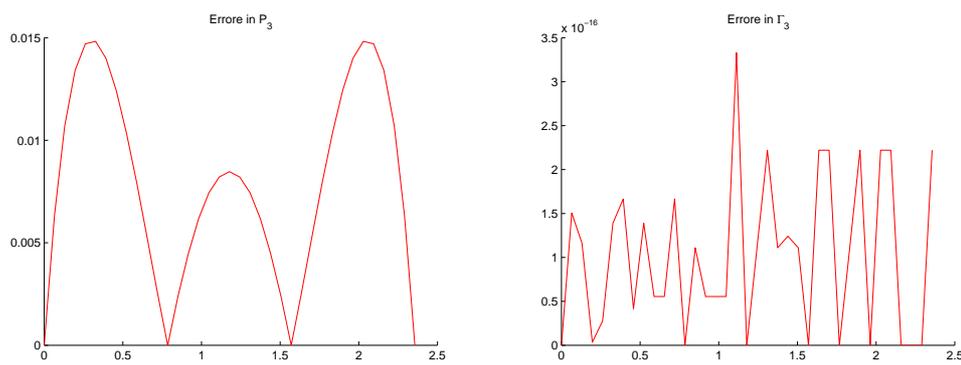


Figura 4.11: Errore di approssimazione delle curve di Bézier in figura (4.10)

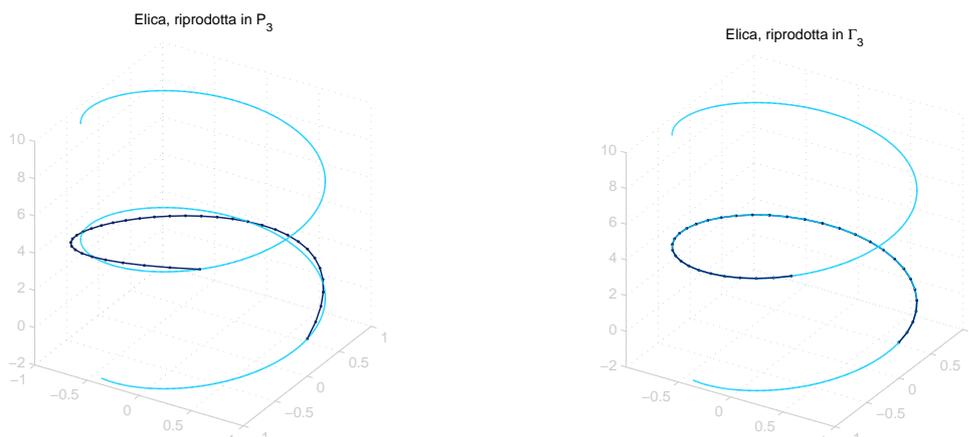


Figura 4.12: *Elica: curve di Bézier polinomiale e trigonometrica a confronto.*

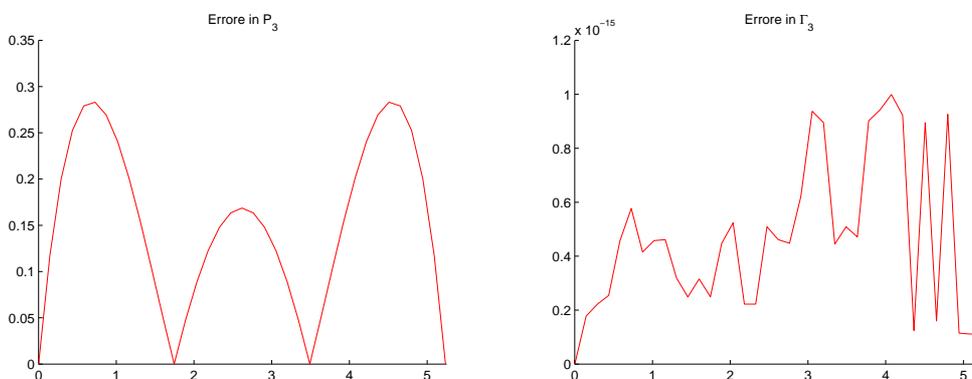


Figura 4.13: *Errore di approssimazione delle curve di Bézier in figura (4.12)*

4.2.2 L'elica come curva di Bézier nello spazio

Come per la cicloide presentiamo la parametrizzazione di un'elica, stavolta in \mathbb{R}^3 , e le curve di Bézier in \mathbb{P}_3 e Γ_3 corrispondenti.

Forma parametrica:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

In figura (4.12) il tratto in blu rappresenta la curva di Bézier in \mathbb{P}_3 e Γ_3 , i cui punti di controllo, come per la cicloide, sono stati determinati attraverso una interpolazione alla Lagrange sulle componenti x , y e z , partendo da una campionamento dei valori reali delle coordinate dell'elica, per $t \in [0, \frac{5}{3}\pi]$.

La situazione per l'errore è la stessa del caso della cicloide, come è mostrato in figura (4.13).

Elenco delle figure

1.1	<i>Grafici della base di Bernstein di \mathbb{P}_2 e \mathbb{P}_5.</i>	7
1.2	<i>Numeri di condizione per la valutazione del polinomio $1 - t + t^2 - \dots + t^{10}$ in base monomiale ($C_P(p(t))$) e in base di Bernstein ($C_B(p(t))$) a confronto.</i>	9
1.3	<i>Esempi di curve piane di Bézier (a destra), in cui un punto di controllo è stato spostato, e relative basi di Bernstein (a sinistra) in \mathbb{P}_3 (sopra) e \mathbb{P}_6 (sotto).</i>	10
3.1	<i>Funzioni di transizione di \mathbb{P}_5.</i>	22
4.1	<i>Risultati sperimentali per Γ_4: funzioni di transizione (sinistra) e candidata B-base (destra).</i>	34
4.2	<i>Risultati sperimentali per H_2^1: funzioni di transizione (sinistra) e B-base normalizzata (destra).</i>	36
4.3	<i>Seconda lunghezza critica numerica per gli spazi iperbolici H_2^α (sinistra) e H_3^α (destra) al variare del parametro α.</i>	37
4.4	<i>B-base normalizzata dello spazio $\Psi^{\alpha,\beta}$: $\alpha = 3.5, \beta = 0.5$ (in alto a sinistra); $\alpha = \beta = 1$ (in alto a destra); $\alpha = 0.5, \beta = 3.5$ (in basso a sinistra).</i>	38
4.5	<i>Andamento della seconda lunghezza critica di $\Phi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β; a sinistra $\beta = 1$ fissato, a destra $\alpha = 1$ fissato.</i>	39
4.6	<i>Andamento della seconda lunghezza critica di $\Phi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β: a sinistra i dati sperimentali, a destra i valori teorici.</i>	39
4.7	<i>Andamento della seconda lunghezza critica di $\Psi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β; a sinistra $\beta = 1$ fissato, a destra $\alpha = 1$ fissato.</i>	40
4.8	<i>Andamento della seconda lunghezza critica di $\Psi^{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri α e β: a sinistra i dati sperimentali, a destra i valori teorici.</i>	40
4.9	<i>Funzioni di transizione per Γ_3 su $[0, \frac{3}{4}\pi]$.</i>	42
4.10	<i>Ramo di cicloide: curve di Bézier polinomiale e trigonometrica a confronto.</i>	44
4.11	<i>Errore di approssimazione delle curve di Bézier in figura (4.10)</i>	44
4.12	<i>Elica: curve di Bézier polinomiale e trigonometrica a confronto.</i>	45
4.13	<i>Errore di approssimazione delle curve di Bézier in figura (4.12)</i>	45

Bibliografía

- [1] M. Brilleaud, M. L. Mazure (2012), Mixed hiperbolic/trigonometric spaces for design, *Computers and Mathematics with Applications* **64**, 2459-2477.
- [2] R. T. Farouki (2012), The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective, *Computer Aided Geometric Design*, **29(6)**, 379-419.
- [3] R. T. Farouki, T. N. T. Goodman (1996), On the optimal stability of the Bernstein basis, *Mathematics of Computation* **65**, 1553-1566.
- [4] R. T. Farouki, V. T. Rajan (1987), On the numerical condition of polynomials in Bernstein form, *Computer Aided Geometric Design* **4**, 191-216.
- [5] Q. Chen, G. Wang (2003), A class of Bézier-like curves, *Computer Aided Geometric Design* **20**, 29-39.
- [6] E. Mainar, J. M. Peña (2010), Optimal bases for a class of mixed spaces and their associated spline spaces, *Computers and Mathematics with Applications* **59**, 1509-1523.
- [7] E. Mainar, J. M. Peña, J. Sánchez-Reyes (2001), Shape preserving alternatives to the rational Bézier model, *Computer Aided Geometric Design*, **18**, 37-60.
- [8] M.L. Mazure (2011), Finding all systems of weight functions associated with a given extended Chebyshev space, *Journal of Approximation Theory*, **163**, 363-376.
- [9] M.L. Mazure (2013), Polynomial spaces revisited via weight functions, *Jaén Journal on Approximation*.
- [10] C. Rabut (2002), On Pierre Bézier's life and motivations, *Computer-Aided Design* **34**, 493-510.
- [11] J. Zhangh (1996), C-curves: An extension of cubic curves, *Computer Aided Geometric Design* **13**, 199-217.